姓名: ______

学号: ______

装 订 线

# 哈尔滨工程大学研究生试卷

（ 2023 年 秋 季学期）

课程编号: 202032020004 课程名称: 矩阵论

一、单项选择题（每小题 3 分, 共 30 分）

1. 若 $\boldsymbol{A}\in \mathrm{R}^{m\times n}$, 则以下说法**正确的**是 ___.

(A) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的值域是 $\mathrm{R}^m$ 的子空间, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的核空间是 $\mathrm{R}^n$ 的子空间;

(B) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的值域是 $\mathrm{R}^n$ 的子空间, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的核空间是 $\mathrm{R}^m$ 的子空间;

(C) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的值域与核空间均是 $\mathrm{R}^n$ 的子空间;

(D) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的值域与核空间均是 $\mathrm{R}^m$ 的子空间.

2. 若 $\boldsymbol{A}\in \mathrm{C}^{3\times 5}$, 则以下说法**错误的**是 ___.

(A) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ 的特征值均为 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 的特征值;

(B) $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 的特征值均为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ 的特征值;

(C) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ 与 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 的特征值均为非负实数;

(D) $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 必有零特征值.

3. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, 则以下说法**错误的**是____.

(A) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 具有相同的初等因子;

(B) 若 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 具有相同的初等因子, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似;

(C) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的最小多项式;

(D) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的最小多项式, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

4. 以下说法**错误的**是____.

(A) 埃尔米特阵和酉矩阵均为正规矩阵;

(B) 正规矩阵一定是单纯矩阵;

(C) 单纯矩阵的最小多项式没有重根;

(D) 单纯矩阵的最小多项式就是其特征多项式.

5. 若埃尔米特二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 对应矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则以下说法**错误的**是____.

(A) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均为正实数, 则二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 正定;



(B) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均为非负实数, 则二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 半正定;

(C) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式均为正实数, 则二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 正定;

(D) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式均为非负实数, 则二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 半正定.

6. 设变量 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$, 函数 $F(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}F(\boldsymbol{X})}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}=$____.

(A) $2\boldsymbol{E}$;

(B) $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$;

(C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

(D) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

7. 设 $\boldsymbol{A}\in \mathrm{R}^{n\times n}$, 且极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k$ 存在, 则____.

(A) $\rho(\boldsymbol{A})<1$; (B) $\rho(\boldsymbol{A})\le 1$; (C) $\rho(\boldsymbol{A})>1$; (D) $\rho(\boldsymbol{A})\ge 1$.

8. 设 $\boldsymbol{A}\in \mathrm{R}^{n\times n}$, 若对任意酉矩阵 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}$ 有 $\|\boldsymbol{A}\|=\|\boldsymbol{UAV}\|$, 则称范数 $\|\cdot\|$ 具有**酉不变性**, 则以下具有酉不变性的矩阵范数为____.

(A) 行和范数; (B) 列和范数; (C) 2-范数; (D) $m_1$-范数.

9. 设 $\boldsymbol{A}_k=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{k!} & \dfrac{(-1)^k}{k} \\ 0 & \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \end{bmatrix}$, 则矩阵级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{A}_k$ ____.

(A) 绝对收敛;

(B) 收敛但不绝对收敛;

(C) 发散;

(D) 无法判断敛散性.

10. 以下关于矩阵 Kronecker 积的说法中, **错误的**是 ___.

(A) $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(B) $\boldsymbol{A}\otimes(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})\otimes\boldsymbol{C}$;

(C) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\otimes\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{C}$;

(D) $(k\boldsymbol{A})\otimes\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\otimes(k\boldsymbol{B})=k(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})$.

## 二、填空题（每小题 3 分, 共 30 分）

1. 若线性变换 $T$ 在某个基下对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}_{4\times4}$, 且 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=1$, 则 $\dim(\ker T)=$_____.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\end{bmatrix}$, $\alpha_1=[1\quad 2\quad 3]^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=[0\quad 1\quad -1]^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=[0\quad 0\quad 2]^{\mathrm{T}}$, $\beta_1=[2\quad 0]^{\mathrm{T}}$, $\beta_2=[0\quad -1]^{\mathrm{T}}$, 定义 $\mathrm{R}^3$ 到 $\mathrm{R}^2$ 上的线性映射 $T: x\mapsto \boldsymbol{A}x$, 则 $T$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与基 $\beta_1,\beta_2$ 下的矩阵为_____.

3. 若内积在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的度量矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}$, $\alpha=3\varepsilon_1+5\varepsilon_2$, $\beta=\varepsilon_1-2\varepsilon_2$, 则 $(\alpha,\beta)=$___.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1+i\\1&2\end{bmatrix}$, 则 $\|\boldsymbol{A}\|_1+\|\boldsymbol{A}\|_\infty+\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}=$ ______.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&3&0\\-4&6&0\\0&0&-2+3i\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径为______.

6. 设单纯矩阵 $\boldsymbol{A}_{3\times3}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{2023}\boldsymbol{A}^n=$ _____.

7. 设 $\boldsymbol{A}_{4\times4}$ 的最小多项式 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda^3$, 则 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=$ ___.

8. 若 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $\lambda,\lambda,\lambda^2,\lambda+1,\lambda+1$, 则 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的不变因子 $d_5=$________.

9. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\end{bmatrix}$ 的正奇异值为______.

10. 设 $\boldsymbol{A}_n=\begin{bmatrix}\dfrac{3n+2}{n+1}&0\\\dfrac{n+1}{n^2}&\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\end{bmatrix}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{A}_n=\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的 2-范数 $\|\boldsymbol{A}\|_2=$______.



## 三、计算题（8 分）

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为线性空间 $V$ 的一组基, 线性变换 $T$ 在这组基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{bmatrix},$$

求 $R(T)$ 一组基与 $N(T)$ 的一组基.

## 四、计算题（8 分）

用酉变换将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=-2\bar{x}_1x_1-4\mathrm{i}\,\bar{x}_1x_2+4\bar{x}_1x_3+4\mathrm{i}\,\bar{x}_2x_1+\bar{x}_2x_2+\mathrm{i}\,\bar{x}_2x_3+4\bar{x}_3x_1-\mathrm{i}\,\bar{x}_3x_2+\bar{x}_3x_3$$

化为标准形, 并写出所用的变换.

## 五、计算题（8 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&1\\0&0&i\\1&0&-i\\0&1&0\end{bmatrix}$, 求次酉阵 $\boldsymbol{U}\in\mathrm{U}_3^{4\times3}$ 和正线上三角阵 $\boldsymbol{R}$, 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}$ 成立.

## 六、计算题（8 分）

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{bmatrix}$ 的最小多项式为 $m_{\boldsymbol{A}}(x)=(x-1)(x-5)$, $f(\boldsymbol{A})$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的函数,

(1) 求多项式函数 $p(x)=a_1x+a_0$, 使 $f(\boldsymbol{A})=p(\boldsymbol{A})$; (2) 求 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\boldsymbol{A}\right)$.

## 七、证明题（8 分）

设 $V$ 为 $n$ 维线性空间, $V_1,V_2$ 均为 $V$ 的子空间, 若 $\alpha_1,\alpha_2$ 为 $V_1\cap V_2$ 的一组基, $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 为 $V_1$ 的一组基, $\alpha_1,\alpha_2,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 为 $V_2$ 的一组基,

求证: $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 线性无关.



装

订

线