矩阵论（青岛）参考答案及评分标准

2024 年 10 月

一、单项选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1-5 ACDBB　　　　6-10 AACDA

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. $[1,1,1]^T$;

2. $C^{-1}AC+3B$;

3. 2;

4. $7+\sqrt{2}$;

5. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$;

6. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

7. $\begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 2 \\ \frac{14}{3} & 6 \end{bmatrix}$;

8. 288;

9. $3x^2\begin{bmatrix} \sin(1+x^3) & -x^6 \\ \mathrm{e}^{2x^3} & \tan x^3 \end{bmatrix}$;

10. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \\ -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

三、证明题（8 分）

设 $R^{2\times 2}$ 中的线性变换 T 为 $T(X)=XB+2X^T$，其中 $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，证明线性子空间 $W=\left\{X=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\middle| x_{11}-x_{22}=0, x_{12}-x_{21}=0\right\}$ 是 T 的不变子空间.

证明：对于任意的 $X\in W$，$X=x_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+x_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，因此 $X_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$X_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 为 W 的一组基.

$$T\left(X_1\right)=X_1B+2X_1^T=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}=2X_1+X_2\in W$$

$$T\left(X_2\right)=X_2B+2X_2^T=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}=X_1+2X_2\in W$$，因此W 是T 的不变子空间.

四、计算题（8 分）

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}4&-6&0\\2&-3&0\\-2&3&2\end{bmatrix}$为单纯阵，写出 A 的谱分解表达式.

解答： $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&6&0\\-2&\lambda+3&0\\2&-3&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-1)$，

所以 A 的特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=2$， 当$\lambda=0$ 时，对应的特征向量为$\xi_1=\begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix}$；

当$\lambda=1$时，对应的特征向量为$\xi_2=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$;当$\lambda=2$时，对应的特征向量为$\xi_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$;

令$P=[\xi_1,\quad \xi_2,\quad \xi_3]=\begin{bmatrix}3&2&0\\2&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},P^{-1}=\begin{bmatrix}-1&2&0\\2&-3&0\\-2&3&1\end{bmatrix}$,

$E_1=\begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&6&0\\-2&4&0\\-2&4&0\end{bmatrix}$ ， $E_2=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-6&0\\2&-3&0\\2&-3&0\end{bmatrix}$ ，

$E_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-2&3&1\end{bmatrix}$故 A 的谱分解表达式为$A=0E_1+E_2+2E_3$.

五、计算题（8 分）

求 $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\\1&1\end{bmatrix}$的奇异值分解.

答：$AA^H=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&0&0\\2&0&2\end{bmatrix}$的特征值是$\lambda_1=4,\lambda_2=0,\lambda_3=0$，对应的特征向量依次是

$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$. 于是可得$U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{bmatrix}$，令$U_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$,

则$V_1=A^HU_1(\Delta^H)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，取$V_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，则$V=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$,

所以A的奇异值分解为$U^HAV=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$.

六、计算题（16 分）

已知$e^{At}=\begin{bmatrix}e^t&e^t-1&te^t-e^t+1\\0&1&e^t-1\\0&0&e^t\end{bmatrix}$,

（1）求矩阵A;

（2）求A的若当标准型J和最小多项式$m(x)$；

（3）求$\cos A$

答：（1）由于$\frac{de^{At}}{dt}=\begin{bmatrix}e^t&e^t&te^t\\0&0&e^t\\0&0&e^t\end{bmatrix}=Ae^{At}$，令$t=0$，得到$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

（2）$J=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$；$m(x)=x(x-1)^2$

（3）令$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$，则$p(1)=f(1),p'(1)=f'(1),p(0)=f(0)$，即$a_0=f(0);\ a_1=2f(1)-f'(1)-f(0);a_2=f'(1)-f(1)+f(0)$；

$$\cos A=\begin{bmatrix}\cos1&\cos1-1&1-\sin1-\cos1\\0&1&\cos1-1\\0&0&\cos1\end{bmatrix}$$