一，不是原题，涉及到泊松分布的数字特征和特征函数，把上课的 ppt 第一章弄懂就没问题

二 原题，数都没变

例 2.4.4 设随机过程 $\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$ 只有两条样本曲线，如图 2-4 所示，

$$\begin{cases} x(\omega_1, t) = a\cos t, & -\infty < t < +\infty \\ x(\omega_2, t) = a\cos(t+\pi) = -a\cos t, & -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

其中 $a>0$，且 $P(\omega_1)=\dfrac{2}{3}$，$P(\omega_2)=\dfrac{1}{3}$. 试求随机过程 $\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$ 的数字特征.

解 $m_X(t)=E[X(t)]=-a\cos t\cdot\dfrac{1}{3}+a\cos t\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}a\cos t$，$-\infty<t<+\infty$

$$R_X(s, t)=E[X(s)X(t)]=(-a\cos s)(-a\cos t)\cdot\frac{1}{3}+(a\cos s)(a\cos t)\cdot\frac{2}{3}$$

$$=a^2\cos s\cos t, \quad -\infty<s, t<+\infty$$

$$C_X(s, t)=R_X(s, t)-m_X(s)m_X(t)=a^2\cos s\cos t-\frac{1}{3}a\cos s\cdot\frac{1}{3}a\cos t$$

$$=\frac{8}{9}a^2\cos s\cos t, \quad -\infty<s, t<+\infty$$

$$D_X(t)=C_X(t, t)=\frac{8}{9}(a\cos t)^2, \quad -\infty<t<+\infty$$

$$\Phi_X(t)=R_X(t, t)=(a\cos t)^2, \quad -\infty<t<+\infty$$

三 原题，数都没变

例 2.7.1 设$X(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$, $-\infty<t<+\infty$，其中A, B相互独立，且都服从正态分布$N(0, \sigma^2)$的随机变量，ω是实常数. 试证明$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$是正态过程，并求它的有限维分布.

- **证明** 由于A,B相互独立，且都服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，因此$(A,B)\sim N(0,\sigma^2\boldsymbol{E})$（$\boldsymbol{E}$是二阶单位矩阵）. 对于任意 $n\geq1$ 和任意$t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$，由于

$$
\begin{gathered}
X(t_1)=A\cos\omega t_1+B\sin\omega t_1\\
X(t_2)=A\cos\omega t_2+B\sin\omega t_2\\
\vdots\\
X(t_n)=A\cos\omega t_n+B\sin\omega t_n
\end{gathered}
$$

即

$$
\begin{aligned}
(X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n))&=(A,B)\begin{bmatrix}\cos\omega t_1 & \cos\omega t_2 & \cdots & \cos\omega t_n\\ \sin\omega t_1 & \sin\omega t_2 & \cdots & \sin\omega t_n\end{bmatrix}\\
&\overset{def}{=}(A,B)C
\end{aligned}
$$

因而，$(X(t_1), X(t_2),\ldots, X(t_n))$ 是**二维正态随机变量**(A,B)的**线性变换**，所以，$(X(t_1), X(t_2),\ldots, X(t_n))$ **是n维正态随机变量**，故**$\{X(t), t\in T\}$是正态过程**. 由于$\{X(t), t\in T\}$是正态过程，且$E[X(t)]=0$，因而

$$(X(t_1), X(t_2),\ldots, X(t_n))\sim N(0, \boldsymbol{B}),\quad t_1,t_2,\ldots,t_n\in T.$$

其中

$$
\begin{aligned}
B=C^T\sigma^2EC&=\sigma^2\begin{bmatrix}\cos\omega t_1 & \sin\omega t_1\\ \cos\omega t_2 & \sin\omega t_2\\ \vdots & \vdots\\ \cos\omega t_n & \sin\omega t_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\omega t_1 & \cos\omega t_2 & \cdots & \cos\omega t_n\\ \sin\omega t_1 & \sin\omega t_2 & \cdots & \sin\omega t_n\end{bmatrix}\\
&=\sigma^2\begin{bmatrix}1 & \cos\omega(t_1-t_2) & \cdots & \cos\omega(t_1-t_n)\\ \cos\omega(t_2-t_1) & 1 & \cdots & \cos\omega(t_2-t_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \cos\omega(t_n-t_1) & \cos\omega(t_n-t_1) & \cdots & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

四 原题，数都没变

- **例 2.7.2** 假设乘客按照参数为λ的Poisson过程$\{N(t), t \geq 0\}$来到一个火车站乘坐某次列车，若火车在时刻 t 启程，试求在 $[0,t]$ 内到达火车站乘坐该次列车的乘客等待时间总和的数学期望。

- **解：** 设τ_k是第k个乘客到达火车站的时刻，则其等待时间为$t-\tau_k$，从而在$[0,t]$内到达火车站乘坐该次列车的乘客等待时间总和为

$$\sum_{k=1}^{N(t)}(t-\tau_k)$$

$$\begin{aligned}
E[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-\tau_k)] &= E[E(\sum_{k=1}^{N(t)}(t-\tau_k) \mid N(t))] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E(\sum_{k=1}^{n}(t-\tau_k) \mid N(t)=n)P(N(t)=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(nt-\sum_{k=1}^{n}E(\tau_k \mid N(t)=n))P(N(t)=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(nt-\sum_{k=1}^{n}EU_{(k)})P(N(t)=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(nt-\sum_{k=1}^{n}EU_k)P(N(t)=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(nt-\frac{1}{2}nt)\cdot\frac{(\lambda t)^{n-1}}{n!}e^{-\lambda t} = \frac{\lambda t^2}{2}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!})e^{-\lambda t} = \frac{\lambda t^2}{2}e^{\lambda t}e^{-\lambda t} \\
&= \frac{\lambda t^2}{2}
\end{aligned}$$

五 原题但是数可能改了

例5.4.4 设有状态空间S={0,1,2,…,6}的齐次马尔科夫链，其一步转移概率矩阵为

(1)试对S进行分类，并说明各状态类型；

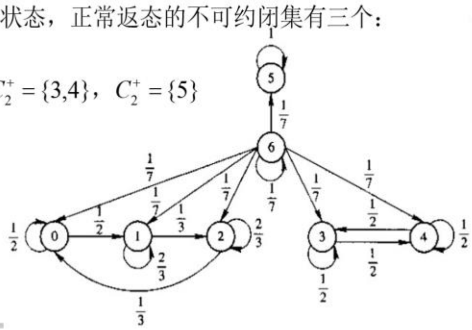
(2)求平稳分布，其平稳分布是否唯一？为什么？

(3)求 $P(X_{n+2}=1\mid X_n=0)$, $P(X_{n+2}=2\mid X_n=0)$

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

解：(1)画状态转移图，如下图所示。依据状态转移图，6是非常返态，D={6}是非常返状态集，0,1,2,3,4,5是正常返非周期状态，正常返态的不可约闭集有三个：

$C_1^+=\{0,1,2\}$，$C_2^+=\{3,4\}$，$C_2^+=\{5\}$



(2)由(1)知，此齐次马尔科夫链有三个不同的正常返状态的不可约闭集，故其平稳分布不唯一，并且有无穷多个平稳分布。设对应于C_1^+,C_2^+,C_3^+的转移概率矩阵分别为

$$P_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix},\quad P_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},\quad P_3=(1)$$

六 有两问，第一问是这个，第二问不会

- 设某厂的商品销售状况可以分为三个状态：滞销（用1表示）、正常（用2表示）、畅销 （用3表示） （按一个月计）。若经过对历史资料的整理分析，其销售状态的变化（从这月到下个月）与初始时刻无关，且该销售过程的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{3}{9} & \frac{1}{9} & \frac{5}{9}\\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

试分析该过程经过相当长时间后，哪一种销售状态的可能性最大？

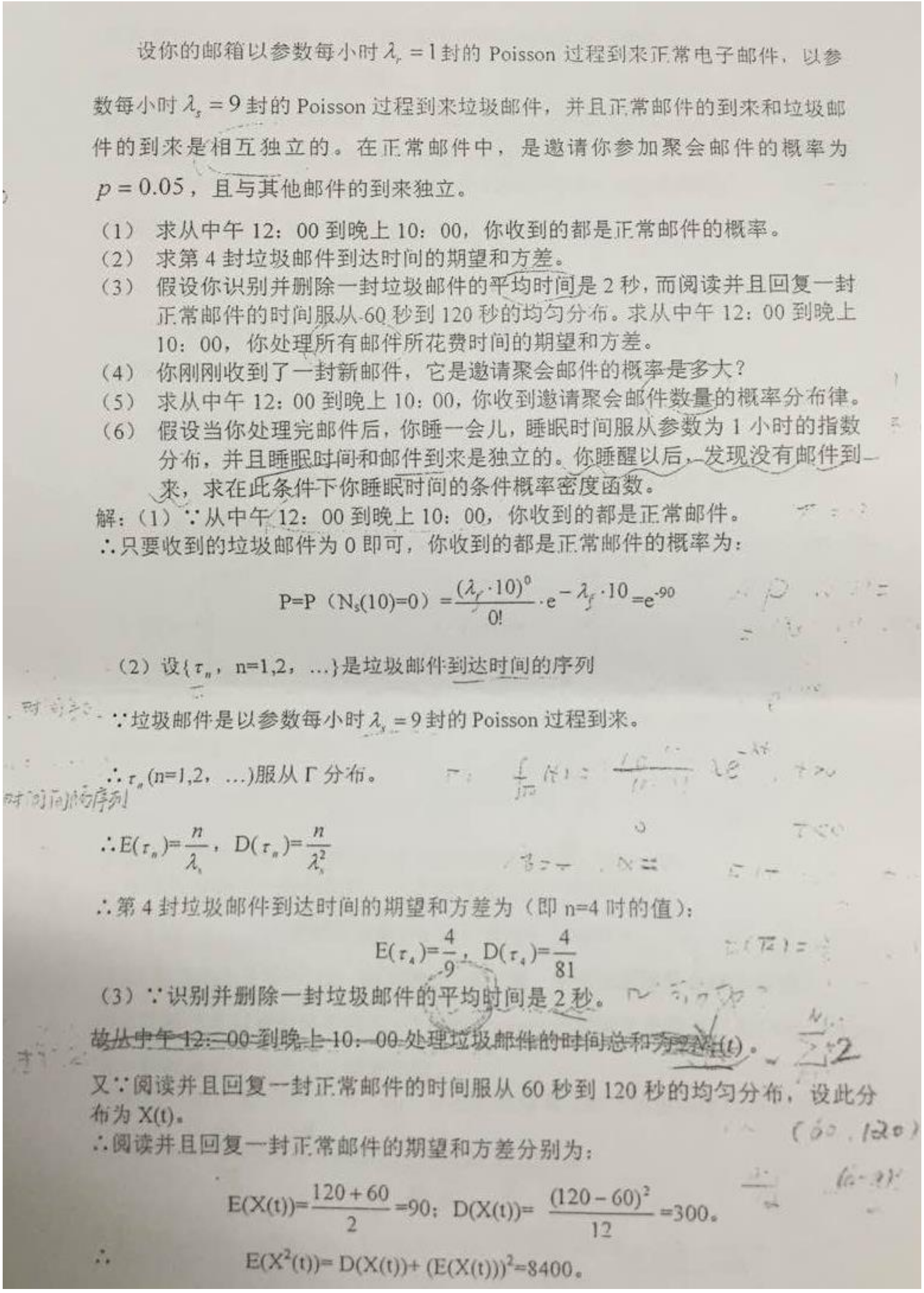
- 解：经计算可得$P^{(2)}>0$,即2步转移概率矩阵中每个元素均大于0，由马尔科夫定理知，该马氏过程为一遍历链，其极限分布存在且唯一，而且，其平稳分布即为极限分布。设其平稳分布为

$\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_3)$ ，由求平稳分布的方程组解得

$$\begin{cases}\pi_1=\frac{1}{2}\pi_1+\frac{3}{9}\pi_2+\frac{1}{6}\pi_3\\ \pi_2=\frac{1}{2}\pi_1+\frac{1}{9}\pi_2+\frac{4}{6}\pi_3\\ \pi_3=\frac{5}{9}\pi_2+\frac{1}{6}\pi_3\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}$$

其解为 $\pi_1=\frac{8}{23}$，$\pi_2=\frac{9}{23}$，$\pi_3=\frac{6}{23}$ 。此结果表明，经过相当长时间以后，正常销售状态的可能性最大。

七 出的前 4 问，数改了

7. 

设你的邮箱以参数每小时 $\lambda_r = 1$ 封的 Poisson 过程到来正常电子邮件，以参数每小时 $\lambda_s = 9$ 封的 Poisson 过程到来垃圾邮件，并且正常邮件的到来和垃圾邮件的到来是相互独立的。在正常邮件中，是邀请你参加聚会邮件的概率为 $p = 0.05$，且与其他邮件的到来独立。

（1） 求从中午 12：00 到晚上 10：00，你收到的都是正常邮件的概率。

（2） 求第 4 封垃圾邮件到达时间的期望和方差。

（3） 假设你识别并删除一封垃圾邮件的平均时间是 2 秒，而阅读并且回复一封正常邮件的时间服从 60 秒到 120 秒的均匀分布。求从中午 12：00 到晚上 10：00，你处理所有邮件所花费时间的期望和方差。

（4） 你刚刚收到了一封新邮件，它是邀请聚会邮件的概率是多大？

（5） 求从中午 12：00 到晚上 10：00，你收到邀请聚会邮件数量的概率分布律。

（6） 假设当你处理完邮件后，你睡一会儿，睡眠时间服从参数为 1 小时的指数分布，并且睡眠时间和邮件到来是独立的。你睡醒以后，发现没有邮件到来，求在此条件下你睡眠时间的条件概率密度函数。

解：（1）∵从中午 12：00 到晚上 10：00，你收到的都是正常邮件。

∴只要收到的垃圾邮件为 0 即可，你收到的都是正常邮件的概率为：

$$P=P（N_s(10)=0）=\frac{(\lambda_f\cdot 10)^0}{0!}\cdot e^{-\lambda_f\cdot 10}=e^{-90}$$

（2）设$\{\tau_n$，n=1,2，…$\}$是垃圾邮件到达时间的序列

∵垃圾邮件是以参数每小时 $\lambda_s=9$ 封的 Poisson 过程到来。

∴τ_n (n=1,2，…)服从 Γ 分布。

时间间隔序列

$$\therefore E(\tau_n)=\frac{n}{\lambda_s},\quad D(\tau_n)=\frac{n}{\lambda_s^2}$$

∴第 4 封垃圾邮件到达时间的期望和方差为（即 n=4 时的值）：

$$E(\tau_4)=\frac{4}{9},\quad D(\tau_4)=\frac{4}{81}$$

（3）∵识别并删除一封垃圾邮件的平均时间是 2 秒。

~~故从中午 12：00 到晚上 10：00 处理垃圾邮件的时间总和为Y(t)。~~

又∵阅读并且回复一封正常邮件的时间服从 60 秒到 120 秒的均匀分布，设此分布为 X(t)。

(60, 120)

∴阅读并且回复一封正常邮件的期望和方差分别为：

$$E(X(t))=\frac{120+60}{2}=90;\quad D(X(t))=\frac{(120-60)^2}{12}=300。$$

$$\therefore \quad E(X^2(t))=D(X(t))+(E(X(t)))^2=8400。$$

故从中午 12：00 到晚上 10：00 处理正常邮件的时间总和为 $X(t)N_r(t)$。

所以该过程属于复合泊松过程。

故其 $E(X(t)N_r(t))=E(X(t))\cdot\lambda_r\cdot t$，$D(X(t)N_r(t))=E(X^2(t))\cdot\lambda_r\cdot t$。

∵处理所有邮件所花费时间为上述两时间之和。

∴E(处理所有邮件时间)=E(处理垃圾邮件时间+处理正常邮件时间)

$=E(2N_s(t)+X(t)N_r(t))=2E(N_s(t))+E(X(t)N_r(t))$

$=2\cdot\lambda_s\cdot 10+E(X(t))\cdot\lambda_r\cdot 10=1080$。

D(处理所有邮件时间)=D(处理垃圾邮件时间+处理正常邮件时间)

$=D(2N_s(t)+X(t)N_r(t))=2^2D(N_s(t))+D(X(t)N_r(t))$

$=2^2\cdot\lambda_s\cdot 10+E(X^2(t))\cdot\lambda_r\cdot 10=84360$。

（4）设 T_s 和 T_r 分别是垃圾邮件的到达的时间间隔和正常邮件的到达的时间间隔，则其概率密度函数分别为：

$$f_{T_s}(t)=\begin{cases}\lambda_s e^{-\lambda_s t_s}, & t_s\ge 0\\ 0, & t_s<0\end{cases},\quad f_{T_r}(t)=\begin{cases}\lambda_r e^{-\lambda_r t_r}, & t_r\ge 0\\ 0, & t_r<0\end{cases}$$

所以收到的一封新邮件中正常邮件（即正常邮件的到达时间间隔比垃圾邮件到达时间间隔短）的概率为：

$$P(\text{正常})=P\{T_r<T_s\}=\int_0^{+\infty}\lambda_r e^{-\lambda_r t_r}\,dt_r\int_{t_r}^{+\infty}\lambda_s e^{-\lambda_s t_s}\,dt_s=\frac{1}{10}$$

并且在正常邮件中，是邀请你参加聚会邮件的概率为 p=0.05。

∴你刚刚收到了一封新邮件，它是邀请聚会邮件的概率为：

$$P(\text{邀请聚会邮件})=P(\text{正常})\cdot p=\frac{1}{10}\times 0.05=\frac{1}{200}。$$

（5）设 Y(t)为从中午 12：00 到晚上 10：00，你收到邀请聚会邮件数量。

由正常邮件是以参数每小时 $\lambda_r=1$ 封的 Poisson 过程到来及题设可知{Y(t)，t=10}是一零初值的平稳的独立增量过程。

∴从中午 12：00 到晚上 10：00，你收到邀请聚会邮件数量的概率分布律为：

$$P(Y(10)=k)=\sum_{i=k}^{\infty}P(N_r(10)=i)P(Y(10)=k\mid N(10)=i)$$

$$=\sum_{i=k}^{\infty}P(N_r(10)=i)P(Y(10)=k\mid N(10)=i)=\sum_{i=k}^{\infty}\frac{(10)^i}{i!}e^{-10}C_i^k 0.5^k(1-0.5)^{i-k}$$

$$=\sum_{i=k}^{\infty}\frac{(10)^k(10)^{i-k}}{i!}e^{-10}\frac{i!}{k!(i-k)!}0.05^k(1-0.05)^{i-k}=\frac{(0.5)^k}{k!}e^{-10}\boxed{\sum_{i-k=0}^{\infty}\frac{(9.5)^{i-k}}{(i-k)!}}$$

$$=\frac{(0.5)^k}{k!}e^{-10}\cdot e^{9.5}=\frac{(0.5)^k}{k!}e^{-0.5}\qquad \frac{(1\times0.05\times10)^k}{k!}e^{-1\times0.05\times10}$$

（6）∵睡眠时间服从参数为 1 小时的指数分布

∴睡觉时间 T 的概率密度函数为:

$$f_T(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t\geq0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

又由于正常邮件的到来和垃圾邮件的到来是相互独立的且都是以 Poisson 过程到来。

所以邮件的到来符合每小时（$\lambda=\lambda_r+\lambda_s=10$封）的 Poisson 过程。设此过程为

{N(t)，t≥0}

因此，睡醒以后，发现没有邮件到来的概率为：

$P_1=P(N(t)=0，t\in[0,T])=\int_0^{+\infty}\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t}e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-11t}dt=\frac{1}{11}$。

而在睡眠的期间内没有邮件到来的概率为：

不邮件　睡眠

$P_2=P(N(t)=0，t\in[0,t])=\int_0^{t}\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t}e^{-t}dt=\int_0^{t}e^{-11t}dt=\frac{1}{11}(1-e^{-11t})$。

∴在睡醒以后，发现没有邮件到来的条件下睡眠时间的分布函数为：

当 $t<0$ 时，　$F_{T|没有邮件到来}(t)=0$

当 $t\geq0$ 时，　$F_{T|没有邮件到来}(t)=\frac{P_2}{P_1}=1-e^{-11t}$

所以，当 $t<0$ 时，$f_{T|没有邮件到来}(t)=F_{T|没有邮件到来}(t)'=0$;

当 $t\geq0$ 时，$f_{T|没有邮件到来}(t)=F_{T|没有邮件到来}(t)'=11e^{-11t}$。

∴在睡醒以后，发现没有邮件到来的条件下睡眠时间的概率密度函数为：

~~$11e^{-11t}$，$t\geq0$~~

$$f_{T|没有邮件到来}(t)=\begin{cases}11e^{-11t}, & t\geq0\\ 0, & t<0\end{cases}$$