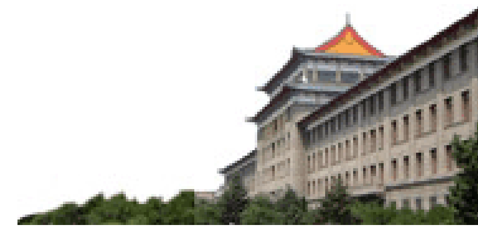
哈爾濱工程大學

HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY



# 随机过程

## 第4部分 Markov过程

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- **例 5.2.1** (**天气预报问题**) 如果明天是否有雨仅与今天的天气有关，而与过去的天气无关，并设今天下雨、明天有雨的概率为$\alpha$，今天无雨而明天有雨的概率为β；又假定把有雨称为 **0** 状态天气，把无雨称为**1**状态天气，$X_n$表示时刻$n$时的状态天气，

则$\{X_n, n\geq 0\}$是以$S=\{0,1\}$为状态空间的齐次马尔可夫链，其一步转移概率矩阵为:

$$P=\begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

# 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- **例5.2.2**（**有限制随机游动问题**）设有一质点只能在$\{0,1,2,\ldots,a\}$中的各点上作随机游动，移动规则如下：移动前若在点$i\in\{1,2,\ldots,a-1\}$上，则以概率$p$向右移动一格到$i+1$处，以概率$q$向左移动一格到$i-1$处，而以概率$r$停留在$i$处，其中$p, q, r\geq 0, p+q+r=1$；移动前若在0处，则以概率$p_0$向右移动一格到1处，而以概率$r_0$停留在0处，其中$p_0, r_0\geq 0$，$p_0+r_0=1$；移动前若在$a$处，则以概率$q_a$向左移动一格到$a$-1处，而以概率$r_a$停留在$a$处，其中，$q_a$，$r_a\geq 0$，$q_a+r_a=1$.

# 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

设$X_n$表示质点在$n$时刻所处的位置.

则$\{X_n, n\geq 0\}$是以$S=\{0,1,2,\ldots,a\}$为状态空间的齐次马尔可夫链，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & r & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & r & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & r & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q_a & r_a \end{bmatrix}$$

# 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

其中0和$a$是限制质点游动的两道墙壁，当$r_0$=1, $p_0$ =0时称0 为吸收壁；当$r_0$=0, $p_0$ =1时，称0为**完全反射壁**；当0<$r_0$<1,0< $p_0$<1 时，称0为**部分吸收壁**或**部分反射壁**. 对于$a$也有类似的含义.

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- **例5.2.4** (**赌徒输光问题**) 有两个赌徒甲、乙进行一系列赌博. 在每一局中甲获胜的概率为$p$，乙获胜的概率为$q$，$p+q=1$ 每一局后，负者要付1元给胜者.如果起始时甲有资本$a$元，乙有资本$b$元，$a+b=c$ 元，两人赌博直到甲输光或乙输光为止，求甲输光的概率.

# 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- **解** 根据题设，这个问题可以看成以$S=\{0,1,2,\ldots,c\}$为状态空间的随机游动$\{X_n, n\geq 0\}$，质点从$a$点出发到达0状态先于到达$c$状态的概率就是甲先输光的概率.设$0<j<c$, $u_j$为质点从$j$出发到达0状态先于到达$c$状态的概率.由全概率公式有

$$u_j=u_{j+1}p+u_{j-1}q$$

显然$u_0=1$, $u_c=0$,从而得到了一个具有边界条件的差分方程.设

$$r=\frac{q}{p}, d_j=u_j-u_{j+1}$$

# 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

则可得到两个相邻差分间的递推关系：

$$d_j = rd_{j\text{-}1}$$

于是 $$d_j = rd_{j-1} = r^2 d_{j-2} = \cdots = r^j d_0$$

当$r \neq 1$时，

$$u_0 - u_c = 1 = \sum_{j=0}^{c-1}(u_j - u_{j+1})$$

$$= \sum_{j=0}^{c-1} d_j = \sum_{j=0}^{c-1} r^j d_0 = \frac{1-r^c}{1-r} d_0$$

于是

$$d_0 = \frac{1-r}{1-r^c}$$

# 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

而

$$u_j = u_j - u_c = \sum_{k=j}^{c-1}(u_k - u_{k+1})$$

$$= \sum_{k=j}^{c-1} d_k = \sum_{k=j}^{c-1} r^k d_0$$

$$= r^j(1 + r + \cdots + r^{c-j-1})d_0 = \frac{r^j - r^c}{1-r} d_0$$

所以

$$u_j = \frac{r^j - r^c}{1-r^c}$$

故

$$u_a = \frac{r^a - r^c}{1-r^c} = \frac{(\frac{q}{p})^a - (\frac{q}{p})^c}{1-(\frac{q}{p})^c}$$

# 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

**当$r=1$时**，　$u_0 - u_c = 1 = c d_0$

而　　$u_j = (c-j)\, d_0$

故

$$u_a = \frac{c-a}{c} = \frac{b}{c}$$

**当$r \neq 1$即$p \neq q$时**，甲先输光的概率为

$$\frac{(\frac{q}{p})^a - (\frac{q}{p})^c}{1 - (\frac{q}{p})^c}$$

当$r=1$即$p=q$时，甲先输光的概率为$b/c$.

# 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- **例5.2.5 (艾伦菲斯特问题)** 设一个坛子中装有$m$个球，它们或是红色的，或是黑色的，从坛中随机地摸出一个球，并换入一个相反颜色的球. 设经过$n$次摸换坛中**黑球数**为$X_n$.

则$\{X_n, n\geq 0\}$是以$S=\{0,1,2,\ldots,m\}$为状态空间的**齐次**马尔可夫链.

# 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

其一步转移概率矩阵为

$$p=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & \frac{m-1}{m} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{m} & 0 & \frac{m-2}{m} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{m-1}{m} & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- **例5.2.6(卜里耶问题)** 设坛子中有$a$只红球，$b$只黑球，从坛中随机地摸出一个球，然后把该球放回，并加入与摸出的球颜色相同的球$c$只.设经过$n$次摸取坛中**黑球数**为$X_n$. 则$\{X_n, n\geq 0\}$是以$S=\{b,b+c,b+2c,\ldots\}$为状态空间的**非齐次**马尔可夫链.

# 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 1-\dfrac{b}{a+b+nc} & \dfrac{b}{a+b+nc} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1-\dfrac{b+c}{a+b+nc} & \dfrac{b+c}{a+b+nc} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1-\dfrac{b+2c}{a+b+nc} & \dfrac{b+2c}{a+b+nc} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

# 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- **例 5.2.7** 设$\{X_n, n\geq 0\}$具有三个状态0,1,2的齐次马尔可夫链，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

初始分布 $q_i^{(0)}=\frac{1}{3}, i=0,1,2.$ 试求:

（1）$P(X_0=0, X_2=1)$;

（2）$P(X_2=1)$

# 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- **解** 由于

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{5}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{9}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

因此

(1) $P(X_0=0, X_2=1) = P(X_0=0)P(X_2=1 \mid X_0=0)$

$$= q_0^{(0)} p_{01}^{(2)} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{16} = \frac{5}{48}$$

(2) $P(X_2=1) = \sum_{i=0}^{2} q_i^{(0)} p_{i1}^{(2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{16} + \frac{1}{2} + \frac{9}{16}\right) = \frac{11}{24}$

## 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- **例 5.2.8** 有一多级传输系统只传输数字0和1，设每一级的传真率为$p$，误码率为$q$=1-$p$，且一个单位时间传输一级，$X_0$是第一级的输入，$X_n$是第$n$级得输出，则$\{X_n, n\geq 1\}$是以$S=\{0,1\}$为状态空间的齐次马尔可夫链，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$$

(1) 设$p$=0.9，求系统二级传输后的传真率与三级传输后的误码率；

(2)设初始分布 $q_1^{(0)}=\alpha, q_0^{(0)},=1-\alpha$ 又已知系统经$n$级传输后输出为1，求原发数字也是1的概率.

# 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- **解** 由于

$$P=\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$$

有相异特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=p-q$，则$P$ 可表示成对角阵

$$\Lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-q \end{bmatrix}$$

的相似矩阵.

# 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

又$\lambda_1, \lambda_2$对应的特征向量分别为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

令

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

则

$$P = H \Lambda H^{-1}$$

# 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

从而 $$P^n=(H\Lambda H^{-1})^n=H\Lambda^n H^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p-q)^n\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n\end{bmatrix}$$

- （1）当$p$=0.9时，系统经二级传输后的传真率与三级传输后的误码率分别为

$$p_{11}^{(2)}=p_{00}^{(2)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(0.9-0.1)^2=0.820$$
$$p_{10}^{(3)}=p_{01}^{(3)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(0.9-0.1)^3=0.244$$

# 5.2 马尔可夫链的转移概率与概率分布

- （2）根据贝叶斯公式，当已知系统经$n$级传输后输出为1，原发数字也是1的概率为

$$P(X_0=1|X_n=1)=\frac{P(X_0=1)P(X_n=1|X_0=1)}{P(X_n=1)}$$

$$=\frac{q_1^{(0)}p_{11}^{(n)}}{q_0^{(0)}p_{01}^{(n)}+q_1^{(0)}p_{11}^{(n)}}$$

$$=\frac{\alpha(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n)}{(1-\alpha)(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p-q)^n)+\alpha(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n)}$$

$$=\frac{\alpha+\alpha(p-q)^n}{1+(2\alpha-1)(p-q)^n}$$

# 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

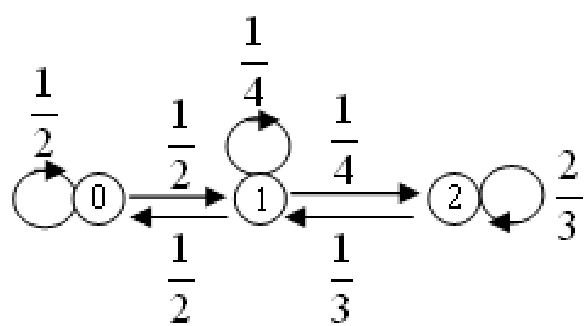
- **例 5.3.1** 设状态空间$S=\{0,1,2\}$的齐次马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

研究其各个状态间的关系以及状态类型.

# 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

**解** 由于 $\textcircled{0} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \textcircled{1} \xrightarrow{\frac{1}{4}} \textcircled{2}$ $\textcircled{2} \xrightarrow{\frac{1}{3}} \textcircled{1} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \textcircled{0}$ 数字代表状态，箭头上的数字代表概率。于是可得到如图所示状态转移图.由于 $p_{00} = \dfrac{1}{2}$ ，由周期的定义可知，状态0是非周期的.由于**三个状态互通**，故该齐次马尔可夫链是**不可约的**，且**只有三个状态**，故三个状态都是正常返状态，从而都是遍历状态.



# 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

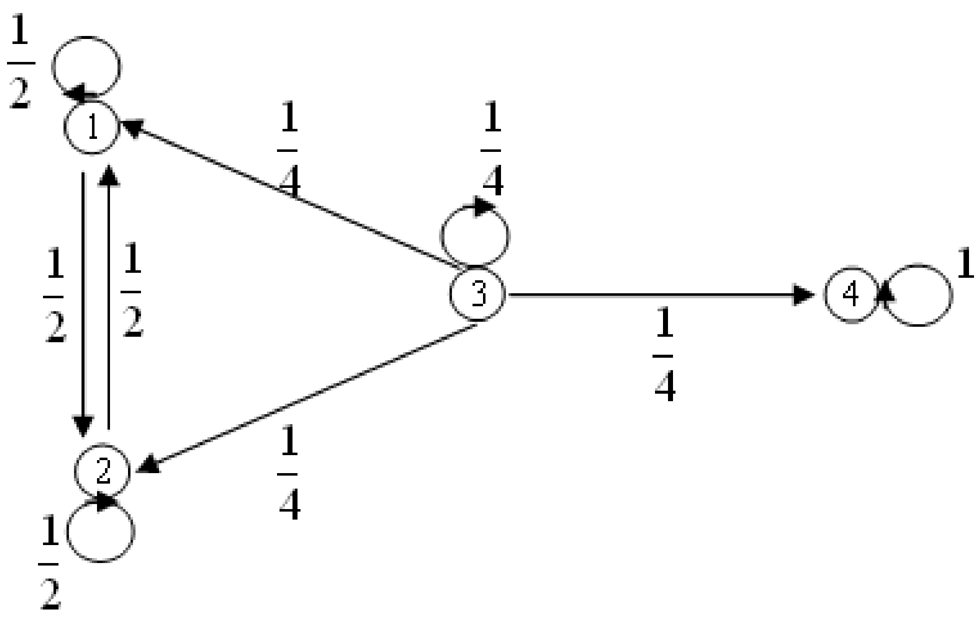
- **例 5.3.2** 设状态空间 $S=\{1,2,3,4\}$ 的齐次马尔可夫链，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

试分析其状态类型.

# 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **解** 状态转移图如图所示.状态3可达状态1,2和4，但这三个状态不能可达状态3，故{3}是非常返状态集，闭集有两个{1,2}和{4},其中{4}是吸收状态集.



# 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

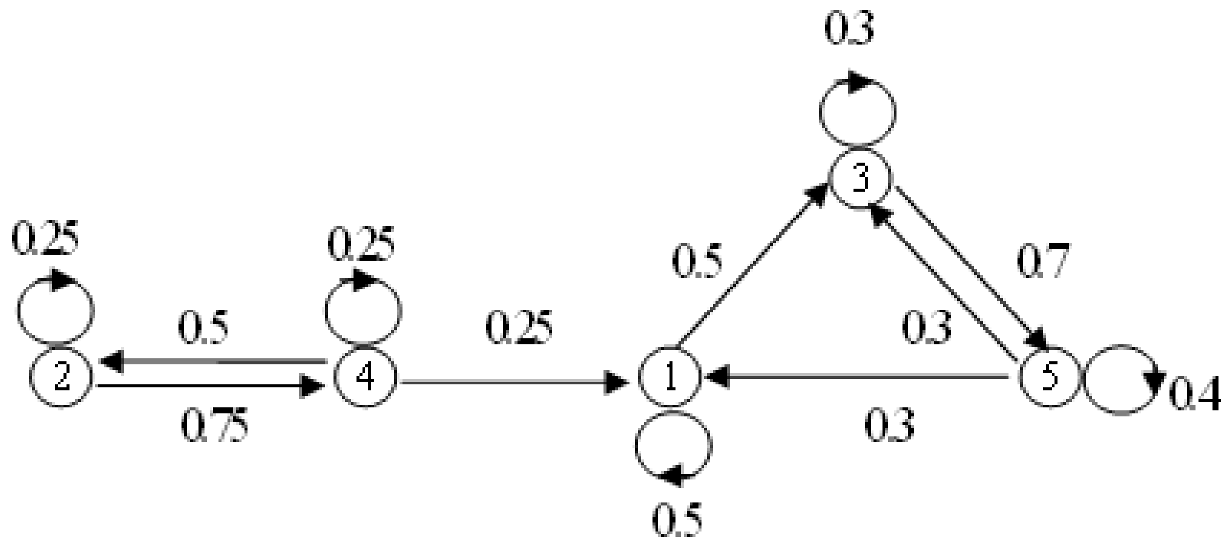
- **例 5.3.3** 设$\{X_n, n=0,1,2,\ldots\}$是一齐次马尔可夫链，状态空间$S=\{1,2,3,4,5\}$，其中一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.25 & 0.5 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.3 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

试分析状态类型.

# 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **解** 状态转移图如图所示.状态2,4可达状态1,3,5，但反过来不可达的，于是一旦离开状态集{2,4}就不可能回到状态2或4，所以{2,4}为非常返状态集，{1,3,5}是闭集.



# 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **例 5.3.4** 设齐次马尔可夫链的状态空间$S=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中*表示一个正数.试分析状态类型.

# 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **解** 由于$p_{00}$=1，因此0是一个吸收状态，又$p_{60}>0$,故6是非常返状态，从而可达状态6的状态7、8也是非常返状态，故$D=\{6,7,8\}$是非常返状态集.状态1只可达2，同时2只可达1，所以$\{1,2\}$是周期为2的正常返状态集，可分解为$J_1=\{1\}$, $J_2=\{2\}$.$\{3,4,5\}$ 是状态闭集，由于$p_{44}>0$,因此其周期为1.

## 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

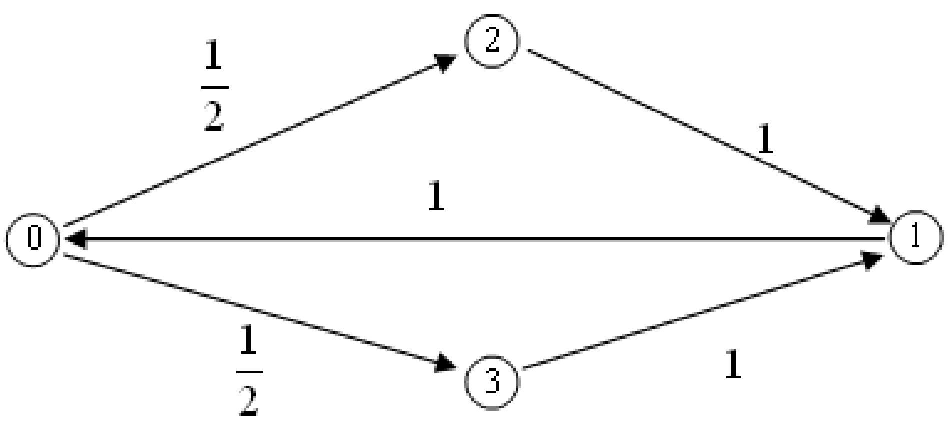
- **例5.3.5** 设状态空间$S$={0,1,2,3}的齐次马尔可夫链，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

试对其状态进行分类.

# 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **解** 状态转移图如下图所示.它是一个有限齐次马尔可夫链，所有状态都是互通的，所以所有状态均为常返状态，整个状态空间 $S=\{0,1,2,3\}$ 构成一个不可约闭集.



# 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **例5.3.6** 设齐次马尔可夫链的状态空间$S=\{0,1,2,3,4\}$它的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

试对其状态进行分类.

# 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **解**

(1) 从一步转移概率矩阵可知状态2和3不能和其它状态互通，{2,3}组成一个闭集.如果过程初始就处于2状态或3状态，则过程永远处于2、3状态，故{2,3}是常返状态.

(2) 状态4可转移到{0,1}状态，但0,1两个状态不能到达4状态，{0,1}组成一个闭集，并且0,1是常返状态，4是非常返状态.

# 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **例5.3.7** 设齐次马尔可夫链的状态空间$S=\{0,1,2,3\}$其一步转移概率矩阵为

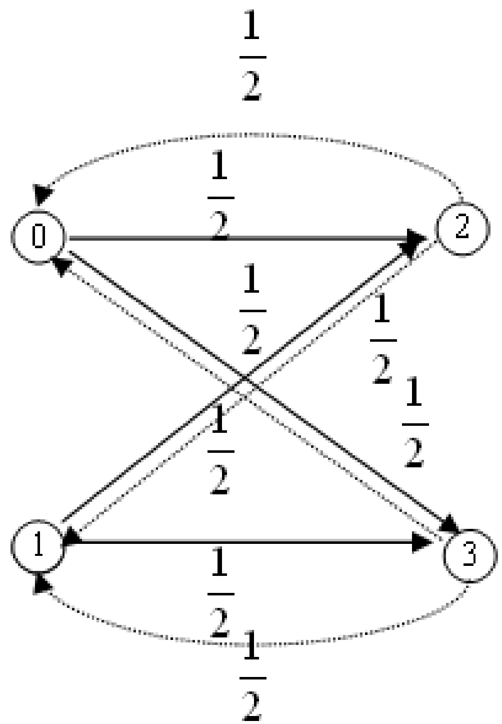
$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

试分析过程的周期性.

# 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **解** 状态转移图如图所示.四个状态可以分成$\{0,1\}$，$\{2,3\}$两个子集，该过程有确定性的周期转移.

$\{0,1\}\to\{2,3\}\to\{0,1\}\to\{2,3\}\to\cdots$显然它的周期$d=2$.



# 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

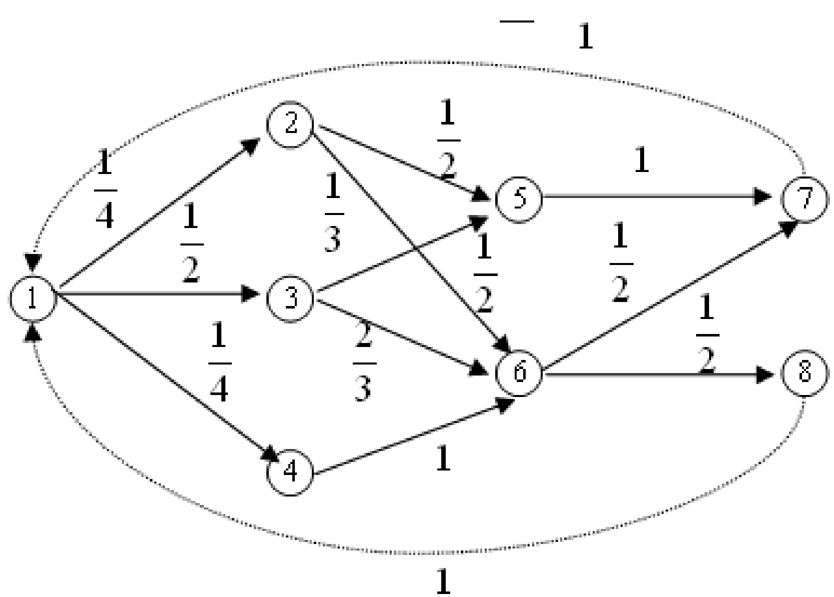
- **例 5.3.8** 设齐次马尔可夫链的状态空间$S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

试研究过程的周期性.

# 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **解** 状态转移图如图所示.八个状态可以分成四个状态子集 $J_1=\{1\}$, $J_2=\{2,3,4\}$, $J_3=\{5,6\}$, $J_4=\{7,8\}$. $J_1,J_2,J_3,J_4$ 是互不相交的状态子集，它们的并是整个状态空间，该过程有确定的周期转移$J_1\to J_2\to J_3\to J_4\to J_1\to\cdots$ 显然它的周期$d$=4.



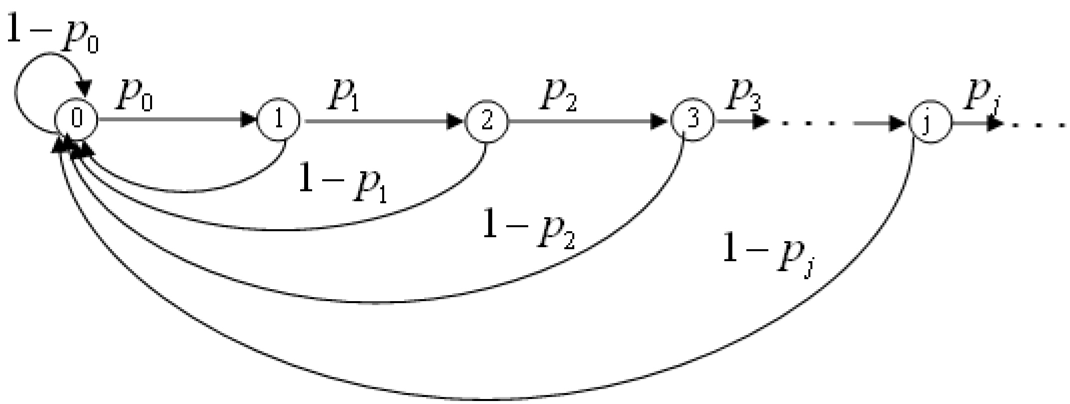
# 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

- **例 5.3.9** 设状态空间$S=\{0,1,2,\ldots\}$的齐次马尔可夫链，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 1-p_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p_2 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

试研究该链是常返链的充要条件.

# 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类




- **解** 状态转移图如上图所示.由于

$$f_{00}^{(1)}=1-p_0$$

$$f_{00}^{(2)}=p_0(1-p_1)=p_0-p_0p_1$$

$$f_{00}^{(3)}=p_0p_1(1-p_2)=p_0p_1-p_0p_1p_2$$

$$\vdots$$

$$f_{00}^{(n)}=p_0p_1\cdots p_{n-2}-p_0p_1\cdots p_{n-1}$$

# 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

故

$$\sum_{k=1}^{n} f_{00}^{(k)} = 1 - p_0 p_1 \cdots p_{n-1}$$

从而

$$f_{00} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{00}^{(k)} = 1 - \lim_{n\to\infty} p_0 p_1 \cdots p_{n-1}$$

所以$f_{00}$=1的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} p_0 p_1 \cdots p_{n-1} = 0$, 即0是常返状态的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty} p_0 p_1 \cdots p_{n-1} = 0$, 由于链中的**所有状态互通**，所以所有状态都是常返，故该链是常返链的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty} p_0 p_1 \cdots p_{n-1} = 0$, 此条件相当于以下正项级数发散，即

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{p_n}\right) = +\infty$$

# 5.3 齐次马尔可夫链状态的分类

反之，如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\ln(\frac{1}{p_n})$ 收敛则该链为非常返链.例如，

若 $p_n = e^{-\frac{1}{n+1}}, n = 0,1,2,\cdots$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\ln(\frac{1}{p_n}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1} = +\infty$$

时齐次马尔可夫链是常返链.

若 $p_n = e^{-\frac{1}{(n+1)^2}}, n = 0,1,2,\cdots$,则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\ln(\frac{1}{p_n}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} < +\infty$$

级数收敛，此时齐次马尔可夫链是非常返链，而且

$$f_{00} = 1 - \exp[-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}] = 1 - e^{-\frac{\pi^2}{6}} \approx 0.8070$$

# 补充例题1

- 设Yn表示某股票第n天的价格，令Xn=Yn-Yn-1，以-1,0,1分别表示Xn<-0.5元，-0.5≤Xn≤0.5元，Xn>0.5元。现连续观察该股票40天，得如下数据：1,1,1,1,1,1,-1,-1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,1,1,0,-1,-1,-1,-1,0,0,-1,-1,-1,0,0,-1,-1。假设{Xn，n≥1}具有齐次马氏性，（1）试求该马氏链的一步转移概率矩阵；（2）如果今天该股票的价格下跌(Xn<-0.5)，试预测这以后第2个交易日该股票的走势。

# 补充例题1

- 解：（1）在40个数据中，-1转移到-1有13次，-1转移到0有3次，-1转移到1有1次，以此类推，可以得出该马氏链的一步转移概率矩阵P：

$$P=\begin{bmatrix} \frac{13}{17} & \frac{3}{17} & \frac{1}{17} \\ \frac{4}{12} & \frac{7}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

# 补充例题1

- （2） 由 $p_{ij}^{(2)}=\sum_{k=-1}^{1}p_{ik}p_{kj}$ 得，

$$p_{-1,-1}^{(2)}=p_{-1,-1}p_{-1,-1}+p_{-1,0}p_{0,-1}+p_{-1,1}p_{1,-1}$$

$$=\left(\frac{13}{17}\right)^2+\frac{3}{17}\times\frac{4}{12}+\frac{1}{17}\times\frac{1}{10}=0.6495$$

同理， $p_{-1,0}^{(2)}=0.2497$， $p_{-1,1}^{(2)}=0.1008$

故，预测之后的第二个交易日该股票价格仍然下跌。

# 补充例题2

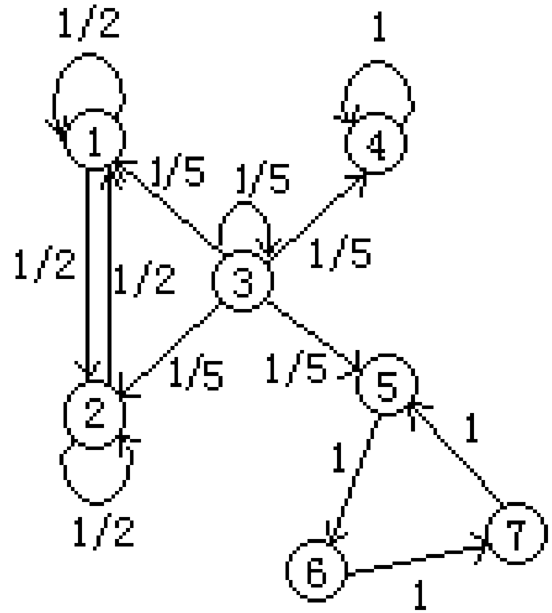
- 设一齐次马尔可夫链，其状态空间S={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

试画出该过程的状态转移图，并分析状态类型、对状态空间进行分解。

# 补充例题2

- **解：**




该马氏链的状态空间S可分解为 $S = D \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$，

$D = \{3\}$，$C_1 = \{1,2\}$，$C_2 = \{4\}$，$C_3 = \{5,6,7\}$。其中，

D为非常返状态集，$C_1$, $C_2$和$C_3$均为正常返状态集，且状态1, 2为遍历态，4为吸收态，5, 6, 7为周期态 。

# 5.4 转移概率的稳定性能

- 例5. 4. 1 考虑只有0,1两个状态的齐次马尔科夫链{Xn, n≥0}，其转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta\end{bmatrix} \qquad 0<\alpha,\beta<1$$

试计算该马尔科夫链的极限分布。

# 5.4 转移概率的稳定性能

- 解：由于该链为不可约遍历链，其平稳分布就是极限分布。设其平稳分布为 $\pi=\{\pi_0, \pi_1\}$ ，由 $\begin{cases} \pi P = \pi \\ \sum_j \pi_j = 1 \end{cases}$ 得

$$\begin{cases} \pi_0 + \pi_1 = 1 \\ (1-\alpha)\pi_0 + \beta\pi_1 = \pi_0 \\ \alpha\pi_0 + (1-\beta)\pi_1 = \pi_1 \end{cases}$$

解方程组得

$$\pi_0 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}, \pi_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

# 5.4 转移概率的稳定性能

- 例5. 4. 2　设有状态空间S={0, 1, 2}的齐次马尔科夫链，它的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

试求它的极限分布。

# 5.4 转移概率的稳定性能

- **解：** 由一步转移概率矩阵知，此齐次马尔科夫链是不可约遍历链，它的平稳分布就是极限分布，设极限分布为

$$\pi = \pi P,\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

即

$$\begin{cases} \pi_0 = 0.5\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.2\pi_2 \\ \pi_1 = 0.4\pi_0 + 0.4\pi_1 + 0.3\pi_2 \\ \pi_2 = 0.1\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.5\pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \pi_0 = \frac{21}{62},\ \pi_1 = \frac{23}{62},\ \pi_2 = \frac{18}{62}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi = \{\frac{21}{62}, \frac{23}{62}, \frac{18}{62}\}$$

# 5.4 转移概率的稳定性能

- 例5. 4. 3　　设齐次马尔科夫链的状态空间S={0, 1, 2, 3, 4}，其一步转移概率矩阵为P，求它的平稳分布。

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

# 5.4 转移概率的稳定性能

- **解：** 由一步转移概率矩阵知，该齐次马尔科夫链是不可约遍历链，故其平稳分布存在唯一，设平稳分布$\pi=\{\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4\}$，求解方程组

$$\pi=\pi P,\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1$$

即

$$\pi_0=\frac{1}{3}\pi_0+\frac{1}{3}\pi_1,\quad \pi_1=\frac{2}{3}\pi_0+\frac{1}{3}\pi_2$$

$$\pi_2=\frac{2}{3}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_3,\quad \pi_3=\frac{2}{3}\pi_2+\frac{1}{3}\pi_4$$

$$\pi_4=\frac{2}{3}\pi_3+\frac{1}{3}\pi_4,\quad \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1$$

# 5.4 转移概率的稳定性能

- 得

$$\pi_0=\frac{1}{31},\ \pi_1=\frac{2}{31},\ \pi_2=\frac{4}{31},\ \pi_3=\frac{8}{31},\ \pi_4=\frac{16}{31}$$

- 所以马尔科夫链的平稳分布为

$$\pi=\{\frac{1}{31},\frac{2}{31},\frac{4}{31},\frac{8}{31},\frac{16}{31}\}$$

# 5.4 转移概率的稳定性能

- **例5.4.4** 设有状态空间S={0,1,2,…,6}的齐次马尔科夫链，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

(1)试对S进行分类，并说明各状态类型；

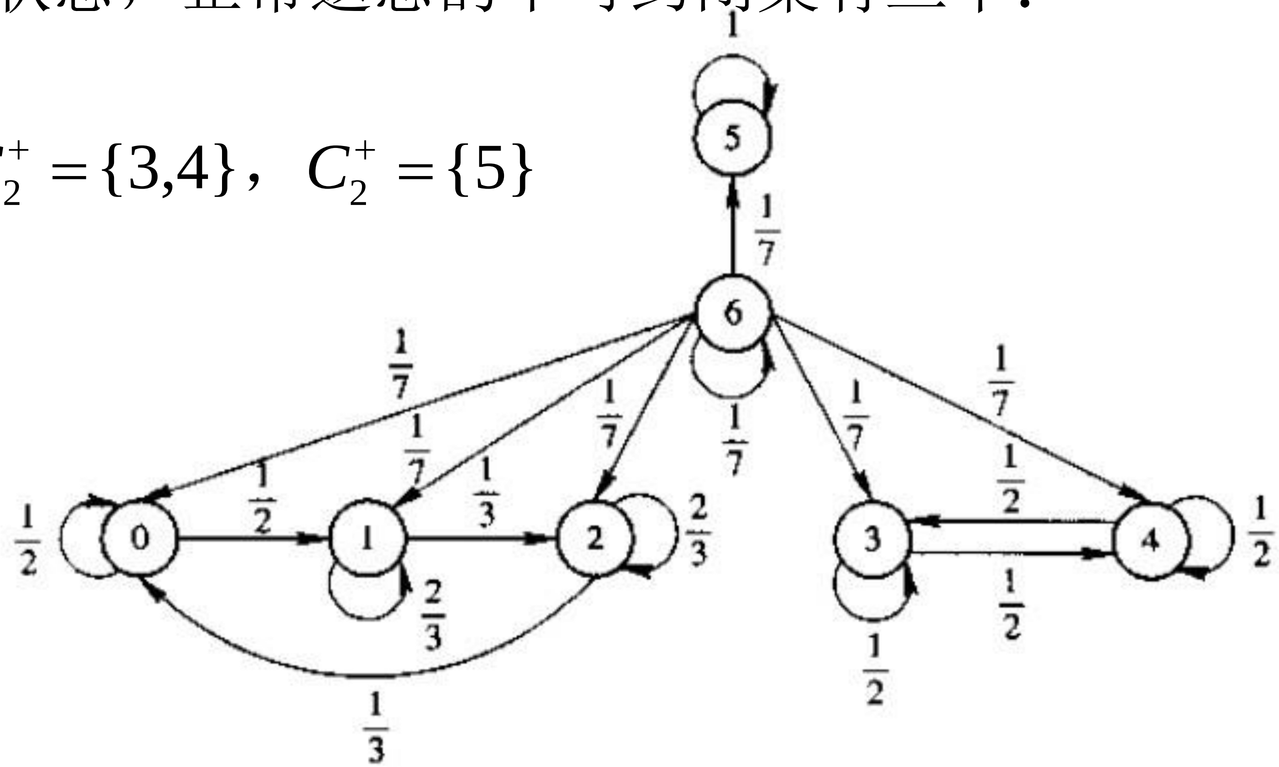
(2)求平稳分布，其平稳分布是否唯一？为什么？

(3)求 $P(X_{n+2}=1 \mid X_n=0)$, $P(X_{n+2}=2 \mid X_n=0)$

# 5.4 转移概率的稳定性能

- 解： (1)画状态转移图，如下图所示。依据状态转移图，6是非常返态，*D*={6}是非常返状态集，0,1,2,3,4,5是正常返非周期状态，正常返态的不可约闭集有三个：

$$C_1^+=\{0,1,2\}，C_2^+=\{3,4\}，C_2^+=\{5\}$$



# 5.4 转移概率的稳定性能

(2)由(1)知，此齐次马尔科夫链有三个不同的正常返状态的不可约闭集，故其平稳分布不唯一，并且有无穷多个平稳分布。设对应于$C_1^+, C_2^+, C_3^+$的转移概率矩阵分别为

$$P_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{bmatrix},\ P_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix},\ P_3=(1)$$

# 5.4 转移概率的稳定性能

令 $\pi^{(1)}=\{\pi_1^{(1)},\pi_2^{(1)},\pi_3^{(1)}\},\ \pi^{(2)}=\{\pi_1^{(2)},\pi_2^{(2)}\},\ \pi^{(3)}=\{\pi_1^{(3)}\}$

求解方程组

$$\pi^{(1)}=\pi^{(1)}P_1,\ \ \pi_1^{(1)}+\pi_2^{(1)}+\pi_3^{(1)}=1$$

$$\pi^{(2)}=\pi^{(2)}P_2,\ \ \pi_1^{(2)}+\pi_2^{(2)}=1$$

$$\pi^{(3)}=\pi^{(3)}P_1,\ \ \pi_1^{(3)}=1$$

得非负解 $\pi^{(1)}=\{\frac{2}{8},\frac{3}{8},\frac{3}{8}\},\ \pi^{(2)}=\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\},\ \pi^{(3)}=\{1\}$

所以平稳分布为

$$\pi=\{\frac{2\lambda_1}{8},\frac{3\lambda_1}{8},\frac{3\lambda_1}{8},\frac{\lambda_2}{2},\frac{\lambda_2}{2},\lambda_3,0\},\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geq 0$$

# 5.4 转移概率的稳定性能

- (3)由于$P^{(2)} = P^2$，所以

$$P(X_{n+2}=1 \mid X_n=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{7}{12}$$

$$P(X_{n+2}=2 \mid X_n=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

# 补充例题1

- 三个黑球，三个白球，等分后放入甲乙两袋。从甲乙两袋中每次各取一球，然后互换，即把从甲袋中取出的球放入乙袋，把从乙袋中取出的球放入甲袋。把甲袋中的白球数定义为该过程的状态，则有四种状态：0,1,2,3，经过次交换后过程的状态为（1）求出它的一步转移概率矩阵；（2）如果该过程长期运行下去，甲袋中无白球的概率是多少？

# 补充例题1

- （1）

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# 补充例题1

- (2)设该过程的平稳分布为 $\pi=\left(\pi_0,\pi_1,\pi_3,\pi_4\right)$ ，由

  $\pi=\pi\cdot P$ ，$\pi_0+\pi_1+\pi_3+\pi_4=1$ ，则有

$$\pi=\left(\pi_0,\pi_1,\pi_3,\pi_4\right)=\left(\frac{1}{20},\frac{9}{20},\frac{9}{20},\frac{1}{20}\right)$$

故过程长期以后，甲袋中无白球的概率为1/20 。

# 补充例题2

- 设某厂的商品销售状况可以分为三个状态：滞销（用1表示）、正常（用2表示）、畅销 （用3表示）（按一个月计）。若经过对历史资料的整理分析，其销售状态的变化（从这月到下个月）与初始时刻无关，且该销售过程的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{3}{9} & \frac{1}{9} & \frac{5}{9}\\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

试分析该过程经过相当长时间后，哪一种销售状态的可能性最大？

# 补充例题2

- 解：经计算可得$P^{(2)}>0$,即2步转移概率矩阵中每个元素均大于0，由马尔科夫定理知，该马氏过程为一遍历链，其极限分布存在且唯一，而且，其平稳分布即为极限分布。设其平稳分布为

$\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_3)$ ，由求平稳分布的方程组解得

$$\begin{cases} \pi_1=\frac{1}{2}\pi_1+\frac{3}{9}\pi_2+\frac{1}{6}\pi_3 \\ \pi_2=\frac{1}{2}\pi_1+\frac{1}{9}\pi_2+\frac{4}{6}\pi_3 \\ \pi_3=\frac{5}{9}\pi_2+\frac{1}{6}\pi_3 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \end{cases}$$

其解为 $\pi_1=\frac{8}{23}$，$\pi_2=\frac{9}{23}$，$\pi_3=\frac{6}{23}$ 。此结果表明，经过相当长时间以后，正常销售状态的可能性最大。