2023 矩阵论期末考试参考答案

一、单项选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1-5. ABDDD　　6-10. CBCBA

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 3　　2. $\begin{bmatrix} 7/2 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

3. -49　　4. $9+\sqrt{2}$

5. 4　　6. $O_{3\times 3}$

7. 2　　8. $\lambda(\lambda+1)$

9. $\sqrt{5}$　　10. 3

三、（本题 8 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为线性空间 V 的一组基，线性变换 T 在这组基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$，求 $R(T)$ 一组基与 $N(T)$ 的一组基。

解：由 $R(A)$ 的基为列向量组的极大无关组 $Y_1=[1,-1,1,2]^T$，$Y_2=[0,2,2,-2]^T$，

因此，$R(T)$ 的基为 $\eta_1=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4,\ \eta_2=2\alpha_2+2\alpha_3-2\alpha_4$。......4 分

由 $N(A)$ 的基为方程组 $AX=0$ 的基础解系 $X_1=[-4,-3,2,0]^T$, $X_2=[-1,-2,0,1]^T$，

因此，$N(T)$ 的基为 $\xi_1=-4\alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3,\ \xi_2=-\alpha_1-2\alpha_2+2\alpha_4$。......8 分

四、（本题 8 分）用酉变换将二次型化为标准形，并写出所用的变换.

$$f(x_1,x_2,x_3)=-2\overline{x}_1x_1-4\mathrm{i}\,\overline{x}_1x_2+4\overline{x}_1x_3+4\mathrm{i}\,\overline{x}_2x_1+\overline{x}_2x_2+\mathrm{i}\,\overline{x}_2x_3+4\overline{x}_3x_1-\mathrm{i}\,\overline{x}_3x_2+\overline{x}_3x_3$$

解 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为 $A=\begin{bmatrix} -2 & -4\mathrm{i} & 4 \\ 4\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \\ 4 & -\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}$　　......2 分

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -\mathrm{i} & 1\\ \mathrm{i} & \lambda & -\mathrm{i}\\ 1 & \mathrm{i} & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda-3)=0$，

解出矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=6,\quad \lambda_2=0,\quad \lambda_3=-6$，　　　......4 分

对特征值 $\lambda_1=6$，解方程组 $(6E-A)x=0$，解得特征向量 $\alpha_1=[1\quad \mathrm{i}\quad 1]^{\mathrm{T}}$；

对特征值 $\lambda_2=0$，解方程组 $Ax=0$，解得特征向量 $\alpha_2=[0\quad -\mathrm{i}\quad 1]^{\mathrm{T}}$；

对特征值 $\lambda_3=-6$，解方程组 $(-6E-A)x=0$，解得特征向量 $\alpha_3=[-2\quad \mathrm{i}\quad 1]^{\mathrm{T}}$；

单位化得 $\beta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}[1\quad \mathrm{i}\quad 1]^{\mathrm{T}}$，$\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}[0\quad -\mathrm{i}\quad 1]^{\mathrm{T}}$，$\beta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}[-2\quad \mathrm{i}\quad 1]^{\mathrm{T}}$，

......6 分

令 $U=[\beta_1\quad \beta_2\quad \beta_3]$ 为酉矩阵，则 $U^{-1}AU=U^HAU=\mathrm{diag}(6,\ 0,\ -6)$，

在酉变换 $x=Uy$ 下，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 变为标准形 $6|y_1|^2-6|y_3|^2$

......8 分

五、（本题 8 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & i\\ 1 & 0 & -i\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$，求次酉阵 $\boldsymbol{U}\in \boldsymbol{U}_3^{4\times 3}$ 和正线上三角阵 $\boldsymbol{R}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{UR}$ 成立。

解 设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，易知 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=3$，将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 用施密特正交化方法正交化、单位化得

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}}\\\frac{5\mathrm{i}}{\sqrt{30}}\\0\\-\frac{2}{\sqrt{30}}\end{bmatrix},$$

令 $\boldsymbol{U}=[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3]$，则 $\boldsymbol{U}\in \mathrm{U}_3^{4\times 3}$，即 $\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{U}=\boldsymbol{E}_3$，设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{UR}$，两边同时左乘 $\boldsymbol{U}^H$，

则

$$R=U^HA=\begin{bmatrix}1&0&-\mathrm{i}\\0&\sqrt{5}&2\\0&0&\dfrac{6}{\sqrt{30}}\end{bmatrix}。$$

六、（本题 8 分）已知 $A=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{bmatrix}$ 的最小多项式为 $m_A(x)=(x-1)(x-5)$， $f(A)$ 为矩阵 A 的函数,

(1) 求多项式函数 $p(x)=a_1x+a_0$，使 $f(A)=p(A)$；

(2) 求 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}A\right)$.

解 设 $p(x)=a_1x+a_0$，则 $p(x)$ 满足 $p(1)=f(1),\quad p(5)=f(5)$，于是解得

$$\begin{cases}a_0=\dfrac{1}{4}\left(5f(1)-f(5)\right)\\a_1=\dfrac{1}{4}\left(f(5)-f(1)\right)\end{cases}$$

所以， $f(A)$ 的多项式表示为

$$f(A)=a_1A+a_0E=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}f(5)+3f(1)&2f(5)-2f(1)&f(5)-f(1)\\f(5)-f(1)&2f(5)+2f(1)&f(5)-f(1)\\f(5)-f(1)&2f(5)-2f(1)&f(5)+3f(1)\end{bmatrix},$$

当 $f(x)=\sin\left(\pi/4\,x\right)$ 时，可得 $f(1)=\sqrt{2}/2,\ f(5)=-\sqrt{2}/2$，于是有

$$\sin\left(\pi/4\,A\right)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&-2\sqrt{2}&-\sqrt{2}\\-\sqrt{2}&0&-\sqrt{2}\\-\sqrt{2}&-2\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{bmatrix}。$$

七、证明题（8 分）

设 V 为数域 F 上的 n 维线性空间， V_1,V_2 均为 V 的子空间, 若 α_1,α_2 为 $V_1\cap V_2$ 的一组基, $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 为 V_1 的一组基, $\alpha_1,\alpha_2,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 为 V_2 的一组基,

求证: $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 线性无关。

证：若有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\beta_1+k_4\beta_2+k_5\gamma_1+k_6\gamma_2+k_7\gamma_3=0$，则

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\beta_1+k_4\beta_2=-\left(k_5\gamma_1+k_6\gamma_2+k_7\gamma_3\right),$$

令 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\beta_1+k_4\beta_2=-\left(k_5\gamma_1+k_6\gamma_2+k_7\gamma_3\right)=\delta\cdots\cdots(*)$，

则$\delta\in V_1$且$\delta\in V_2$，即$\delta\in V_1\cap V_2$，

因此δ可由α_1,α_2线性表示，即存在$c_1,c_2\in F$使

$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2=\delta=-\left(k_5\gamma_1+k_6\gamma_2+k_7\gamma_3\right)$ 即 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+k_5\gamma_1+k_6\gamma_2+k_7\gamma_3=0$，

由V_2的基$\alpha_1,\alpha_2,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$线性无关，则$c_1=c_2=k_5=k_6=k_7=0$，

带入$(*)$式得，$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\beta_1+k_4\beta_2=0$，

又由为V_1的基$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$线性无关，则$k_1=k_2=k_3=k_4=0$，

综上，$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$线性无关。

证：方法 2：由题意 $V_1=L\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}, V_2=L\{\alpha_1,\alpha_2,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\}$，

则 $V_1+V_2=L\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\}$,

由维数公式 $\dim\left(V_1+V_2\right)=\dim\left(V_1\right)+\dim\left(V_2\right)-\dim\left(V_1\cap V_2\right)=4+5-2=7$，

因此，$\operatorname{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\}=\dim\left(V_1+V_2\right)=7$,

所以，$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$线性无关。