随机过程

随机过程笔记

作者：韩方成

组织：中国海洋大学水产学院

时间：Dec 10, 2021

光并非太阳的专利，你也可以发光

目录

第 1 章 基本概念

1.1 随机变量

定义 1.1 (随机变量)

在概率空间 $(S, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量 (其中 $\mathcal{F}$ 为 σ-域而 P 为 $\mathcal{F}$ 中事件的概率测度) 是一个实值函数 $\boldsymbol{x}(\zeta) : (\boldsymbol{x} : S \to \mathfrak{R})$，其中对于任意 $x \in \mathfrak{R}$ 都有 $\{\zeta \in S : \boldsymbol{x}(\zeta) \leq x\} \in \mathcal{F}$。♣

- S 为样本空间
- $\mathcal{F}$ 为事件空间
- 一个事件是 S 的一个子集。换句话说，$\mathcal{F}$ 为 S 的子集的一个非空集合
- 概率测度 P 定义在 $\mathcal{F}$ 中的事件上。换句话说，$\mathcal{F}$ 中包含的所有事件都必须是概率可测度的

定义 1.2 (域/代数)

集合 $\mathcal{F}$ 被称为样本空间 S 上的域或者代数，如果他是 S 中子集的一个非空集合，并且满足下列性质：

1. $\varnothing \in \mathcal{F}$ 并且 $S \in \mathcal{F}$($\mathcal{F}$ 应该有确定结果是在空集合 (不可能) 还是在样本空间 (肯定) 的机制)
2. (对补集封闭)$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$(有一个机制来确定结果是否在 A 中等同于有一个机制确定结果是否在 A^c 中)
3. (对并封闭)$A \in \mathcal{F}$ 并且 $B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$(如果有一个极值能确定结果是否在 A 中，也能确定结果是否在 B 中，那么它也能确定结果是否在 A 和 B 的并中)

♣

但是域还不够，在无限的情况下会出问题，看下面的例子。

例题 1.1 $S = \mathfrak{R}$ 并且 $\mathcal{F}$ 为所有开、半开和闭区间，并且区间的端点都是有理数，包括 $\mathfrak{R}$ 自己。令

$$A_k = [0, [\pi]_k)$$

并且 $[\pi]_k \triangleq \lfloor \pi \times 10^k \rfloor / 10^k$。那个无限并 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 属于 $\mathcal{F}$ 吗？答案是否定的。因为当 i 趋近无穷时，其端点变为无理数。

定义 1.3 (σ-域/σ-代数)

集合 $\mathcal{F}$ 被称为是样本空间 S 上的 σ-域或 σ-代数，如果它是 S 的子集的一个非空集合，并且满足下列条件：

1. $\varnothing \in \mathcal{F}$ 并且 $S \in \mathcal{F}$
2. (对于补运算封闭)$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. (在可数并封闭)$A_i \in \mathcal{F}$ for $i = 1, 2, 3, \cdots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

♣

1.2 概率测度

定义 1.4 (概率测度)

定义在可测空间 $(S, \mathcal{F})$ 上的集合函数 P 是一个概率测度，如果它满足：

1. $0 \leq P(\mathcal{A}) \leq 1$, for $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$
2. $P(\varnothing) = 0$ and $P(S) = 1$
3. (可数加性) 如果 $\mathcal{A}_\infty, \mathcal{A}_\in, \cdots$ 为 $\mathcal{F}$ 中不相交集合序列，则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\mathcal{A}_k)$$

♣

1.3 CDF 的充分性

可以证明我们可以构建一个定义明确的概率空间 $(S, \mathcal{F}, P)$ 对于任何随机变量 $\boldsymbol{x}$ 如果它的 cdf $F(\cdot)$ 给定了。

可以证明任何函数 $G(x)$ 满足：

1. $\lim_{x \to -\infty} G(x) = 0$ 并且 $\lim_{x \to \infty} G(x) = 1$
2. 右连续
3. 非递减

是某些随机变量的合法 cdf。检查 $F(\cdot)$ 的上述三个属性就够了，这样描述一个随机变量就够了。也就是说，当定义一个随机变量时，没有必要定义概率空间 $(S, \mathcal{F}, P)$。

那我们为什么要费力定义概率空间呢？

1.4 用概率空间定义随机变量的优点

优点 1：有利于抽象出一些东西。例如，$(S, \mathcal{F}, P)$ 可能是不可观测的 (即其不是定在在实数域上的)。

- 为了推断在不可观测的随机结果 ζ 上发生了什么，我们需要将其转化为 (映射为) 可观测值 x
- 因此，x 为 $\zeta \in S$ 的函数，其取值为实数
- 因为 ζ 对于概率测度 P 是随机的，观测 $\boldsymbol{x}$ 出现的概率定义为：$P(\{\zeta \in S : \boldsymbol{x}(\zeta) = x\})$
- 有些数说 $\boldsymbol{x} : (S, \mathcal{F}, P) \to (\boldsymbol{x}(S), \mathcal{B}, Q)$ 产生一个可观测概率空间 $(\boldsymbol{x}(S), \mathcal{B}, Q)$，其中

$$\boldsymbol{x}(\mathcal{A}) = \{\boldsymbol{x}(\zeta) : \zeta \in \mathcal{A}\}, \quad \mathcal{B} = \{\boldsymbol{x}(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \subset \mathcal{F}\} \text{ and } Q(\boldsymbol{x}(\mathcal{A})) = P(\mathcal{A})$$

总结一下，就是通过 $\boldsymbol{x}$ 将抽象样本空间映射到实数，形成一个可观测概率空间。