矩阵论（青岛）参考答案及评分标准

2023 年 10 月 15 日

一、单项选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1-5 BCCDD　　6-10 ABABB

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. $3+\sqrt{7}+\sqrt{2}$;

2. $A+2B$;

3. $|a|<\dfrac{\sqrt{14}}{2}$;

4. $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$;

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^3 \end{bmatrix}$;

6. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

7. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

8. -18;

9. -64;

10. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

三、证明题（8 分）

设$\|x\|_v$是C^n上的一个向量范数，$A\in\mathrm{C}^{n\times n}$，定义实值函数

$$\|A\|=\max_{x\neq\theta}\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v},$$

试证明：$\|A\|$是与向量范数$\|x\|_v$相容的矩阵范数。

证明：（1）　当A为非零矩阵时，一定可以找到非零向量x，使$Ax\neq\theta$，从而有

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} > 0$$

即$\| A \|$满足正定性；另外，显然$\| A \| = 0$当且仅当$A = 0_{n\times n}$。 ……………..1 分

（2）对任意的常数$k \in C$，有

$$\|kA\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|kAx\|_v}{\|x\|_v} = |k| \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = |k|\|A\|$$

即$\| A \|$满足齐次性； ……………………………………………………………..1 分

（3）对任意的方阵$A, B \in C^{n\times n}$,有

$$\begin{aligned}
\|A+B\| &= \max_{x \neq 0} \frac{\|(A+B)x\|_v}{\|x\|_v} \\
&\leq \max_{x \neq 0} \left(\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} + \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v}\right) \\
&\leq \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} + \max_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} \\
&= \|A\| + \|B\|
\end{aligned}$$

即$\| A \|$满足三角不等式； ……………………………………..…………..2 分

（4）对任意的方阵$A, B \in C^{n\times n}$,有

$$\begin{aligned}
\|AB\| &= \max_{x \neq 0} \left(\|ABx\|_v \big/ \|x\|_v \right) \\
&= \max_{x \neq 0} \frac{\|A(Bx)\|_v}{\|Bx\|_v} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} \\
&\leq \max_{Bx \neq 0} \frac{\| A(Bx) \|}{\| Bx \|} \max_{x \neq 0} \frac{\| Bx \|}{\| x \|} \\
&\leq \|A\| \cdot \|B\|
\end{aligned}$$

即$\| A \|$满足相容性； …………………………………….……………..…..2 分

综合（1）-（4），上面定义的实值函数$\| A \|$是矩阵A的范数。

再证$\| A \|$与$\| x \|_v$的相容性。

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \geq \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$$

亦即$\|Ax\|_v \le \|A\|\|x\|_v$。 ……………………………………………..…………..2 分

四、计算题（8 分）

求一个酉变换$x=Uy$，化 Hermite 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+2x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2$为标准型.

答：二次型$f(x_1,x_2,x_3)$对应的 Hermite 矩阵 $A=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}$

它的特征多项式为 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}5-\lambda&0&0\\0&2-\lambda&1\\0&1&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda),$

于是A的特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$，$\lambda_3=5$。 ……………………………..……3 分

当$\lambda_1=1$时，对应的线性无关的特征向量为$\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$，单位化得$\beta_1=\begin{bmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$；

当$\lambda_2=3$时，对应的线性无关的特征向量为$\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$，单位化得$\beta_2=\begin{bmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$；

当$\lambda_3=5$时，对应的线性无关的特征向量为$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，单位化得$\beta_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$；

令$U=\begin{bmatrix}0&0&1\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{bmatrix}$，则酉变换为$x=Uy$，且$U^HAU=\begin{bmatrix}1&&\\&3&\\&&5\end{bmatrix}$。所得标准型为$f(x_1,x_2,x_3)=x^HAx=y^H(U^HAU)y=\overline{y}_1y_1+3\overline{y}_2y_2+5\overline{y}_3y_3$。 …………5 分

五、计算题（8 分）

求矩阵$A=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&0&6\end{bmatrix}$的谱分解表达式。

答： $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&-a\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2)$，特征值$\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=-2$，

$\lambda=6$时，特征向量为$\xi_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&1&0\end{bmatrix}^T,\xi_2=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}^T$，

当$\lambda=-2$时，对应特征向量为$\xi_3=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&1&0\end{bmatrix}^T$。 ……………….………6 分

所以，$P=[\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},P^{-1}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\\-1&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$，

令$E_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&0\\1&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，

$E_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&0\\-1&\frac{1}{2}&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，

故A的谱分解表达式为$A=6E_1-2E_2$。 ………………..………………2 分

六、计算题（16 分）

已知矩阵$A=\begin{bmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{bmatrix}$,

（1）求A的最小多项式$m(x)$和 Jordan 标准型J;

（2）求 $f(A)$ 的 Jordan 表示;

（3）计算 $\mathrm{e}^A, \mathrm{e}^{tA}, \sin A$.

答：（1）求出 A 的 Jordan 标准形矩阵 J 与最小多项式 $m(x)$，

$$J=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ m(x)=(x-1)^2.$$ …………………...……………………….……6 分

（2）求 $f(A)$ 的 Jordan 表示；由于相似变换矩阵 $P=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$，从而 $f(A)$ 的 Jordan 表示为

$$f(A)=Pf(J)P^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(1) & 0 & 0\\ 0 & f(1) & f^{'}(1)\\ 0 & 0 & f(1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}f(1)-2f^{'}(1) & -2f^{'}(1) & 6f^{'}(1)\\ -f^{'}(1) & f(1)-f^{'}(1) & 3f^{'}(1)\\ -f^{'}(1) & -f^{'}(1) & f(1)+3f^{'}(1)\end{bmatrix}$$

……………………..……6 分

（3）计算 $e^{tA}, \sin A$。

当 $f(x)=e^{tx}$ 时，可得 $f(1)=e^t, f^{'}(1)=te^t$，

$$e^{tA}=\begin{bmatrix}(1-2t)e^t & -2te^t & 6te^t\\ -te^t & (1-t)e^t & 3te^t\\ -te^t & -te^t & (1+3t)e^t\end{bmatrix},$$ ……………………..……2 分

当 $f(x)=\sin x$ 时，可得 $f(1)=\sin 1, f^{'}(1)=\cos 1$，

$$\sin A=\begin{bmatrix}\sin 1-2\cos 1 & -2\cos 1 & 6Cos1\\ -\cos 1 & \sin 1-\cos 1 & 3\cos 1\\ -\cos 1 & -\cos 1 & \sin 1+3\cos 1\end{bmatrix}。$$ …………………..……2 分