2024 矩阵论期末考试参考答案

一、单项选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1-5. DBBAB　　　　　　　6-10. CCDBB

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

(1). 10　　　　　　　(2). $\beta_1+2\beta_2$

(3). 100　　　　　　　(4). 8

(5). $\sqrt{5}$　　　　　　　(6). e^{11}

(7). $x+1$　　　　　　　(8). λ

(9). $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$　　　　　　　(10). $\begin{bmatrix}4t(1+t^2) & 2t+1\\ 0 & 2t\end{bmatrix}$

三、计算题（8 分）

在 $F[x]_n$ 中定义内积 $(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$，求

（1）内积在基 $\varepsilon_1=1,\ \varepsilon_2=x,\ \varepsilon_3=x^2$ 下的矩阵;

（2）求 $f(x)=-15x^2-3x+6$ 与 $g(x)=x^2+2x-1$ 的内积。

解　（1）　$a_{11}=\int_{-1}^{1}dx=2$，　$a_{12}=a_{21}=\int_{-1}^{1}xdx=0$，　$a_{13}=a_{31}=\int_{-1}^{1}x^2dx=\dfrac{2}{3}$，

$$a_{22}=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}，\quad a_{23}=a_{32}=\int_{-1}^{1}x^3dx=0，\quad a_{33}=\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{2}{5}，$$

所以内积在基 $1,x,x^2$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2/3\\ 0 & 2/3 & 0\\ 2/3 & 0 & 2/5\end{bmatrix}$；　　　…… 5 分

（2）方法 1　$(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx=\int_{-1}^{1}-15x^4+15x^2-6dx=-8$；

方法 2　因为　$f(x),g(x)$ 在基 $1,x,x^2$ 下的坐标分别为 $\tilde{f}=[6,-3,-15]^T$，

$\tilde{g}=[-1,2,1]^T$，从而 $(f,g)=\tilde{f}^T A\tilde{g}=[6,-3,-15]\begin{bmatrix}2 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=-8$。

...... 8 分

四、计算题（8 分）设 $A=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2\end{bmatrix}$，求矩阵 A 的最小多项式 $m_A(x)$。

解 令 $A=\begin{bmatrix}A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3\end{bmatrix}$，其中 $A_1=A_2=[5]$，$A_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}$

$m_{A_1}(x)=m_{A_2}(x)=x-5$， ......3 分

对 $\lambda E-A_3$ 施行初等行变换得

$$\lambda E-A_3=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & -1\\ -2 & \lambda+1 & -2\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & & \\ & \lambda+1 & \\ & & (\lambda+1)^2\end{bmatrix}$$

因此，$m_{A_3}(x)=(x+1)^2$； ......6 分

$m_A(x)$ 为 $m_{A_1}(x)$，$m_{A_2}(x)$，$m_{A_3}(x)$ 的最小公倍式，$m_A(x)=(x-5)(x+1)^2$

......8 分

五、计算题（8 分）

设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$，求矩阵 A 的谱分解。

解 由 $|\lambda E-A|=0$ 解出矩阵 A 的为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=3$， ......3 分

解出它们对应的特征向量分别为

$$\alpha_1=[1\quad 1\quad 1]^{\mathrm T},\quad \alpha_2=[1\quad 0\quad -1]^{\mathrm T},\quad \alpha_3=[1\quad -2\quad 1]^{\mathrm T}$$

单位化得

$$\xi_1=\frac{1}{\sqrt3}[1\quad 1\quad 1]^{\mathrm T},\quad \xi_2=\frac{1}{\sqrt2}[1\quad 0\quad -1]^{\mathrm T},\quad \xi_3=\frac{1}{\sqrt6}[1\quad -2\quad 1]^{\mathrm T}$$ ......6 分

令

$$\boldsymbol H_1=\xi_1\xi_1^{\mathrm T}=\frac13\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol H_2=\xi_2\xi_2^{\mathrm T}=\frac12\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol H_3=\xi_3\xi_3^{\mathrm T}=\frac16\begin{bmatrix}1&-2&1\\-2&4&-2\\1&-2&1\end{bmatrix},$$

则矩阵 $\boldsymbol A$ 的谱分解为 $\boldsymbol A=0\boldsymbol H_1+1\boldsymbol H_2+3\boldsymbol H_3$。 ......8 分

六、计算题（8 分）

已知 $\boldsymbol A=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&2&0\\0&1&2\end{bmatrix}$，

(1) 求可逆阵 $\boldsymbol T$ ，若当型矩阵 $\boldsymbol J$ ，使 $\boldsymbol T^{-1}\boldsymbol A\boldsymbol T=\boldsymbol J$ 成立，

(2) 求矩阵 $\boldsymbol A$ 的函数 $f(\boldsymbol A)$ 和 $\sin\left(\frac{\pi}{4}\boldsymbol A\right)$.

解 由 $|\lambda\boldsymbol E-\boldsymbol A|=0$ 解出矩阵 $\boldsymbol A$ 的特征值分别为 $\lambda_1=1,\quad \lambda_2=\lambda_3=2$，

易知特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的几何重数为 1，因此矩阵 $\boldsymbol A$ 的若当型矩阵

$$\boldsymbol J=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$ ......2 分

令 $\boldsymbol T=[\boldsymbol t_1\quad \boldsymbol t_2\quad \boldsymbol t_3]$，若使 $\boldsymbol T^{-1}\boldsymbol A\boldsymbol T=\boldsymbol J$ 成立，

$$\text{即 } \boldsymbol A[\boldsymbol t_1\quad \boldsymbol t_2\quad \boldsymbol t_3]=[\boldsymbol t_1\quad \boldsymbol t_2\quad \boldsymbol t_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

从而 $\boldsymbol A\boldsymbol t_1=\boldsymbol t_1$，$\boldsymbol A\boldsymbol t_2=2\boldsymbol t_2$，$\boldsymbol A\boldsymbol t_3=\boldsymbol t_2+2\boldsymbol t_3$，

解得 $\boldsymbol t_1=[1\quad 0\quad 0]^{\mathrm T}$，$\boldsymbol t_2=[3\quad 0\quad 1]^{\mathrm T}$，$\boldsymbol t_3=[-3\quad 1\quad 0]^{\mathrm T}$，

则 $\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{t}_1\quad \boldsymbol{t}_2\quad \boldsymbol{t}_3]=\begin{bmatrix}1 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$为所求，　　　……5 分

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{T}f(\boldsymbol{J})\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{T}\begin{bmatrix}f(1) & 0 & 0\\ 0 & f(2) & f'(2)\\ 0 & 0 & f(2)\end{bmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}f(1) & 3f(1)+3f'(2)-3f(2) & -3f(1)+3f(2)\\ 0 & f(2) & 0\\ 0 & f'(2) & f(2)\end{bmatrix}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\boldsymbol{A}\right)=\begin{bmatrix}\sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2}/2-3 & 3-3\sqrt{2}/2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$　　　……8 分

七、证明题（8 分）

设$V_1,V_2,\dots,V_s$是线性空间 V 的 s 个非平凡的子空间，证明 V 中至少有一向量 α 不属于$V_1,V_2,\dots,V_s$中的任何一个。

证：　对子空间的个数s进行数学归纳。当$s=1$时，$V_1\neq V$ 结论成立；

假设命题对$m-1$个子空间成立，若$V_1,V_2,\cdots,V_{m-1}$均为V 的真子空间，则

$\bigcup\limits_{i=1}^{m-1}V_i\neq V$ ；

再看对m 个子空间的情况，由归纳假设$\exists\alpha\notin\bigcup\limits_{i=1}^{m-1}V_i$，，

若$\alpha\notin V_m$此时命题成立，下面设$\alpha\in V_m$；

由$V_m\neq V$ 则$\exists\beta\in V,\beta\notin V_m$； 若$\beta\notin\bigcup\limits_{i=1}^{m-1}V_i$此时命题成立，下面设$\beta\in\bigcup\limits_{i=1}^{m-1}V_i$；

考察集合$W=\{\alpha+\beta,2\alpha+\beta,\cdots,m\alpha+\beta\}$中的$m$ 个元素，均不属于V_m；

而每个V_i $(i=1,2,\cdots,m-1)$中包含W 中元素不多于 1 个(若不然，V_i 中有 2 个W 中元素，其差$(k_1\alpha+\beta)-(k_1\alpha+\beta)=(k_1-k_2)\alpha\in V_i$， 与$\alpha\notin\bigcup\limits_{i=1}^{m-1}V_i$，矛盾)；

综上，W 中有某个元素既不属于 V_m 也不属于 $\bigcup_{i=1}^{m-1} V_i$ ；命题对 m 个子空间成立。

由数学归纳法，对一切自然数 s ，命题成立。