# 矩阵论（青岛）参考答案及评分标准

## 2022 年 11 月 6 日

**一、单项选择题（每小题 3 分，共 30 分）**

1-5 CCBDD　　　　6-10 DCBAD

**二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）**

1. $[0,1,2,1]^{\mathrm{T}}$;
2. $7+\sqrt{2}$;
3. $n$;
4. $|t|<2$;
5. $U^H A$;
6. $\sqrt{10}$;
7. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \mathrm{e} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;
8. $\frac{25}{8}$;
9. 72;
10. $3x^2\begin{bmatrix} \sin(1+x^3) & -x^6 \\ \mathrm{e}^{2x^3} & \tan x^3 \end{bmatrix}$.

**三、证明题（8 分）**

给定 $C^{n\times n}$ 中的两种矩阵范数 $\|\cdot\|_M$ 与 $\|\cdot\|_S$，证明

$$\|A\| = \|A\|_M + 2\|A\|_S$$

也是 $C^{n\times n}$ 中的矩阵范数.

证明: $\forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in C^{n\times n}$，$\forall \alpha\in\mathbf{C}$，有

$\|\boldsymbol{A}\| = \|\boldsymbol{A}\|_M + 2\|\boldsymbol{A}\|_S \ge 0$，即 $\|\boldsymbol{A}\|$ 满足正定性;　……………………………2 分

$\|\alpha\boldsymbol{A}\| = \|\alpha\boldsymbol{A}\|_M + 2\|\alpha\boldsymbol{A}\|_S = |\alpha|\|\boldsymbol{A}\|_M + 2|\alpha|\|\boldsymbol{A}\|_S = |\alpha|(\|\boldsymbol{A}\|_M + 2\|\boldsymbol{A}\|_S) = |\alpha|\|\boldsymbol{A}\|$，即 $\|\boldsymbol{A}\|$ 满足齐次性;　……………………………………………………………2 分

$\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\| = \|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|_M + 2\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|_S \le (\|\boldsymbol{A}\|_M + \|\boldsymbol{B}\|_M) + 2(\|\boldsymbol{A}\|_S + \|\boldsymbol{B}\|_S) = \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|$，即 $\|\boldsymbol{A}\|$ 满足三角不等式;　……………………………………………………2 分

$$\|\boldsymbol{AB}\| = \|\boldsymbol{AB}\|_M + 2\|\boldsymbol{AB}\|_S \le \|\boldsymbol{A}\|_M \|\boldsymbol{B}\|_M + 2\|\boldsymbol{A}\|_S \|\boldsymbol{B}\|_S$$

$$\le (\|\boldsymbol{A}\|_M + 2\|\boldsymbol{A}\|_S)(\|\boldsymbol{B}\|_M + 2\|\boldsymbol{B}\|_S)$$

$$= \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$$

即$\|\boldsymbol{A}\|$满足相容性. 综上$\|\boldsymbol{A}\|$是$C^{n\times n}$中的矩阵范数. …………………………2 分

## 四、计算题（10 分）

已知多项式空间$\mathrm{R}[t]_3$的一个基为$f_1(t)=1-t$，$f_2(t)=1+t^2$，$f_3(t)=t+2t^2$，线性变换$T$满足$T[f_1(t)]=2+t^2$，$T[f_2(t)]=t$，$T[f_3(t)]=1+t+t^2$.

（1）求$T$在已知基$f_1(t), f_2(t), f_3(t)$下的矩阵.

（2）设$f(t)=1+2t+3t^2$，求$T[f(t)]$.

解答: （1）$(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) = (1,t,t^2)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (1,t,t^2)B_1$.

$$(T[f_1(t)], T[f_2(t)], T[f_3(t)]) = (1,t,t^2)\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (1,t,t^2)B_2$$

由此可得，$(T[f_1(t)], T[f_2(t)], T[f_3(t)]) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))B_1^{-1}B_2$， …………..3 分

故$T$在已知基$f_1(t), f_2(t), f_3(t)$下的矩阵为$A = B_1^{-1}B_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. ……2 分

（2）$f(t) = (1,t,t^2)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (f_1, f_2, f_3)B_1^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (f_1, f_2, f_3)\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$， ……………..3 分

$$T[f(t)] = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))A\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = (f_1, f_2, f_3)\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -4+3t-2t^2.$$ ……..2 分

**五、计算题（8 分）**

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$,

（1）验证 $A$ 是正规矩阵;

（2）求 $A$ 的谱分解表达式.

解答: （1）因为 $A$ 是实对称阵，所以显然有 $A^H A=AA^H$，即 $A$ 是正规阵.

……………2 分

（2）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&0&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-2)$，所以 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$, $\lambda_3=2$.

当 $\lambda=-1$ 时，对应的特征向量为 $\xi_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$;

当 $\lambda=2$ 时，对应的特征向量为 $\xi_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$;

把 $\xi_1,\xi_2$ 正交化、单位化得 $P_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{bmatrix},P_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix}$，把 $\xi_3$ 单位化得 $P_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$.

令 $G_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\0&\frac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\-\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac23&-\frac13&-\frac13\\-\frac13&\frac23&-\frac13\\-\frac13&-\frac13&\frac23\end{bmatrix}$,

$G_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac13&\frac13&\frac13\\\frac13&\frac13&\frac13\\\frac13&\frac13&\frac13\end{bmatrix}$，则 $A=-G_1+2G_2$.   ………………6 分

六、计算题（**14** 分）

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{bmatrix}$,

（1）求矩阵 $A$ 的若当标准型 $J$ 及相似变换矩阵 $P$；

（2）求矩阵函数 $f(A)$ 的若当表示，并计算 $\mathrm{e}^{A}$.

解答:（1）由于 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)^3$，$A$ 的 Jordan 标准型为 $J=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$, 利用

$AP=PJ$ 可求得相应的相似变换阵 $P=\begin{bmatrix}-2&4&1\\0&3&0\\1&-2&0\end{bmatrix}$. ……………………6 分

（2） $f(A)$ 的 Jordan 表示为

$f(A)=Pf(J)P^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}-2&4&1\\0&3&0\\1&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(-1)&0&0\\0&f(-1)&f'(-1)\\0&0&f(-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\frac{2}{3}&1\\0&\frac{1}{3}&0\\1&0&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}f(-1)+4f'(-1)&0&8f'(-1)\\3f'(-1)&f(-1)&6f'(-1)\\-2f'(-1)&0&f(-1)-4f'(-1)\end{bmatrix}.$$ ………………………....6 分

当 $f(x)=\mathrm{e}^{x}$ 时，可得 $f(-1)=\mathrm{e}^{-1}, f'(-1)=\mathrm{e}^{-1}$，代入上式可得

$$\mathrm{e}^{A}=\begin{bmatrix}5\mathrm{e}^{-1}&0&8\mathrm{e}^{-1}\\3\mathrm{e}^{-1}&\mathrm{e}^{-1}&6\mathrm{e}^{-1}\\-2\mathrm{e}^{-1}&0&-3\mathrm{e}^{-1}\end{bmatrix}.$$ ………………..…………2 分