姓名：________

学号：________

装　订　线

哈尔滨工程大学研究生试卷

（ 2021 年 秋 季学期）

课程编号： 202032020004 　课程名称： 矩阵论

一、单项选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 设 $A\in \mathrm{R}^{m\times n}$，$R(A)$ 为矩阵 A 的值域，$N(A)$ 为矩阵 A 的核空间，则以下说法正确的为______.

(A) $N(A)$ 为 R^m 的子空间

(B) $R(A)$ 为 R^m 的子空间

(C) $\dim R(A)=n-\mathrm{rank}A$

(D) $\dim N(A)=\mathrm{rank}A$

2. 若 V 是酉空间，(x,y) 为 V 上的内积运算，对任意 $x,y,z\in V$ 及 $\lambda\in \mathrm{C}$，则以下说法**不一定正确**的为______.

(A) $(x,y)=\overline{(y,x)}$

(B) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$

(C) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z),\forall x,y,z\in V$

(D) $(x,x)\geq 0$，等号成立当且仅当 x 为 V 中的零向量

3. 以下说法**不一定正确**的为_______.

(A) 埃尔米特阵一定是正规矩阵

(B) 酉矩阵一定是正规矩阵

(C) 正规矩阵的特征值都是实数

(D) 正规矩阵不同特征值对应的特征向量是正交的

4. 以下关于酉矩阵的说法**不一定正确**的为_______.

(A) 两个酉矩阵的和必为酉矩阵

(B) 两个酉矩阵的乘积必为酉矩阵

(C) 酉矩阵特征值的模必为 1

(D) 酉矩阵的各行（列）一定是标准正交的

5. 以下说法**不一定正确**的为_______.

(A) 可逆方阵均可分解成一个单位下三角阵乘一个上三角阵，且分解式唯一

(B) 列满秩矩阵均可分解成一个次酉阵乘一个正线上三角阵，且分解式唯一

(C) 秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵，可以做满秩分解，且分解式唯一

(D) 单纯矩阵可以做谱分解，且分解式唯一

6. 设 A,B 为同阶方阵，则以**不能**作为 A 与 B 相似充分必要条件的为_______.

(A) $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 具有相同的行列式因子

(B) $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 具有相同的不变因子

(C) $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 具有相同的初等因子

(D) 矩阵 A 与 B 具有相同的最小多项式

7. 设 A 为 n 阶方阵，则_______.

(A) A 的化零多项式必为 n 次多项式

(B) A 的最小多项式必为 n 次多项式

(C) A 的特征多项式必为 A 的化零多项式

(D) A 的化零多项式必为 A 的特征多项式

8. 设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 与 $\beta_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ 为 R^2 中的两组基，在 R^2 中按某种规定定义了内积，且 $(\alpha_1,\beta_1)=2,(\alpha_1,\beta_2)=3,(\alpha_2,\beta_1)=-4,(\alpha_2,\beta_2)=-7$，则内积在基 α_1,α_2 下的度量矩阵为_______.

(A) $\begin{bmatrix}1&-1\\-1&3\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}6&10\\10&17\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}2&1\\1&6\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}5&8\\8&13\end{bmatrix}$

9. 设 $\|\cdot\|_v$ 是 C^n 上的一个向量范数，$\forall A\in\mathrm{C}^{n\times n}$，则_______**不是**从属于向量范数 $\|\cdot\|_v$ 的矩阵范数.

(A) $\|A\|=\max\limits_{x\neq\theta}\dfrac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$　　(B) $\|A\|=\max\limits_{\|x\|_v=1}\|Ax\|_v$

姓名：________

学号：________

装 订 线

(C) $\|A\|=\max\limits_{\|x\|_v\le 1}\|Ax\|_v$　　　　(D) $\|A\|=\max\limits_{\|x\|_v\ge 1}\|Ax\|_v$

10. 设 $A(t)$ 为 t 的 n 阶函数矩阵，$A\in \mathrm{R}^{n\times n}$ 为常数矩阵，则以下说法**不一定正确**的为_______.

(A) $\dfrac{\mathrm{d}[A(t)]^m}{\mathrm{d}t}=m[A(t)]^{m-1}A'(t)$

(B) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{At}=A\mathrm{e}^{At}=\mathrm{e}^{At}A$

(C) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin At=A\cos At=(\cos At)A$

(D) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos At=-A\sin At=-(\sin At)A$

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 设 V 为 3 维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 V 的一组基，$\beta_1=\alpha_1+3\alpha_2$，$\beta_2=2\alpha_1+5\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，则 $\gamma=2\alpha_1-5\alpha_2+4\alpha_3$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为_______.

2. 在多项式空间 $R[x]_3$ 中，定义线性变换 T：$T[f(x)]=f(x+2)-f(x+1)$，则 $\dim R(T)=$_______.

3. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4-3i\\ 4 & 3+4i & 0\\ 7 & -8 & 6\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_1+\|A\|_\infty+\|A\|_{m_1}+\|A\|_{m_\infty}=$_______.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，则 A 的最大奇异值为_______.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & -3 & 3\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 5\end{bmatrix}$，则 $\lambda E-A$ 的 2 阶行列式因子 $D_2=$_______.

6. 设 A 为 3 阶方阵，$(A+E)^3=\mathbf{0}$，方且程组 $(A+E)X=\mathbf{0}$ 的基础解系中只有 1 个线性无关的向量，则 A 的最小多项式 $m_A(\lambda)=$_______.

7. 设 A 为 n 阶方阵，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}A^n$ 存在且不为零矩阵，则 $\rho(A)=$_______.

8. 设 A 为 3 阶方阵，B 为 2 阶方阵，行列式 $|A|=-2, |B|=1$，则 $|A\otimes B|=$_______.

9. 二次型 $f(x_1,x_2)=\overline{x_1}x_1+i\overline{x_1}x_2-i\overline{x_2}x_1+\overline{x_2}x_2$ 的正惯性指数为_______.

10. 设 $A(x)=\begin{bmatrix}\sin x & \cos x & x\\ \dfrac{\sin x}{x} & \mathrm{e}^x & x^2\\ 1 & 0 & x^3\end{bmatrix}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A(x)\right|=$_______.（$|\cdot|$ 为行列式）

三、证明题（8 分）

设 T 为 n 维欧氏空间 V 中的线性变换，且对 $\forall x,y\in V$ 满足：$(Tx,y)=-(x,Ty)$，求证：T 在标准正交基下的矩阵 A 为反对称阵.

四、计算题（8 分）

设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$，求核空间 $N(A)$ 的一组标准正交基.

五、计算题（8 分）

求矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 4\\ 4 & 6 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$ 的谱分解.

六、计算题（16 分）

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 10\\ -4 & 3 & 7\\ -3 & 1 & 7\end{bmatrix}$，

（1）求矩阵 A 的若当标准型 J 及相似变换矩阵 P；

（2）计算 $\cos A$.