姓名：________

学号：________

装

订

线

哈尔滨工程大学研究生试卷

（ 2024 年 秋 季学期）

课程编号： 202032020004 **课程名称：** 矩阵论

一、单项选择题（每小题 **3** 分, 共 **30** 分）

1. 以下集合不能构成数域的是 ___.

(A) $Q(\sqrt{2})=\{a+b\cdot\sqrt{2}\mid\forall a,b\in Q\}$;　(B) $Q(\sqrt{3})=\{a+b\cdot\sqrt{3}\mid\forall a,b\in Q\}$;

(C) $Q(\sqrt{5})=\{a+b\cdot\sqrt{5}\mid\forall a,b\in Q\}$;　(D) $Q(\pi)=\{a+b\cdot\pi\mid\forall a,b\in Q\}$.

2. 以下说法**错误的**是 ___.

(A) 酉阵 $\boldsymbol{A}$ 必可逆, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$;　(B) 酉矩阵的特征值都是实数;

(C) 两个同阶酉阵相乘仍为酉阵;　(D) 酉阵的行列式的模长为 1.

3. 在连续函数空间 $C[-1,1]$ 中, 以下向量组线性相关的是____.

(A) $f_1(x)=1,\quad f_2(x)=\sin x,\quad f_3(x)=\cos x$;

(B) $f_1(x)=1,\quad f_2(x)=\sin^2 x,\quad f_3(x)=\cos^2 x$;

(C) $f_1(x)=1,\quad f_2(x)=\mathrm{e}^{x},\quad f_3(x)=\mathrm{e}^{-x}$;

(D) $f_1(x)=1,\quad f_2(x)=\mathrm{e}^{2x},\quad f_3(x)=\mathrm{e}^{-2x}$.

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是线性空间 V 中的两组向量,

$W_1=L[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$, $W_2=L[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s]$, 则以下说法**错误的**是____.

(A) W_1 的基是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, W_2 的基是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$;

(B) $\dim W_1=\mathrm{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$, $\dim W_2=\mathrm{rank}\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$;

(C) $W_1=W_2$ 的充分必要条件为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价;

(D) $W_1+W_2=L[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s]$.

5. 若 Hermite 二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 对应矩阵为 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$, 则以下说法**错误的**是___.

(A) 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均为正实数, 则二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 正定;

(B) 若存在矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}$ 成立, 则二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 正定;

(C) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式均为正实数, 则二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 正定;

(D) 若二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的正惯性指数为 n, 则二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 正定.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, 矩阵函数 $f(\boldsymbol{A})$ 的第 1 行第 4 列元素为____.

(A) $f'''(1)$;　(B) $\dfrac{1}{3}f'''(1)$;　(C) $\dfrac{1}{6}f'''(1)$;　(D) 0.

7. 对满足____的方阵 $\boldsymbol{A}$, 有 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k$ 成立.

(A) $|\boldsymbol{A}|<1$;　(B) $\rho(\boldsymbol{A})\le 1$;　(C) $\|\boldsymbol{A}\|_2<1$;　(D) 任意方阵.

8. 想要验证 C^n 中的运算 $\|\bullet\|$ 是向量范数时, 无需验证 ____.

(A) 正定性;　(B) 齐次性;　(C) 三角不等式;　(D) 相容性.

9. 设 $\boldsymbol{A}_k=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{k^2}&\dfrac{(-1)^k}{k!}\\0&\left(\dfrac{1}{3}\right)^k\end{bmatrix}$, 则矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{A}_k$ ____.

(A) 绝对收敛;　(B) 收敛但不绝对收敛;

(C) 发散;　(D) 无法判断敛散性.

10. 若 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为方阵, 以下关于矩阵 Kronecker 积的说法中**错误的**是 ___.

(A) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$;　(B) $|\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$;

(C) $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\otimes\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}$;　(D) $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})$.

二、填空题（每小题 3 分, 共 30 分）

1. 若 V 为全体 4 阶实下三角阵构成的实数域上的线性空间, 则 $\dim V=$___.

2. 设 α_1,α_2 与 β_1,β_2 分别为线性空间 V_1 和 V_2 的基, T 是 V_1 到 V_2 上的线性映射, $\boldsymbol{A}$ 是 T 在基 α_1,α_2 与 β_1,β_2 下的矩阵, 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 值域的基为 $\boldsymbol{x}=[1\quad 2]^{\mathrm{T}}$, 则 T 值域的基为___.

3. 若内积在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的度量矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}$, 内积在基 α_1,α_2 下的度量矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 其中 $\alpha_1=3\varepsilon_1+4\varepsilon_2,\ \alpha_2=\varepsilon_1-2\varepsilon_2$, 则 $|\boldsymbol{B}|=$___.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2+i\\3-2i&4\end{bmatrix}$, 则 $\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}=$ ___.

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-1&0&1\\1&0&2&0\end{bmatrix}$, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大奇异值为___.

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&5\\6&7\end{bmatrix}$, 则行列式 $\left|\mathrm{e}^{A}\right|=$ ___.

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)$, 函数 $f(x)$ 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱上有定义, 且 $f(1)=2,\ f(2)=3$, 取一次多项式函数 $g(x)=$ ___, 可使 $f(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})$ 成立.

8. 若 3 阶 λ 矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的各阶行列式因子分别为 $D_1=1,\ D_2=\lambda,\ D_3=\lambda^5$, 则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的不变因子 $d_2=$___.

9. 设变量 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}$, 函数 $F(\boldsymbol{X})=2\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}F(\boldsymbol{X})}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}=$___.

10. 设 $\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}1+t^2&1\\0&t\end{bmatrix}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}^2(t)=$ ________.

三、计算题（8 分）

在 $F[x]_n$ 中定义内积 $(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 求

（1）内积在基 $\varepsilon_1=1,\ \varepsilon_2=x,\ \varepsilon_3=x^2$ 下的矩阵;

（2）求 $f(x)=-15x^2-3x+6$ 与 $g(x)=x^2+2x-1$ 的内积.

四、计算题（8 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&0&0&0&0\\0&5&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&2&-1&2\\0&0&-1&0&-2\end{bmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m_A(x)$.

五、计算题（8 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱分解.

六、计算题（8 分）

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&2&0\\0&1&2\end{bmatrix}$,

（1）求可逆阵 $\boldsymbol{T}$, 若当型矩阵 $\boldsymbol{J}$, 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{J}$ 成立,

（2）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的函数 $f(\boldsymbol{A})$ 和 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\boldsymbol{A}\right)$.

七、证明题（8 分）

设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 是线性空间 V 的 s 个非平凡的子空间, 证明 V 中至少有一向量 α 不属于 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 中的任何一个.

装

订

线