姓名:________ 学号:________

装 订 线

哈尔滨工程大学研究生试卷

（ 2022 年 秋 季学期）

课程编号： 202032020004 **课程名称：** 矩阵论

一、单项选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 对于如下两个集合以及相应的加法和数乘运算，下列说法**正确**的是______.

① 正实数的全体 R^+，其中加法和数乘运算的定义分别为

$$a \oplus b = ab,\quad \lambda \circ a = a^{\lambda} \quad (\lambda \in \mathrm{R}, a, b \in \mathrm{R}^+).$$

② 数域 F 上次数为 n 的多项式全体

$$F[x] = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \,|\, a_0, a_1, \cdots, a_n \in F, a_n \neq 0\},$$

其中加法和数乘运算为通常多项式的加法和数乘运算.

(A) ①和②都构成线性空间;

(B) ①和②都不构成线性空间;

(C) ①构成线性空间, ②不构成线性空间;

(D) ①不构成线性空间, ②构成线性空间.

2. 设 n 维线性空间 V 中从基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 P，向量 $\gamma \in V$ 在这两组基下的坐标分别为 $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$ 和 $Y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^{\mathrm{T}}$，则下列命题中**不一定正确**的是______.

(A) P 必为可逆阵;

(B) 从基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的过渡矩阵为 P^{-1};

(C) $Y = PX$;

(D) $Y = P^{-1}X$.

3. 设 V_1 和 V_2 是 n 维线性空间 V 的两个子空间，则下列关于子空间的命题**正确**的个数为______.

① 集合 $V_1 \cap V_2 = \{x \,|\, x \in V_1, x \in V_2\}$ 不构成 V 的线性子空间;

② 集合 $V_1 \cup V_2 = \{x \,|\, x \in V_1$ 或 $x \in V_2\}$ 不构成 V 的线性子空间;

③ 若 $\dim V_1 + \dim V_2 > n$，则必有 $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$;

④ 若 $V_1 + V_2 = V$，则 $V_1 + V_2$ 必为直和.

(A) 1 个; (B) 2 个; (C) 3 个; (D) 4 个.

4. 下列命题中**正确**的个数是______.

① 当 $\alpha \perp W_1$ 且 $\alpha \in W_1$ 时，必有 $\alpha = \mathbf{0}$;

② $W_1 \perp W_2$ 当且仅当 W_1 中的每个向量均与 W_2 正交;

③ 若 $W_1 \perp W_2$，则 $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$.

(A) 0 个; (B) 1 个; (C) 2 个; (D) 3 个;

5. 下列关于 $\sigma -$ 子空间的命题中**正确**的个数是______.

① 线性空间 V 的平凡子空间（V 及零子空间）对于 V 的任意一个变换 σ 来说，都是 $\sigma -$ 子空间;

② 两个 $\sigma -$ 子空间的交与和空间仍然构成 $\sigma -$ 子空间;

③ 线性变换 σ 的特征子空间 V_{λ_0} 是 $\sigma -$ 子空间;

④ 由线性变换 σ 的特征向量生成的子空间是 $\sigma -$ 子空间.

(A) 1 个; (B) 2 个; (C) 3 个; (D) 4 个.

6. 以下命题**不一定正确**的为______.

(A) 实对称阵一定是正规矩阵;

(B) 实正交阵一定是正规矩阵;

(C) 正规矩阵一定是单纯矩阵;

(D) 正规矩阵的特征值都是实数.

7. 设 A 和 B 都是 Hermite 矩阵，下列命题**不一定正确**的是______.

(A) 对任意的正整数 k，A^k 也是 Hermite 矩阵;

(B) 如果 A 可逆，则 A^{-1} 也是 Hermite 矩阵;

(C) AB 也是 Hermite 矩阵;

(D) $A + B$ 的特征值一定都为实数.

8. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$，则下列叙述**错误**的是______.

(A) $\lambda E - A$ 的三阶行列式因子为 $(\lambda - 2)^2(\lambda + 4)$;

(B) A 的三阶不变因子为 $(\lambda - 2)^2(\lambda + 4)$;

(C) A 有初等因子 $\lambda - 2$;

(D) A 有初等因子 $\lambda + 4$.

9. 设 A 为 n 阶方阵，则______.

(A) A 的最小多项式的次数一定不大于 n;

(B) A 的最小多项式必为 A 的特征多项式;

(C) A 的化零多项式的次数一定不小于 n;

(D) A 的化零多项式必为 A 的特征多项式.

10. 设 $A \in \mathrm{R}^{n \times n}$ 为常数矩阵，$A(t)$ 为 t 的 n 阶函数矩阵且可逆，$m \in Z^+$，则以下等式中**不一定成立**的是_______.

(A) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{At}=A\mathrm{e}^{At}$;

(B) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos At=-A\sin At$;

(C) $\frac{\mathrm{d}A^{-1}(t)}{\mathrm{d}t}=-A^{-1}(t)\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}A^{-1}(t)$;

(D) $\frac{\mathrm{d}[A(t)]^m}{\mathrm{d}t}=m[A(t)]^{m-1}A'(t)$.

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\2&1&1&-3\\2&2&-4&6\\3&3&-5&7\end{bmatrix}$ 的核空间 $N(A)$ 的基为_______.

2. 若 $A=\begin{bmatrix}1&i&0\\i&-1&1\\1&i&0\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}1\\2i\\1\end{bmatrix}$，$i^2=-1$，则 $\|b\|_1+\|Ab\|_\infty+\|A\|_1=$________.

3. 在多项式空间 $\mathrm{R}[x]_{n+1}$ 中，定义线性变换

$$T[f(x)]=xf'(x)-f(x),$$

则 $\dim R(T)=$_______.

4. 设有 Hermite 二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x}_1x_1+2\overline{x}_1x_2+2\overline{x}_2x_1-t\overline{x}_2x_3-t\overline{x}_3x_2+5\overline{x}_2x_2+4\overline{x}_3x_3$$

正定，则 t 的取值范围为_________.

5. 若 $A\in C_r^{n\times r}$ 可分解为 $A=UR$，其中 $U\in U_r^{n\times r}$，R 为正线上三角阵，则 $R=$______.

6. 设 $A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\\0&2\\1&0\end{bmatrix}$，则 A 的所有正奇异值之积为_______.

7. 设 $A_n=\begin{bmatrix}\frac{n^2}{2n^2+1}&(1+\frac{1}{n})^n\\\frac{1}{n^2}&0\end{bmatrix}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=$_______.

8. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0.2&0&0\\0&0.5&0\\0&0&0.2\end{bmatrix}$，$S=\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k$，则 S 的行列式值为_______.

9. 设 A 为 3 阶方阵，B 为 2 阶方阵，行列式 $|A|=-3$，$|B|=2$，则 $|A\otimes B|=$_______.

10. 设函数矩阵 $A(t)=\begin{bmatrix}\sin(1+t)&-t^2\\\mathrm{e}^{2t}&\tan t\end{bmatrix}$，$B(x)=\int_0^{x^3}A(t)\mathrm{d}t$，则 $\frac{\mathrm{d}B(x)}{\mathrm{d}x}=$_________.

三、证明题（8 分）

给定 $C^{n\times n}$ 中的两种矩阵范数 $\|\cdot\|_M$ 与 $\|\cdot\|_S$，证明

$$\|A\|=\|A\|_M+2\|A\|_S$$

也是 $C^{n\times n}$ 中的矩阵范数.

四、计算题（10 分）

已知多项式空间 $\mathrm{R}[t]_3$ 的一个基为 $f_1(t)=1-t$，$f_2(t)=1+t^2$，$f_3(t)=t+2t^2$，线性变换 T 满足 $T[f_1(t)]=2+t^2$，$T[f_2(t)]=t$，$T[f_3(t)]=1+t+t^2$.

（1）求 T 在已知基 $f_1(t),f_2(t),f_3(t)$ 下的矩阵.

（2）设 $f(t)=1+2t+3t^2$，求 $T[f(t)]$.

五、计算题（8 分）

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，

（1）验证 A 是正规矩阵;

（2）求 A 的谱分解表达式.

六、计算题（14 分）

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{bmatrix}$，

（1）求矩阵 A 的若当标准型 J 及相似变换矩阵 P;

（2）求矩阵函数 $f(A)$ 的若当表示，并计算 e^A.

装

订

线