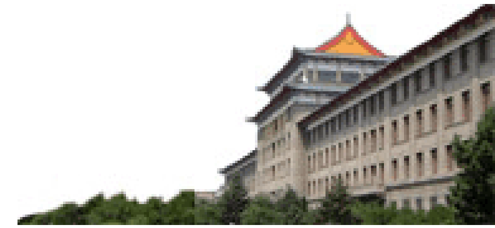
哈尔滨工程大学
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY



随机过程

第2部分 随机过程基本概念

2.3 随机过程的有限维分布函数族

- **例 2.3.1** 设$X(t)=A+Bt,\ t\geq 0$, 其中A 和B 是相互独立的随机变量，分别服从正态分布$N(0,1)$，试求随机过程$\{X(t), t\geq 0\}$的一维和二维分布.

2.3 随机过程的有限维分布函数族

- **解** 先求一维分布. $\forall t \geq 0, X(t)$是正态随机变量，因为

$$E[X(t)]=EA+tEB=0$$

$$D[X(t)]=DA+t^2DB=1+t^2$$

所以$X(t)$服从正态分布$N(0,1+t^2)$,从而$\{X(t), t \geq 0\}$的一维分布为

$$\underline{X(t) \sim N(0,1+t^2),} \quad t \geq 0$$

再求二维分布, $\forall t_1, t_2 \geq 0, X(t_1) = A + Bt_1, X(t_2) = A + Bt_2$,

从而

$$(X(t_1), X(t_2)) = (A, B)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix}$$

2.3 随机过程的有限维分布函数族

又A, B相互独立同服从正态分布，故(A,B)服从二维正态分布，从而$(X(t_1),X(t_2))$也服从二维正态分布.

$$E[X(t_1)]=0，E[X(t_2)]=0$$

$$D[X(t_1)]=1+t_1^2, D[X(t_2)]=1+t_2^2$$

$$cov(X(t_1),X(t_2))=E[X(t_1)X(t_2)]-E[X(t_1)]E[X(t_2)]$$

$$= E[(A+Bt_1)(A+Bt_2)]$$

$$=1+t_1t_2$$

故$(X(t_1),X(t_2))$的均值向量为$\mathbf{0}=(0,0)$，协方差矩阵为

2.3 随机过程的有限维分布函数族

$$B=\begin{bmatrix} 1+t_1^2 & 1+t_1t_2 \\ 1+t_1t_2 & 1+t_2^2 \end{bmatrix}$$

所以随机过程$\{X(t),\ t\geq 0\}$的二维分布为

$$(X(t_1),\ X(t_2))\sim N(0,B),\quad t_1,t_2\geq 0$$

2.3 随机过程的有限维分布函数族

- **例 2.3.2** 令$X(t)=A\cos t$, $-\infty<t<+\infty$,其中A是随机变量，其分布律为

$$P(A=i)=\frac{1}{3}\ ,\ \ i=1,2,3$$

试求

(1) 随机过程$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的一维分布函数

$$F(\frac{\pi}{4};x),\ \ F(\frac{\pi}{2};x)$$

(2) 随机变量$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的二维分布函数

$$F(0,\frac{\pi}{3};x_1,x_2)$$

2.3 随机过程的有限维分布函数族

- **解** (1)先求 $F(\frac{\pi}{4};x)$.由于 $X(\frac{\pi}{4})=A\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}A$, 因此 $X(\frac{\pi}{4})$ 的可能取值为 $\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2},\ \frac{3}{2}\sqrt{2}$ ，并且

$$P(X(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2})=P(A\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2})=P(A=1)=\frac{1}{3}$$

$$P(X(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2})=P(A\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2})=P(A=2)=\frac{1}{3}$$

$$P(X(\frac{\pi}{4})=\frac{3}{2}\sqrt{2})=P(A\cos\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\sqrt{2})=P(A=3)=\frac{1}{3}$$

2.3 随机过程的有限维分布函数族

于是

$$F(\frac{\pi}{4};x)=\begin{cases}0, & x<\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{3}, & \frac{\sqrt{2}}{2}\le x<\sqrt{2}\\ \frac{2}{3}, & \sqrt{2}\le x<\frac{3}{2}\sqrt{2}\\ 1, & x\ge\frac{3}{2}\sqrt{2}\end{cases}$$

再求$F(\frac{\pi}{2};x)$.由于$X(\frac{\pi}{2})=A\cos\frac{\pi}{2}=0$,因此 $X(\frac{\pi}{2})$只能取0值，于是

$$F(\frac{\pi}{2};x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1 & x\ge 0\end{cases}$$

2.3 随机过程的有限维分布函数族

(2) 因为

$$F(0,\frac{\pi}{3};x_1,x_2)=P(X(0)\le x_1,X(\frac{\pi}{3})\le x_2)$$

$$=P(A\cos 0\le x_1,A\cos\frac{\pi}{3}\le x_2)$$

$$=P(A\le x_1,\frac{A}{2}\le x_2)$$

$$=P(A\le x_1,A\le 2x_2)$$

$$=\begin{cases}P(A\le x_1),x_1\le 2x_2\\P(A\le 2x_2),x_1>2x_2\end{cases}$$

2.3 随机过程的有限维分布函数族

所以

$$F(0,\frac{\pi}{3};x_1,x_2)=\begin{cases}0, & x_1 \le 2x_2, x_1 < 1\text{或}x_1 > 2x_2, x_2 < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}, & x_1 \le 2x_2, 1 \le x_1 < 2\text{或}x_1 > 2x_2, \frac{1}{2} \le x_2 < 1 \\ \frac{2}{3}, & x_1 \le 2x_2, 2 \le x_1 < 3\text{或}x_1 > 2x_2, 1 \le x_2 < \frac{3}{2} \\ 1, & x_1 \le 2x_2, x_1 \ge 3\text{或}x_1 > 2x_2, x_2 \ge \frac{3}{2}\end{cases}$$

2.4 随机过程的数字特征

- **例 2.4.2** 设$X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$, $-\infty<t<+\infty$,其中a和ω是常数，Θ是服从$[0,2\pi]$上均匀分布的随机变量，求$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的数字特征.

解 由于Θ 的概率密度函数为

$$f_{\Theta}(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0\le\theta\le 2\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

2.4 随机过程的数字特征

于是 $m_X(t) = E[X(t)]$

$$= E[a\cos(\omega t + \Theta)]$$

$$= \int_0^{2\pi} a\cos(\omega t + \theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=0, \qquad -\infty < t < +\infty$$

$$R_X(s,t) = E[X(s)X(t)]$$

$$= E[a\cos(\omega s + \Theta)\cdot a\cos(\omega t + \Theta)]$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\cos(\omega s + \theta)\cos(\omega t + \theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\cos\omega(t-s), \qquad -\infty < s,t < +\infty$$

2.4 随机过程的数字特征

$$C_X(s,t) = R_X(s,t) - m_X(t)$$

$$= \frac{a^2}{2}\cos\omega(t-s) - 0$$

$$= \frac{a^2}{2}\cos\omega(t-s), \ -\infty < s,t < +\infty$$

$$D_X(t) = C_X(t,t) = \frac{a^2}{2}, -\infty < t < +\infty$$

$$\Phi_X(t) = R_X(t,t) = \frac{a^2}{2}, -\infty < t < +\infty$$

2.4 随机过程的数字特征

- **例 2.4.3** 设$X(t)=A+Bt$, $-\infty<t<+\infty$,其中A,B是相互独立的随机变量，且均值为0，方差为1，求$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的数字特征.

解 $m_X(t) = E[X(t)] = E[A+Bt] = EA+tEB=0, \quad -\infty<t<+\infty$

$$R_X(s,t) = E[(A+Bs)(A+Bt)] = EA^2+(s+t)EAB+stEB^2$$

$$=1+st, \qquad -\infty<t<+\infty$$

$$C_X(s,t) = R_x(s,t)-m_x(s)m_x(t)=1+st\,, \quad -\infty<t<+\infty$$

$$D_X(t) = C_X(t,t) =1+t^2\,, \qquad -\infty<t<+\infty$$

$$\Phi_X(t) = R_X(t,t) = 1+t^2\,, \qquad -\infty<t<+\infty$$

2.6 复随机过程

- **例 2.6.1** 设 $Z(t)=\sum_{k=1}^{n} X_k e^{j(\omega_0 t+\Phi_k)}$，$-\infty<t<+\infty$，其中$\omega_0$是正常数，$n$为固定的正整数，$X_1,X_2,\ldots,X_n$, $\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_n$是相互独立的实随机变量，且 $EX_k=0, DX_k=\sigma_k^2$，$\Phi_k \sim U[0,2\pi]$，$k=1,2,\ldots,n$. 求$\{Z(t), -\infty<t<+\infty\}$的均值函数和相关函数.

2.6 复随机过程

- **解**

$$m_Z(t) = E[\sum_{k-1}^{n} X_k e^{j(\omega_0 t+\Phi_k)}]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} EX_k (E\cos(\omega_0 t + \Phi_k) + jE\sin(\omega_0 t + \Phi_k))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} EX_k \left(\int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 t + \varphi_k) \frac{1}{2\pi} d\varphi_k + j\int_0^{2\pi} \sin(\omega_0 t + \varphi_k) \frac{1}{2\pi} d\varphi_k \right)$$

$$= 0, \qquad -\infty < t < +\infty$$

$$R_Z(s,t) = E[\sum_{k=1}^{n} X_k e^{j(\omega_0 s+\Phi_l)}] = E[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} X_k X_l e^{j(\Phi_l-\Phi_k)}]e^{j\omega_0(t-s)}$$

2.6 复随机过程

又

$$Ee^{j(\Phi_l-\Phi_k)}=E\cos(\Phi_l-\Phi_k)+jE\sin(\Phi_l-\Phi_k)$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\varphi_l-\varphi_k)(\frac{1}{2\pi})^2d\varphi_l d\varphi_k+j\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\varphi_l-\varphi_k)(\frac{1}{2\pi})^2d\varphi_l d\varphi_k$$

$$=\begin{cases}0\text{，} & l\neq \mathrm{k}\\ 1\text{，} & l=k\end{cases}$$

于是

$$R_Z(s,t)=e^{j\omega_0(t-s)}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$$