矩阵论（青岛）参考答案

一、单项选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1-5 BCCBB　　6-10 DABCD

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$;

2. $n-1$;

3. 2;

4. $|t|<\sqrt{2}$;

5. $\sqrt{10}$;

6. $\sum_{i=1}^{\sigma} f(\lambda_i)H_i$;

7. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \mathrm{e} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

8. $\begin{bmatrix} 2t & \cos t & 1 \\ 0 & 0 & -\sin t \end{bmatrix}$;

9. 9;

10. 1.

三、计算题（8 分）

在线性空间 R^3 中，线性变换 σ 定义如下:

$$\begin{cases} \sigma(\eta_1)=[-5,0,3]^{\mathrm{T}} \\ \sigma(\eta_2)=[0,-1,6]^{\mathrm{T}} \\ \sigma(\eta_3)=[-5,-1,9]^{\mathrm{T}} \end{cases},$$

其中 $\begin{cases} \eta_1=[-1,0,2]^{\mathrm{T}} \\ \eta_2=[0,1,1]^{\mathrm{T}} \\ \eta_3=[3,-1,0]^{\mathrm{T}} \end{cases}$.

（1）求 σ 在自然基底下的矩阵;

（2）求 σ 在 η_1,η_2,η_3 下的矩阵.

解答:（1） $(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)X$，即 $X=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

为基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 η_1,η_2,η_3 之间的过度矩阵. 而

$$\sigma(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{bmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix},$$

设σ在标准基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵为$A$, 即$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$，所以

$$\sigma(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\sigma((\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)X)=\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)X=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)AX$$

因而$AX=\begin{bmatrix}-5&0&-5\\0&-1&-1\\3&6&9\end{bmatrix}$，故$A=\begin{bmatrix}-5&0&-5\\0&-1&-1\\3&6&9\end{bmatrix}X^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-5&20&-20\\-4&-5&-2\\27&18&24\end{bmatrix}$.

（2）设σ在基η_1,η_2,η_3下的矩阵为B，则

$$B=X^{-1}AX=\begin{bmatrix}-1&0&3\\0&1&-1\\2&1&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-5&0&-5\\0&-1&-1\\3&6&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&5\\-1&0&-1\\-1&1&0\end{bmatrix}.$$

四、证明题（8 分）

设σ是线性空间V中的线性变换，若存在$\alpha\in V$和$m\in Z^+$，使$\sigma^{m-1}(\alpha)\neq 0$，$\sigma^m(\alpha)=0$，证明$W=\mathrm{span}\{\alpha,\sigma(\alpha),\cdots,\sigma^{m-1}(\alpha)\}$是$\sigma$的不变子空间.

证明：对于任意的$x\in W$，即$x=k_0\alpha+k_1\sigma(\alpha)+\cdots+k_{m-1}\sigma^{m-1}(\alpha)$，则

$$\sigma(x)=k_0\sigma(\alpha)+\cdots+k_{m-2}\sigma^{m-1}(\alpha)+k_{m-1}\sigma^m(\alpha)=k_0\sigma(\alpha)+\cdots+k_{m-2}\sigma^{m-1}(\alpha)\in W$$

所以W是σ的不变子空间。

五、计算题（8 分）

求酉变换 $x=Uy$，化 Hermite 二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x}_1x_1-4\overline{x}_1x_2+4\overline{x}_1x_3-2\overline{x}_2x_2+8\overline{x}_2x_3-2\overline{x}_3x_3$$

为标准型.

解答：二次型矩阵为$A=\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{bmatrix}$，其特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\-2&-4&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+7)(\lambda-2)^2.$$

得A的特征值为：$\lambda_1=-7,\lambda_2=\lambda_3=2$.

当$\lambda_1=-7$时，由$(-7E-A)x=0$，求得特征向量为$\alpha_1=[1,2,-2]^{\mathrm{T}}$，

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，由 $(2E-A)x=0$，求得特征向量为 $\alpha_2=[-2,1,0]^{\mathrm{T}}$，

$\alpha_3=[2,0,1]^{\mathrm{T}}$，利用施密特正交化方法将$\alpha_2,\alpha_3$正交化得:

$$\beta_2=[-2,1,0]^{\mathrm{T}},\ \beta_3=\left[\frac{2}{5},\frac{4}{5},1\right]^{\mathrm{T}}$$

所以α_1,β_2,β_3相互正交，再将其单位化得:

$$\eta_1=\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right]^{\mathrm{T}},\ \eta_2=\left[-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right]^{\mathrm{T}},\ \eta_3=\left[\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}}\right]^{\mathrm{T}},$$

令

$$U=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}}\end{bmatrix},$$

则酉变换为 $x=Uy$，且$U^H AU=\begin{bmatrix}-7 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$. 所得标准形为:

$$-7\overline{y_1}y_1+2\overline{y_2}y_2+2\overline{y_3}y_3.$$

六、计算题（16 分）

已知矩阵$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$,

（1）求矩阵A的若当标准型J及相似变换矩阵P;

（2）求矩阵函数$f(A)$的若当表示，并计算e^{At};

（3）计算矩阵函数e^{At}在区间$[0,1]$上的定积分$\int_0^1 \mathrm{e}^{At}\mathrm{d}t$.

解答:（1）利用矩阵的 Jordan 分解知识，可得矩阵

$$A=PJP^{-1}$$

其中

$$J=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},P=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

（2）

$$f(A)=P\begin{bmatrix} f(2) & 0 & 0 \\ 0 & f(2) & f'(2) \\ 0 & 0 & f(2) \end{bmatrix}P^{-1}$$

将 $f(A)=\mathrm{e}^{At}$ 带入上式得

$$\mathrm{e}^{At}=P\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 & 2t\mathrm{e}^{2t} \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 3t\mathrm{e}^{2t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}.$$

（3）$\int_0^1 f(A)\mathrm{d}t$

$$=\int_0^1 \mathrm{e}^{At}\mathrm{d}t=\begin{bmatrix} \int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t & 0 & \int_0^1 2t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t \\ 0 & \int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t & \int_0^1 3t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t \\ 0 & 0 & \int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\Big|_0^1 & 0 & (t\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t})\Big|_0^1 \\ 0 & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\Big|_0^1 & \frac{3}{2}(t\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t})\Big|_0^1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\Big|_0^1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1) & 0 & \frac{1}{2}\mathrm{e}^2+\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1) & \frac{3}{4}\mathrm{e}^2+\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1) \end{bmatrix}.$$