姓名：

学号：

装 订 线

哈尔滨工程大学研究生试卷

（ 2023 年 秋 季学期）

课程编号： 202032020004 课程名称： 矩阵论

一、单项选择题（每小题 3 分, 共 30 分）

1. 对于如下两个集合以及相应的加法和数乘运算, 下列说法**正确**的是______.

①线性非齐次方程组 $Ax=b$ 的解空间

$$V=\{\xi\in\mathrm{R}^n \mid \xi=\eta+C_1\alpha_1+\cdots+C_{n-r}\alpha_{n-r}, A\in\mathrm{R}^{m\times n}\}$$

按照通常向量间的加法和数乘运算, 其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$ 是对应齐次方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系, η 为 $Ax=b$ 的一个特解, 加法和数乘运算为通常向量间的加法和数乘运算..

②在实数域 R 上, $V=\{\alpha \mid \alpha=[a,b], a,b\in\mathrm{R}\}$, 对于 V 中向量 $\alpha=[a_1,b_1]$, $\beta=[a_2,b_2]$, 及 $k\in\mathrm{R}$, 定义线性运算:

$$\alpha\oplus\beta=[a_1+a_2,b_1+b_2],\ k\circ\alpha=[ka_1,b_1]$$

(A) ①和②都构成线性空间;

(B) ①和②都不构成线性空间;

(C) ①构成线性空间, ②不构成线性空间;

(D) ①不构成线性空间, ②构成线性空间.

2. 设 $V_1=\left\{\begin{bmatrix} x & y \\ x & y\end{bmatrix} \middle| x,y\in\mathrm{C}\right\}$, $V_2=\left\{\begin{bmatrix} x & y \\ -y & -x\end{bmatrix} \middle| x,y\in\mathrm{C}\right\}$ 为 $C^{2\times 2}$ 的子空间，则 $\dim(V_1+V_2)=$______.

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

3. 在 $F[x]_3$ 中, 从基 $1,x,x^2$ 到基 $1+x, x+x^2, x^2$ 的过渡矩阵为 $P=$______.

(A) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}$; (B) $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$; (C) $\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$; (D) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}$.

4. 下列矩阵范数中**不是**算子范数的是______.

(A) $\|A\|_1$; (B) $\|A\|_2$; (C) $\|A\|_\infty$; (D) $\|A\|_F$.

5. 若 V 是酉空间（复内积空间）, (x,y) 为 V 上的内积运算, 对任意 $x,y,z\in V$, 以下说法**正确**的为______.

(A) $(x,y)=x^{\mathrm{H}}y$;

(B) 若 $A=A^{\mathrm{H}}$， 则 A 为内积在基下的矩阵;

(C) 任何酉（欧氏）空间 V 的子空间 W 的正交补 $W^{\perp}$ 均不唯一;

(D) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$.

6. 已知 R^3 中线性变换 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$, 且 R^3 中向量 β 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $[1,-1,1]^{\mathrm{T}}$, 则 $T(\beta)$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为______.

(A) $[2,0,-2]^{\mathrm{T}}$; (B) $[-2,0,2]^{\mathrm{T}}$; (C) $[0,-2,2]^{\mathrm{T}}$; (D) $[2,-2,0]^{\mathrm{T}}$.

7. 以下说法**不正确**的是______.

(A) Hermite 阵一定是正规矩阵; (B) 单纯阵一定是 Hermite 阵;

(C) 单纯阵的谱分解是唯一的; (D) 矩阵的满秩分解不唯一.

8. 设 A 的奇异值分解为 $A=U\begin{bmatrix}\Delta & O\\ O & O\end{bmatrix}V^{\mathrm{H}}$, 如果 A 为可逆矩阵, 则 A^{-1} 的奇异值分解为 $A^{-1}=$______.

(A) $V\Delta^{-1}U^{\mathrm{H}}$; (B) $U\Delta^{-1}V^{\mathrm{H}}$; (C) $V^{\mathrm{H}}\Delta^{-\mathrm{H}}U$; (D) A,B,C 都不对.

9. 设矩阵 A 的谱半径 $\rho(A)<1$， 则下列说法**正确**的是______.

(A) $\lim\limits_{k\to\infty}A^k=C$（$C$ 为非零实数）; (B) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k=(E-A)^{-1}$;

(C) $(E-A)^{-1}=\dfrac{1}{E-A}$; (D) $A^{100}=O$.

10. 设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}\in\mathrm{C}^{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{p\times q}\in\mathrm{C}^{p\times q}$, $k\in\mathrm{C}$, 则下列命题**不一定正确**的是______.

(A) $k(A\otimes B)=(kA)\otimes B)=A\otimes(kB)$;

(B) $\mathrm{rank}(A\otimes B)=\mathrm{rank}(AB)$;

(C) $(A\otimes B)^{\mathrm{H}}=A^{\mathrm{H}}\otimes B^{\mathrm{H}}$;

(D) $A\otimes B$ 与 $B\otimes A$ 一般不相等.

二、填空题（每小题 3 分, 共 30 分）

1. 若 $A=\begin{bmatrix}1 & i & 0\\ i & -1 & 1\\ 1 & i & 0\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}1\\ 2i\\ 1\end{bmatrix}$, $i^2=-1$, 则 $\|A\|_{m_\infty}+\|Ab\|_\infty+\|A\|_F=$____________.

2. 设线性变换 T_1,T_2 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵分别为 A,B, 则线性变换 T_1+2T_2 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为_________.

3. 已知 Hermite 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x}_1x_1+4\overline{x}_2x_2+2\overline{x}_3x_3+2a\overline{x}_1x_2+2\overline{x}_2x_3$ 正定, 则常数 a 的取值范围为_________.

4. 设 $A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, 则 A 的 UR 分解为 $A=$_________.

5. λ 矩阵 $A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-2 & 1 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 1\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}$的 Smith 标准型为_____________.

6. 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, 则 $h(A)=A^5-4A^4+5A^3-2A^2+A-E=$_________.

7. 设 $\{A_n\}$ 是二阶可逆方阵组成的矩阵序列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{-1}=$______.

8. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$, 则 $A\otimes B$ 的全体特征值的和为_________.

9. 设 $A(x)=\begin{bmatrix}e^{2022x} & 3x^2 & 1\\ 2x & (x-1)^{2023} & 0\\ \sin x & \cos x & 0\end{bmatrix}$, 则 $\left|\int_0^2 A(x)\mathrm{d}x\right|=$_______.（$|\cdot|$为行列式）

10. 已知 $X=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}$, $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -6 & 2\\ 4 & 1 & 3 & -1\end{bmatrix}$, $F(X)=(AX)$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}F(X)}{\mathrm{d}X^{\mathrm{T}}}=$_____________.

三、证明题（8 分）

设 $\|x\|_v$ 是 C^n 上的一个向量范数, $A\in\mathrm{C}^{n\times n}$, 定义实值函数

$$\|A\|=\max_{x\neq\theta}\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v},$$

证明: $\|A\|$是与向量范数 $\|x\|_v$ 相容的矩阵范数.

四、计算题（8 分）

求一个酉变换 $x=Uy$, 化 Hermite 二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=5\overline{x}_1x_1+2\overline{x}_2x_2+2\overline{x}_2x_3+2\overline{x}_3x_3$$

为标准型.

五、计算题（8 分）

求矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 8 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$的谱分解表达式.

六、计算题（16 分）

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$,

（1）求 A 的最小多项式 $m(x)$ 和 Jordan 标准型 J;

（2）求 $f(A)$ 的 Jordan 表示;

（3）计算 $e^A, e^{tA}, \sin A$.

装

订

线