第二章 随机过程的基本概念

http://machunguang.hrbeu.edu.cn

哈尔滨工程大学

第2章 随机过程的基本概念

第2章 随机过程的基本概念

- **2.1 随机过程的定义**
- **2.2 随机过程的分类和举例**
- **2.3 随机过程的有限维分布函数族**
- **2.4 随机过程的数字特征**
- **2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征**
- **2.6 复随机过程**
- **2.7 几类重要的随机过程**

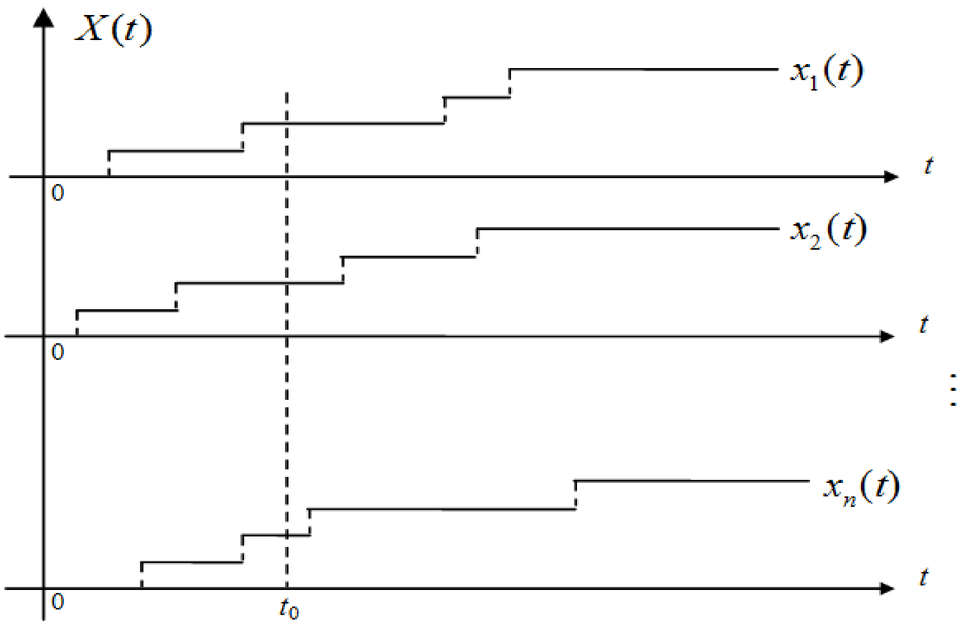
2.1 随机过程的定义

- 在客观世界中，有许多随机现象表现为带随机性的变化过程，它不能用一个或几个随机变量来刻画，而要用**一族无穷多个随机变量**来描绘，这**就是随机过程**.
- 随机过程是概率论的继续和发展. 被认为是**概率论的"动力学"部分**. 它的研究对象是**随时间演变的随机现象**.
- 事物变化的过程**不能用一个（或几个）时间t 的确定的函数来加以描述**.
- 对事物变化的全过程**进行一次观察**得到的结果**是一个时间t 的函数**，但对同一事物的变化过程独立地重复**进行多次观察所得的结果是不同的**，而且每次观察之前不能预知试验结果.

2.1 随机过程的定义

- **例2.1.1** 当t ($t \geq 0$)固定时，**电话交换站在[0, t]时间内收到的呼叫次数**是随机变量，记为$X(t)$. $X(t)$ **服从参数为λt的Poisson分布**，其中λ是单位时间内平均收到的呼叫次数，且$\lambda>0$. 如果t从0变到$+\infty$，**t 时刻前收到的呼叫次数需用一族随机变量**$\{X(t), t \in [0, +\infty]\}$来**表示**，则该随机现象就是一个随机过程. 对电话交换站做一次实验，便可得到一个"**呼叫次数—时间函数**"(即呼叫次数关于时间t 的函数 $x(t)$.

2.1 随机过程的定义



这个"**呼叫次数—时间函数**"是不可能预先确定的，只有通过测量才能得到. 由于呼叫的随机性，在相同条件下，每次测量都产生不同的"**呼叫次数—时间函数**".

2.1 随机过程的定义

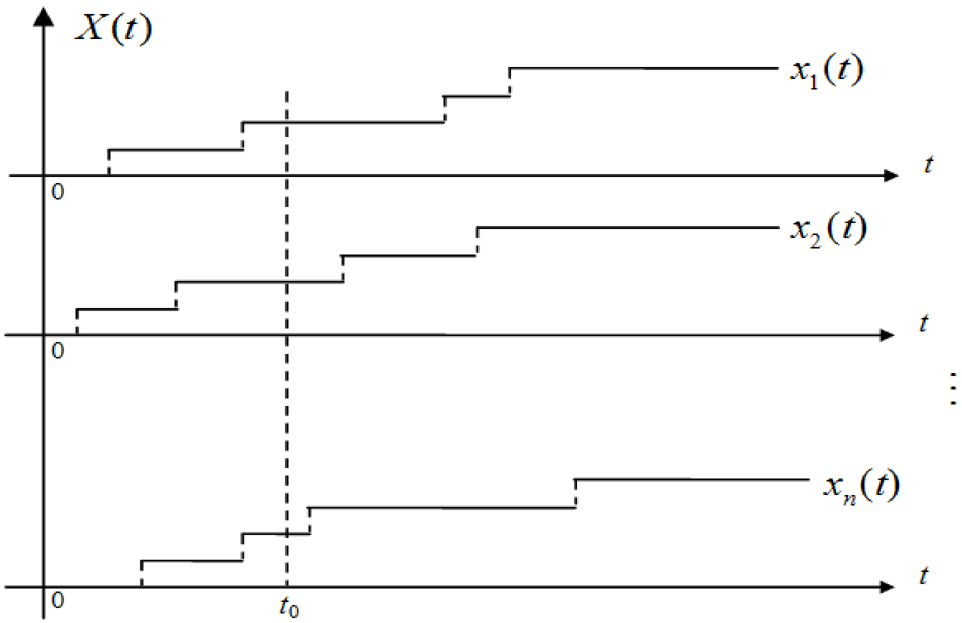
- **例2.1.2** 电子元件或器件由于内部微观粒子（电子）的随机热噪声引起的端电压称为**热噪声电压**，它**在任一确定时刻的值是随机变量**，记为$V(t)$. **如果t 从0变到$+\infty$，t 时刻的热噪声电压需要用一族随机变量**$\{V(t), t \in [0, +\infty]\}$**来表示**，则该随机变量就是一个随机过程. 对某种装置做一次试验，便可得到一个“**电压—时间函数**”$v(t)$. **这个“电压—时间函数”是不可能预先确知**的，只有通过测量才能得到. 如果**在相同的条件下独立地再进行一次测量，则得到的记录是不同**的.

2.1 随机过程的定义

- 所谓一族随机变量，首先是随机变量，从而**是该试验样本空间上的函数**；其次形成一族，因而它还取决于另一个变量，即**还是另一参数集上的函数**. 所以，**随机过程就是一族二元函数**.

- **定义2.1.1** 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是一个概率空间，T是一个实的参数集，**定义在Ω和T上的二元函数 $X(\omega,t)$**，如果对于任意固定的$t \in T$，$X(\omega,t)$是$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的随机变量，则称$\{X(\omega,t), \omega \in \Omega, t \in T\}$为该概率空间上的**随机过程**（**Stochastic Process**），简记为$\{X(t), t \in T\}$.

2.1 随机过程的定义



$\{X(\omega,t), \omega \in \Omega, t \in T\}$：

- <u>**固定$t = t_0$**</u> $\in T$，$X(t_0)$ <u>**是一个随机变量**</u>（第i次试验值为$x_i(t_0)$）．
- 对随机过程做一次试验，即<u>**固定样本点**</u>$\omega \in \Omega$，<u>**得到一个参数t 的普通函数**</u> $x(t)$.

2.1 随机过程的定义

- **定义2.1.2** 设$\{X(t), t\in T\}$是随机过程，**则当t固定时，$X(t)$是一个随机变量**,称之为$\{X(t), t\in T\}$在t时刻的**状态**. 随机变量$X(t)$(t固定，$t\in T$)所有可能的取值构成的集合，称为随机过程的**状态空间**，记为S.
- **定义2.1.3** 设$\{X(t), t\in T\}$是随机过程，**则当$\omega\in\Omega$固定时，$X(t)$是定义在上T不具有随机性的普通函数**，记为$x(t)$, 称为随机过程的一个**样本函数**. 其图像成为随机过程的一条**样本曲线**（轨道或实现）.

2.1 随机过程的定义

- **例2.1.3** 设$X(t)=V\cos\omega t$, $-\infty<t<+\infty$其中ω为常数，V服从区间[0,1]上的均匀分布，即

$$f_V(v)=\begin{cases}1, 0\le v\le 1\\ 0, \text{其他}\end{cases}$$

(1) 画出$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的几条样本曲线；

(2) 求$t=0,\dfrac{\pi}{4\omega},\dfrac{3\pi}{4\omega},\dfrac{\pi}{\omega}$时随机变量$X(t)$的概率密度函数;

(3)求$t=\dfrac{\pi}{2\omega}$时$X(t)$的分布函数

2.1 随机过程的定义

- **解**

(1) 取 $V=\dfrac{2}{3}$ 则 $x(t)=\dfrac{2}{3}\cos\omega t$；取$V$=0,则$x(t)$=0;取$V$=1，则$x(t)=\cos\omega t$. 这些都是 t 的确定函数，即随机过程的样本函数.

2.1 随机过程的定义

- (2) 当t=0时，$X(0)=V$，故$X(0)$的概率密度函数就是V的概率密度函数，即

$$f_{X(0)}(x)=\begin{cases}1, 0 \le x \le 1 \\ 0, 其他\end{cases}$$

当$t=\dfrac{\pi}{4\omega}$时，$X(\dfrac{\pi}{4\omega})=V\cos\omega\dfrac{\pi}{4\omega}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}V$，故$X(\dfrac{\pi}{4\omega})$的概率密度函数为

$$f_{X(\frac{\pi}{4\omega})}(x)=\begin{cases}\sqrt{2}, 0 \le x \le \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0, 其他\end{cases}$$

2.1 随机过程的定义

- 当$t=\dfrac{3\pi}{4\omega}$时，$X(\dfrac{3\pi}{4\omega})=V\cos\omega\dfrac{3\pi}{4\omega}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}V$，故$X(\dfrac{3\pi}{4\omega})$的概率密度函数为

$$f_{X(\frac{3\pi}{4\omega})}(x)=\begin{cases}\sqrt{2}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\le x\le 0\\ 0, 其他\end{cases}$$

- 当 $t=\dfrac{\pi}{\omega}$时，$X(\dfrac{\pi}{\omega})=V\cos\omega\dfrac{\pi}{\omega}=-V$，故$X(\dfrac{\pi}{\omega})$ 的概率密度函数为

$$f_{X(\frac{\pi}{\omega})}(x)=\begin{cases}1, -1\le x\le 0\\ 0, 其他\end{cases}$$

2.1 随机过程的定义

- (3) 当$t=\dfrac{\pi}{2\omega}$时, $X(\dfrac{\pi}{2\omega})=V\cos\omega\dfrac{\pi}{2\omega}=0$ ，不论V取何值, 均有 $X(\dfrac{\pi}{2\omega})=0$，因此 $P(X(\dfrac{\pi}{2\omega})=0)=1$ ，从而$X(\dfrac{\pi}{2\omega})$ 的分布函数为

$$F_{X(\frac{\pi}{2\omega})}(x)=\begin{cases}1, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$$

第2章 随机过程的基本概念

2.2 随机过程的分类和举例

- 随机过程可以**根据参数集 T 和状态空间 S 是离散集还是连续集**分为四大类.
- **1、离散参数、离散状态的随机过程**

  这类过程的特点是参数集是离散的，同时固定$t \in T$，$X(t)$是离散型随机变量即其取值也是离散的。
- **例 2.2.1**（**贝努利过程**）考虑抛掷一颗骰子的试验，设X_n是第$n(n\geq 1)$次抛掷的点数,对于$n=1,2,\ldots$的不同值，X_n是不同的随机变量,因而$\{X_n, n\geq 1\}$构成一随机过程，称为贝努利过程,其参数集$T=\{1,2,\ldots\}$，状态空间$S=\{1,2,3,4,5,6\}$.

2.2 随机过程的分类和举例

- **例 2.2.2** 设有一质点在x轴上作**随机游动**，在t=0时质点处于x轴的原点O，在$t=1,2,\ldots$时质点可以在x轴上正向或反向移动一个单位，作正向移动一个单位的概率为p，作反向移动一个单位的概率为$q=1-p$，在$t=n$时，质点所处的位置为X_n，则$\{X_n,n=1,2,\ldots\}$为一随机过程，其参数集$T=\{0,1,2,\ldots\}$，状态空间$S=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$。

2.2 随机过程的分类和举例

- **2、离散参数、连续状态的随机过程**

  这类过程的特点是参数集是离散的，对于固定的$t \in T$，$X(t)$是连续性随机变量。

- **例 2.2.3** 设X_n，$n=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$是相互独立同服从标准正态分布的随机变量，则$\{X_n, n=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$为一随机过程，其参数集T=$\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$，状态空间$S=(-\infty,+\infty)$

2.2 随机过程的分类和举例

- **3、连续参数、离散状态的随机过程**

  这类过程的特点是参数集是连续的，而对于固定的$t\in T$，$X(t)$是离散型随机变量。

- **例2.2.4** （**Possion过程**） 设$X(t)$表示在期间$[0,t]$内到达服务点的顾客数，对于$t\in[0,+\infty]$的不同值，$X(t)$是不同随机变量，因而$\{X(t), t\geq 0\}$构成一随机过程，其参数集$T=[0,+\infty]$，状态空间$S=\{0,1,2,\ldots\}$.

2.2 随机过程的分类和举例

- **4、连续参数、连续状态的随机过程**

  这类过程的特点是参数集是连续的，而对于固定的$t \in T$，$X(t)$是连续型随机变量。

- **例2.2.5** 设$X(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$, $-\infty < t < +\infty$,其中$A>0$,ω是常数,Φ 服从区间$[-\pi,\pi]$上的均匀分布，则$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$是一随机过程，其参数集$T=(-\infty,+\infty)$，状态空间$S=[-A,A]$.

第2章 随机过程的基本概念

- 2.1 随机过程的定义
- 2.2 随机过程的分类和举例
- **2.3 随机过程的有限维分布函数族**
- 2.4 随机过程的数字特征
- 2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征
- 2.6 复随机过程
- 2.7 几类重要的随机过程

2.3 随机过程的有限维分布函数族

- **定义 2.3.1** 设$\{X(t), t\in T\}$是一个随机过程，对于任意固定的$t\in T$, $X(t)$是随机变量，称

$$F(t;x)=P(X(t)\le x),x\in R,t\in T$$

为随机过程$\{X(t), t\in T\}$的**一维分布函数**；对于任意固定的$t_1,t_2\in T$， $X(t_1), X(t_2)$是两个随机变量，称

$$F(t_1,t_2;x_1,x_2)=P(X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2), x_1,x_2\in R, t_1,t_2\in T$$

为随机过程的**二维分布函数**；

2.3 随机过程的有限维分布函数族

一般地，对于任意固定的$t_1,t_2,\ldots,t_n \in T$, $X(t_1), X(t_2),\ldots, X(t_n)$是$n$个随机变量，称

$$F(t_1,t_2,\ldots,t_n;\ x_1,x_2,\ldots,x_n)=P(X(t_1)\le x_1,\ X(t_2)\le x_2,\ldots,\ X(t_n)\le x_n),$$

$$x_i \in R,\ t_i \in T, i=1,2,\ldots,n$$

为随机过程$\{X(t),\ t\in T\}$的**n维分布函数**.

2.3 随机过程的有限维分布函数族

- **定义 2.3.2** 设$\{X(t), t \in T\}$是一随机过程，其一维分布函数，二维分布函数，……，n维分布函数，……，的全体

$$F=\{F(t_1,t_2,\ldots,t_n;x_1,x_2,\ldots,x_n), x_i \in R, t_i \in T, i=1,2,\ldots,n, n \in N\}$$

称为随机过程$\{X(t), t \in T\}$的**有限维分布函数族**.

- 容易看出，随机过程的有限维分布函数族具有**对称性**和**相容性**.

2.3 随机过程的有限维分布函数族

- **1、对称性**

设 $i_1,i_2,\ldots,i_n$ 是 $1,2,\ldots,n$ 的任一排列，则

$$F(t_{i_1},t_{i_2},\cdots,t_{i_n};\ x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n})=F(t_1,t_2,\cdots,t_n;\ x_1,x_2,\cdots x_n)$$

事实上，

$$\begin{aligned}F(t_{i_1},t_{i_2},\cdots,t_{i_n};x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n}) &= P(X(t_{i_1})\le x_{i_1},X(t_{i_2})\le x_{i_2},\cdots,X(t_{i_n})\le x_{i_n})\\ &= P(X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2,\cdots,X(t_n)\le x_n)\\ &= F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{aligned}$$

2.3 随机过程的有限维分布函数族

- **2、相容性**

设$m<n$,则

$$F(t_1,t_2,\cdots,t_m;x_1,x_2,\cdots,x_m)=F(t_1,t_2,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots t_n;x_1,x_2,\cdots,x_m,+\infty,\cdots,+\infty)$$

事实上，

$$\begin{aligned}F(t_{i_1},t_{i_2},\cdots,t_{i_n};x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n}) &= P(X(t_{i_1})\le x_{i_1},X(t_{i_2})\le x_{i_2},\cdots,X(t_{i_n})\le x_{i_n})\\ &= P(X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2,\cdots,X(t_m)\le x_{m,}\\ &\qquad X(t_{m+1})<+\infty,\cdots,X(t_n)<+\infty)\\ &= F(t_1,t_2,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_{n;}\\ &\qquad x_1,x_2,\cdots,x_m,+\infty,\cdots,+\infty)\end{aligned}$$

2.3 随机过程的有限维分布函数族

- **定义 2.3.3** 设$\{X(t), t\in T\}$是一随机过程，对于任意固定的$t_1,t_2,\dots,t_n\in T$，$X(t_1),X(t_2),\dots,X(t_n)$是$n$个随机变量，称

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;u_1,u_2,\cdots,u_n)$$

$$=E\{\exp[j(u_1X(t_1)+u_2X(t_2)+\cdots+u_nX(t_n))]\}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[j(u_1x(t_1)+u_2x(t_2)+\cdots$$

$$+u_nx(t_n))]dF(t_1,t_2,? \ ,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$u_i\in \boldsymbol{R},\ t_i\in T,\ i=1,2,\dots,n,\ j=\sqrt{-1}$$

为随机过程$\{X(t), t\in T\}$的<u>**n维特征函数**</u>.

2.3 随机过程的有限维分布函数族

称

$$\Phi=\{\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;u_1,u_2,\cdots,u_n),u_i\in R,t_i\in T,i=1,2,\cdots,n,n\in N\}$$

为随机过程$\{X(t),\ t\in T\}$的**有限维特征函数族 .**

- **例 2.3.1** 设$X(t)=A+Bt,\ t\geq 0$, 其中A 和B 是相互独立的随机变量，分别服从正态分布$N(0,1)$，试求随机过程$\{X(t),\ t\geq 0\}$的一维和二维分布.

2.3 随机过程的有限维分布函数族

- **解** 先求一维分布. $\forall t \geq 0, X(t)$是正态随机变量，因为

$$E[X(t)]=EA+tEB=0$$

$$D[X(t)]=DA+t^2DB=1+t^2$$

所以$X(t)$服从正态分布$N(0,1+t^2)$,从而$\{X(t), t \geq 0\}$的一维分布为

$$\underline{X(t) \sim N(0,1+t^2),} \quad t \geq 0$$

再求二维分布, $\forall t_1, t_2 \geq 0, X(t_1) = A + Bt_1, X(t_2) = A + Bt_2$，从而

$$(X(t_1), X(t_2)) = (A, B)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix}$$

2.3 随机过程的有限维分布函数族

又A, B相互独立同服从正态分布，故(A,B)服从二维正态分布，从而$(X(t_1),X(t_2))$也服从二维正态分布.

$$E[X(t_1)]=0，E[X(t_2)]=0$$

$$D[X(t_1)]=1+t_1^2, D[X(t_2)]=1+t_2^2$$

$$cov(X(t_1),X(t_2))=E[X(t_1)X(t_2)]-E[X(t_1)]E[X(t_2)]$$

$$= E[(A+Bt_1)(A+Bt_2)]$$

$$=1+t_1t_2$$

故$(X(t_1),X(t_2))$的均值向量为$\mathbf{0}=(0,0)$，协方差矩阵为

2.3 随机过程的有限维分布函数族

$$B=\begin{bmatrix} 1+t_1^2 & 1+t_1t_2 \\ 1+t_1t_2 & 1+t_2^2 \end{bmatrix}$$

所以随机过程$\{X(t), t\geq 0\}$的二维分布为

$$(X(t_1), X(t_2))\sim N(0,B),\quad t_1,t_2\geq 0$$

2.3 随机过程的有限维分布函数族

- **例 2.3.2** 令$X(t)=A\cos t$, $-\infty<t<+\infty$,其中A是随机变量，其分布律为

$$P(A=i)=\frac{1}{3}\ ,\ \ i=1,2,3$$

试求

(1) 随机过程$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的一维分布函数

$$F(\frac{\pi}{4};x),\ \ F(\frac{\pi}{2};x)$$

(2) 随机变量$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的二维分布函数

$$F(0,\frac{\pi}{3};x_1,x_2)$$

2.3 随机过程的有限维分布函数族

- **解** (1)先求 $F(\frac{\pi}{4};x)$.由于 $X(\frac{\pi}{4})=A\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}A$, 因此$X(\frac{\pi}{4})$ 的可能取值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}$ ，并且

$$P(X(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2})=P(A\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2})=P(A=1)=\frac{1}{3}$$

$$P(X(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2})=P(A\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2})=P(A=2)=\frac{1}{3}$$

$$P(X(\frac{\pi}{4})=\frac{3}{2}\sqrt{2})=P(A\cos\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\sqrt{2})=P(A=3)=\frac{1}{3}$$

2.3 随机过程的有限维分布函数族

于是

$$F(\frac{\pi}{4};x)=\begin{cases}0, & x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{1}{3}, & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\le x<\sqrt{2}\\ \dfrac{2}{3}, & \sqrt{2}\le x<\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\\ 1, & x\ge\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\end{cases}$$

再求$F(\frac{\pi}{2};x)$.由于$X(\frac{\pi}{2})=A\cos\frac{\pi}{2}=0$,因此 $X(\frac{\pi}{2})$只能取0值，于是

$$F(\frac{\pi}{2};x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1 & x\ge 0\end{cases}$$

2.3 随机过程的有限维分布函数族

(2) 因为

$$F(0,\frac{\pi}{3};x_1,x_2)=P(X(0)\le x_1,X(\frac{\pi}{3})\le x_2)$$

$$=P(A\cos 0\le x_1,A\cos\frac{\pi}{3}\le x_2)$$

$$=P(A\le x_1,\frac{A}{2}\le x_2)$$

$$=P(A\le x_1,A\le 2x_2)$$

$$=\begin{cases}P(A\le x_1),x_1\le 2x_2\\P(A\le 2x_2),x_1>2x_2\end{cases}$$

2.3 随机过程的有限维分布函数族

所以

$$F(0,\frac{\pi}{3};x_1,x_2)=\begin{cases}0, & x_1\le 2x_2, x_1<1\text{或}x_1>2x_2, x_2<\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{3}, & x_1\le 2x_2, 1\le x_1<2\text{或}x_1>2x_2, \dfrac{1}{2}\le x_2<1\\ \dfrac{2}{3}, & x_1\le 2x_2, 2\le x_1<3\text{或}x_1>2x_2, 1\le x_2<\dfrac{3}{2}\\ 1, & x_1\le 2x_2, x_1\ge 3\text{或}x_1>2x_2, x_2\ge\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

第2章 随机过程的基本概念

- 2.1 随机过程的定义
- 2.2 随机过程的分类和举例
- 2.3 随机过程的有限维分布函数族
- **2.4 随机过程的数字特征**
- 2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征
- 2.6 复随机过程
- 2.7 几类重要的随机过程

2.4 随机过程的数字特征

- **1、随机过程的均值函数**

  设$\{X(t), t \in T\}$是一随机过程,$\forall t \in T, X(t)$是一个随机变量，如果$E[X(t)]$存在，记为$m_X(t)$，则称$m_X(t)$,$t \in T$为$\{X(t), t \in T\}$的**均值函数**.

- 如果$\{X(t), t \in T\}$的一维分布函数为$F(t;x)$，那么

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(t; x), \quad t \in T$$

- 随机过程的均值函数$m_X(t)$在t 时刻的值，表示**随机过程在t 时刻所处状态取值的理论平均值**，当$t \in T$ 时，$m_X(t)$ **在几何上表示一条固定的曲线**.

2.4 随机过程的数字特征

- **2、随机过程的方差函数**

  设$\{X(t), t \in T\}$是一随机过程，$\forall t \in T, X(t)$是一随机变量，如果$D[X(t)]$存在，记为$D_X(t)$，则称 $D_X(t)$，$t \in T$ 为$\{X(t), t \in T\}$的<u>**方差函数**</u>.

- 显然

$$\underline{D_X(t)=D[X(t)]=E[X(t)-m_x(t)]^2}, \quad t \in T$$

- 随机过程的方差函数$D_X(t)$ 在t 时刻的值，表示<u>**随机过程在t 时刻所处状态取值离开均值的偏差程度**</u>，当$t \in T$ 时，$D_X(t)$ <u>**是一个普通的函数**</u> .

2.4 随机过程的数字特征

- **3、随机过程的协方差函数**

设$\{X(t), t \in T\}$是一随机过程$\forall s,t \in T$,$X(s)$,$X(t)$是两个随机变量，如果$cov(X(s),X(t))$存在，记为$C_x(s,t)$,则称$C_x(s,t),s,t\in T$为$\{X(t), t \in T\}$的**协方差函数**.

显然

$$C_x(s,t)=cov(X(s),X(t))=E[(X(s)- m_x(s))(X(t)- m_x(t))]$$

$$=E[X(s)X(t)]- m_x(s)\, m_x(t)\ ,\ t \in T$$

2.4 随机过程的数字特征

随机过程的**协方差函数**$C_x(s,t)$**在$s,t\in T$时刻的绝对值表示随机过程在时刻s,t所处状态的线性联系的密切程度**，若$C_x(s,t)$的绝对值较大，则在两个时刻s,t的状态$X(s),X(t)$线性联系较密切；若$C_x(s,t)$的绝对值较小，则在两个时刻s,t的状态$X(s),X(t)$线性联系不密切.

- **4、随机过程的相关函数**

设$\{X(t),\ t\in T\}$是一随机过程，$\forall s,t\in T$，$X(s),\ X(t)$是两个随机变量，如果$E[X(s)X(t)]$存在，记为$R_x(s,t)$，则称$R_x(s,t)$，$s,t\in T$为$\{X(t),\ t\in T\}$的**相关函数**.

2.4 随机过程的数字特征

- **5、随机过程的均方值函数**

设$\{X(t), t \in T\}$是一随机过程$\forall t \in T, X(t)$是一随机变量，如果 $E[X(t)]^2$ 存在，记为$\Phi_x(t)$，则称$\Phi_x(t), t\in T$为 $\{X(t), t \in T\}$的**均方值函数**.

- **6、随机过程数字特征的关系**

随机过程$\{X(t),\ t\in T\}$的**协方差函数、相关函数和均值函数的关系**为

$$C_x(s,t)=R_x(s,t)-m_x(s)m_x(t)\ ,\quad s,t\in T$$

在协方差函数的定义式中，取$s=t$，则随机过程的**方差函数和协方差函数的关系**为

$$D_X(t)=C_x(t,t),\quad t\in T$$

类似地，**均值函数和相关函数的关系**为

$$\Phi_x(t)=R_x(t,t),\ t\in T$$

2.4 随机过程的数字特征

- 从上述关系可以看出，**均值函数和相关函数是随机过程的两个本质数字特征**，其它的数字特征可以通过本质的数字特征获得.
- 随机过程的均值函数称为**随机过程的一阶矩**，均方值函数称为**随机过程的二阶矩**. 显然，相关函数、协方差函数、方差函数也是随机过程的一种二阶矩。

2.4 随机过程的数字特征

- **例 2.4.1** 设$X(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$, $-\infty<t<+\infty$,其中A,B是相互独立，且都服从正态分布$N(0,\sigma^2)$的随机变量，ω是实常数. 试求$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的均值函数和相关函数.

解 $m_X(t) = E[X(t)] = E[A\cos\omega t+B\sin\omega t] = (EA)\cos\omega t+(EB)\sin\omega t = 0$

$$R_X(s,t) = E[X(s)X(t)] = E[(A\cos\omega s+B\sin\omega s)(A\cos\omega t+B\sin\omega t)]$$

$$= (EA^2)\cos\omega s\cos\omega t+(EAB)(\sin\omega s\cos\omega t+\cos\omega s\sin\omega t)+(EB^2)\sin\omega s\sin\omega t$$

$$= \sigma^2\cos\omega(t-s)$$

- ✓ $EA^2 = (EA)^2 + DA= \sigma^2$
- ✓ $EAB = EA\,EB = 0$
- ✓ $\cos\omega s\cos\omega t+\sin\omega s\sin\omega t = \cos\omega(t-s)$

2.4 随机过程的数字特征

- **例 2.4.2** 设$X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$, $-\infty<t<+\infty$,其中a和ω是常数，Θ是服从$[0,2\pi]$上均匀分布的随机变量，求$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的数字特征.

解 由于Θ 的概率密度函数为

$$f_\Theta(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0\le\theta\le 2\pi \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

2.4 随机过程的数字特征

于是 $$m_X(t) = E[X(t)]$$
$$= E[a\cos(\omega t + \Theta)]$$
$$= \int_0^{2\pi} a\cos(\omega t + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta$$
$$=0, \qquad -\infty < t < +\infty$$

$$R_X(s,t) = E[X(s)X(t)]$$
$$= E[a\cos(\omega s + \Theta) \cdot a\cos(\omega t + \Theta)]$$
$$= a^2 \int_0^{2\pi} \cos(\omega s + \theta)\cos(\omega t + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta$$
$$= \frac{a^2}{2} \cos\omega(t - s), \qquad -\infty < s,t < +\infty$$

2.4 随机过程的数字特征

$$
\begin{aligned}
C_X(s,t) &= R_X(s,t) - m_X(t) \\
&= \frac{a^2}{2}\cos\omega(t-s) - 0 \\
&= \frac{a^2}{2}\cos\omega(t-s),\ -\infty < s,t < +\infty
\end{aligned}
$$

$$
D_X(t) = C_X(t,t) = \frac{a^2}{2}, -\infty < t < +\infty
$$

$$
\Phi_X(t) = R_X(t,t) = \frac{a^2}{2}, -\infty < t < +\infty
$$

2.4 随机过程的数字特征

- **例 2.4.3** 设$X(t)=A+Bt$, $-\infty<t<+\infty$,其中A,B是相互独立的随机变量，且均值为0，方差为1，求$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的数字特征.

解 $m_X(t) = E[X(t)] = E[A+Bt] = EA+tEB=0$, $-\infty<t<+\infty$

$$R_X(s,t) = E[(A+Bs)(A+Bt)] = EA^2+(s+t)EAB+stEB^2$$

$$=1+st, \quad -\infty<t<+\infty$$

$$C_X(s,t) = R_x(s,t)-m_x(s)m_x(t)=1+st, \quad -\infty<t<+\infty$$

$$D_X(t) = C_X(t,t) =1+t^2, \quad -\infty<t<+\infty$$

$$\Phi_X(t) = R_X(t,t) = 1+t^2, \quad -\infty<t<+\infty$$

第2章 随机过程的基本概念

- 2.1 随机过程的定义
- 2.2 随机过程的分类和举例
- 2.3 随机过程的有限维分布函数族
- 2.4 随机过程的数字特征
- **2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征**
- 2.6 复随机过程
- 2.7 几类重要的随机过程

2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征

- **1、二维随机过程的联合分布函数**

- **定义 2.5.1** 设$\{X(t), t\in T\}$和$\{Y(t), t\in T\}$是两个随机过程，称$\{X(t), Y(t), \ t\in T\}$为**二维随机过程**.

- **定义 2.5.2** 对于任意 $m\geq 1, n\geq 1, t_1, t_2, \ldots, t_m\in T, t_1^{'}, t_2^{'}, \cdots, t_n^{'}\in T$, $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_m), \ Y(t_1^{'}), Y(t_2^{'})\cdots, Y(t_n^{'}))$是$m+n$维随机变量，称

$$\underline{F(t_1, t_2, \cdots, t_m; x_1, x_2, \cdots, x_m; t_1^{'}, t_2^{'}, \cdots, t_n^{'}; y_1, y_2, \cdots, y_n)}$$
$$= P(X(t_1)\leq x_1, X(t_2)\leq x_2, \cdots, X(t_m)\leq x_m, Y(t_1^{'})\leq y_1, Y(t_2^{'})\leq y_2, \cdots, Y(t_n^{'})\leq y_n)$$
$$x_i\in R, y_i\in R, t_i\in T, t_j^{'}\in T, i=1,2,\cdots m, j=1,2,\cdots,n$$

为**二维随机过程**$\{X(t), Y(t), \ t\in T\}$**的$m+n$为分布函数**.

2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征

- 二维随机过程$\{X(t), Y(t)，t \in T\}$作为一个整体，具有**m+n （任意）维分布函数**

$$F(t_1,t_2,\cdots,t_m;x_1,x_2,\cdots,x_m;t_1',t_2',\cdots,t_n';y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

- $\{X(t), t \in T\}$和$\{Y(t), t \in T\}$都是随机过程，分别也有**m （任意）维分布函数**和**n （任意）维分布函数**，将他们分别记为

$$F_X(t_1,t_2,\ldots,t_m;x_1,x_2,\ldots,x_m),\quad F_Y(t_1',t_2',\cdots,t_n';y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征

- **定义 2.5.3** 称 $F_X(t_1,t_2,\ldots,t_m;x_1,x_2,\ldots,x_m)F_Y(t_1',t_2',\cdots,t_n';y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 分别为二维随机过程$\{X(t),Y(t),\ t\in T\}$关于$\{X(t),t\in T\}$和关于$\{Y(t),t\in T\}$的m维边缘分布函数和n维边缘分布函数.

如果对于任意$m\geq 1,n\geq 1,t_1,t_2,\ldots,t_m\in T$，$t_1',t_2',\cdots,t_n'\in T$， 有

$$\underline{F(t_1,t_2,\cdots,t_m;x_1,x_2,\cdots,x_m;t_1',t_2',\cdots,t_n';y_1,y_2,\cdots,y_m)}$$

$$\underline{=F_X(t_1,t_2,\ldots,t_m;x_1,x_2,\ldots,x_m)F_Y(t_1',t_2',\cdots,t_n';y_1,y_2,\cdots,y_m)}$$

那么称<u>**随机过程**</u>$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$<u>**相互独立**</u>.

2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征

- **2、二维随机过程的数字特征**
- **定义 2.5.4** 设$\{X(t),Y(t),\ t\in T\}$是二维随机过程,$\forall s,t\in T$ $X(s),Y(t)$是两个随机变量，如果$E[X(s)Y(t)]$存在，记为 $R_{XY}(s,t)$,则称$R_{XY}(s,t),\ s,t\in T$为$\{X(t),Y(t),\ t\in T\}$的**互相关函数**. 如果$\mathrm{cov}(X(s),X(t))$存在，记为$C_{XY}(s,t)$, 则称$C_{XY}(s,t)$, $s,t\in T$为$\{X(t),Y(t),\ t\in T\}$的**互协方差函数**.
- 显然

$$C_{XY}(s,t)=R_{XY}(s,t)-m_X(s)m_Y(t)\ ,\ s,t\in T$$

2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征

- **定义 2.5.5** 设$\{X(t), t\in T\}$和$\{Y(t), t\in T\}$是两个随机过程，如果

$$C_{XY}(s,t)=0 \text{ 或 } R_{XY}(s,t)=m_X(s)m_Y(t)\text{，}\quad s,t\in T$$

则称$\{X(t), t\in T\}$和$\{Y(t), t\in T\}$**不相关**.

- **定理2.5.1** 设$\{X(t), t\in T\}$和$\{Y(t), t\in T\}$相互独立，则$\{X(t), t\in T\}$和$\{Y(t), t\in T\}$不相关.

第2章 随机过程的基本概念

2.6 复随机过程

- **定义 2.6.1** 设$\{X(t), t\in T\}$和$\{Y(t), t\in T\}$是定义在同一概率空间上的两个是随机过程，令$Z(t)=X(t)+jY(t), t\in T$，则称$\{Z(t), t\in T\}$为**复随机过程**.
- **定义 2.6.2** 设$\{Z(t), t\in T\}$为复随机过程.称

$m_Z(t)=E[Z(t)], t\in T$,为$\{Z(t), t\in T\}$的**均值函数**.称

$D_Z(t)=D[Z(t)]=E\left|Z(t)-m_Z(t)\right|^2, t\in T$,为$\{Z(t), t\in T\}$的**方差函数**.称

$C_Z(s,t)=cov(Z(s),Z(t))=E[(Z(s)-m_Z(s))\overline{(Z(t)-m_Z(t))}]$

$s,t\in T$ 为$\{Z(t), t\in T\}$的**协方差函数**.称

2.6 复随机过程

$R_Z(s,t)=E[\overline{Z(s)}Z(t)], s,t\in T,$ 为 $\{Z(t),\ t\in T\}$的**<u>相关函数</u>**

称 $\Phi_Z(t)=E|Z(t)|^2,\ t\in T,$ 为$\{Z(t),\ t\in T\}$的**<u>均方值函数</u>**.

- 显然，复随机过程的数字特征之间有下列关系和结论：

$$m_Z(t)=m_X(t)+jm_Y(t),\qquad t\in T$$

$$D_Z(t)=D_X(t)+D_Y(t),\qquad t\in T$$

$$D_Z(t)=C_Z(t,t),\qquad t\in T$$

$$C_Z(s,t)=R_Z(s,t)-\overline{m_Z(s)}m_Z(t),\quad s,t\in T$$

$$\Phi_Z(t)=R_Z(t,t),\qquad t\in T$$

2.6 复随机过程

- **定义 2.6.3** 设$\{Z_1(t),\ t\in T\}$和$\{Z_2(t),\ t\in T\}$是两个复随机过程，称

$$C_{Z_1Z_2}(s,t)=\operatorname{cov}(Z_1(s),Z_2(t))=E[\overline{(Z_1(s)-m_{Z_1}(s))}(Z_2(t)-m_{Z_2}(t))]$$

$$s,t\in T$$

为$\{Z_1(t),\ t\in T\}$和$\{Z_2(t),\ t\in T\}$的**<u>互协方差函数</u>**，称

$$R_{Z_1Z_2}(s,t)=E[\overline{Z_1(s)}Z_2(t)]\quad s,t\in T$$

为$\{Z_1(t),\ t\in T\}$和$\{Z_2(t),\ t\in T\}$的**<u>互相关函数</u>**.

2.6 复随机过程

- **例 2.6.1** 设 $Z(t)=\sum_{k=1}^{n}X_k e^{j(\omega_0 t+\Phi_k)}$，$-\infty<t<+\infty$，其中$\omega_0$是正常数，$n$为固定的正整数，$X_1,X_2,\ldots,X_n$, Φ_1, $\Phi_2,\ldots$, Φ_n是相互独立的实随机变量，且 $EX_k=0, DX_k=\sigma_k^2$，$\Phi_k\sim U[0,2\boldsymbol{\pi}]$，$k=1,2,\ldots,n$. 求$\{Z(t), -\infty<t<+\infty\}$的均值函数和相关函数.

2.6 复随机过程

- **解**

$$m_Z(t) = E[\sum_{k-1}^{n} X_k e^{j(\omega_0 t+\Phi_k)}]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} EX_k (E\cos(\omega_0 t + \Phi_k) + jE\sin(\omega_0 t + \Phi_k))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} EX_k \left(\int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 t + \varphi_k) \frac{1}{2\pi} d\varphi_k + j\int_0^{2\pi} \sin(\omega_0 t + \varphi_k) \frac{1}{2\pi} d\varphi_k \right)$$

$$= 0, \qquad -\infty < t < +\infty$$

$$R_Z(s,t) = E[\sum_{k=1}^{n} X_k e^{j(\omega_0 s+\Phi_l)}] = E[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} X_k X_l e^{j(\Phi_l-\Phi_k)}]e^{j\omega_0(t-s)}$$

2.6 复随机过程

又

$$Ee^{j(\Phi_l-\Phi_k)} = E\cos(\Phi_l-\Phi_k) + jE\sin(\Phi_l-\Phi_k)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\varphi_l-\varphi_k)(\frac{1}{2\pi})^2 d\varphi_l d\varphi_k + j\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\varphi_l-\varphi_k)(\frac{1}{2\pi})^2 d\varphi_l d\varphi_k$$

$$= \begin{cases} 0\text{，} & l \neq \mathrm{k} \\ 1\text{，} & l = k \end{cases}$$

于是

$$R_Z(s,t) = e^{j\omega_0(t-s)}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$$

第2章 随机过程的基本概念

- 2.1 随机过程的定义
- 2.2 随机过程的分类和举例
- 2.3 随机过程的有限维分布函数族
- 2.4 随机过程的数字特征
- 2.5 两个随机过程的联合分布和数字特征
- 2.6 复随机过程
- **2.7 几类重要的随机过程**

2.7 几类重要的随机过程

- **1、二阶矩过程**

- **定义 2.7.1** 如果随机过程$\{X(t), t \in T\}$的一、二阶矩存在（有限），则称$\{X(t), t \in T\}$是**二阶矩过程**. 从二阶矩过程的**均值函数**和**相关函数**出发讨论随机过程的性质，而允许不涉及它的有限维分布，这种理论称为**随机过程的相关理论**.

- 由二阶矩过程的定义，**二阶矩过程的均值函数和相关函数总是存在的**，进而它的其它数字特征也都存在.

2.7 几类重要的随机过程

- **定理 2.7.1** 设$\{X(t), t \in T\}$是二阶矩过程，则相关函数 $R_X(s,t)$ 具有下列性质：

(1) **共轭对称性**：

$$\overline{R_X(s,t)} = R_X(t,s), \quad s,t \in T$$

(2) **非负定性**：即对于任意$n \geq 1$,任意$t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ 和任意的复数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} R_X(t_k, t_l)\overline{\lambda_k}\lambda_l \geq 0$$

2.7 几类重要的随机过程

- **2、正态过程**
- **定义 2.7.2** 设$\{X(t), t\in T\}$是一随机过程，如果对于任意$n\geq 1$和任意$t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$, $(X(t_1), X(t_2),\ldots, X(t_n))$是$n$维正态随机变量，则称$\{X(t), t\in T\}$为**正态过程**或**高斯过程**.
- 显然，**正态过程是二阶矩过程**，它的**有限维分布由它的均值函数和协方差函数完全确定**.

2.7 几类重要的随机过程

- **例 2.7.1** 设$X(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t, -\infty<t<+\infty$，其中$A,B$相互独立，且都服从正态分布$N(0,\sigma^2)$的随机变量，$\omega$是实常数. 试证明$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$是正态过程，并求它的有限维分布.

2.7 几类重要的随机过程

- **证明** 由于A,B相互独立，且都服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，因此$(A,B)\sim N(0,\sigma^2\boldsymbol{E})$（$\boldsymbol{E}$是二阶单位矩阵）. 对于任意 $n\geq 1$ 和任意$t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$， 由于

$$X(t_1)=A\cos\omega t_1+B\sin\omega t_1$$
$$X(t_2)=A\cos\omega t_2+B\sin\omega t_2$$
$$\vdots$$
$$X(t_n)=A\cos\omega t_n+B\sin\omega t_n$$

即

$$(X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n))=(A,B)\begin{bmatrix}\cos\omega t_1 & \cos\omega t_2 & \cdots & \cos\omega t_n\\ \sin\omega t_1 & \sin\omega t_2 & \cdots & \sin\omega t_n\end{bmatrix}$$

$$\overset{def}{=}(A,B)C$$

2.7 几类重要的随机过程

因而，$(X(t_1), X(t_2),\dots, X(t_n))$ 是**二维正态随机变量**(A,B)的**线性变换**，

所以，$(X(t_1), X(t_2),\dots, X(t_n))$ **是n为正态随机变量**，故**$\{X(t), t\in T\}$是正态过程**. 由于$\{X(t), t\in T\}$是正态过程，且$E[X(t)]=0$，因而

$$(X(t_1), X(t_2),\dots, X(t_n)) \sim N(0,\boldsymbol{B}),\ \ t_1,t_2,\dots,t_n\in T\ .$$

其中

$$B=C^T\ \sigma^2 EC=\sigma^2\begin{bmatrix}\cos\omega t_1 & \sin\omega t_1\\ \cos\omega t_2 & \sin\omega t_2\\ \vdots & \vdots\\ \cos\omega t_n & \sin\omega t_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\omega t_1 & \cos\omega t_2 & \cdots & \cos\omega t_n\\ \sin\omega t_1 & \sin\omega t_2 & \cdots & \sin\omega t_n\end{bmatrix}$$

$$=\sigma^2\begin{bmatrix}1 & \cos\omega(t_1-t_2) & \cdots & \cos\omega(t_1-t_n)\\ \cos\omega(t_2-t_1) & 1 & \cdots & \cos\omega(t_2-t_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \cos\omega(t_n-t_1) & \cos\omega(t_n-t_1) & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

- **3、正交增量过程**
- **定义 2.7.3** **设**$\{X(t), t\in T\}$是一二阶矩过程，如果对于任意的$t_1<t_2\leq t_3<t_4\in T$，有

$$E[\overline{(X(t_2)-X(t_1))}(X(t_4)-X(t_3))]=0$$

则称$\{X(t), t\in T\}$为一**正交增量过程**.

- 对于正交增量过程，若T取为有限区间$[a,b]$，则对于任意的$a\leq s<t\leq b$，有

$$E[\overline{(X(s)-X(a))}(X(t)-X(s))]=0$$

特别地，当$X(a)=0$时，有$E[\overline{X(s)}(X(t)-X(s))]=0$

2.7 几类重要的随机过程

- **定理 2.7.2** 设$\{X(t), t\in[a,b]\}$是正交增量过程，且$X(a)=0$，则

(1)

$$R_X(s,t)=\Phi_X(\min(s,t)), s,t\in[a,b]$$

$$C_X(s,t)=D_X(\min(s,t))+\left|m_X(\min(s,t))\right|^2-\overline{m_X(s)}m_X(t), s,t\in[a,b]$$

(2) $\Phi_X(t)$是单调不减函数.

2.7 几类重要的随机过程

- **4、独立增量过程**
- **定义 2.7.4** 设$\{X(t), t\in T\}$是一随机过程，如果对于任意的 $n\geq 3$ 和任意 $t_1<t_2< \ldots <t_n\in T$,

$$X(t_2)-X(t_1),\ X(t_3)-X(t_2), \ldots,\ X(t_n)-X(t_{n-1})$$

是相互独立的随机变量，则称$\{X(t), t\in T\}$是**独立增量过程**.如果对于任意$s<t\in T$，$X(t)-X(s)$ 分布仅依赖于$t-s$，而与s,t 本身取值无关，则称$\{X(t), t\in T\}$为**平稳增量过程**.如果$\{X(t), t\in T\}$既是平稳增量过程，又是独立增量过程，则称$\{X(t), t\in T\}$为**平稳的独立增量过程**.

- **定理2.7.3** 独立增量过程的有限维分布函数由**其一维分布函数**和**增量分布函数**确定.

2.7 几类重要的随机过程

- **5、*Wiener*过程**
- **定义2.7.5** 称实随机过程$\{W(t),t\geq 0\}$是参数为σ的*Wiener* 过程，如果

(1) $W(0)=0$；

(2) $\{W(t), t\geq 0\}$ 是平稳的独立增量过程；

(3) $\forall 0\leq s<t, W(t)-W(s)\sim N(0,\sigma^2(t-s))$.

- **定理 2.7.4** 设$\{W(t),t\geq 0\}$是参数为σ^2 的*Wiener* 过程，则

(1) $\forall t>0, W(t)\sim N(0,\sigma^2 t)$;

(2) $m_W(t)=0, t\geq 0; D_W(t)=\sigma^2 t, t\geq 0$;

$R_W(s,t)=C_W(s,t)=\sigma^2\min(s,t), s,t\geq 0.$

- **定理 2.7.5** *Wiener* 过程是正态过程.

2.7 几类重要的随机过程

- **6、平稳过程**

平稳过程是一类**统计特性不随时间推移而变化**的随机过程.

- **定义 4.1.1** 设$\{X(t), t\in T\}$是一随机过程，如果对于任意的$n\geq 1$和任意的$t_1,t_2,\dots,t_n\in T$以及$t_1+\tau,t_2+\tau,\dots,t_n+\tau\in T$的任意实数$\tau$，$n$维随机变量$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$和$(X(t_1+\tau), X(t_2+\tau), \dots, X(t_n+\tau))$**有相同的联合分布函数**，即

$$F(t_1,t_2,\dots,t_n;x_1,x_2,\dots,x_n)=F(t_1+\tau,t_2+\tau,\dots,t_n+\tau;x_1,x_2,\dots,x_n)$$

$$t_i\in T,\quad x_i,\tau\in R,\quad i=1,2,\dots,n$$

则称$\{X(t), t\in T\}$是**严(强、狭义)平稳过程**，或称$\{X(t), t\in T\}$具有**严平稳性**.

- 严平稳过程的**有限维分布不随时间的推移而发生改变**，所有**一维分布函数与时间 t 无关**，所有**二维分布函数仅是时间间隔的函数**，而与两个时刻本身无关.

2.7 几类重要的随机过程

- **定义 4.1.2** 设$\{X(t), t\in T\}$是二阶矩过程，如果

  (1) $\forall t\in T, m_X(t)=m_X$ (m_X为常数)

  (2) $\forall s,t\in T, R_X(s,t)=R_X(t-s)$ 或$\forall \tau\in R, t, t+\tau\in T, R_X(t,t+\tau)=R_X(\tau)$

  则称$\{X(t), t\in T\}$为**宽平稳过程**，简称**平稳过程**.

- **严平稳过程不一定是宽平稳过程**，因为严平稳过程只涉及有限维分布，而并不要求一、二阶矩存在. **但对二阶矩过程，严平稳过程一定是宽平稳过程**.

- **宽平稳过程也不一定是严平稳过程**，因为宽平稳过程的定义只要**均值函数与时间无关**，**相关函数仅依赖于时间间隔**，而与时间缺点无关，推导不出有限维分布不随时间的推移而发生改变，甚至一、二维分布.

小结

- 随机过程的定义
  - 定义在 Ω 和 T 上的二元函数 $X(\omega,t)$（一族随机变量）
  - 当t 固定时，是随机变量；当ω 固定时，是普通函数
- 随机过程的分类
  - 根据参数集 T 和状态空间 S 是离散还是连续集合，分为四类
- 随机过程的有限维分布（特征）函数族、数字特征
  - 分布函数族，特征函数族
  - 均值函数，方差函数，协方差函数，相关函数，均方值函数
- 两个随机过程的联合分布和数字特征
  - 二维随机过程的 $m+n$ 维分布函数，边缘分布
  - 互相关函数，互协方差函数
  - 两个随机过程相互独立（不相关）
- 复随机过程
- 几类重要的随机过程
  - 二阶矩过程，正态过程，正交增量过程，独立增量过程，Wiener过程，平稳过程

The End