



東北大學

生物医学工程专业 实验报告

实验课程：_____ 数字信号处理 _____

班级：_____ 1502 _____ 姓名：_____ 尚麟静 _____

学号：_____ 20155467 _____ 同组人：_____

指导教师：_____ 徐礼胜 _____

实验成绩（教师签字）：_____

中荷学院教学实验中心制

实验一 离散时间信号的产生与运算

一、 实验目的

- (1) 了解离散时间信号的特点。
- (2) 掌握离散时间信号表示与基本运算方法。
- (3) 掌握信号的分解和用单位脉冲信号表示的方法。

二、 实验原理

信号是随时间变化的物理量。离散信号是只在某些不连续的时间上有信号值，而在其它时间点上没有定义的一类信号。离散信号一般可以利用模数转换由连续信号来得到。计算机所能处理的只是离散信号。

常用的离散信号有正弦信号序列、单位阶跃序列、单位门序列、单位冲激信号、单位斜坡序列、单位衰减指数序列、随机序列等。

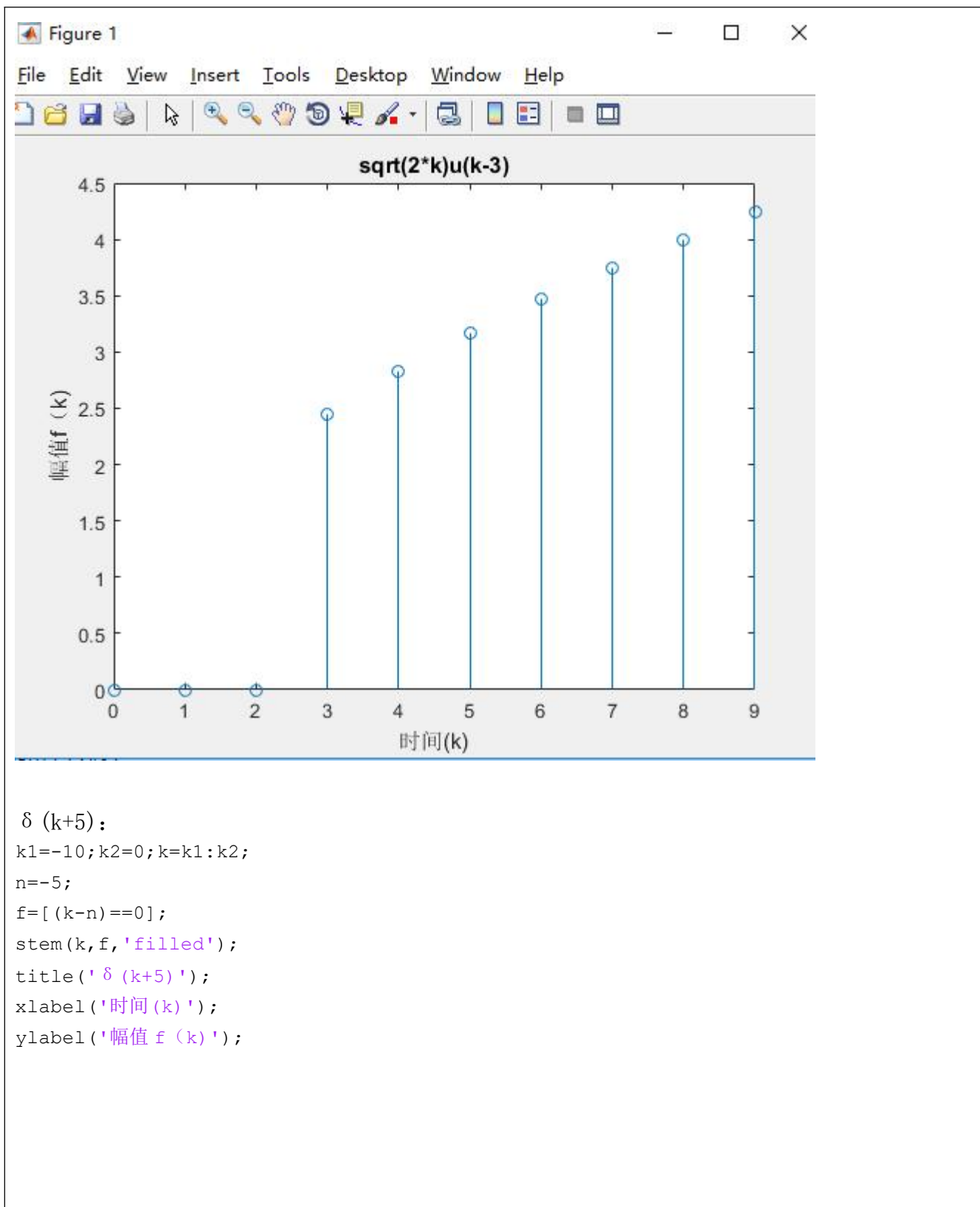
离散信号的基本运算包括信号的加、减、乘、除。离散信号的时域变换包括信号的平移、反转、尺度变换等。

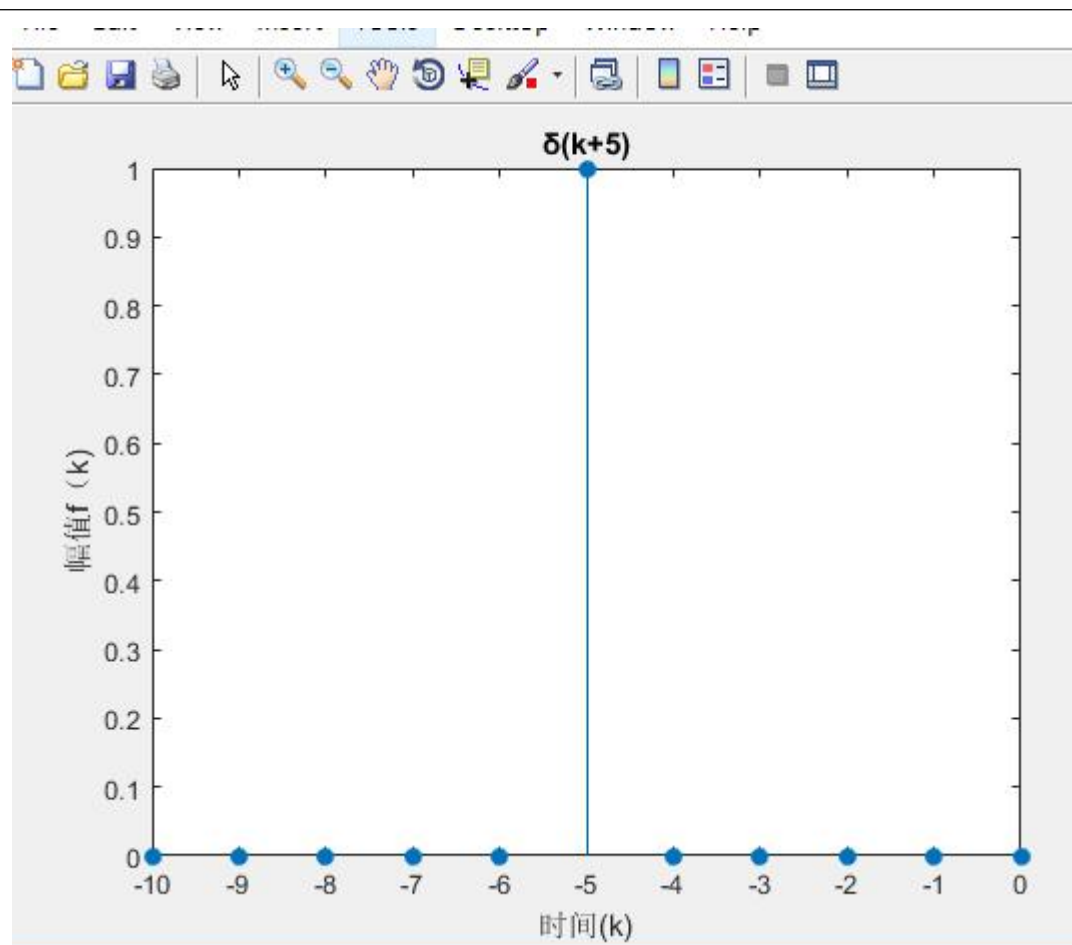
离散卷积积分是一种特殊的函数运算，是信号与系统分析的基本手段，用于求解系统的零状态响应。离散卷积积分的基础是信号的分解，即信号分解为单位脉冲信号的线性组合。

三、 程序设计实验

- (1) 编制程序，生成如下数字信号： $\sqrt{2k}u(k-3)$ ， $\delta(k+5)$ 。

```
sqrt(2*k)u(k-3):  
k1=0;k2=10;k=k1:k2-1;  
n=3;  
u=(k-n)>=0;  
a=sqrt(2*k);  
stem(k,a.*u);  
title('sqrt(2*k)u(k-3)');  
xlabel('时间(k)');  
ylabel('幅值 f(k)');
```

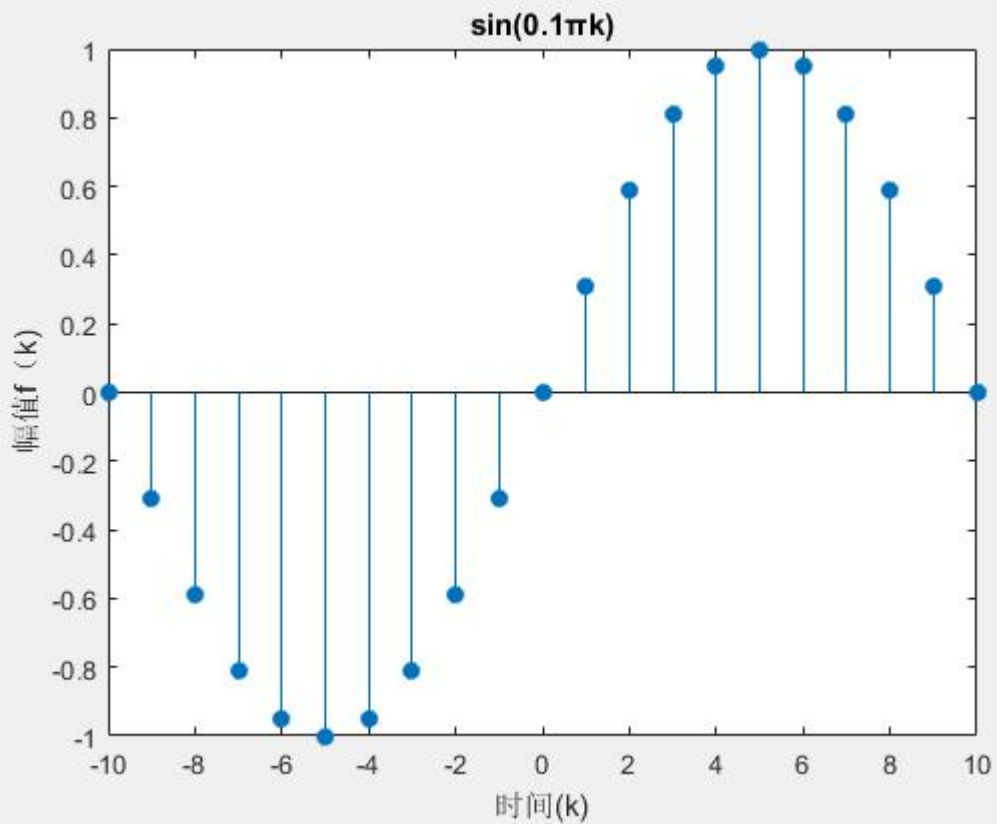




$f(k)=\sin(0.1 \pi k)$ ，设计一个程序，完成信号 $f(k)$ 到 $f(2k+2)$ 的转化。

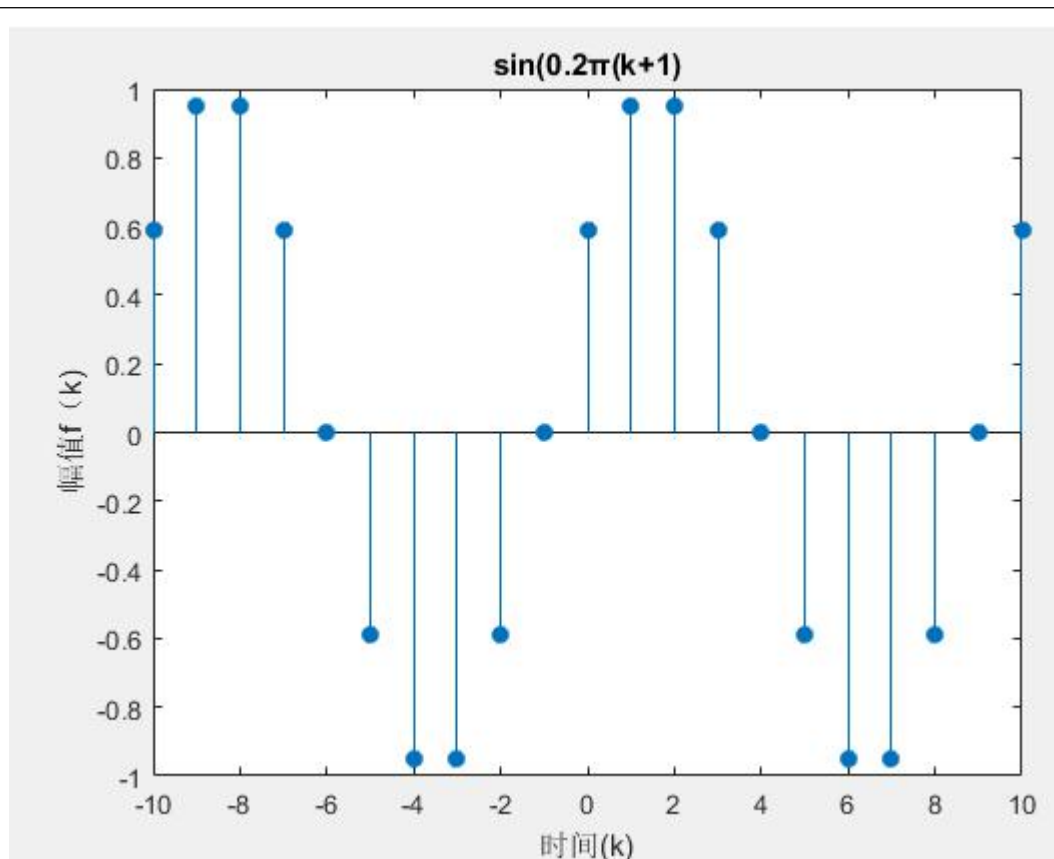
$f(k)$:

```
k1=-10;k2=10;k=k1:k2;
f=sin(0.1*pi*k);
stem(k,f,'filled');
title('sin(0.1*pi*k)');
xlabel('时间(k)');
ylabel('幅值 f(k)');
```



f

```
f(2k):
k1=-10;k2=10;k=k1:k2;
d=k+1;
f=sin(0.2*pi*d);
stem(k,f,'filled');
title('sin(0.2 π (k+1) ');
xlabel('时间(k) ');
ylabel('幅值 f (k) ');
```



(3) 若 $f_1(k) = \delta(k)$, $f_2(k) = u(k)$, $f_3(k) = u(k) + u(k-4)$, 证明卷积满足:

$$f_1(k) * [f_2(k) + f_3(k)] = f_1(k) * f_2(k) + f_1(k) * f_3(k)$$

$k_1 = -10; k_2 = 10; k = k_1:k_2;$

$n_0 = 0; n_1 = 4;$

$f_1 = [(k - n_0) == 0];$

$f_2 = [(k - n_0) >= 0];$

$f_0 = [(k - n_1) >= 0];$

$f_3 = f_0 + f_2;$

$f_5 = \text{conv}(\text{double}(f_1), \text{double}(f_3));$

$f_6 = \text{conv}(\text{double}(f_1), \text{double}(f_2)) + \text{conv}(\text{double}(f_1), \text{double}(f_3));$

$\text{subplot}(2,1,1); \text{stem}(f_5, 'filled');$

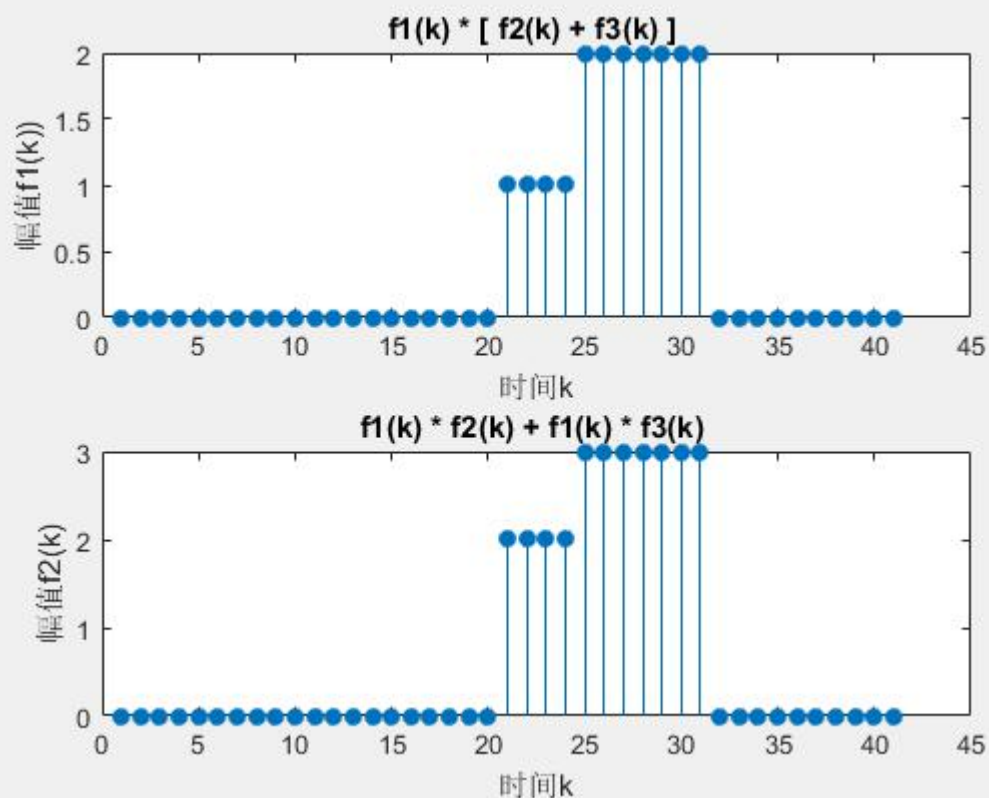
$\text{title}('f_1(k) * [f_2(k) + f_3(k)]');$

$\text{xlabel}('时间 k'); \text{ylabel}('幅值 f_1(k)');$

$\text{subplot}(2,1,2); \text{stem}(f_6, 'filled');$

$\text{title}('f_1(k) * f_2(k) + f_1(k) * f_3(k)');$

$\text{xlabel}('时间 k'); \text{ylabel}('幅值 f_2(k)');$



四、 思考题

(1) 冲激序列信号与阶跃序列信号各有什么特性？

答：单位脉冲序列只在 $n=0$ 处有单位值 1，其余皆为 0.单位阶跃序列在 $n \geq 0$ 时，取单位值 1，在 $n < 0$ 时，取值皆为 0.

冲激序列和阶跃序列关系？

答： n 个冲激序列（每个冲激序列都是 1 个单位）的集合就是阶跃序列， $u(n)$ 和单位采样之间的关系如下列公式所示：

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$u(n) = \sum_{k=0}^n \delta(k)$$

简述利用图解法进行卷积运算的步骤。

答：

步骤 1 将 $x(n)$ ， $h(n)$ 的时间 n 都换成 k

步骤 2 将 $h(n)$ 翻转得 $h(-n)$ (当然也可将 $x(n)$ 翻转)

步骤 3 n 等于 $x(k)$ 左边最边界值时，将 $x(k)$ 和 $h(-k)$ 对应相乘， $k = -\infty$ 至 $+\infty$ ，将重合部分相乘，相加。

步骤 4 不断移动 $h(-k)$ ，可得到不同的 $h(n-k)$ ，重复步骤三。

实验二 离散 LTI 系统的时域分析

一、 实验目的

- (1) 要掌握离散时间系统在 matlab 中的分析方法。
- (2) 线性时不变系统的性质及时域描述方法。
- (3) 系统因果性和稳定性的时域判定方法。

二、 实验原理

1. 离散系统的时域分析

离散时间系统的时域分析与连续时间系统的时域分析方法相同，只是描述系统使用的数学工具不同，可以采用与连续系统对比的方法学习。

线性时不变离散时间系统的数学模型为 n 阶常系统差分方程。已知激励信号和系统的初始状态，可以采用迭代法或直接求解差分方程的经典法得到系统的输出响应，这两种方法都不作为时域分析的重点。课程中重点研究仅由系统初始状

出响应，这两种方法都不作为时域分析的重点。课程中重点研究仅由系统初始状态产生的零输入响应和仅由激励信号产生的零状态响应。对于零输入响应，激励信号为零，且描述系统的差分方程为齐次方程，求解齐次方程即可得到零输入响应。

2. 零状态响应的求解

零状态响应的求解是以激励信号的时域分解和系统的时不变特性为前提展开的。单位脉冲信号作用在系统上的零状态响应称为单位脉冲响应。如果已知单位脉冲响应序列作用在系统的响应，利用卷积和即可求得任意信号作用在离散 LTI 系统上的零状态响应。可见系统的单位脉冲响应的求解和卷积和的计算是求解零状态响应的关键。

3. 离散卷积

离散卷积可以表示为：

$$f_1(k) * f_2(k) =, \text{ 其中 } -\infty < k < \infty \quad 12 - f_m f_k m$$

因此也称作卷积和。

四、 程序设计实验

要求写出下列各实验内容的完整程序。

已知离散 LTI 系统，激励 $f(k)=3k\epsilon(k)$ ，单位序列响应 $h(k)=2k\epsilon(k)$ ，试画出该系统的零状态响应 $yf(k)$ 在有限区间的波形。（有限区间自行设定）

MATLAB 代码：

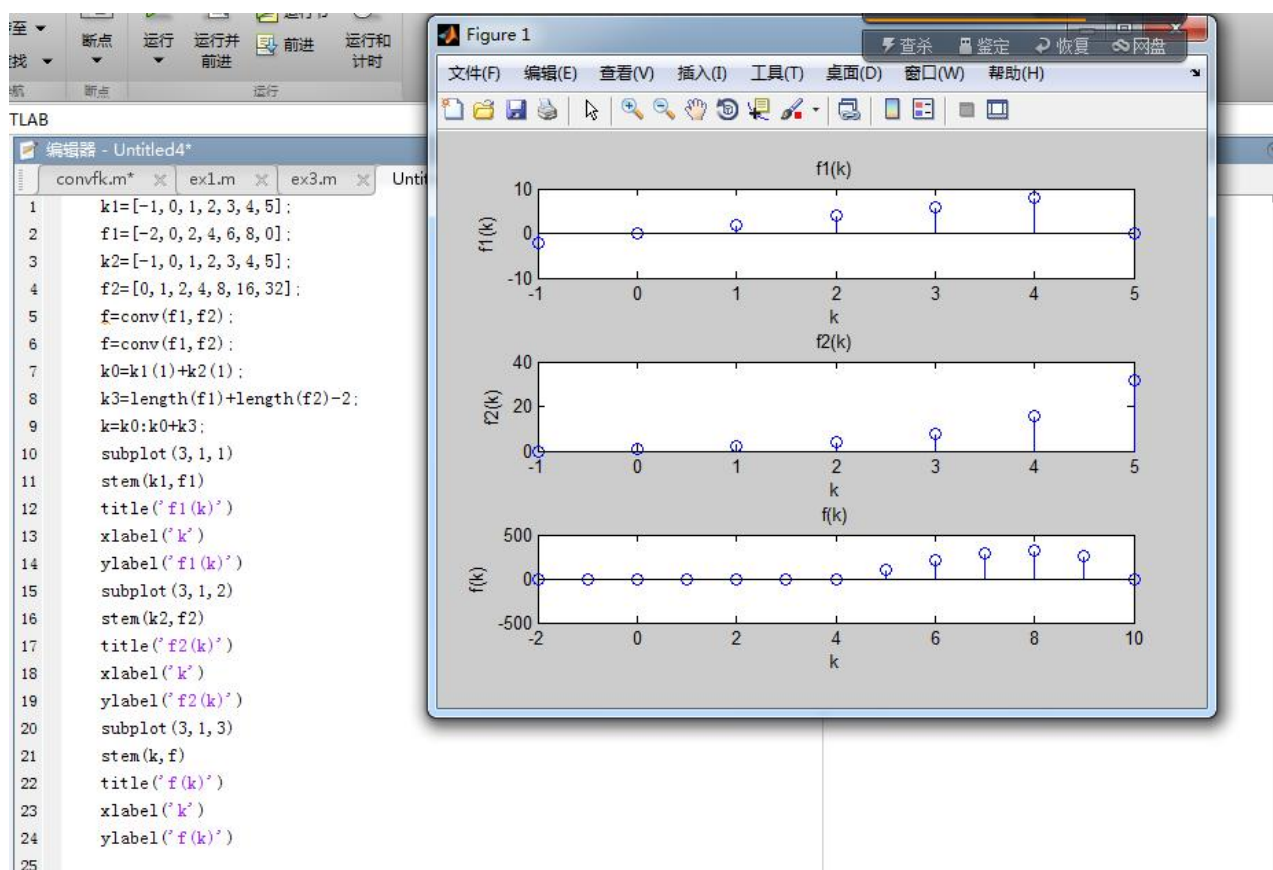
```
k1=[-1,0,1,2,3,4,5];  
f1=[-2,0,2,4,6,8,0];  
k2=[-1,0,1,2,3,4,5];  
f2=[0,1,2,4,8,16,32];  
f=conv(f1,f2);
```



```

f=conv(f1,f2);
k0=k1(1)+k2(1);
k3=length(f1)+length(f2)-2;
k=k0:k0+k3;
subplot(3,1,1)
stem(k1,f1)
title('f1(k)')
xlabel('k')
ylabel('f1(k)')
subplot(3,1,2)
stem(k2,f2)
title('f2(k)')
xlabel('k')
ylabel('f2(k)')
subplot(3,1,3)
stem(k,f)
title('f(k)')
xlabel('k')
ylabel('f(k)')

```



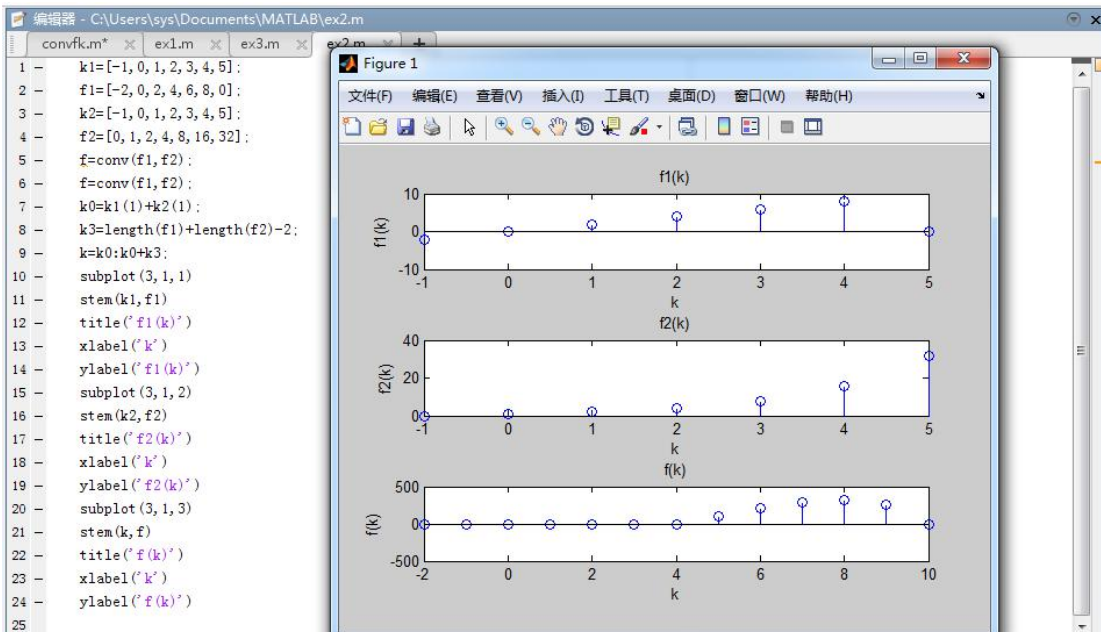
(2) 已知离散序列

$$f_1(k) = \begin{cases} 2k & -1 \leq k \leq 40 \\ 0 & \text{others} \end{cases} \quad f_2(k) = \begin{cases} 2k & 0 \leq k \leq 50 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

试画出两序列的卷积和波形。

MATLAB 代码:

```
k1=[-1,0,1,2,3,4,5];
f1=[-2,0,2,4,6,8,0];
k2=[-1,0,1,2,3,4,5];
f2=[0,1,2,4,8,16,32];
f=conv(f1,f2);
f=conv(f1,f2);
k0=k1(1)+k2(1);
k3=length(f1)+length(f2)-2;
k=k0:k0+k3;
subplot(3,1,1)
stem(k1,f1)
title('f1(k)')
xlabel('k')
ylabel('f1(k)')
subplot(3,1,2)
stem(k2,f2)
title('f2(k)')
xlabel('k')
ylabel('f2(k)')
subplot(3,1,3)
stem(k,f)
title('f(k)')
xlabel('k')
ylabel('f(k)')
```



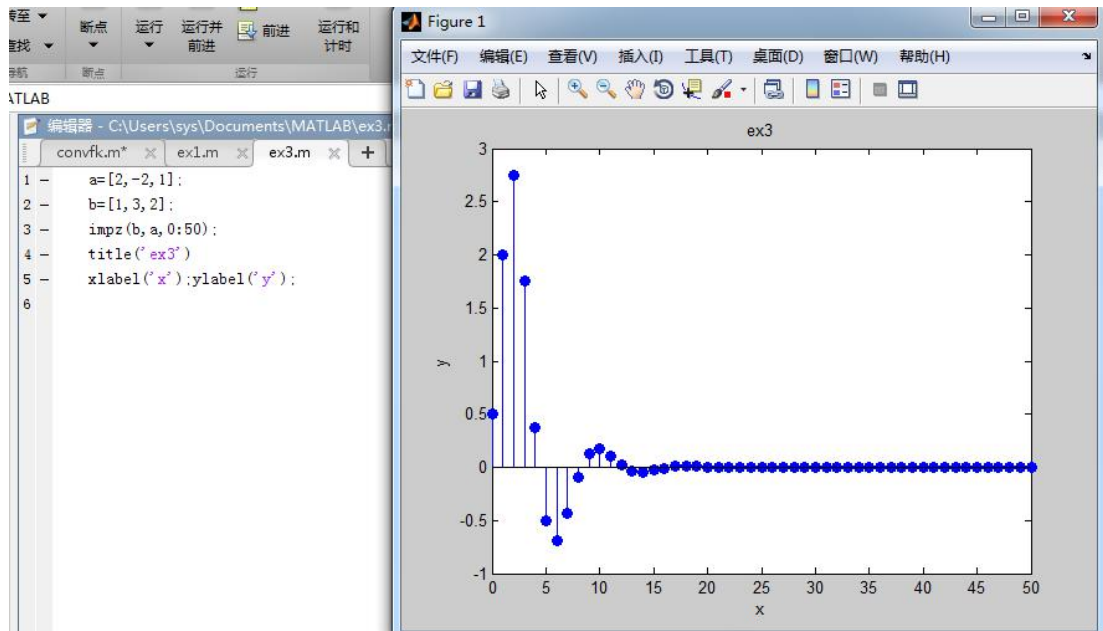
(3) 描述 LTI 离散系统的差分方程如下, 绘出该系统在 0~50 单位时间范围内单位序列响应的波形, 并求出其数值解。

$$2y(k) - 2y(k-1) + y(k-2) = f(k) + 3f(k-1) + 2f(k-2)。$$

```

a=[2,-2,1];
b=[1,3,2];
impz(b,a,0:50);
title('ex3')
xlabel('x');ylabel('y');

```



四、 思考题

离散系统的数学模型有哪些？

答：差分方程， $H(n)/H(z)/H(e^{j\omega})$,信号流图

为什么说系统的冲激响应 $h(k)$ 既可以认为是零状态响应，也可以认为是零输入响应？

答：因为冲激响应 $h(k)$ 能刻画和表征系统的固有特性，与何种激励无关，所以 $h(k)$ 既可以认为是零状态响应，也可以认为是零输入响应。

差分方程的特征根在什么条件下，自由响应会随 k 的增大而趋近于零。

答;存在共轭复根时。

实验三 离散傅里叶变换及性质

一、实验目的

- (1)通过本实验的练习，了解离散时间信号时域运算的基本实现方法。
- (2)了解相关函数的调用格式及作用。
- (3)通过本实验，掌握离散傅里叶变换的原理及编程思想。

二、实验原理

对于离散序列，存在着两种傅里叶变换——离散时间傅里叶变换(DTFT)和离散傅里叶变换(DFT)。DTFT 用以求出离散信号的连续频谱，它仅在时域上离散而在频域上是连续的；DFT 用以求出连续频谱上的离散样本点，所以其在时域和频域上都是离散的。对于一个离散序列 $x(n)$ ，它的离散时间傅里叶变换(DTFT) 的定义为：

$$X(j\omega) = F[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}, \quad -\infty \leq \omega \leq \infty$$

离散时间傅里叶变换

收敛的充分条件是 $x(n)$ 绝对可加，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

利用离散快速傅里叶变换函数计算傅里叶变换。MATLAB 提供了内部函数来快速地进行离散傅里叶变换(DFT)和逆变换(IDFT)的计算，如下所列。

fft(x), fft(x,N), ifft(x), ifft(x,N)

- (1) fft(x): 计算 L 点的 DFT，L 为序列 x 的长度，即 $L=\text{length}(x)$ 。
- (2) fft(x,N): 计算 N 点的 DFT。N 为指定采用的点数，当 $N>L$ ，则程序会自动给 x 后面补 $N-L$ 个零点；如果 $N<L$ ，则程序会自动截断 x，取前 N 个数据。
- (3) ifft(x): 计算 L 点的 IDFT，L 为序列 x 的长度，即 $L=\text{length}(x)$ 。
- (4) ifft(x,N): 计算 N 点的 IDFT。N 为指定采用的点数，当 $N>L$ ，则程序会自动给 x 后面补 $N-L$ 个零点；如果 $N<L$ ，则程序会自动截断 x，取前 N 个数据。

三、程序设计实验

已知序列 $x(n)=[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$ ， $h(n)=[1, 2, -3, -1, 0, 2, -2]$ 。试设计实验，观察这两个序列的 15 点循环卷积序列的幅值谱和相位谱。

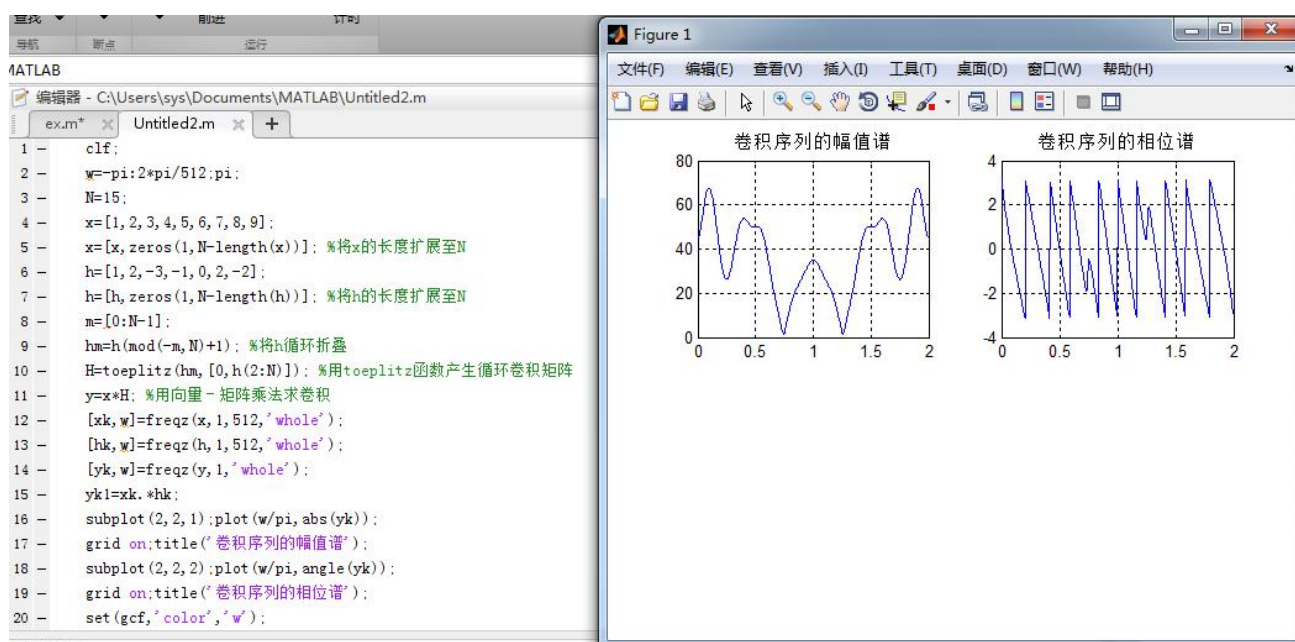
MATLAB 程序代码:

```
clf;
w=-pi:2*pi/512:pi;
N=15;
x=[1,2,3,4,5,6,7,8,9];
x=[x,zeros(1,N-length(x))];
h=[1,2,-3,-1,0,2,-2];
h=[h,zeros(1,N-length(h))];
```

```

m=[0:N-1];
hm=h(mod(-m,N)+1);
H=toeplitz(hm,[0,h(2:N)]);
y=x*H;
[xk,w]=freqz(x,1,512,'whole');
[hk,w]=freqz(h,1,512,'whole');
[yk,w]=freqz(y,1,'whole');
yk1=xk.*hk;
subplot(2,2,1);plot(w/pi,abs(yk));
grid on;title('卷积序列的幅值谱');
subplot(2,2,2);plot(w/pi,angle(yk));
grid on;title('卷积序列的相位谱');
set(gcf,'color','w');

```



七、思考题

(1) DFT 和 DTFT 有哪些不同以及有哪些关系？从前者如何求出后者或由后者如何求出前者？

答：DFT：时间和频率都离散，可在计算机中处理 DTFT：时间离散，频率连续

归纳 DFT 的主要特性，并与 DTFT 进行对比。

答：一个 N 点离散时间序列的傅里叶变换（DTFT）所的频谱是以 (2π) 为周期进行延拓的连续函数，由采样定理知道，时域进行采样，则频域周期延拓；同理，如果在频域进行采样，则时域也会周期延拓。离散傅里叶变换（DFT）就是基于这个理论，在频域进行采样，一个周期内采 N 个点（与序列点数 相同），从而将信号的频谱离散化，得到一重要的对应关系：一个 N 点的离散时间信号可以用频域内一个 N 点序列来唯一确定，这就是 DFT 表达式所揭示的内容。DTFT 是离散时间傅立叶变换，它用于离散非周期序列分析，根据连续傅立叶变换要求连续信号在时间上必须可积这一充分必要条件，那么对于离散时间傅立叶变换，用于它之上的离散序列也必须满足在时间轴上级数求和收敛的条件；由于信号是非周期序列，它必包含了各种频率的信号，所以 DTFT 对离散非周期信号变换后的频谱为连续的，即有时域离散非周期对应频域连续周期的特点。

实验四 FFT 频谱分析

一、实验目的

应用离散傅里叶变换的快速算法 FFT 分析信号的频谱。深刻理解应用 FFT 分析离散和连续信号的原理，掌握分析过程中出现的现象及解决方法。

二、实验原理

1. 离散周期信号频谱的分析

周期为 N 的离散信号(序列) $\tilde{x}(k)$ 的频谱函数 $\tilde{X}(m)$ 定义为：

$$\tilde{X}(m) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) W_N^{km}$$

式中： N 是序列的周期； k 为离散的时间变量； m 为离散的频率变量； $2\pi m / N$ 是次谐波的数字频率。

离散周期信号的频谱 $\tilde{X}(m)$ 也是周期为 N 的离散谱，谱线间隔为 $2\pi / N$ 。利用 MATLAB 提供的 `fft` 函数可以计算离散周期信号的频谱。对于离散周期序列，只需对周期序列上一个周期内的数值 $x(k)$ 进行 N 点的 FFT 运算，就可准确地得到其频谱在一个周期上的

N 个数值 $X(m)$ ，且有 $\tilde{X}(m) = X(m)$ ， $m \in [0, N-1]$ 。其分析步骤如下。

- (1) 确定离散周期序列 $\tilde{x}(k)$ 的基本周期为 N 。
- (2) 利用 `fft` 函数对序列 $\tilde{x}(k)$ 一个周期内进行 N 点 FFT 计算，得到 $X(m)$ 。
- (3) $\tilde{X}(m) = X(m)$ 。

2. 离散非周期信号频谱的分析

离散非周期信号 $x(k)$ 的频谱函数 $X(e^{j\Omega})$ 为: $X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-jk\Omega}$ 。

利用 MATLAB 提供的 `fft` 函数可以计算离散非周期信号的频谱。当序列长度有限时, 可以求得准确的序列频谱 $X(e^{j\Omega})$ 的样点值。若序列很长或无限长时, 则由于截短产生泄漏误差, 计算的结果只能是序列频谱 $X(e^{j\Omega})$ 样点值的近似。分析步骤如下。

- (1) 确定序列 $x(k)$ 的长度 M 及窗函数的类型。当序列为无限长时, 需要根据能量分布, 利用窗函数进行截短。
- (2) 确定做 FFT 的点数 N 。根据频域采样定理, 为使时域波形不产生混叠, 必须取 $N \geq M$ 。
- (3) 使用 `fft` 函数做 N 点 FFT 以计算 $X(m)$ 。

3. 连续周期信号频谱的分析

周期为 T_0 的连续时间信号 $\tilde{x}(t)$ 的频谱函数 $X(n\omega_0)$ 定义为:

$$X(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{x}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

式中: T_0 是信号的周期; $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$ 称为信号的基频(基波); $n\omega_0$ 称为信号的谐频。

连续周期信号的频谱 $X(n\omega_0)$ 是非周期离散谱, 谱线间隔为 ω_0 。连续周期信号的 DFT 分析方法增加了时域采样的环节。如果不满足采样定理的约束条件, 将会出现频谱混叠现象。连续周期信号的分析步骤如下。

- (1) 确定周期信号的基本周期 T_0 。
- (2) 计算一个周期内的采样点数 N 。

(3) 对连续周期信号以采样间隔 T 进行采样, $T = \frac{T_0}{N}$ 。

(4) 使用 `fft` 函数对 $x(k)$ 作 N 点 FFT 用以计算 $X(m)$ 。

(5) 最后求得连续周期信号的频谱 $X(n\omega_0) = \frac{1}{N} X(m)$, 其中利用了下面的转换关

系: $t = KT$, $T_0 = NT$, $dt \rightarrow T$, $\int_0^{T_0} \rightarrow \sum_{k=0}^{N-1}$ 。

若能够按照满足采样定理的采样间隔采样, 并选取整周期为信号允许长度, 则利用 DFT 计算得到的离散频谱值等于原连续周期信号离散频谱 $X(n\omega_0)$ 的准确值。

4. 连续非周期信号频谱的分析

连续时间非周期信号 $x(t)$ 的频谱函数 $X(j\omega)$ 是连续谱, 其定义如下:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

连续非周期信号的分析步骤如下:

(1) 根据时域采样定理, 确定时域采样间隔 T , 得到离散序列 $x(k)$ 。

(2) 确定信号截短的长 M 及窗函数的类型, 得到有限长 M 点离散序列 $x_M(k) = x(k)w(k)$ 。

(3) 确定频域采样点数 N , 要求 $N \geq M$ 。

(4) 使用 `fft` 函数做 N 点 FFT 计算得到 N 点的 $X(m)$ 。

(5) 由 $X(m)$ 可得到连续信号的频谱 $X(j\omega)$ 采样点的近似值 $X(j\omega) \Big|_{\omega=n\frac{2\pi}{NT}} \approx Tx(m)$,

其中利用了转换关系: $t = KT$, $dt \rightarrow T$, $\int_{-\infty}^{\infty} \rightarrow \sum_{<M>}$ 。

三、程序设计实验

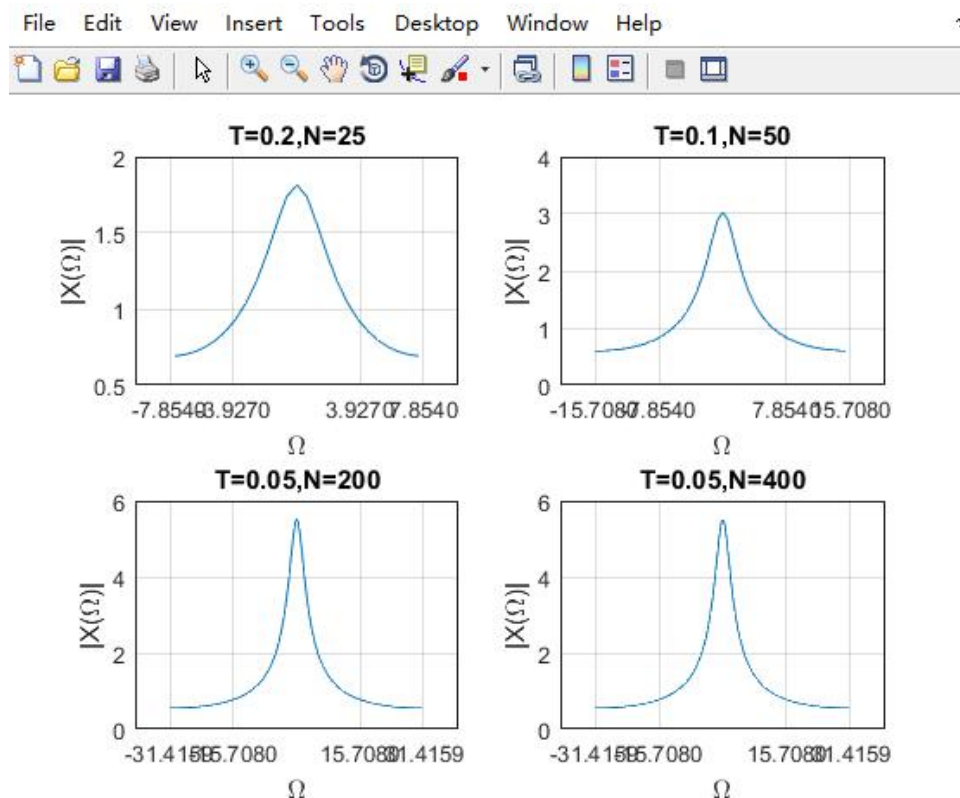
编写程序, 进一步验证如何利用 `fft` 函数来分析 $x(t) = e^{-2t}u(t)$ 的频谱。

MATLAB 代码:


```

T0=[0.4,0.2,0.1,0.1];
L0=[10,10,20,40];
for r=1:4
    T=T0(r);
    N=L0(r)/T0(r);
    D=2*pi/(N*T);
    n=0:N-1;x=exp(-2*n*T);
    X=fftshift(fft(x));
    k=floor(-(N-1)/2:(N-1)/2);
    [r,X(1)]
    subplot(2,2,r),plot(k*D,abs(X))
    set(gca,'Xtick',[-pi/T,-0.5*pi/T,0.5*pi/T,pi/T]),grid on
    set(gcf,'color','w')
    xlabel('\Omega'),ylabel('|X(\Omega)|')
    switch r
        case 1,title('T=0.2,N=25')
        case 2,title('T=0.1,N=50')
        case 3,title('T=0.05,N=200')
        case 4,title('T=0.05,N=400')
        otherwise
    end
end
set(gcf,'color','w');

```



四、思考题

(1)在利用 FFT 分析离散信号频谱时，应如何选择窗函数?会出现哪些误差？如何避免或减小这些误差？

答：根据每个窗函数不同的特性，去选择窗函数。频率分不出，应该多抽取些。

序列补零和增加序列长度都可以提高频谱分辨率吗？两者有何本质区别？

答：可以，序列补零可以使序列的频谱变得更为细致，但不能提高序列的频率分辨率，只有采集更多的有效数据，才能得到序列的高分辨率频谱。

既然可以直接利用傅里叶变换的定义来计算连续信号的傅里叶变换，为什么还要利用 FFT 分析连续信号的频谱？

答：FFT 对于分析有限的频谱更为方便。

实验五 数字滤波器结构设计分析

一、实验目的

(1)掌握如何利用数字滤波器系统函数模拟实际系统的分析方法。

(2)掌握如何借助 MATLAB 仿真工具对数字滤波器基本结构实现仿真分析。

二、实验原理

数字滤波器是离散时间系统，一般由差分方程、单位脉冲响应以及系统函数等来描述，根据数字滤波器的系统函数就可以利用加法器、乘法器、延迟器等基本单元来实现，这些基本单元的联结关系及运算结构由方框图或信号流图表示。

当一个离散系统给定输入输出关系后，就可以用多种不同的运算结构来实现。在不考虑量化影响时，这些不同的实现方法是等效的；但在考虑量化影响时，这些不同的实现方法在性能上存在差异。同一系统函数 $H(z)$ ，运算结构不同，将会影响系统的精度、稳定性、经济性以及运算速度等许多重要性能。因此，实现离散时间系统的运算结构十分重要。

本次实验讨论 IIR 型数字滤波器的基本结构，并借助 MATLAB 仿真工具对数字滤波器基本结构实现了建模和仿真分析。

IIR 数字滤波器的单位脉冲响应 $h[k]$ 无限长，其系统函数 $H(z)$ 在有限 z 平面上存在极点，因而结构上存在反馈环路，也即结构上是递归的。实现 IIR 数字滤波器的结构主要有直接型、级联型和并联型 3 种结构。

1. 直接型实现结构

IIR 数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 一般表示为：

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=0}^N a_j z^{-j}} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

该系统可以看作是系统函数分为 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 的两个子系统的级联，即

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

其中：

$$H_1(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 + \sum_{j=0}^N a_j z^{-j}}$$

分别画出这两个子系统的信号流图，并将它们级联起来，即可得到直接型信号流图图中假设 $M=N$ 。当 $M < N$ 时，只要令图中系数 $b_1 = 0$ ， $b_1 = 0 (1 = M+1, M+2, \dots, N)$ 即可得到直接 II 型(规范型)实现结构，如图 5.1 所示。|

$$H(z) = K \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - z_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 + \alpha_{1,k} z^{-1} + \alpha_{1,k} z^{-2})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - p_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 + \beta_{1,k} z^{-1} + \beta_{1,k} z^{-2})}$$

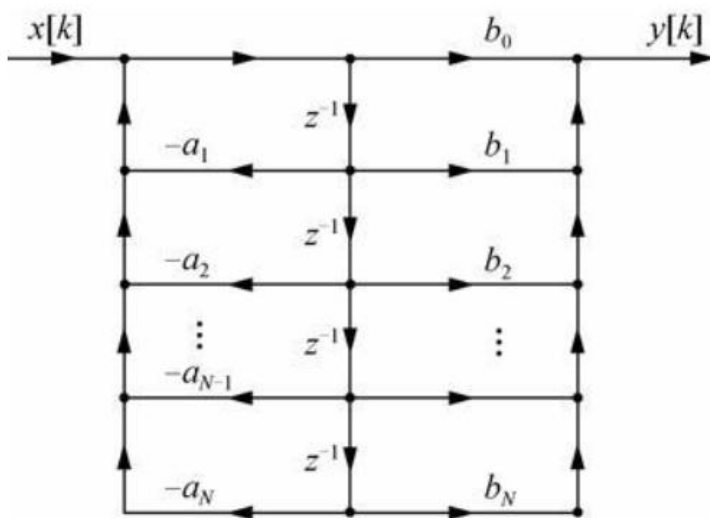


图 5.1 IIR 数字滤波器直接 II 型结构

2. 级联型实现结构

若将滤波器系统函数 $H(z)$ 的分子和分母都分解为一阶和二阶的实系数因子，即式中 $M_1 + 2M_2 = M$ ， $N_1 + 2N_2 = N$ 。如果把一阶因子看成是二阶因子的特例，即二次项系数 α_{2i} 和 β_{2i} 等于零的二阶因子，则系统函数 $H(z)$ 可写成如下形式。

$$H(z) = A \prod_{i=1}^l \frac{1 + \alpha_{1,i}z^{-1} + \alpha_{2,i}z^{-2}}{1 + \beta_{1,i}z^{-1} + \beta_{2,i}z^{-2}} = A \prod_{i=1}^l H_i(z)$$

$H_i(z)$ 称为滤波器的二阶基本节，一般采用直接型结构实现。于是整个滤波器就可以用 L 个二阶基本节的级联构成，如图 5.2 所示。

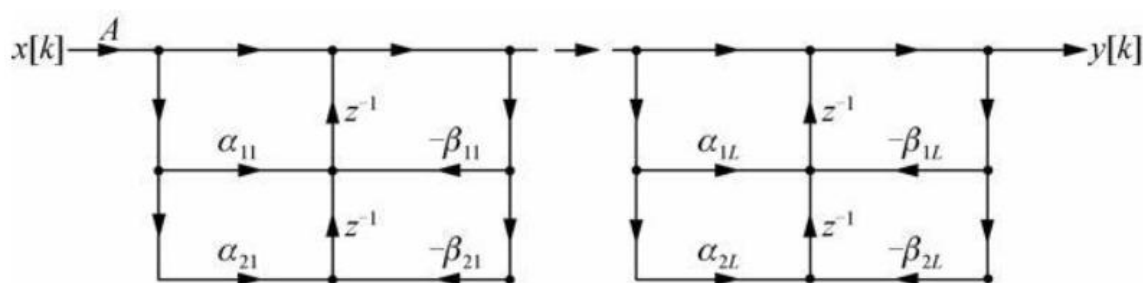


图 5.2 IIR 数字滤波器的级联型结构

3. 并联型实现结构

若将滤波器系统函数 $H(z)$ 展开成部分分式之和，且一阶系统仍采用二阶基本节表示，

则 $H(z)$ 可表达为：

$$H(z) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^L \frac{\gamma_{0,k} + \gamma_{1,k}z^{-1}}{1 + \beta_{1,k}z^{-1} + \beta_{2,k}z^{-2}}$$

根据上式，可以直接画出并联型结构框图，如图 5.3 所示。

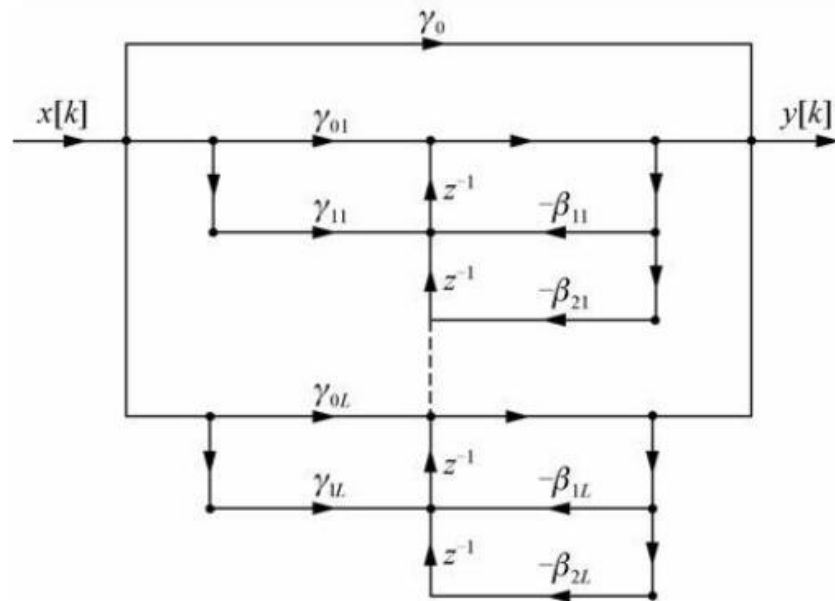


图 5.3 IIR 数字滤波器并联型实现结构

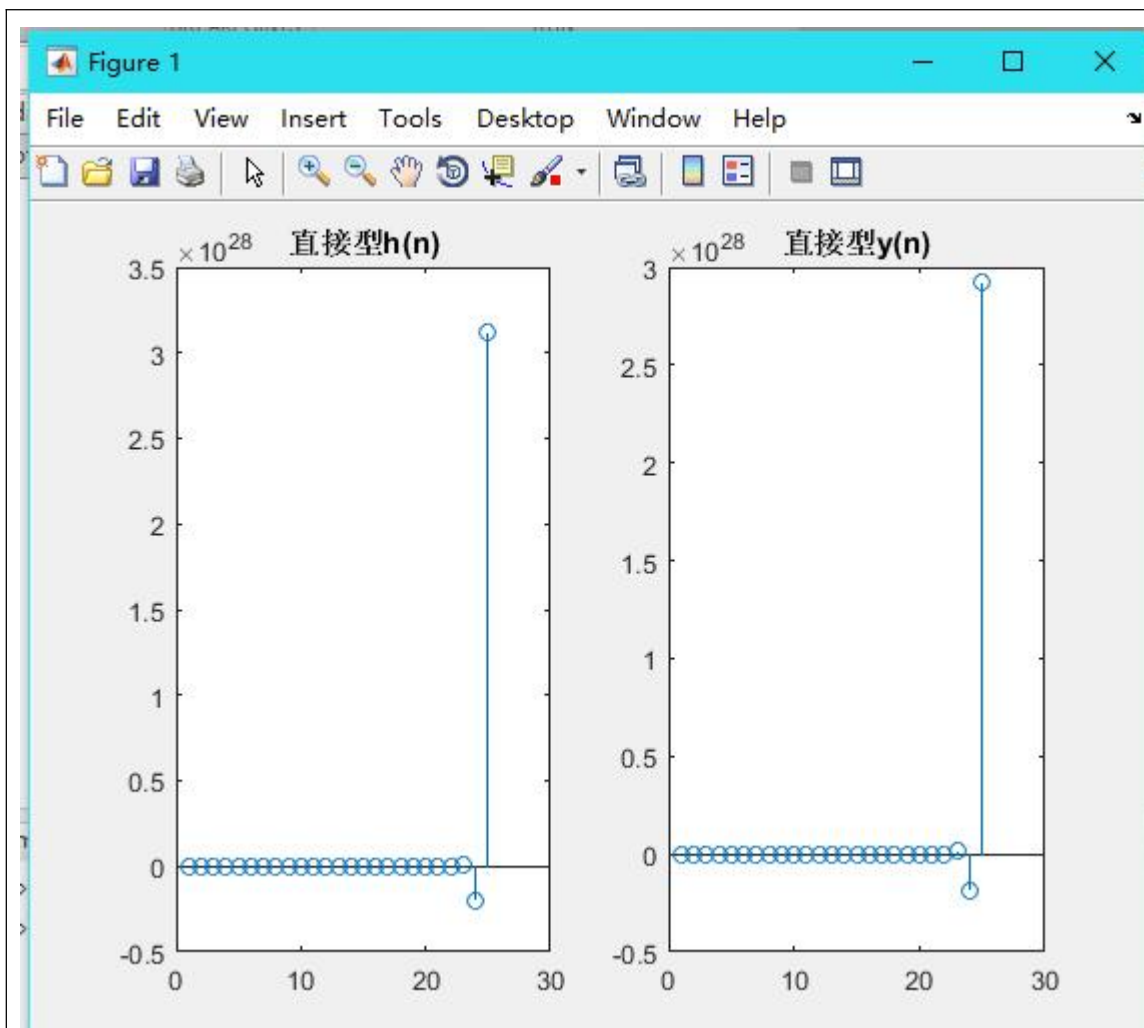
三、程序设计实验

已知一个五阶系统函数的IIR数字滤波器的表达式为：

$$H(z) = \frac{1 - 3z^{-1} + 11z^{-2} + 27z^{-3} + 18z^{-4}}{1 + 16z^{-1} + 12z^{-2} + 2z^{-3} - 4z^{-4} - z^{-5}}$$

用直接 II 型、级联型、并联型 3 种运算结构框图，并进行模拟仿真，观察不同结构滤波器的单位冲激响应 $h(k)$ 和输出信号 $y(k)$ 。

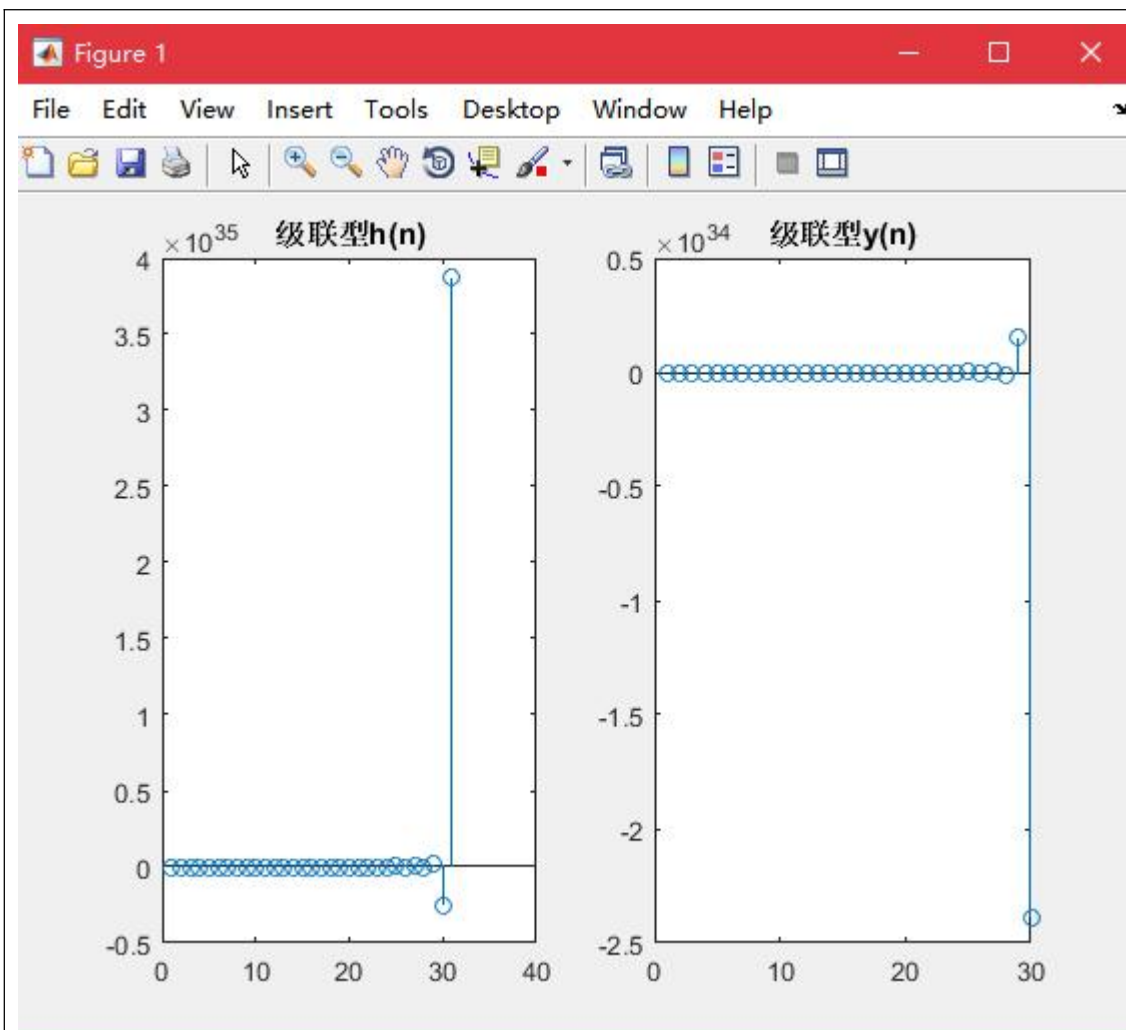
直接型：



MATLAB 代码:

```
b=[1,-3,11,27,18];a=[1,16,12,2,-4,-1];
N=25;
h=impz(b,a,N);
x=[ones(1,5),zeros(1,N-5)];
y=filter(b,a,x);
subplot(1,2,1);stem(h);title('直接型 h(n)');
subplot(1,2,2);stem(y);title('直接型 y(n)');
```

级联型:



MATLAB 代码:

```
b0=1;
b=[1,0,0;1,-4.7366,18.2390;1,1.7366,0.9869];
a=[1,15.2214,0;1,-0.2477,-0.1246;1,1.0263,0.5272];
N=30;
```

```
delta=impseq(0,0,N);
h=casfilter(b0,b,a,delta);
x=[ones(1,5),zeros(1,N-5)];
y=casfilter(b0,b,a,x);
subplot(1,2,1);stem(h);title('级联型 h (n) ');
subplot(1,2,2);stem(y);title('级联型 y (n) ');
```

```
function [x,n]=impseq(n0,ns,nf)
n=[ns:nf];x=[(n-n0)==0];
```

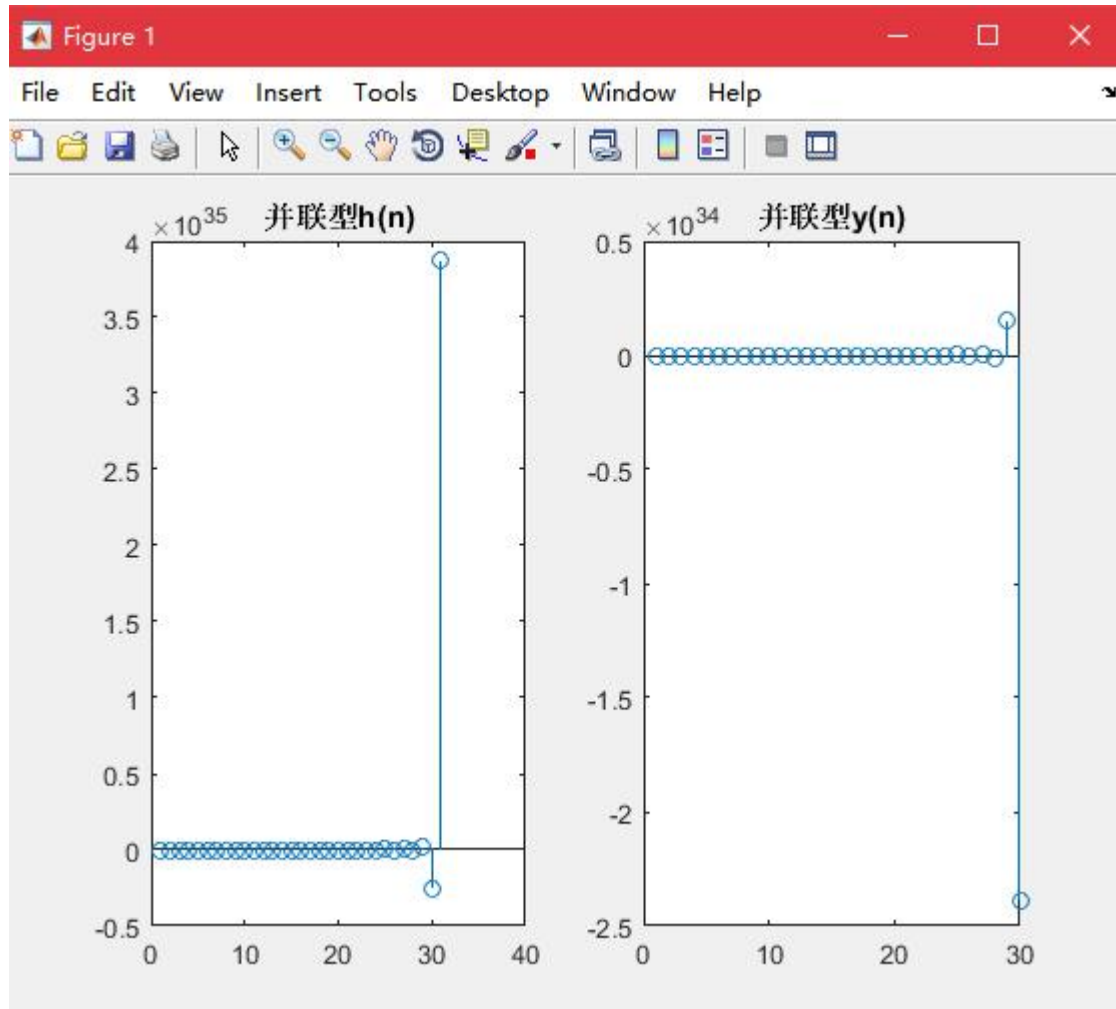
```
function y=casfilter(b0,b,a,x)
[K,L]=size(b);
N=length(x);
w=zeros(K+1,N);
```

```

w(1,:)=x;
for i=1:1:K
w(i+1,:)=filter(b(i,:),a(i,:),w(i,:));
end
y=b0*w(K+1,:);

```

并联型:



MATLAB 代码:

```

c=0;b=[0.6712,-0.3969;-1.9097,-48.5752;2.2385,0];
a=[1,1.0263,0.5272;1,15.4716,3.8093;1,-0.4979,0];
N=30;
delta=impseq(0,0,N);
h=parfilter(c,b,a,delta);
x=[ones(1,5),zeros(1,N-5)];
y=parfilter(c,b,a,x);
subplot(1,2,1);stem(h);title('并联型 h(n)');
subplot(1,2,2);stem(y);title('并联型 y(n)');

function y=parfilter(c,b,a,x);
[K,L]=size(b);

```



```

N=length(x);
w=zeros(K+1,N);
w(1,:)=filter(c,1,x);
for i=1:1:K
w(i+1,:)=filter(b(i,:),a(i,:),x);
end
y=sum(w);

```

四、思考题

(1) 数字滤波器的结构对系统有何影响?

数字滤波器一般不会出现相位偏移,通过使用可编程逻辑器件能够很方便的实现数字滤波器的设计。通过仿真结果,分析数字滤波器的量化效应。

高 Q 值的 多阶 IIR 数字滤波器对系数量化的精度很敏感,系数量化后对于直接型结构实现,一个参数(因系数量化原因造成)的变化将影响 $H(z)$ 的所有极点的位置,有可能出现极点跑出位圆的情况,导致滤波器不稳定,输出发散。而对于级联型结构实现,一个参数的变化将只影响到一个环节内的极点,对参数变化的敏感程度小于直接型结构。

当然,极点的偏移和滤波器的阶数也有关系,阶数越高,系数量化效应的影响就越大,极点的偏移越大,滤波器越容易出现不稳定。

同时在系数量化精度相同的条件下,用级联型 II 结构实现数字滤波器比用直接型 II 结构,前者的幅频特性精度要高,滤波器也更稳定,在定点处理器上实现所需的存储单元也要少。当然也可以通过提高滤波器系数的量化精度来改善幅频特性精度并提高滤波器的稳定性。但必然会增加 DSP 的存储容量,降低 DSP 的实时信号处理速度。

(3) 思考 FIR 数字滤波器的结构模拟仿真

实验六 FIR 数字滤波器的设计

一、实验目的

加深理解 FIR 数字滤波器的时域特性和频率特性,掌握 FIR 数字滤波器的设计原理与设计方法,以及 FIR 数字滤波器的应用。

二、实验原理

FIR 数字滤波器总是稳定的系统，且可以设计成具有线性相位的。其在数据通信、图像处理、语音信号处理等实际应用领域中得到广泛的应用。 N 阶有限冲激响应(FIR)数字滤波器的转移函数为：

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}, \text{ 系统的单位脉冲响应 } h(n) \text{ 是长度为 } N \text{ 的有限长因果序列。当满足 } h(n)=h(N-n-1) \text{ 的}$$

对称条件时，该 FIR 数字滤波器具有线性相位。FIR 数字滤波器的设计方法主要有窗函数法和频率采样法。

1. 窗函数法

FIR 滤波器的冲激响应就是系统函数各次项的系数，所以设计 FIR 滤波器的方法之一就是：从时域出发，截取有限长的一段冲激响应作为 $H(z)$ 系数，冲激响应长度 N 就是系统函数 $H(z)$ 的阶数。只要 N 足够长，并且截取的方法合理，总能够满足频域的要求，这就是 FIR 滤波器的窗函数设计法。

2. 频率采样法

频域采样法是先对理想频响 $H_d(e^{j\omega})$ 进行采样，得到样值 $H(k)$ ，再利用插值公式直接求出系统转换函数 $H(z)$ ，以便实现；或者求出频响 $H(e^{j\omega})$ ，以便与理想频响进行比较。在 $[0, 2\pi]$ 区间上对 $H_d(e^{j\omega})$ 进行 N 点采样，等效于时域以 N 为周期延拓。

三、程序设计实验

数字滤波器的技术指标如下： $\omega_p=0.2\pi$ 、 $R_p=0.25\text{dB}$ 、 $\omega_s=0.3\pi$ 、 $A_s=50\text{dB}$ ，分别采用窗函数法和频率采样法设计一个 FIR 数字滤波器。

窗函数法：

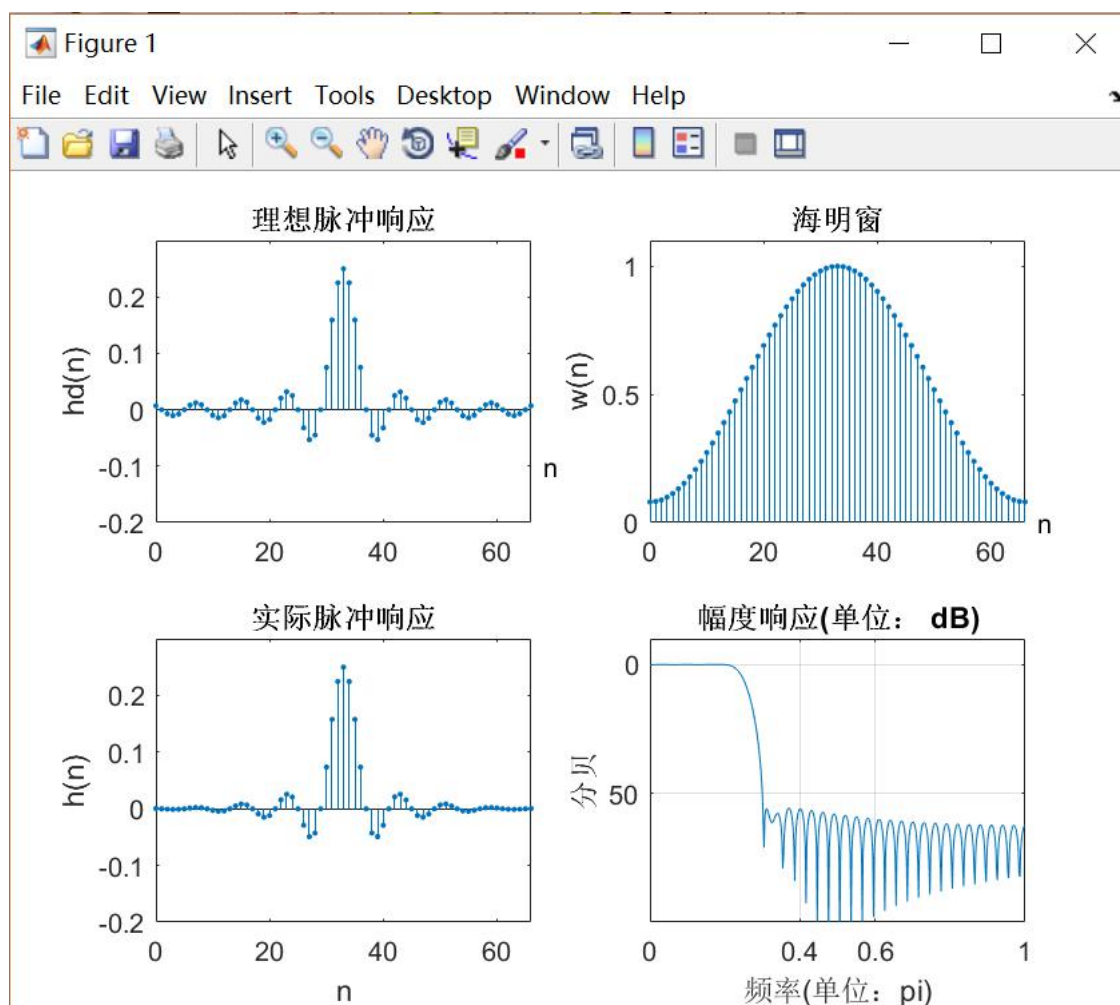
MATLAB 代码：

```
wp = 0.2*pi; ws = 0.3*pi; deltaw= ws - wp; %过渡带宽  $\Delta\omega$  的计算
N0 = ceil(6.6*pi/ deltaw) + 1; %按海明窗计算所需的滤波器阶数 N0
N=N0+mod(N0+1,2); %为了实现第一类偶对称滤波器，应使其长度 N 为奇数
wdham = (hamming(N))'; %求窗函数
wc = (ws+wp)/2; %截止频率取为两边界频率的平均值
tao=(N-1)/2;
n=[0:N-1];
m=n-tao+eps;
hd=sin(wc*m)/(pi*m); %求理想脉冲响应
h = hd .* wdham; %设计的脉冲响应为理想脉冲响应与窗函数乘积
[H,w]=freqz(h,[1],1000,'whole');
H=(H(1:1:501))';w=(w(1:1:501))'; %对设计结果进行检验
mag=abs(H);
db=20*log10((mag+eps)/max(mag));
pha=angle(H);
grd=grpdelay(h,[1],w);
dw = 2*pi/1000;
Rp = -(min(db(1:wp/dw+1))); %检验通带波动
As = -round(max(db(ws/dw+1:501))); %检验最小阻带衰减
n=0:N-1;
subplot(2,2,1); stem(n,hd,'. '); title('理想脉冲响应')
```

```

axis([0 N-1 -0.2 0.3]); ylabel('hd(n)');text(N+1,-0.1,'n')
subplot(2,2,2); stem(n,wdham, '.');title('海明窗')
axis([0 N-1 0 1.1]); ylabel('w(n)');text(N+1,0,'n')
subplot(2,2,3); stem(n,h, '.');title('实际脉冲响应')
axis([0 N-1 -0.2 0.3]); xlabel('n'); ylabel('h(n)')
subplot(2,2,4); plot(w/pi,db);title('幅度响应(单位: dB)');grid
axis([0 1 -100 10]); xlabel('频率(单位: pi)'); ylabel('分贝')
set(gca,'XTickMode','manual','XTick',[0,0.4,0.6,1])
set(gca,'YTickMode','manual','YTick',[-50,0])
set(gca,'YTickLabelMode','manual','YTickLabels',{'50';' 0'})
set(gcf,'color','w'); %置图形背景色为白色

```



```

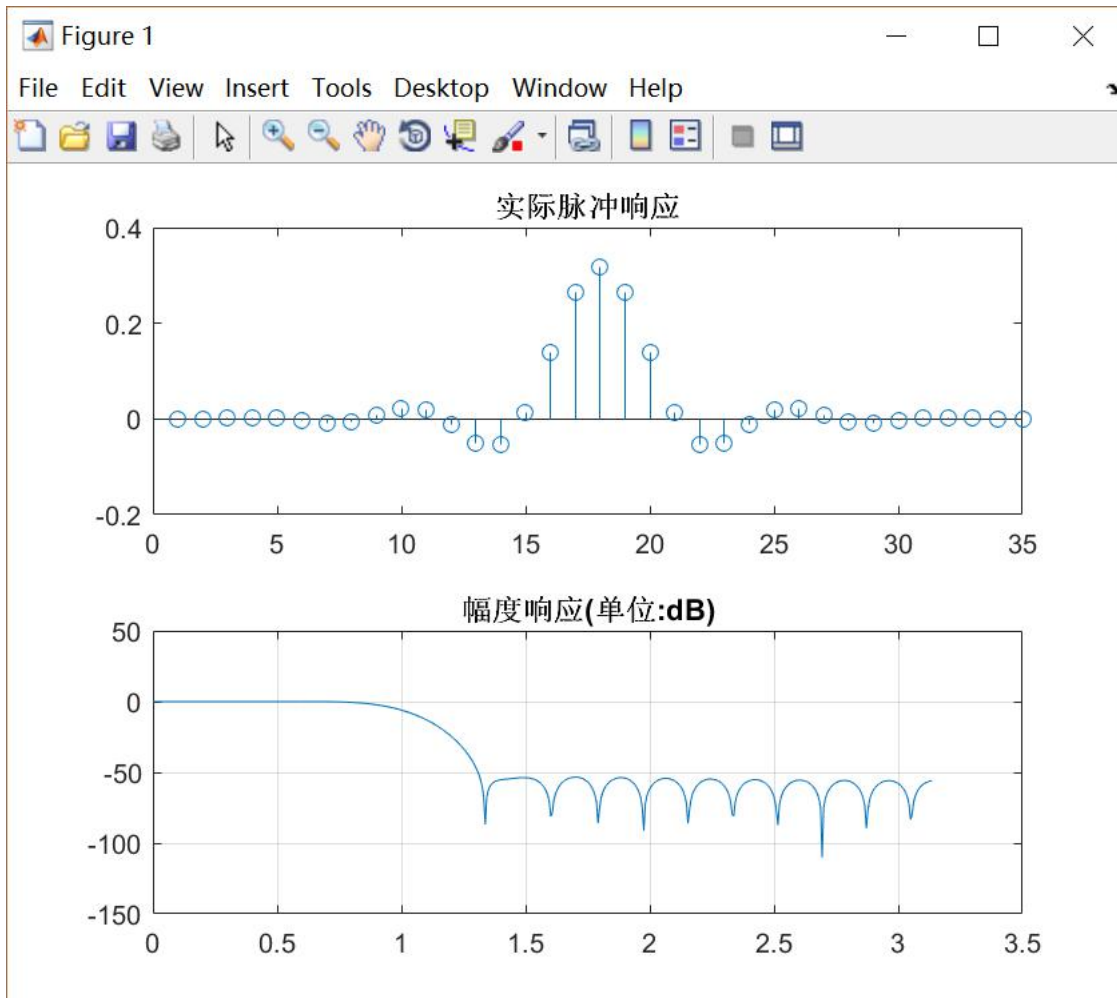
wp = 0.2*pi; ws = 0.3*pi; deltaw= ws - wp; %过渡带宽  $\Delta \omega$  的计算
N0 = ceil(6.6*pi/ deltaw) + 1; %按海明窗计算所需的滤波器阶数 N0
N=N0+mod(N0+1,2); %为了实现第一类偶对称滤波器, 应使其长度 N 为奇数
wdham = (hamming(N))'; %求窗函数
wc = (ws+wp)/2; %截止频率取为两边界频率的平均值
tao=(N-1)/2;
n=[0:N-1];
m=n-tao+eps;

```

```

hd=sin(wc*m)/(pi*m); %求理想脉冲响应
h = hd .* wdam; %设计的脉冲响应为理想脉冲响应与窗函数乘积
[H,w]=freqz(h,[1],1000,'whole');
H=(H(1:1:501))';w=(w(1:1:501))'; %对设计结果进行检验
mag=abs(H);
db=20*log10((mag+eps)/max(mag));
pha=angle(H);
grd=grpdelay(h,[1],w);
dw = 2*pi/1000;
Rp = -(min(db(1:wp/dw+1))); %检验通带波动
As = -round(max(db(ws/dw+1:501))); %检验最小阻带衰减
%绘图
n=0:N-1;
b=fir1(34,1/pi,hamming(35));
[H,w]=freqz(b,1,512);
H_db=20*log10(abs(H));
subplot(2,1,1);stem(b);
title('实际脉冲响应');
subplot(2,1,2);plot(w,H_db);
title('幅度响应(单位:dB)');
grid on;

```



频率采样法:

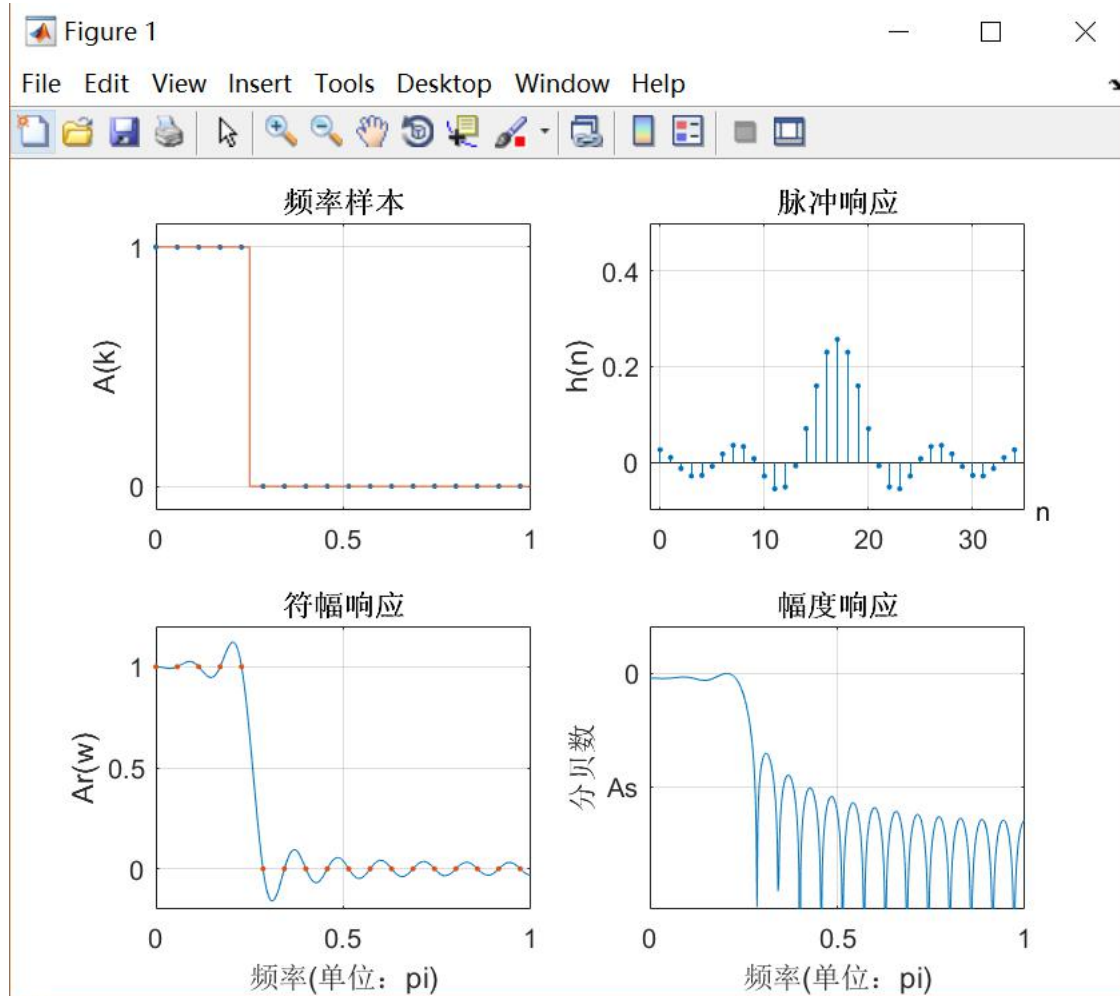
MATLAB代码:

```
N=35;wp=0.2*pi;ws=0.3*pi;wc=(wp+ws)/2; %给出原始数据
N=N+mod(N+1,2);
N1=fix(wc/(2*pi/N));N2=N-2*N1-1;
A=[ones(1,N1+1),zeros(1,N2),ones(1,N1)]; %符幅特性样本序列
theta = -pi*[0:N-1]*(N-1)/N; % 相位特性样本序列
H=A.*exp(j*theta); %频率特性样本序列
h=real(ifft(H)); %反变换求出脉冲序列,去掉运算误差造成的虚部
wp1=2*pi/N*fix(wc/(2*pi/N)-1);ws1=wp1+8*pi/N;
[H,w]=freqz(h,[1],1000,'whole');
H=(H(1:1:501))';w=(w(1:1:501))'; %对设计结果进行检验
mag=abs(H);
db=20*log10((mag+eps)./max(mag));
pha=angle(H);
grd=grpdelay(h,[1],w); %检验设计出的滤波器的符幅特性
N=length(h);L0=(N-1)/2;L=floor(L0); %求滤波器阶次及符幅特性的阶次
n=1:L+1;ww=[0:511]*pi/512; %取滤波器频率向量
```

```

if all(abs(h(n)-h(N-n+1))<1e-8) % 判断滤波器系数若为对称
    Ar=2*h(n)*cos((N+1)/2-n)*ww-mod(N,2)*h(L+1);
%对称条件下计算 A(两种类型)
%在 N=奇数时, h(L+1) 项存在; N 为偶数时, 要取消这项, 故乘以 mod(N,2)
    type =2-mod(N,2); %判断并给出类型
%在 N=奇数时, 要求 h(L+1) 项必须为零; 在 N=偶数时不要这条件, 故乘以 mod(N,2)
elseif all(abs(h(n)+h(N-n+1))<1e-8) & (h(L+1)*mod(N,2)<=1e-8)
%系数若为反对称
%在 N=奇数时, 要求 h(L+1) 项必须为零; 在 N=偶数时, 不要这条件, 故乘以 mod(N,2)。
    A=2*h(n)*sin((N+1)/2-n)*ww; %反对称条件下计算 A 的公式(两种类型相同)
    type =4-mod(N,2);
%判断并给出类型
else error('错误: 这不是线性相位滤波器!') %滤波器系数非对称, 报告错误
end
dw = 2*pi/1000; %频率分辨率
Rp = -min(db(1:fix(wp1/dw)+1)) %实际的通带波动
As = -round(max(db(fix(ws1/dw)+1:501))) %最小阻带衰减
l = 0:N-1; w1 = (2*pi/N)*l; %由频率样本下标换成频率样本值
wdl=[0,wc,wc,2*pi-wc,2*pi-wc,2*pi]/pi;Adl=[1,1,0,0,1,1]; %绘制理想幅特性的频率
和幅度数据
subplot(2,2,1);plot(w1(1:N)/pi,A(1:N),'.',wdl,Adl); %绘图
axis([0,1,-0.1,1.1]); title('频率样本')
xlabel(''); ylabel('A(k)')
set(gca,'XTickMode','manual','XTick',chop([0,0.5,1],2))
set(gca,'YTickMode','manual','YTick',[0,1]); grid
subplot(2,2,2); stem(l,h, '.'); axis([-1,N,-0.1,0.5]);grid
title('脉冲响应');ylabel('h(n)');text(N+1,-0.1,'n')
subplot(2,2,3); plot(ww/pi,Ar,w1(1:N)/pi,A(1:N), '.');
axis([0,1,-0.2,1.2]); title('幅频响应')
xlabel('频率(单位: pi)'); ylabel('Ar(w)');grid
subplot(2,2,4);plot(w/pi,db); axis([0,1,-50,10]);
title('幅度响应'); xlabel('频率(单位: pi)');
ylabel('分贝数'); grid
set(gca,'XTickMode','manual','XTick',chop([0,0.5,1],2))
set(gca,'YTickMode','Manual','YTick',[-As;0]);
set(gca,'YTickLabelMode','manual','YTickLabels',['As';' 0'])
set(gcf,'color','w'); %置图形背景色为白色

```

四、思考题

(1) 窗函数法和频率采样法的优缺点分别是什么？

答：窗函数法的有点事简单，有闭合的公式可用，性能及参数都有表格资料考查，计算程序简单，较为实用。缺点是当系统函数较为复杂时， $h_s(n)$ 不容易由反傅里叶变换求得。边界频率因为加窗的影响而不易控制。 频率采样法直接从频域进行设计，物理概念清楚直观方便，对于频率响应只有少数几个非零值取样的窄带选频滤波器特别有效，但对于大型系统不适用。

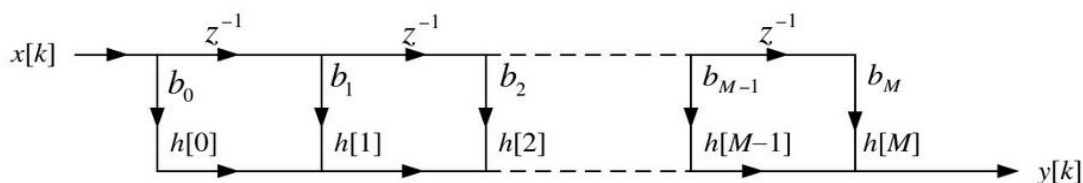
(2) 在 FIR 窗函数设计中，为何采用不同特性的窗函数？选用窗函数的依据是什么？

答：在满足阻带衰减的前提下，尽可能选择主瓣宽度小的窗函数，减少衰减。

(3) 在频率采样法中，如果阻带衰减不够，应采取什么样的措施？

答：在通带和阻带间设置幅度非0过渡样本点。

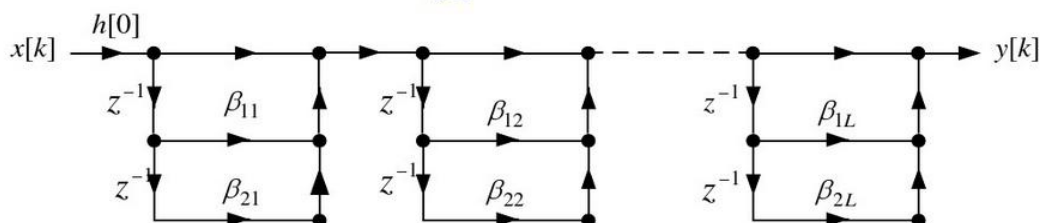
$$H(z) = \sum_{k=0}^M h[k]z^{-k} = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i}$$



需要 $M+1$ 个乘法器， M 个延迟器， M 个加法器。

将 $H(z)$ 分解为若干个**实系数**一阶、二阶因子相乘：

$$H(z) = h[0] \prod_{k=1}^L (1 + \beta_{1,k} z^{-1} + \beta_{2,k} z^{-2})$$



$2L=M$ 个延迟器， $2L+1=M+1$ 个乘法器， $2L=M$ 个加法器。

M阶FIR滤波器的系统函数
数可以表示为：

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{H[m]}{1 - W_N^{-m} z^{-1}}$$

