

泊松过程

<http://machunguang.hrbeu.edu.cn>

哈尔滨工程大学

泊松过程

- 1 泊松过程的定义
- 2 泊松过程的到达时间间隔分布
- 3 泊松过程的到达时间分布
- 4 泊松过程的到达时间的条件分布
- 5 复合泊松过程

泊松过程

- 1 泊松过程的定义
- 2 泊松过程的到达时间间隔分布
- 3 泊松过程的到达时间分布
- 4 泊松过程的到达时间的条件分布
- 5 复合泊松过程

1. 泊松过程的定义

- *Poisson* 过程是一类直观意义很强,而且极为重要的过程,其应用范围很广,遍及各个领域,公用事业、生物学、物理学、电子通信工程等很多方面的问题都可用 *Poisson* 过程物理模拟.
- 考虑一个来到某“服务点”要求服务的“顾客流”,顾客到服务点的到达过程可认为是 *Poisson* 过程.当抽象的“服务点”和“顾客流”有不同的含义时,便可得到不同的 *Poisson*过程.例如,某电话交换台得电话呼叫,交换台就是服务点,所有的呼叫依先后次序构成一顾客流.

1. 泊松过程的定义

- **计数过程**

定义 2.7.6 称实随机过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为计数过程, 如果 $N(t)$ 代表到时刻 t 所发生的随机事件数.

- 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 应该满足下列条件:

(1) $N(t)$ 是非负整数;

(2) $\forall 0 \leq s < t, N(t) \geq N(s)$;

(3) $\forall 0 \leq s < t, N(t) - N(s)$ 代表时间间隔 $t-s$ 内发生的随机事件数.

1. 泊松过程的定义

● *Poisson*过程

定义 2.7.7 称计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数(强度、比率)为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的 *Poisson* 过程, 如果:

- (1) $N(0)=0$;
- (2) $\{N(t), t \geq 0\}$ 是平稳的独立增量过程;
- (3) $\forall t > 0$, $N(t)$ 服从参数为 λt 的 *Poisson*分布, 即

$$\underline{P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k = 0, 1, 2, \dots}$$

1. 泊松过程的定义

● **定理 2.7.6** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的 *Poisson* 过程, 则

(1) $m_N(t) = \lambda t, t \geq 0; D_N(t) = \lambda t, t \geq 0;$

$$C_N(s, t) = \lambda \min(s, t), s, t \geq 0; R_N(s, t) = \lambda^2 st + \lambda \min(s, t), s, t \geq 0.$$

(2) $\forall 0 \leq s < t, N(t) - N(s)$ 服从参数为 $\lambda(t - s)$ 的*Poisson*分布.

● 证明: (1) 只需证明: $R_N(s, t) = \lambda^2 st + \lambda \min(s, t), s, t \geq 0.$

(2) 往证:

$$P(N(t) - N(s) = k) = \frac{(\lambda(t - s))^k}{k!} e^{-\lambda(t - s)}, k = 0, 1, 2, \dots$$

1. 泊松过程的定义

● **定义 2.7.8** 称计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的 *Poisson* 过程, 如果:

(1) $N(0)=0$;

(2) $\{N(t), t \geq 0\}$ 是平稳的独立增量过程;

(3) 当 Δt 充分小时, 在 $(t, t+\Delta t)$ 内出现事件一次的概率为
 $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, 即 $P(N(t+\Delta t) - N(t) = 1) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$

(4) 当 Δt 充分小时, 在 $(t, t+\Delta t)$ 内出现事件两次或是两次以上概率为 $o(\Delta t)$, 即

$$\underline{P(N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t)}$$

1. 泊松过程的定义

- **定理 2.7.7** 定义2.7.7与定义2.7.8等价.

- **证明:**

- 设定义2.7.7成立, 只需证明定义2.7.8中的条件(3)、(4)成立, 即 $P(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t)$

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

- 设定义2.7.8成立, 只需证明 $\forall t > 0$

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k = 0, 1, 2, \dots$$

泊松过程

- 1 泊松过程的定义
- 2 泊松过程的到达时间间隔分布
- 3 泊松过程的到达时间分布
- 4 泊松过程的到达时间的条件分布
- 5 复合泊松过程

2. 泊松过程的到达时间间隔分布

● *Poisson* 过程的到达时间间隔分布

设 $N(t)$ 表示直到 t 时刻到达的随机点数, $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的*Poisson*过程, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ 分别表示第1个, 第2个, ..., 第 n 个, ..., 随机点的到达时间, 称 $\{\tau_n, n = 1, 2, \dots\}$ 为 *Poisson* 过程的到达时间序列, 它是一个随机变量序列, 令 $T_n = \tau_n - \tau_{n-1}, n = 1, 2, \dots, \tau_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$, 称 $\{T_n, n = 1, 2, \dots\}$ 为 *Poisson* 过程的 到达时间间隔序列, 它也是一个随机变量序列. 显然 $\tau_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$

2. 泊松过程的到达时间间隔分布

- **定理 2.7.8** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的 *Poisson* 过程,
 $\{T_n, n=1, 2, \dots\}$ 是其到达时间间隔序列, 则 $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$, **相互独立同服从参数 λ 的指数分布.**

即

$$f_{T_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad F_{T_n}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$E[T_n] = \frac{1}{\lambda}, \quad D[T_n] = \frac{1}{\lambda^2}$$

泊松过程

- 1 泊松过程的定义
- 2 泊松过程的到达时间间隔分布
- 3 泊松过程的到达时间分布
- 4 泊松过程的到达时间的条件分布
- 5 复合泊松过程

3. 泊松过程的到达时间分布

- **定理 2.7.9** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的 *Poisson*过程
 $\{\tau_n, n = 1, 2, \dots\}$ 是其到达时间序列, 则 $\tau_n (n = 1, 2, \dots)$
服从 Γ 分布 (也称为**阶为 n 的 Erlang (埃尔朗) 分布**) ,
即 τ_n 的概率密度函数为

$$f_{\tau_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$E[\tau_n] = \frac{n}{\lambda}, \quad D[\tau_n] = \frac{n}{\lambda^2}$$

泊松过程

- 1 泊松过程的定义
- 2 泊松过程的到达时间间隔分布
- 3 泊松过程的到达时间分布
- 4 泊松过程的到达时间的条件分布
- 5 复合泊松过程

4. 泊松过程的到达时间的条件分布

- 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的Poisson过程，如果在 $[0, t)$ 内仅有一个随机点到达， τ 是其到达时间，则 τ 服从 $[0, t)$ 上的均匀分布.

- 事实上，当 $0 \leq s < t$ 时，

$$\begin{aligned} F_{\tau|N(t)=1}(s | N(t) = 1) &= P(\tau \leq s | N(t) = 1) \\ &= \frac{P(\tau \leq s, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)} = \frac{P(N(s) = 1, N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)} \\ &= \frac{P(N(s) = 1)P(N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)} = \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t} \end{aligned}$$

从而 τ 服从 $[0, t)$ 上的均匀分布.

4. 泊松过程的到达时间的条件分布

- **定理2.7.10** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的 *Poisson* 过程, 如果在 $[0, t)$ 内有 n 个随机点到达, 则 n 个到达时间

$$\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n$$

和 n 个相互独立同服从 $[0, t)$ 上均匀分布的随机变量

U_1, U_2, \cdots, U_n 的顺序统计量 $U_{(1)} < U_{(2)} < \cdots < U_{(n)}$ 同分布.

4. 泊松过程的到达时间的条件分布

- **例 2.7.2** 假设乘客按照参数为 λ 的 *Poisson* 过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 来到一个火车站乘坐某次列车, 若火车在时刻 t 启程, 试求在 $[0, t]$ 内到达火车站乘坐该次列车的乘客等待时间总和的数学期望。
- **解:** 设 τ_k 是第 k 个乘客到达火车站的时刻, 则其等待时间为 $t - \tau_k$, 从而在 $[0, t]$ 内到达火车站乘坐该次列车的乘客等待时间总和为

$$\sum_{k=1}^{N(t)} (t - \tau_k)$$

4. 泊松过程的到达时间的条件分布

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} (t - \tau_k)\right] &= E\left[E\left(\sum_{k=1}^{N(t)} (t - \tau_k) \mid N(t)\right)\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\sum_{k=1}^n (t - \tau_k) \mid N(t) = n\right) P(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(nt - \sum_{k=1}^n E(\tau_k \mid N(t) = n)\right) P(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(nt - \sum_{k=1}^n EU_{(k)}\right) P(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(nt - \sum_{k=1}^n EU_k\right) P(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(nt - \frac{1}{2}nt\right) \cdot \frac{(\lambda t)^{n-1}}{n!} e^{-\lambda t} = \frac{\lambda t^2}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right) e^{-\lambda t} = \frac{\lambda t^2}{2} e^{\lambda t} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{\lambda t^2}{2} \end{aligned}$$

泊松过程

- 1 泊松过程的定义
- 2 泊松过程的到达时间间隔分布
- 3 泊松过程的到达时间分布
- 4 泊松过程的到达时间的条件分布
- 5 复合泊松过程

5. 复合泊松过程

- **定义 2.7.9** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的Poisson过程, $\{Y_n, n=1, 2, \dots\}$ 是相互独立同分布的随机变量序列, 且 $\{N(t), t \geq 0\}$ 和 $\{Y_n, n=1, 2, \dots\}$ 也相互独立, 令 $\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n, t \geq 0$, 则称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为**复合 Poisson 过程**.

- **定理 2.7.11** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为复合Poisson过程, 则

(1) $\{N(t), t \geq 0\}$ 的一维特征函数为

$$\underline{f_{X(t)}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t; u) = e^{\lambda t(f(u)-1)}}$$

其中 $f(u)$ 是 Y_n ($n=1, 2, \dots$) 的特征函数;

(2) 若 $EY_n^2 < +\infty$, 则 $m_X(t) = \lambda t EY_n, D_X(t) = \lambda t EY_n^2$.

5. 复合泊松过程

- **例 2.7.3** 设移民到某地区定居的户数是一 *Poisson* 过程, 平均每周有2户定居, 即 $\lambda = 2$, 如果每户的人口数是一随机变量, 一户四人的概率为 $1/6$, 一户三人的概率为 $1/3$, 一户二人的概率为 $1/3$, 一户一人的概率为 $1/6$, 并且每户的人口数是相互独立的随机变量, 求在五周内移民到该地区人口数的数学期望和方差.

5. 复合泊松过程

- **解** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是移民到该地区定居的户数所形成的 *Poisson*过程, 则其参数为 $\lambda=2$. 再设 Y_n 表示第 n 户的人口数, $X(t)$ 代表移民的总人数, 则 $X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$, 从而 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是复合的*Poisson*过程.

因为 $EY_n = 4 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{2}$

$$EY_n^2 = 4^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{1}{6} = \frac{43}{6}$$

所以

$$E[X(5)] = 2 \times 5 \times \frac{5}{2} = 25, \quad D[X(5)] = 2 \times 5 \times \frac{43}{6} = \frac{215}{3}$$

5. 复合泊松过程

- **例2.7.4** 设投保人的死亡是参数为 λ 的*Poisson*过程, 对于第 n 个死亡的投保人用随机变量 Y_n 描述, 同时也表示该投保人的价值, 并且 Y_n ($n=1,2,\dots$) 相互独立同服从参数为 a ($a>0$) 的指数分布. 令 $X(t)$ 表示在期间 $[0,t)$ 内保险公司必须付出的全部赔偿, 求 $E[X(t)]$ 和 $D[X(t)]$.

5. 复合泊松过程

- **解** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 表示死亡的投保人所形成的 $Poisson$ 过程, 其参数为 λ , 则 $X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$, $t \geq 0$. 从而 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是复合的 $Poisson$ 过程.

由于 $EY_n = \frac{1}{a}, DY_n = \frac{1}{a^2}$

从而 $EY_n^2 = DY_n + (EY_n)^2 = \frac{2}{a^2}$

因此 $E[X(t)] = \lambda t EY_n = \frac{\lambda t}{a}, D[X(t)] = \lambda t EY_n^2 = \frac{2\lambda t}{a^2}$

The End

