矩阵论（哈尔滨）参考答案

一、单项选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1-5 BBCAC

6-10 DCADA

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. ;
2. 2;
3. 82;
4. $\sqrt{3}$;
5. 1;
6. $(\lambda+1)^3$;
7. 1;
8. 4;
9. 1;
10. 3.

三、证明题（8 分）

设T为n维欧氏空间V中的线性变换，且对$\forall x, y \in V$满足：$(Tx, y) = -(x, Ty)$，求证：T在标准正交基下的矩阵A为反对称阵.

证明：设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$为$V$的标准正交基，，

设$T(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$，$A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$，

$$T\alpha_i = a_{1i}\alpha_1 + a_{2i}\alpha_2 + \cdots + a_{ni}\alpha_n,$$

$$T\alpha_j = a_{1j}\alpha_1 + a_{2j}\alpha_2 + \cdots + a_{nj}\alpha_n,$$

$$(T\alpha_i, \alpha_j) = (a_{1i}\alpha_1 + a_{2i}\alpha_2 + \cdots + a_{ni}\alpha_n, \quad \alpha_j) = a_{ji}$$

$$(\alpha_i, T\alpha_j) = (\alpha_i, \quad a_{1j}\alpha_1 + a_{2j}\alpha_2 + \cdots + a_{nj}\alpha_n) = a_{ij}$$

由已知$(T\alpha_i, \alpha_j) = -(\alpha_i, T\alpha_j)$得$a_{ij} = -a_{ji}$，因此，$T$在标准正交基下的矩阵$A$为反对称阵

四、计算题（8 分）

设$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，求核空间$N(A)$的一组标准正交基.

解答：解方程组$AX = 0$得基础解系$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$为核空间$N(A)$的一组基. 将$\alpha_1, \alpha_2$正交化，令

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\beta_1, \alpha_2)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

将β_1,β_2单位化得，$\eta_1=\dfrac{\beta_1}{|\beta_1|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\eta_2=\dfrac{\beta_2}{|\beta_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1 & 2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

因此，η_1,η_2为核空间$N(A)$的一组标准正交基.

五、计算题（8 分）

求矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 4\\ 4 & 6 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$的谱分解.

解答：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -4 & -4\\ -4 & \lambda-6 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-10)(\lambda+1)$，所以$A$的特征值为

$\lambda_1=2$，$\lambda_2=10,\lambda_3=-1$.

当$\lambda=2$时，对应的特征向量为$\xi_1=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$；

当$\lambda=10$时，对应的特征向量为$\xi_2=\begin{bmatrix}3 & 4 & 2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$；

当$\lambda=-1$时，对应的特征向量为$\xi_3=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$；

令$P=\begin{bmatrix}\xi_1, & \xi_2, & \xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -4\\ -2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$，则$P^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{11} & \frac{3}{22} & \frac{1}{11}\\ -\frac{2}{11} & \frac{2}{33} & \frac{5}{33}\end{bmatrix}$.

令

$$E_1=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix},$$

$$E_2=\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{11} & \frac{3}{22} & \frac{1}{11}\end{bmatrix}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}3 & \frac{9}{2} & 3\\ 4 & 6 & 4\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix},$$

$$E_3=\begin{bmatrix}-4\\2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{2}{11} & \frac{2}{33} & \frac{5}{33}\end{bmatrix}=\frac{1}{33}\begin{bmatrix}24 & -8 & -20\\-12 & 4 & 10\\6 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

则 $A=2E_1+10E_2-E_3$.

六、计算题（16 分）

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 10\\-4 & 3 & 7\\-3 & 1 & 7\end{bmatrix}$,

（1）求矩阵 A 的若当标准型 J 及相似变换矩阵 P;

（2）求矩阵函数 $f(A)$ 的若当表示, 并计算 $\cos A$.

解答: （1）由于 $|\lambda E-A|=(\lambda-2)^3$, A 的 Jordan 标准型为 $J=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$, 利用 $AP=PJ$ 可求得相应的相似变换阵 P 为 $\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\1 & 1 & -2\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

（2） $\cos J=\begin{bmatrix}\cos 2 & -\sin 2 & -\frac{\cos 2}{2}\\0 & \cos 2 & -\sin 2\\0 & 0 & \cos 2\end{bmatrix}$ 因此

$$\cos A=P(\cos J)P^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\1 & 1 & -2\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 2 & -\sin 2 & -\frac{\cos 2}{2}\\0 & \cos 2 & -\sin 2\\0 & 0 & \cos 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\1 & 1 & -2\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\1 & 1 & -2\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 2 & -\sin 2 & -\frac{\cos 2}{2}\\0 & \cos 2 & -\sin 2\\0 & 0 & \cos 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\-3 & 1 & 5\\-1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\cos 2+6\sin 2 & -2\sin 2 & -2\cos 2-10\sin 2\\0.5\cos 2+4\sin 2 & \cos 2-\sin 2 & -\cos 2-7\sin 2\\0.5\cos 2+3\sin 2 & -\sin 2 & -5\sin 2\end{bmatrix}.$$