2022 矩阵论期末考试参考答案

一、单项选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1-5.　CBADD　　　　6-10.　CACDC

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1.　6　　　　2.　2

3.　$5\sqrt{5}+2$　　　　4.　2

5.　填 $\boldsymbol{A}$ 或 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$　　　　6.　λ^2

7.　1　　　　8.　e

9.　$\dfrac{2}{\mathrm{e}}$　　　　10.　$\mathrm{e}-2$

三、设 T 是线性空间 V 上的线性变换，T_e 为单位变换，$\sigma = 2T^2 - 3T + T_e$，

求证：$R(\sigma)$ 与 $N(\sigma)$ 都是 $T-$子空间。

证明：对 $\forall y \in R(\sigma)$，$\exists x \in V$，使得 $y = \sigma(x) = 2T^2(x) - 3T(x) + T_e(x)$，则

$$\begin{aligned} T(y) &= T\left(2T^2(x) - 3T(x) + T_e(x)\right) = 2T^3(x) - 3T^2(x) + T(x) \\ &= \left(2T^2 - 3T + T_e\right)\left(T(x)\right) = \sigma\left(T(x)\right) \in R(\sigma) \end{aligned}$$

因此，$R(\sigma)$ 是 $T-$子空间。　　　　......4 分

对 $\forall x \in N(\sigma)$，$\sigma(x) = 0$，则

$$\sigma\left(T(x)\right) = 2T^3(x) - 3T^2(x) + T(x) = T\left(\sigma(x)\right) = T(0) = 0,$$

因此，$T(x) \in N(\sigma)$，$N(\sigma)$ 是 $T-$子空间。　　　　......8 分

四、（本题 8 分）用酉变换将二次型化为标准形，并写出所用的变换.

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2\bar{x}_1x_1 + \mathrm{i}\,\bar{x}_1x_2 - \bar{x}_1x_3 - \mathrm{i}\,\bar{x}_2x_1 + \mathrm{i}\,\bar{x}_2x_3 - \bar{x}_3x_1 - \mathrm{i}\,\bar{x}_3x_2$$

解 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}2 & \mathrm{i} & -1\\ -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i}\\ -1 & -\mathrm{i} & 0\end{bmatrix}$ ......2 分

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -\mathrm{i} & 1\\ \mathrm{i} & \lambda & -\mathrm{i}\\ 1 & \mathrm{i} & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda-3)=0$，

解出矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\quad \lambda_2=-1,\quad \lambda_3=3$， ......4 分

对特征值 $\lambda_1=0$，解方程组 $Ax=0$，解得特征向量 $\alpha_1=[1\quad \mathrm{i}\quad 1]^{\mathrm{T}}$；

对特征值 $\lambda_2=-1$，解方程组 $(-E-A)x=0$，解得特征向量 $\alpha_2=[0\quad -\mathrm{i}\quad 1]^{\mathrm{T}}$；

对特征值 $\lambda_3=3$，解方程组 $(3E-A)x=0$，解得特征向量 $\alpha_3=[-2\quad \mathrm{i}\quad 1]^{\mathrm{T}}$；

单位化得 $\beta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}[1\quad \mathrm{i}\quad 1]^{\mathrm{T}}$，$\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}[0\quad -\mathrm{i}\quad 1]^{\mathrm{T}}$，$\beta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}[-2\quad \mathrm{i}\quad 1]^{\mathrm{T}}$，

......6 分

令 $U=[\beta_1\quad \beta_2\quad \beta_3]$ 为酉矩阵，则 $U^{-1}AU=U^{H}AU=\mathrm{diag}(0,\ -0,\ 3)$，

在酉变换 $x=Uy$ 下，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 变为标准形 $-|y_2|^2+3|y_3|^2$

......8 分

五、（本题 8 分）求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ 的奇异值分解.

解 令 $B=A^{H}A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，

由 $|\lambda E-B|=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)=0$ 解出矩阵 B 的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=1,\lambda_3=0$，

因此，矩阵 A 的奇异值为 $\sigma_1=\sqrt{3},\ \sigma_2=1$，令 $\Delta=\mathrm{diag}(\sqrt{3},1)$， ......3 分

算出矩阵 $B=A^{H}A$ 的标准正交的特征向量为

$$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\quad \beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\quad \beta_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

令 $V_1=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$V=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$，

......5 分

令 $U_1=AV_1\Delta^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\end{bmatrix}$，取 $U_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$，

使 $U=\begin{bmatrix}U_1 & U_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$ 为酉矩阵，

因此，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为 $A=U\begin{bmatrix}\Delta & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^H$.　　　......8 分

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^H$$

六、已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$，（1）求若当型矩阵 J 及可逆阵 T，使 $T^{-1}AT=J$；

（2）计算 $\sin A$.

解　（1）由 $|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-4)=0$，得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=4$，

又由特征值$\lambda=2$的几何重数为 1，则的若当型矩阵为$J=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$，

......5 分

令$T=\begin{bmatrix}t_1 & t_2 & t_3\end{bmatrix}$，若$T^{-1}AT=J$，即$A\begin{bmatrix}t_1 & t_2 & t_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_1 & t_2 & t_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$，

因此， $At_1=2t_1$，$At_2=2t_2+t_1$，$At_3=4t_3$，

解方程组$(A-2E)t_1=0$，得$t_1=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$；

解方程组$(A-2E)t_2=t_1$，得$t_2=\begin{bmatrix}0&-1&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$；

解方程组$(A-4E)t_3=0$，得$t_3=\begin{bmatrix}3&2&2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$；

因此，$T=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&-1&2\\0&1&2\end{bmatrix}$，$J=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$，则有$T^{-1}AT=J$． ......10 分

（2） 由 $f(J)=\begin{bmatrix}f(2)&f'(2)&0\\0&f(2)&0\\0&0&f(4)\end{bmatrix}$，则 $\sin J=\begin{bmatrix}\sin 2&\cos 2&0\\0&\sin 2&0\\0&0&\sin 4\end{bmatrix}$，

因此，

$$\sin A=T(\sin J)T^{-1}=T\begin{bmatrix}\sin 2&\cos 2&0\\0&\sin 2&0\\0&0&\sin 4\end{bmatrix}T^{-1}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4\sin 2&-3\sin 2-2\cos 2+3\sin 4&-3\sin 2+2\cos 2+3\sin 4\\0&2\sin 2+2\sin 4&-2\sin 2+2\sin 4\\0&-2\sin 2+2\sin 4&2\sin 2+2\sin 4\end{bmatrix}$$

......16 分

五、方法 2

解 令 $B=AA^H=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}$,

由 $|\lambda E-B|=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)=0$ 解出矩阵 B 的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=1,\lambda_3=0$，

因此，矩阵 A 的奇异值为 $\sigma_1=\sqrt{3},\ \sigma_2=1$，令 $\Delta=\mathrm{diag}\left(\sqrt{3},1\right)$，　　......3 分

算出矩阵 $B=A^HA$ 的标准正交的特征向量为

$$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{6}}[1\quad 1\quad 2]^{\mathrm{T}},\quad \beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}[-1\quad 1\quad 0]^{\mathrm{T}},\quad \beta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}[1\quad 1\quad -1]^{\mathrm{T}},$$

令 $U_1=[\beta_1\quad \beta_2]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}&0\end{bmatrix}$, $U=[\beta_1\quad \beta_2\quad \beta_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$,

......5 分

令 $V_1=A^HU_1\Delta^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\\0&0\end{bmatrix}$，取 $V_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$,

使 $V=[V_1\quad V_2]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&\sqrt{2}\end{bmatrix}$ 为酉矩阵,

因此，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为 $A=U\begin{bmatrix}\Delta&0\\0&0\end{bmatrix}V^H$.　　......8 分

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\end{bmatrix}^H$$