



哈爾濱工程大學

HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY



隨機過程

第3部分 Poisson過程



5. 复合泊松过程



例 2.7.3 设移民到某地区定居的户数是一 Poisson 过程，平均每周有 2 户定居，即 $\lambda = 2$ ，如果每户的人口数是一随机变量，一户四人的概率为 $1/6$ ，一户三人的概率为 $1/3$ ，一户二人的概率为 $1/3$ ，一户一人的概率为 $1/6$ ，并且每户的人口数是相互独立的随机变量，求在五周内移民到该地区人口数的数学期望和方差。



5. 复合泊松过程

□解 因为设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是移民到该地区定居的户数所形成的Poisson过程，则其参数为 $\lambda=2$.再设 Y_n 表示第 n 户的人口数， $X(t)$ 代表移民的总人数，则 $X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$ ，从而 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是复合的Poisson过 程.

$$EY_n = 4 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{2}$$

所以 $EY_n^2 = 4^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{1}{6} = \frac{43}{6}$

$$E[X(5)] = 2 \times 5 \times \frac{5}{2} = 25, \quad D[X(5)] = 2 \times 5 \times \frac{43}{6} = \frac{215}{3}$$

5. 复合泊松过程

□例2.7.4 设投保人的死亡是参数为 λ 的Poisson过
程，对于第 n 个死亡的投保人用随机变量 Y_n 描述
，同时也表示该投保人的价值，并且 Y_n
($n=1,2,\dots$) 相互独立同服从参数为 a ($a>0$) 的指数
分布.令 $X(t)$ 表示在期间 $[0,t)$ 内保险公司必须付出
的全部赔偿，求 $E[X(t)]$ 和 $D[X(t)]$.



5. 复合泊松过程

□解 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 表示死亡的投保人所形成的

Poisson 过程, 其参数为 λ , 则 $X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$, $t \geq 0$.

从而 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是复合的 *Poisson* 过程.

由于 $EY_n = \frac{1}{a}, DY_n = \frac{1}{a^2}$

从而 $EY_n^2 = DY_n + (EY_n)^2 = \frac{2}{a^2}$

因此 $E[X(t)] = \lambda t EY_n = \frac{\lambda t}{a}, D[X(t)] = \lambda t EY_n^2 = \frac{2\lambda t}{a^2}$

泊松过程



- 例6. 某商店顾客的到来服从强度为4人每小时的Poisson过程，已知商店9:00开门，试求：
- (1) 在开门半小时中，无顾客到来的概率；
 - (2) 若已知开门半小时中无顾客到来，那么在未来半小时中，仍无顾客到来的概率；
 - (3) 若该商店到9:30时仅到来一位顾客，且到11:30时总计已到达5位顾客的概率；
 - (4) 在已知到11:30时已到来5位顾客的条件下，在9:30时仅有1位顾客到来的概率。



设商店顾客到来过程为 $\{N(t), t \geq 0\}$, 其为参数为 4 的 Poisson 过程。 \leftarrow

$$(1) P(N(\frac{1}{2}) = 0) = e^{-4 \cdot \frac{1}{2}} = e^{-2} \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots$$

$$\begin{aligned}(2) P(N(1) - N(\frac{1}{2}) = 0 | N(\frac{1}{2}) = 0) &= P(N(1) - N(\frac{1}{2}) = 0 | N(\frac{1}{2}) - N(0) = 0) \cdots \cdots \\&= P(N(1) - N(\frac{1}{2}) = 0) = P(N(\frac{1}{2}) = 0) = e^{-2} \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) P(N(\frac{1}{2}) = 1, N(\frac{5}{2}) = 5) &= P(N(\frac{1}{2}) - N(0) = 1, N(\frac{5}{2}) - N(\frac{1}{2}) = 4) \leftarrow \\&= P(N(\frac{1}{2}) - N(0) = 1) P(N(\frac{5}{2}) - N(\frac{1}{2}) = 4) = P(N(\frac{1}{2}) = 1) P(N(2) = 4) \cdots \cdots \\&= \frac{1024}{3} e^{-10} = 0.0155 \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) P(N(\frac{1}{2}) = 1 | N(\frac{5}{2}) = 5) &= \frac{P(N(\frac{1}{2}) = 1, N(\frac{5}{2}) = 5)}{P(N(\frac{5}{2}) = 5)} \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\&= \frac{256}{625} = 0.41 \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots\end{aligned}$$

泊松过程



例7：某中子计数器对到达计数器的粒子只是每隔一个记录一次，假设粒子按照比率4个每分钟的泊松过程到达，令 T 是两个相继被记录粒子之间的时间间隔（单位：分钟）试求：

- (1) T 的概率密度函数.
- (2) $P(T \geq 1)$



解 (1) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 为被记录粒子之间的时间间隔, 则它们相互独立同分布. 因此, 只需求出 X_1 的分布, 即为 T 的分布.

先求 X_1 的分布函数 $F_{X_1}(t)$.

当 $t < 0$ 时, $F_{X_1}(t) = 0$.

当 $t \geq 0$ 时,

$$\begin{aligned} F_{X_1}(t) &= P(X_1 \leq t) = 1 - P(X_1 > t) \\ &= 1 - P(N(t) \leq 1) \\ &= 1 - P(N(t) = 0) - P(N(t) = 1) \\ &= 1 - e^{-4t} - 4te^{-4t} \end{aligned}$$

即

$$F_{X_1}(t) = \begin{cases} 1 - (1 + 4t)e^{-4t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

从而 T 的概率密度函数为

$$f_T(t) = \begin{cases} 16te^{-4t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

(2)

$$P(T \geq 1) = 1 - P(T < 1) = 1 - F_T(1) = 1 - F_{X_1}(1) = 5e^{-4}$$

(1) 设 X_1, X_2, X_n, \dots 为被记录的粒子之间的时间间隔, 则它们是相互独立同分布的, 只要求出 X_1 的分布, 即为 T 的分布。在 X_1 内, 设 $t < X_1$, 则 $[0, t)$ 内至多有一个粒子到达。 \leftarrow

$$\begin{aligned} P(X_1 > t) &= P(N(t) \leq 1) = P(N(t) = 0) + P(N(t) = 1) \\ &= e^{-4t} + 4te^{-4t} = (1 + 4t)e^{-4t} \end{aligned} \quad \leftarrow$$

$$F_T(t) = P(X_1 \leq t) = \begin{cases} 1 - (1 + 4t)e^{-4t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \leftarrow$$

$$(2) f_T(t) = F'_T(t) = \begin{cases} 16te^{-4t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \leftarrow$$