姓名：________

学号：________

装

订

线

哈尔滨工程大学研究生试卷

（ 2024 年 秋 季学期）

课程编号： 202032020004 课程名称： 矩阵论

一、单项选择题（每小题 3 分, 共 30 分）

1. 设T 是线性空间V 上的一个线性变换, 则下列命题**一定正确**的是______.

(A) $\dim(R(T))+\dim(\ker(T))=\dim V$；　(B) $R(T)+\ker(T)=V$；

(C) $R(T)\cap\ker(T)=\{0\}$；　(D) $R(T)+\ker(T)=R(T)\oplus\ker(T)$.

2. 设 A 是正规矩阵, 则下列说法**不正确**的是______.

(A) A 一定可以对角化;

(B) $A=A^H \Leftrightarrow A$ 的特征值全为实数;

(C) 若 $AA^H=E$, 则 $\det A=1$；

(D) $A=-A^H \Leftrightarrow A$ 的特征值全为零或纯虚数.

3. 在 $F[x]_3$ 中，从基 $1,x,x^2$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 $P=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$，则基底 β_1,β_2,β_3 为______.

(A) $1,x+1,x^2+x+2$；　(B) $-1,x-1,x^2-x+2$；

(C) $1,x-1,x^2+x-2$；　(D) $1,x-1,x^2-x+2$.

4. 设 $F[x]_3$ 是次数小于 3 的实数域上的多项式空间, 定义内积

$$\forall f(x),g(x)\in F[x]_3,(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

则$W=L\{1,x\}$ 的正交补空间$W^{\perp}=$______.

(A) $L\{-1-3x^2\}$；　(B) $L\{1-3x^2\}$；　(C) $L\{1+3x^2\}$；　(D) $L\{-1+3x^2\}$.

5. 设埃尔米特二次型 $f=X^HAX$ 对应矩阵为 A , 则以下说法**错误的**是______.

(A) 若矩阵 A 的特征值均为正实数, 则二次型 $f=X^HAX$ 正定;

(B) 若矩阵 A 的各阶顺序主子式均不为零, 则二次型 $f=X^HAX$ 正定;

(C) 若二次型 $f=X^HAX$ 正定, 则存在可逆矩阵 Q ,使得 $A=Q^HQ$；

(D) 若二次型 $f=X^HAX$ 正定, 则矩阵 A 一定可逆.

6. 设 A 和 B 分别是 m 阶和 n 阶的酉矩阵, 则 $\|A\otimes B\|_2=$______.

(A) 1;　(B) 2;　(C) 4;　(D) 8.

7. 以下说法**正确**的是______.

(A) Hermite 阵一定可以进行谱分解;

(B) 矩阵 A 的奇异值分解 $A=U\begin{bmatrix}\Delta&O\\O&O\end{bmatrix}V^H$ 中的 U 和 V 是唯一的;

(C) 任何矩阵 A 都可进行唯一的满秩分解;

(D) 任何行满秩矩阵 $A\in C_r^{r\times n}$ 都可唯一分解为 $A=UR$,其中 U 是列次酉阵, R 是正线上三角.

8. 已知方阵 A Jordan 为 $J=\begin{bmatrix}3&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&5\end{bmatrix}$, 则 A 的最小多项式 $m(\lambda)=$______.

(A) $(\lambda-3)^3(\lambda-5)$；　(B) $(\lambda-3)^2(\lambda-5)^2$；

(C) $(\lambda-3)^2(\lambda-5)$；　(D) $(\lambda-3)^2(\lambda+5)$.

9. 设 $A(t)=\begin{bmatrix}t^2&0\\1&\sin t\end{bmatrix}$, 则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A(t)]^2=$______.

(A) $\begin{bmatrix}4t^3&0\\2t+\sin t&\cos 2t\end{bmatrix}$；　(B) $\begin{bmatrix}4t^3&0\\4t&\cos 2t\end{bmatrix}$；

(C) $\begin{bmatrix}4t^3&0\\4t&\sin 2t\end{bmatrix}$；　(D) $\begin{bmatrix}4t^3&0\\2t+\cos t&\sin 2t\end{bmatrix}$.

10. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^k=$______.

(A) $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$；　(B) $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$；　(C) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$；　(D) 以上都不对.

二、填空题（每小题 3 分, 共 30 分）

1. 设V 为数域 F 上的 3 维线性空间, 且$V=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 若$\alpha\in V$ 在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为$[3,2,1]^{\mathrm{T}}$, 则α 在基$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 下的坐标为________.

2. 设 V 是二维线性空间, 线性变换T_1 在基α_1,α_2 下的矩阵为A, 线性变换T_2 在基β_1,β_2 下的矩阵为B, 且α_1,α_2 到β_1,β_2 的过渡矩阵为C, 则T_1+3T_2 在β_1,β_2 下的矩阵为________.

3. 在 C^3 空间中定义一种内积, 使得内积在 C^3 的一组基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{bmatrix}$, 若$\beta_1=-2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$, $\beta_2=-\alpha_1+\alpha_3$, 则$(\beta_1,\beta_2)=$_______.

4. 若 $A=\begin{bmatrix}1&i&0\\i&-1&1\\1&i&0\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}1\\2i\\1\end{bmatrix}$, $i^2=-1$, 则$\|b\|_1+\|Ab\|_\infty+\|A\|_1=$________.

5. 设三阶矩阵 A 的 Smith 标准型$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&(\lambda-2)&0\\0&0&(\lambda-2)^2\end{bmatrix}$, 则 A 的 Jordan 标准型 $J=$________.

6. 已知 A 的 Crout 分解为 $A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\1&2&0\\-4&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}$, 则 A 的 LDU 分解为 $A=$________.

7. 已知 $A=\begin{bmatrix}0.1&0.3\\0.7&0.6\end{bmatrix}$, 则$\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k=$_______.

8. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&1\\0&0&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0\\-3&2\end{bmatrix}$, 则$\det(A\otimes B)=$________.

9. 设 $A(x)=\begin{bmatrix}\sin(1+x)&-x^2\\e^{2x}&\tan x\end{bmatrix}$, 则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\int_0^{x^3}A(x)\mathrm{d}x)=$________.

10. 已知 $X=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}$, $A=\begin{bmatrix}1&-2&-6&2\\4&1&3&-1\end{bmatrix}$, $F(X)=(AX)^{\mathrm{T}}$, 则 $\frac{\mathrm{d}F(X)}{\mathrm{d}X}=$________.

三、证明题（8 分）

设 $\mathrm{R}^{2\times2}$ 中的线性变换T 为$T(X)=XB+2X^{\mathrm{T}}$, 其中$B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, 证明线性子空间$W=\left\{X=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}\middle| x_{11}-x_{22}=0\text{且}x_{12}-x_{21}=0\right\}$是$T$ 的不变子空间.

四、计算题（8 分）

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}4&-6&0\\2&-3&0\\-2&3&2\end{bmatrix}$为单纯阵, 写出 A 的谱分解表达式.

五、计算题（8 分）

求 $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\\1&1\end{bmatrix}$的奇异值分解.

六、计算题（16 分）

已知 $e^{At}=\begin{bmatrix}e^t&e^t-1&te^t-e^t+1\\0&1&e^t-1\\0&0&e^t\end{bmatrix}$,

（1）求矩阵 A;

（2）求 A 的若当标准型 J 和最小多项式 $m(x)$;

（3）求 $\cos A$.

装

订

线