姓名：________

学号：________

装 订 线

哈尔滨工程大学研究生试卷

（ 2021 年 秋 季学期）

课程编号： 202032020004 课程名称： 矩阵论

一、单项选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 下列命题**正确**的个数是______.

① 设$V=\mathrm{R}^{n\times n}$，则$W=\{A\mid A\in\mathrm{R}^{n\times n},|A|=0\}$是 V 的子空间.

② 设线性空间 V 的子空间 W 中每个向量可由 W 中的线性无关的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，则 $\dim(W)=s$.

③ 设 W 是线性空间 V 的子空间，如果 $\alpha,\beta\in V$，但 $\alpha\notin W$ 且 $\beta\notin W$，则必有 $\alpha+\beta\notin W$.

④ $W=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathrm{R}^3\mid x_1=x_2=x_3\}$是 R^3 的子空间.

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

2. 设 $V_1=\left\{\begin{bmatrix}x & y\\ x & y\end{bmatrix}\middle| x,y\in C\right\}$，$V_2=\left\{\begin{bmatrix}x & y\\ -y & -x\end{bmatrix}\middle| x,y\in C\right\}$ 为 $\mathrm{C}^{2\times 2}$ 的子空间，则 V_1+V_2 的一组基和维数分别为______.

(A) $\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix},2$

(B) $\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},2$

(C) $\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},3$

(D) $\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},3$

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 均为线性空间 V 的基，$\gamma\in V$，γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标为 X，γ 在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标为 Y，则______.

(A) X 与 Y 一定相同

(B) X 与 Y 一定不同

(C) 若$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]P$，则 $Y=PX$

(D) 若$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]P$，则 $X=PY$

4. 设 $A\in\mathrm{R}^{m\times n}$，$R(A)$ 为矩阵 A 的值域，$N(A)$ 为矩阵 A 的核空间，则以下命题

正确的为______.

(A) $N(A)$ 为 R^m 的子空间

(B) $R(A)$ 为 R^m 的子空间

(C) $\dim R(A)=n-\mathrm{rank}A$

(D) $\dim N(A)=\mathrm{rank}A$

5. 若 V 是酉空间，(x,y) 为 V 上的内积运算，对任意 $x,y,z\in V$ 及 $\lambda\in\mathrm{C}$，则以下命题**不一定正确**的为______.

(A) $(x,y)=\overline{(y,x)}$

(B) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$

(C) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z),\forall x,y,z\in V$

(D) $(x,x)\geq 0$，等号成立当且仅当 x 为 V 中的零向量

6. 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1-i & 3\\ 2 & 1+i\end{bmatrix}$的三个范数$\|A\|_1,\|A\|_2,\|A\|_\infty$值分别为______.

(A) $5+\sqrt{2},\sqrt{17},6$ (B) $3+\sqrt{2},\sqrt{17},3+\sqrt{2}$

(C) $5+\sqrt{2},4,6$ (D) $3+\sqrt{2},4,3+\sqrt{2}$

7. 以下关于酉矩阵的命题**不一定正确**的为______.

(A) 两个酉矩阵的和必为酉矩阵

(B) 两个酉矩阵的乘积必为酉矩阵

(C) 酉矩阵特征值的模必为 1

(D) 酉矩阵的各行（列）一定是标准正交的

8. 下列命题**不一定正确**的个数为______.

① 任何可逆方阵，都可以分解成一个单位下三角阵乘一个上三角阵的形式

② 任何一个列满秩矩阵，都可分解成一个次酉阵乘一个正线上三角阵的形式

③ 秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵，可以做满秩分解，且分解式唯一

④ 单纯矩阵可以做谱分解，且分解式唯一

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

9. 设 A 为 n 阶方阵，则下列结论**正确**的是______.

(A) A 的化零多项式必为 n 次多项式

(B) A 的最小多项式必为 n 次多项式

(C) A 的特征多项式必为 A 的化零多项式

(D) A 的化零多项式必为 A 的特征多项式

10. 设 A，B 为同阶方阵，则以下等式**不一定成立**的是______.

(A) $\mathrm{e}^{iA}=\cos A+i\sin A$

(B) $\cos A=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{iA}+\mathrm{e}^{-iA})$，$\sin A=\dfrac{1}{2i}(\mathrm{e}^{iA}-\mathrm{e}^{-iA})$

学号：＿＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿＿

装　订　线

(C) $\cos(-A)=\cos A,\ \sin(-A)=\sin A$

(D) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 设实数域上的多项式

$$p_1(x)=x^3+2x^2+2x+3,\quad p_2(x)=x^3+x^2+2x+3,\quad p_3(x)=-x^3+x^2-4x-5$$

为线性空间 W 的一组基，则 $p(x)=x^3+4x^2+1$ 在这组基下的坐标为＿＿＿＿＿＿.

2. 设 $\mathrm{R}[x]_n$ 表示实数域上次数小于 n 的多项式空间，在 $\mathrm{R}[x]_n$ 中定义线性变换 D: $D[f(x)]=f'(x)$，$f(x)\in \mathrm{R}[x]_n$，则 $\dim R(D)=$＿＿＿＿＿.

3. 在 C^3 空间中定义一种内积，使得内积在 C^3 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{bmatrix}$，若 $\beta_1=-2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=-\alpha_1+\alpha_3$，则 $(\beta_1,\beta_2)=$＿＿＿＿＿.

4. 设有 Hermite 二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x}_1x_1+t\overline{x}_1x_2+t\overline{x}_2x_1+\overline{x}_1x_3+\overline{x}_3x_1+4\overline{x}_2x_2+2\overline{x}_3x_3$$

正定，则 t 的取值范围为＿＿＿＿＿.

5. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&0&0\end{bmatrix}$，则 A 的正奇异值为＿＿＿＿＿.

6. 设 $A\in \mathrm{C}^{n\times n}$ 为单纯矩阵，$A=\sum\limits_{i=1}^{\sigma}\lambda_iH_i$ 是 A 的谱分解，多项式 $f(\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{m}a_k\lambda^k$，则 $f(A)$ 的谱分解表达式为＿＿＿＿＿.

7. 设 $A_n=\begin{bmatrix}\dfrac{n^2}{2n^2+1}&(1+\dfrac{1}{n})^n\\\dfrac{1}{n^2}&0\end{bmatrix}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=$＿＿＿＿＿.

8. 设 $A(t)=\begin{bmatrix}t^2+1&\sin t&t\\0&1&\cos t\end{bmatrix}$，则 $A'(t)=$＿＿＿＿＿.

9．设 $A=\begin{bmatrix}1&4&-1\\2&0&0\\-1&2&-4\\1&-2&-1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&0&2&3\\0&1&0&1&2\\0&0&1&1&5\end{bmatrix}$，则 $\mathrm{rank}(A\otimes B)=$＿＿＿＿＿.

10. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$B=A^7-4A^6+5A^5-2A^4+E$，则矩阵 B 的行列式值为＿＿＿＿＿.

三、计算题（8 分）

在线性空间 R^3 中，线性变换 σ 定义如下:

$$\begin{cases}\sigma(\eta_1)=[-5,0,3]^{\mathrm{T}}\\\sigma(\eta_2)=[0,-1,6]^{\mathrm{T}}\\\sigma(\eta_3)=[-5,-1,9]^{\mathrm{T}}\end{cases},$$

其中 $\begin{cases}\eta_1=[-1,0,2]^{\mathrm{T}}\\\eta_2=[0,1,1]^{\mathrm{T}}\\\eta_3=[3,-1,0]^{\mathrm{T}}\end{cases}$.

（1）求 σ 在自然基底下的矩阵;

（2）求 σ 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵.

四、证明题（8 分）

设 σ 是线性空间 V 中的线性变换，若存在 $\alpha\in V$ 和 $m\in \mathrm{Z}^+$，使 $\sigma^{m-1}(\alpha)\neq 0$，$\sigma^m(\alpha)=0$，证明 $W=\mathrm{span}\{\alpha,\sigma(\alpha),\cdots,\sigma^{m-1}(\alpha)\}$ 是 σ 的不变子空间.

五、计算题（8 分）

求酉变换 $x=Uy$，化 Hermite 二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x}_1x_1-2\overline{x}_1x_2-2\overline{x}_2x_1+2\overline{x}_1x_3+2x_1\overline{x}_3-2\overline{x}_2x_2+4\overline{x}_2x_3+4\overline{x}_3x_2-2\overline{x}_3x_3$$

为标准型.

六、计算题（16 分）

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&2&3\\0&0&2\end{bmatrix}$，

（1）求矩阵 A 的若当标准型 J 及相似变换矩阵 P;

（2）求矩阵函数 $f(A)$ 的若当表示，并计算 e^{At};

（3）计算矩阵函数 e^{At} 在区间 $[0,1]$ 上的定积分 $\int_0^1\mathrm{e}^{At}\mathrm{d}t$.