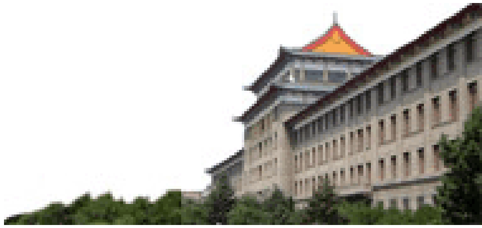
哈爾濱工程大學

HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY



随机过程

第1部分 概率论基础

1.3 随机变量的数字特征

- **常见的离散随机变量的期望和方差**

分布	分布律	期望	方差
0-1分布	$P(X=1)=p,\ P(X=0)=q,$ $0<p<1,\ p+q=1$	p	pq
二项分布	$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},$ $0<p<1,\ p+q=1,\ k=0,1,\cdots,n$	np	npq
泊松分布	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad \lambda>0,\ k=0,1,\cdots$	λ	λ
几何分布	$P(X=k)=pq^{k-1},$ $0<p<1,\ p+q=1,\ k=0,1,\cdots$	$1/p$	q/p^2
负二项分布	$P(X=j)=C_{j-1}^{k-1}p^k q^{n-k},$ $0<p<1,\ p+q=1,\ j\ge k$	k/p	kq/p^2
离散均匀分布	$P\left(X=a+i\dfrac{b-a}{n}\right)=\dfrac{1}{n+1},\quad i=0,1,\cdots,n$	$(a+b)/2$	$\dfrac{(n+2)(b-a)^2}{12n}$

1.3 随机变量的数字特征

- **常见的连续型随机变量的期望和方差**

分布	概率密度	期望	方差
均匀分布	$f(x)=\begin{cases}1/(b-a), & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
正态分布	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$	a	σ^2
指数分布	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\quad \lambda>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
瑞利分布	$f(x)=\dfrac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right),\quad \sigma>0$	$\sqrt{\pi/2}\sigma$	$(2-\pi/2)\sigma^2$
Γ 分布	$f(x)=\dfrac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\exp\left(-\dfrac{x}{\beta}\right),\quad \alpha,\beta>0$	$\beta\alpha$	$\beta^2\alpha$
χ^2 分布	$f(x)=\dfrac{x^{(N/2)-1}}{2^{N/2}\Gamma(N/2)}\exp\left(-\dfrac{x}{2}\right),\ N>0$	N	$2N$
β 分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases},\quad \alpha,\beta>0$	$\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

1.4 随机变量的特征函数

- **例1.4.1** 设X服从**单点分布**，即 $P(X=c)=1$, 其中c为常数，则X的特征函数

$$\varphi(t)=E[e^{jtX}]=e^{jtc}$$

- **例1.4.2** 设$X\sim B(n,p)$（**二项分布**，**Binomial**），即

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k} \quad k=0,1,2,\ldots,n, \quad 0<p<1, \quad q=1-p,$$

则X的特征函数

$$\varphi(t)=E[e^{jtX}]=\sum_{k=0}^{n}e^{jtk}C_n^k p^k q^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(pe^{jt})^k q^{n-k}=(pe^{jt}+q)^n$$

特别地，当$n=1$时，X服从0-1分布，其特征函数为

$$\varphi(t)=pe^{jt}+q$$

1.4 随机变量的特征函数

- **例1.4.3** 设X 服从**<u>泊松分布</u>**（**Poisson**），即

  $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$， k=0,1,2,…， λ>0,则 X 的特征函数

  $$\varphi(t)=E[e^{jtX}]=\sum_{k=0}^{\infty}e^{jtk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\underline{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{jt})^k}{k!}}=e^{-\lambda}\underline{e^{\lambda e^{jt}}}=e^{\lambda(e^{jt}-1)}$$

- **例1.4.4** 设X 服从区间[a,b]上的**<u>均匀分布</u>** (**Uniform**)，即

  X 的概率密度函数为

  $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

  则X 的特征函数

  $$\varphi(t)=E[e^{jtX}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jtx}f(x)dx=\int_a^b e^{jtx}\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{jt(b-a)}(e^{jtb}-e^{jta})$$

1.4 随机变量的特征函数

- **例1.4.5** 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$（**<u>正态分布</u>**，**Normal**），即X的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty,-\infty<\mu<+\infty,\sigma>0$$

则X的特征函数

$$\varphi(t)=E[e^{jtX}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jtx}f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jtx}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\overset{u=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jt(\sigma u+\mu)}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{j\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(u-j\sigma t)^2}{2}}du=e^{j\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$

$$\boxed{U=\frac{X-\mu}{\sigma},\ U\sim N(j\sigma t,1),\ f_U(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-j\sigma t)^2}{2}},\ \int_{-\infty}^{+\infty}f_U(u)du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-j\sigma t)^2}{2}}du=1}$$

1.4 随机变量的特征函数

- 特别地，若$X\sim N(0,1)$（**<u>标准正态分布</u>**，**Standard Normal**），则其特征函数

$$\varphi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$$

- **例1.4.6** 设X 服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的**<u>指数分布</u>**（**Exponential**），即X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

则X 的特征函数

$$\varphi(t)=E[e^{jtX}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jtx}f(x)dx=\int_0^{+\infty}e^{jtx}\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_0^{+\infty}\lambda e^{(jt-\lambda)x}dx=\frac{\lambda}{\lambda-jt}=(1-\frac{jt}{\lambda})^{-1}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda-jt}e^{(jt-\lambda)x}\Big|_0^{+\infty}$$

1.4 随机变量的特征函数

(7) 设随机变量X的n**阶原点矩**存在，则$\varphi(t)$存在$k(k\leq n)$阶导数，且

$$\varphi^{(k)}(0)=j^k EX^k, k\leq n$$

- **例1.4.7** 设$X\sim\pi(\lambda)$（Poisson分布）,求 EX, EX^2, DX.

解 由于$X\sim\pi(\lambda)$,因而

$$\varphi(t)=e^{\lambda(e^{jt}-1)}, \varphi'(t)=j\lambda e^{jt}e^{\lambda(e^{jt}-1)}, \varphi''(t)=-(\lambda e^{jt}+\lambda^2 e^{2jt})e^{\lambda(e^{jt}-1)}$$

故

$$EX=\frac{\varphi'(0)}{j}=\lambda,\ EX^2=\frac{\varphi''(0)}{j^2}=\lambda+\lambda^2$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\lambda+\lambda^2-\lambda^2=\lambda$$

1.4 随机变量的特征函数

- **例1.4.8** 设$X \sim N(0,\sigma^2)$,求EX^n

解 因为

$$\varphi(t)=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2}\sigma^2t^2)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{\sigma^2}{2})^k\frac{t^{2k}}{k!}$$

所以

$$\varphi^{(2k)}(0)=(-\frac{\sigma^2}{2})^k\frac{(2k)!}{k!}=(-1)^k\sigma^{2k}(2k-1)!!,k=1,2,\cdots$$

$$\varphi^{(2k-1)}(0)=0,k=1,2,\cdots$$

从而

$$EX^n=\begin{cases}\sigma^{2k}(2k-1)!!, & n=2k,k=1,2,\cdots\\ 0, & n=2k-1,k=1,2,\cdots\end{cases}$$

1.4 随机变量的特征函数

- **例1.4.9** 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立，且$X_k \sim \pi(\lambda_k)$， $k=1,2,\ldots,n$

试**用特征函数证明** $\sum_{k=1}^{n} X_k \sim \pi(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k)$.

证明 由于$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立，$X_k \sim \pi(\lambda_k)$, $k=1,2,\ldots,n$

故
$$\varphi_{X_k}(t) = e^{\lambda_k (e^{jt}-1)}, k = 1, 2, \cdots, n$$

从而
$$\varphi_{\sum_{k=1}^{n} X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) = \exp[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (e^{jt}-1)]$$

所以
$$\sum_{k=1}^{n} X_i \sim \pi(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k)$$

独立泊松分布的和还是泊松分布，且参数为各参数的和.

1.4 随机变量的特征函数

- **例1.4.10** 设$X_1,X_2,\dots,X_n$相互独立，且$X_k \sim N(\mu_k,\sigma_k^2)$, $k=1,2,\dots,n$, 试**用特征函数求**随机变量$\sum_{k=1}^{n} X_k$的概率分布.

解 由于$X_1,X_2,\dots,X_n$相互独立,且$X_k \sim N(\mu_k,\sigma_k^2)$, $k=1,2,\dots,n$

故

$$\varphi_{X_k}(t)=e^{j\mu_k t-\frac{1}{2}\sigma_k^2 t^2}, k=1,2,\cdots,n$$

从而

$$\varphi_{\sum_{k=1}^{n} X_k}(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t)=\prod_{k=1}^{n}[\exp(j\mu_k t-\frac{1}{2}\sigma_k^2 t^2)]=\exp[j(\sum_{k=1}^{n}\mu_k)t-\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2)t^2]$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n} X_i \sim N(\sum_{k=1}^{n}\mu_k,\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2)$$

独立正态分布的和还是正态分布，且参数为对应各参数的和.

1.6 条件数学期望

- **例1.6.2** 设某日进入某商店的顾客人数是随机变量N，X_i表示第i个顾客所花的钱数，$X_1,X_2,\dots$是相互独立同分布的随机变量，且与N 相互独立，是求该日商店一天营业额的均值.

解

$$
\begin{aligned}
E(\sum_{i=1}^{N} X_i) &= E(E(\sum_{i=1}^{N} X_i) \mid N) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N=n) P(N=n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} E(\sum_{i=1}^{n} X_i \mid N=n) P(N=n) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\sum_{i=1}^{n} X_i) P(N=n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nEX_1 P(N=n) = (EX_1) \sum_{n=1}^{\infty} nP(N=n) \\
&= EX_1 EN
\end{aligned}
$$

习题课-习题1

- **1.甲、乙两个盒子都存放长、短两种规格的螺栓，甲盒有60个长螺栓、40个短螺栓，乙盒有20个长螺栓、10个短螺栓。现从中任取一盒，再从此盒中任取一个螺栓，求此螺栓是长螺栓的概率；若发现是长螺栓，求此螺栓是从甲盒中取出的概率。**

解 设 B_1 和 B_2 分别表示“取出的是甲盒中的螺栓”和“取出的是乙盒中的螺栓”，A 表示“取出的是长螺栓”，则

$$P(B_1)=P(B_2)=\frac{1}{2},\quad P(A|B_1)=\frac{3}{5},\quad P(A|B_2)=\frac{2}{3}$$

由全概率公式，得

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{19}{30}$$

由 Bayes 公式，得

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}}{\frac{19}{30}}=\frac{9}{19}$$

习题课-习题2

- **已知随机变量X和Y的联合概率密度函数为**

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(2x+y)}, & x\ge 0, y\ge 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

（1）求常数A;

（2）求边缘分布函数$F_X(x)$和$F_Y(y)$;

（3）求 $P(X+Y\le 2)$ **。**

解 （1）由

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$$

得

$$1 = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} A\mathrm{e}^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = A\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y$$

$$= A \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{A}{2}$$

故 $A=2$.

(2) 由于

$$F(x, y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

因此当 $x<0$ 或 $y<0$ 时，

$$F(x, y)=0$$

当 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$ 时，

$$\begin{aligned}F(x, y) &= \int_{0}^{x}\int_{0}^{y} 2\mathrm{e}^{-(2u+v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \int_{0}^{x} 2\mathrm{e}^{-2u}\,\mathrm{d}u\int_{0}^{y}\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v \\ &= (1-\mathrm{e}^{-2x})(1-\mathrm{e}^{-y}) \\ &= 1-\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{-(2x+y)}\end{aligned}$$

即

$$F(x, y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{-(2x+y)}, & x\geqslant 0, y\geqslant 0 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

从而

$$F_X(x)=F(x, +\infty)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2x}, & x\geqslant 0 \\ 0, & x<0\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty, y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-y}, & y\geqslant 0 \\ 0, & y<0\end{cases}$$

$$(3)\ P(X+Y\leqslant 2)=\iint\limits_{x+y\leqslant 2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

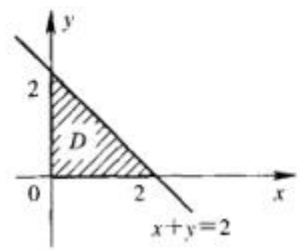
$$=\iint\limits_{D} 2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^2 \mathrm{e}^{-2x}\left[\int_0^{2-x}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

（积分区域见题 3 解图）

$$=2\int_0^2 \mathrm{e}^{-2x}(1-\mathrm{e}^{x-2})\,\mathrm{d}x$$

$$=(1-\mathrm{e}^{-2})^2$$



题 3 解图

习题课-习题3

- 设二维随机变量（X，Y）的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-y}, & y>|x|,-\infty<x<+\infty \\ 0 & otherwise\end{cases}$$

- （1）证明X和Y不相关，不独立；
- （2）求EY和E（Y|X）.

证明 (1) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-y}^{y}x\,\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x=0$

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-y}^{y}y\,\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{+\infty}y^2\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=-\int_{0}^{+\infty}y^2\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-y}$$

$$=-y^2\mathrm{e}^{-y}\Big|_{0}^{+\infty}+2\int_{0}^{+\infty}y\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=-2\int_{0}^{+\infty}y\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-y}$$

$$=-2y\mathrm{e}^{-y}\Big|_{0}^{+\infty}+2\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y$$

$$=2$$

$$EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-y}^{y}xy\,\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x=0$$

所以

$$\mathrm{cov}(X,Y)=EXY-EXEY=0-0\times 2=0$$

从而 X，Y 不相关.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_{-x}^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x<0\\ \displaystyle\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\int_{-y}^{y}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x=y\mathrm{e}^{-y}, & y\geqslant 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

因为

$$f\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}\neq\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-1}=f_X\left(\frac{1}{2}\right)f_Y(1)$$

所以 X，Y 不独立.

(2) 由(1) 知 $EY=2$.

当 $x<0$ 时，$f_X(x)=\frac{1}{2}e^x\neq 0$，则

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{2}e^{-y}}{\frac{1}{2}e^x}=e^{-(x+y)},\ y>-x$$

当 $x\geqslant 0$ 时，$f_X(x)=\frac{1}{2}e^{-x}\neq 0$，则

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{2}e^{-y}}{\frac{1}{2}e^{-x}}=e^{-(y-x)},\ y>x$$

从而当 $x<0$ 时，

$$E(Y|x)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_{Y|X}(y|x)\,dy=\int_{-x}^{+\infty}ye^{-(x+y)}\,dy=-x+1$$

当 $x\geqslant 0$ 时，

$$E(Y|x)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_{Y|X}(y|x)\,dy=\int_{x}^{+\infty}ye^{-(y-x)}\,dy=x+1$$

所以 $E(Y|X)=|X|+1$.