

# 泊松过程

<http://machunguang.hrbeu.edu.cn>

哈尔滨工程大学

# 泊松过程

- 1 泊松过程的定义
- 2 泊松过程的到达时间间隔分布
- 3 泊松过程的到达时间分布
- 4 泊松过程的到达时间的条件分布
- 5 复合泊松过程

# 泊松过程

- 1 泊松过程的定义
- 2 泊松过程的到达时间间隔分布
- 3 泊松过程的到达时间分布
- 4 泊松过程的到达时间的条件分布
- 5 复合泊松过程

# 1. 泊松过程的定义

- *Poisson* 过程是一类直观意义很强,而且极为重要的过程,其应用范围很广,遍及各个领域,公用事业、生物学、物理学、电子通信工程等很多方面的问题都可用 *Poisson* 过程物理模拟.
- 考虑一个来到某 “服务点”要求服务的 “顾客流”,顾客到服务点的到达过程可认为是 *Poisson* 过程.当抽象的 “服务点”和 “顾客流”有不同的含义时,便可得到不同的 *Poisson* 过程. 例如,某电话交换台得电话呼叫,交换台就是服务点,所有的呼叫依先后次序构成一顾客流.

# 1. 泊松过程的定义

- **计数过程**

**定义 2.7.6** 称实随机过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为计数过程，如果  
 $N(t)$  代表到时刻  $t$  所发生的随机事件数.

- 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 应该满足下列条件：

(1)  $N(t)$ 是非负整数;

(2)  $\forall 0 \leq s < t, N(t) \geq N(s);$

(3)  $\forall 0 \leq s < t, N(t) - N(s)$  代表时间间隔 $t-s$ 内发生的随机事件数.

# 1. 泊松过程的定义

## ● *Poisson* 过程

**定义 2.7.7** 称计数过程  $\{N(t), t \geq 0\}$  是参数(强度、比率)为  $\lambda (\lambda > 0)$  的 *Poisson* 过程, 如果:

- (1)  $N(0)=0$ ;
- (2)  $\{N(t), t \geq 0\}$  是平稳的独立增量过程;
- (3)  $\forall t > 0$ ,  $N(t)$  服从参数为  $\lambda t$  的 *Poisson* 分布, 即

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k = 0, 1, 2, \dots$$

---

# 1. 泊松过程的定义

- **定理 2.7.6** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 $\lambda$ 的 Poisson 过程，则

$$(1) \quad m_N(t) = \lambda t, \quad t \geq 0; \quad D_N(t) = \lambda t, \quad t \geq 0;$$

$$C_N(s, t) = \lambda \min(s, t), \quad s, t \geq 0; \quad R_N(s, t) = \lambda^2 st + \lambda \min(s, t), \quad s, t \geq 0.$$

(2)  $\forall 0 \leq s < t, \quad N(t) - N(s)$  服从参数为  $\lambda(t - s)$  的 Poisson 分布。

- 证明：(1) 只需证明： $R_N(s, t) = \lambda^2 st + \lambda \min(s, t), \quad s, t \geq 0.$

(2) 往证：

$$P(N(t) - N(s) = k) = \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

# 1. 泊松过程的定义

- **定义 2.7.8** 称计数过程  $\{N(t), t \geq 0\}$  是参数为  $\lambda$  的 *Poisson* 过程, 如果:

(1)  $N(0)=0$ ;

(2)  $\{N(t), t \geq 0\}$  是平稳的独立增量过程;

(3) 当  $\Delta t$  充分小时, 在  $(t, t+\Delta t)$  内出现事件一次的概率为

$$\lambda \Delta t + o(\Delta t), \text{ 即 } \underline{P(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)}$$

(4) 当  $\Delta t$  充分小时, 在  $(t, t+\Delta t)$  内出现事件两次或是两次以上概率为  $o(\Delta t)$ , 即

$$\underline{P(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t)}$$

# 1. 泊松过程的定义

- **定理 2.7.7** 定义2.7.7与定义2.7.8等价.
- **证明：**
- 设定义2.7.7成立，只需证明定义2.7.8中的条件(3)、(4) 成立，即  $P(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t)$   
$$P(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$
- 设定义2.7.8成立，只需证明  $\forall t > 0$

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k = 0, 1, 2, \dots$$

# 泊松过程

- 1 泊松过程的定义
- 2 泊松过程的到达时间间隔分布
- 3 泊松过程的到达时间分布
- 4 泊松过程的到达时间的条件分布
- 5 复合泊松过程

## 2. 泊松过程的到达时间间隔分布

- **Poisson 过程的到达时间间隔分布**

设  $N(t)$  表示直到  $t$  时刻到达的随机点数,  $\{N(t), t \geq 0\}$  是强度为  $\lambda$  的 *Poisson* 过程,  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$  分别表示第 1 个, 第 2 个, …, 第  $n$  个, …, 随机点的到达时间, 称  $\{\tau_n, n = 1, 2, \dots\}$  为 *Poisson* 过程的 到达时间序列, 它是一个随机变量序列, 令  $T_n = \tau_n - \tau_{n-1}, n = 1, 2, \dots, \tau_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$ , 称  $\{T_n, n = 1, 2, \dots\}$  为 *Poisson* 过程的 到达时间间隔序列, 它也是一个随机变量序列. 显然  $\tau_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$

## 2. 泊松过程的到达时间间隔分布

- **定理 2.7.8** 设  $\{N(t), t \geq 0\}$  是参数为  $\lambda$  的 Poisson 过程，  
 $\{T_n, n=1, 2, \dots\}$  是其到达时间间隔序列，则  $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ , 相互独立同服从参数  $\lambda$  的指数分布.

即

$$f_{T_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad F_{T_n}(t) = \begin{cases} 1 - \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$E[T_n] = \frac{1}{\lambda}, \quad D[T_n] = \frac{1}{\lambda^2}$$

# 泊松过程

- 1 泊松过程的定义
- 2 泊松过程的到达时间间隔分布
- 3 泊松过程的到达时间分布
- 4 泊松过程的到达时间的条件分布
- 5 复合泊松过程

### 3. 泊松过程的到达时间分布

- **定理 2.7.9** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为  $\lambda$  的 Poisson 过程

$\{\tau_n, n = 1, 2, \dots\}$  是其到达时间序列, 则  $\tau_n (n = 1, 2, \dots)$  服从  $\Gamma$  分布 (也称为阶为  $n$  的 Erlang (埃尔朗) 分布), 即  $\tau_n$  的概率密度函数为

$$f_{\tau_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$E[\tau_n] = \frac{n}{\lambda}, \quad D[\tau_n] = \frac{n}{\lambda^2}$$

# 泊松过程

- 1 泊松过程的定义
- 2 泊松过程的到达时间间隔分布
- 3 泊松过程的到达时间分布
- 4 泊松过程的到达时间的条件分布
- 5 复合泊松过程

## 4. 泊松过程的到达时间的条件分布

- 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 $\lambda$ 的Poisson过程，如果在  $[0,t)$  内仅有一个随机点到达， $\tau$ 是其到达时间，则  $\tau$ 服从  $[0,t)$  上的均匀分布。
- 事实上，当  $0 \leq s < t$  时，

$$\begin{aligned} F_{\tau|N(t)=1}(s | N(t) = 1) &= P(\tau \leq s | N(t) = 1) \\ &= \frac{P(\tau \leq s, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)} = \frac{P(N(s) = 1, N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)} \\ &= \frac{P(N(s) = 1)P(N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)} = \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t} \end{aligned}$$

从而  $\tau$ 服从  $[0,t)$  上的均匀分布。

## 4. 泊松过程的到达时间的条件分布

- **定理2.7.10** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 $\lambda$ 的Poisson过程，如果在 $[0,t)$ 内有 $n$ 个随机点到达，则 $n$ 个到达时间

$$\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n$$

和 $n$ 个相互独立同服从 $[0,t)$ 上均匀分布的随机变量

$U_1, U_2, \dots, U_n$  的顺序统计量  $U_{(1)} < U_{(2)} < \cdots < U_{(n)}$  同分布.

## 4. 泊松过程的到达时间的条件分布

- **例 2.7.2** 假设乘客按照参数为  $\lambda$  的 *Poisson* 过程  $\{N(t), t \geq 0\}$  来到一个火车站乘坐某次列车，若火车在时刻  $t$  启程，试求在  $[0, t]$  内到达火车站乘坐该次列车的乘客等待时间总和的数学期望。
- **解：** 设  $\tau_k$  是第  $k$  个乘客到达火车站的时刻，则其等待时间为  $t - \tau_k$ ，从而在  $[0, t]$  内到达火车站乘坐该次列车的乘客等待时间总和为

$$\sum_{k=1}^{N(t)} (t - \tau_k)$$

## 4. 泊松过程的到达时间的条件分布

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-\tau_k)\right] &= E[E(\sum_{k=1}^{N(t)}(t-\tau_k) \mid N(t))] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E(\sum_{k=1}^n(t-\tau_k) \mid N(t)=n)P(N(t)=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(nt - \sum_{k=1}^n E(\tau_k \mid N(t)=n))P(N(t)=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(nt - \sum_{k=1}^n EU_{(k)})P(N(t)=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(nt - \sum_{k=1}^n EU_k)P(N(t)=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(nt - \frac{1}{2}nt) \cdot \frac{(\lambda t)^{n-1}}{n!} e^{-\lambda t} = \frac{\lambda t^2}{2} (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}) e^{-\lambda t} = \frac{\lambda t^2}{2} e^{\lambda t} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{\lambda t^2}{2} \end{aligned}$$

# 泊松过程

- 1 泊松过程的定义
- 2 泊松过程的到达时间间隔分布
- 3 泊松过程的到达时间分布
- 4 泊松过程的到达时间的条件分布
- 5 复合泊松过程

## 5. 复合泊松过程

- **定义 2.7.9** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 $\lambda$ 的Poisson过程， $\{Y_n, n=1, 2, \dots\}$ 是相互独立同分布的随机变量序列，且 $\{N(t), t \geq 0\}$ 和 $\{Y_n, n=1, 2, \dots\}$ 也相互独立，令 $\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$ ， $t \geq 0$ ，则称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为复合 Poisson 过程.
- **定理 2.7.11** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为复合Poisson过程，则
  - (1)  $\{N(t), t \geq 0\}$ 的一维特征函数为
$$f_{X(t)}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t; u) = e^{\lambda t(f(u)-1)}$$
其中 $f(u)$ 是 $Y_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 的特征函数；
  - (2) 若 $EY_n^2 < +\infty$ ，则 $m_X(t) = \lambda t EY_n, D_X(t) = \lambda t EY_n^2.$

## 5. 复合泊松过程

- **例 2.7.3** 设移民到某地区定居的户数是一 *Poisson* 过程，平均每周有 2 户定居，即  $\lambda = 2$ ，如果每户的人口数是一随机变量，一户四人的概率为  $1/6$ ，一户三人的概率为  $1/3$ ，一户二人的概率为  $1/3$ ，一户一人的概率为  $1/6$ ，并且每户的人口数是相互独立的随机变量，求在五周内移民到该地区人口数的数学期望和方差.

## 5. 复合泊松过程

- 解 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是移民到该地区定居的户数所形成的Poisson过程，则其参数为 $\lambda=2$ .再设 $Y_n$ 表示第 $n$ 户的人口数， $X(t)$ 代表移民的总人数，则 $X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$ ，从而 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是复合的Poisson过程.

因为  $EY_n = 4 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{2}$

$$EY_n^2 = 4^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{1}{6} = \frac{43}{6}$$

所以

$$E[X(5)] = 2 \times 5 \times \frac{5}{2} = 25, \quad D[X(5)] = 2 \times 5 \times \frac{43}{6} = \frac{215}{3}$$

## 5. 复合泊松过程

- **例2.7.4** 设投保人的死亡是参数为 $\lambda$  的Poisson过程，对于第 $n$ 个死亡的投保人用随机变量  $Y_n$ 描述，同时也表示该投保人的价值，并且  $Y_n$  ( $n=1,2,\dots$ ) 相互独立同服从参数为  $a$  ( $a>0$ ) 的指数分布.令 $X(t)$ 表示在期间 $[0,t)$ 内保险公司必须付出的全部赔偿，求 $E[X(t)]$ 和 $D[X(t)]$ .

## 5. 复合泊松过程

- 解 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 表示死亡的投保人所形成的Poisson过程, 其参数为 $\lambda$ , 则 $X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$ ,  $t \geq 0$ . 从而 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是复合的Poisson过程.

由于  $EY_n = \frac{1}{a}, DY_n = \frac{1}{a^2}$

从而  $EY_n^2 = DY_n + (EY_n)^2 = \frac{2}{a^2}$

因此  $E[X(t)] = \lambda t EY_n = \frac{\lambda t}{a}, D[X(t)] = \lambda t EY_n^2 = \frac{2\lambda t}{a^2}$

# The End

