中国海洋大学

水产学院

初等微分方程

Author: 韩方成

Student ID: 18060013010

微分方程笔记

留一份不足，可得无限美好

2021 年 8 月 9 日

目录

1 介绍

1.1 基本概念

微分方程是包含一个或多个未知函数导数的方程。微分方程的阶是它包含的最高导数的阶。如果微分方程只涉及一个变量的未知函数，则为常微分方程；如果涉及多个变量的偏导数，则称为偏微分方程。

最简单的微分方程是一阶微分方程，形式如下：

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad \text{or,equivalently,} \quad y' = f(x)$$

我们通常考虑可以写成如下格式的微分方程：

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{1.1}$$

等号右边的 $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ 至少出现一个。

微分方程的解 微分方程的解在某个开区间满足微分方程的函数，因此，如果 y 是 n 次可微，则 y 是微分方程的解如果 y 满足：

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n-1)}(x)) \tag{1.2}$$

对于任意 $x \in (a, b)$。在这种情况下，我们称 y 是微分方程1.1的一个解。

微分方程解的曲线被称为解曲线。更一般地，如果每个函数 $y = y(x)$ 其图形是 C 的一段，则曲线 C 称为微分方程的积分曲线。因此，微分方程的任何解曲线都是积分曲线，但积分曲线不一定是解曲线。

初值问题 初值问题可以写作：

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), y(x_0) = k_0, y'(x_0) = k_1, \cdots, y^{(n-1)} = k_{n-1} \tag{1.3}$$

如果 y 是上述微分方程的解，包含 x_0 点且满足微分方程的解的最大开区间是 y 的有效区间。

1.2 一阶方程的方向场

有些微分方程解的显式公式是不可能找到的。即使有这样的公式，它们也可能非常复杂，以至于毫无用处。在这种情况下，我们可以求助于图形或数值方法来了解给定方程的解的行为。

假设我们有微分方程：

$$y' = f(x, y) \tag{1.4}$$

虽然我们不知道上述式子的解，但是计算这些曲线的斜率很简单。具体来说，上式积分曲线在给定点 (x_0, y_0) 的斜率可以通过计算 $f(x_0, y_0)$ 计算得到。这就是方向场方法的基础。

如果 f 定义在集合 R 上，我们可以通过在 R 上的点 (x, y) 绘制处绘制斜率为 $f(x, y)$ 的短线段来构建在 R 上的向量场。当然，作为一个实际问题，我们实际上不能绘制 R 上每个点的线段，相反，我们必须选择 R 上的一个子集。例如，假设 f 定义在下列的矩形区域：

$$R : \{a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

我们令

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

并且：

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

我们认为 $(x_i, y_j), \quad 0 \le i \le m, \quad 0 \le j \le n$ 形成了一个矩形网格。

在第三章我们将学习微分方程的数值解。但是第三章的方法无法解决下列问题：

$$y' = -x/y \tag{1.5}$$

当 $y = 0$ 时上式微分方程是没有定义的。同样的，也同样无法解决下列问题：

$$y' = \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} \tag{1.6}$$

当 $x^2 + y^2 = 1$ 时。但是微分方程1.5和1.6可以写成如下形式：

$$y' = \frac{A(x,y)}{B(x,y)} \tag{1.7}$$

其中 A 和 B 在 R 上是连续的。因为此，一些微分软件是基于数值求解下列形式的方程：

$$\frac{dx}{dt} = B(x,y), \frac{dy}{dt} = A(x,y) \tag{1.8}$$

2 一阶方程

2.1 线性一阶方程

一阶微分方程是线性的如果其可以被写为如下形式：

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{2.1}$$

不能写作此形式的一阶方程被称为非线性的。我们说微分方程2.1是其次的如果 $f \equiv 0$；否则是非齐次的。因为 $y \equiv 0$ 明显是其次方程

$$y' + p(x)y = 0$$

的解，我们称其为平凡解。其他任何解为非平凡解。

一阶线性方程的通解 对于任何一阶线性方程

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{2.2}$$

如果 p 和 f 是开区间 (a,b) 上的连续函数，然后将会有唯一的公式 $y = y(x,c)$ 包括 x 和一个参数 c 有如下性质：

1. 对于每一个 c 的固定值，x 的方程是微分方程2.2在 (a,b) 上的解。

2. 如果 y 是微分方程2.2的一个解，那么 y 可以通过选择合适的 c 来得到。

我们称 $y = y(x, c)$ 是微分方程2.2的通解。

当这一点确定后，就会得出如下形式的方程式：

$$P_0(x)y' + P_1(x)y = F(y) \tag{2.3}$$

有通解在任何开区间 (a, b)，在此区间上 P_0, P_i, F 为连续函数并且 P_0 非零，因为在这种情况下我们就可以将式2.3写为2.2的形式，其中 $p = P_1/P_0$ 和 $f = F/P_0$。

2.2 齐次线性一阶方程

定理 2.1 如果 f 在 (a, b) 上连续，则其次方程

$$y' + p(x)y = 0 \tag{2.4}$$

在 (a, b) 上的通解为

$$y = ce^{-P(x)} \tag{2.5}$$

其中

$$P(x) = \int p(x)dx \tag{2.6}$$

是 p 在 (a, b) 上的任何反导数，即

$$P'(x) = p(x), \quad a < x < b \tag{2.7}$$

证明 2.1 如果 $y = ce^{-P(x)}$，对 y 求导得

$$y' = -P'(x)ce^{-P(x)} = -p(x)ce^{-P(x)} = -p(x)y$$

因此 $y' + p(x)y = 0$；即对于任何 c,y 是微分方程*2.4*得解。

现在我们需要证明微分方程*2.4*的任何解都可以写作 $y = ce^{-P(x)}$ 的形式。平凡解可以写作 $c = 0$。现在假设 y 是非平凡解。然后有一个 (a, b) 的子区间，在次区间上 y 值不等于零。我们可以将式*2.4*重写为：

$$\frac{y'}{y} = -p(x) \tag{2.8}$$

对于 $x \in I$。对*2.8*积分得：

$$\ln|y| = -P(x) + k$$

其中 k 为常数。写为指数形式为

$$|y| = e^k e^{-P(x)}$$

我们可以将上式写为 $y = ce^{-P(x)}$，其中

$$c = \begin{cases} e^k \ \textit{if}\ y > 0\ \textit{on}\ (a,b), \\ -e^k \ \textit{if}\ y < 0\ \textit{on}\ (a,b). \end{cases}$$

线性非齐次一阶方程 我们现在将要求解非齐次方程

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{2.9}$$

当考虑到这个方程时

$$y' + p(x)y = 0$$

我们称其为互补方程。

我们将要找到方程2.9的形式为 $y = uy_1$ 的解，其中 y_1 是互补方程的非平凡解，u 需要确定。这种使用互补方程的解来获得非齐次方程解的方法是一种称为参数变化的方法的特例。

如果

$$y = uy_1, \quad \text{then} \quad y' = u'y_1 + uy_1'$$

将表达式带入式2.9得：

$$u'y_1 + u(y_1' + p(x)y_1) = f(x)$$

化简得：

$$u'y_1 = f(x) \tag{2.10}$$

因为 y_1 是互补方程得解，即

$$y_1' + p(x)y_1 = 0$$

所以

$$u' = f(x)/y_1(x)$$

之后将其积分，乘以 y_1 即可得到通解。

我们总结一下参数变化法求解

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{2.11}$$

的方法：

a. 找到解 y_1 满足

$$\frac{y_1'}{y_1} = -p(x)$$

为了方便，取积分常数为零。

b. 写下

$$y = uy_1 \tag{2.12}$$

提醒自己正在做什么。

c. 写 $u'y_1 = f$ 并求解 u'，因此，$u' = f/y_1$

d. 积分 u' 来得到 u，有一个随机的积分常数

e. 将 u 带入2.12得到 y。

积分形式的解 有时，解线性一阶方程时出现的积分不能用初等函数来计算。在这种情况下，解必须是积分形式的。

存在唯一性定理

定理 2.2 假设 p 和 f 是开区间 (a,b) 上的连续函数，令 y_1 是互补方程

$$y' + p(x)y = 0$$

在区间 (a,b) 上的任意解。则：非齐次方程

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{2.13}$$

在 (a,b) 上的通解为

$$y = y_1(x)(c + \int f(x)/y_1(x)dx) \tag{2.14}$$

如果 x_0 是 (a,b) 上的任意点，y_0 是任意实数，然后初值问题

$$y' + p(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0$$

有唯一解

$$y = y_1(x)(\frac{y_0}{y_1(x_0)} + \int_{x_0}^{x} \frac{f(t)}{y_1(t)}dt)$$

证明 2.2 为了证明式*2.14*是微分方程*2.13*的通解，我们需要证明：

(i) 如果 c 是任意常数，式*2.14*中的函数 y 是微分方程*2.13*在 (a,b) 上的一个解。

(ii) 如果 y 是微分方程*2.13*在 (a,b) 的一个解，那么 y 满足式*2.14*的形式。

为了证明 *(i)*，我们首先发现任何满足式*2.14*形式的函数都定义在 (a,b) 上，并且 p 和 f 在 (a,b) 上是连续的。对式*2.13*求导，得：

$$y' = y_1'(x)(c + \int f(x)/y_1(x)dx) + f(x)$$

因为 $y_1' = -p(x)y_1$，所以

$$y' = -p(x)y_1(x)(c + \int f(x)/y_1(x)dx) + f(x) \tag{2.15}$$

$$= -p(x)y(x) + f(x) \tag{2.16}$$

因为 $u = (c + \int f(x)/y_1(x)dx), y = uy_1$。

证明 *(ii)*，我们假设 y 是微分方程得一个解，并且 $u = y/y_1$，则：

$$y' = -py + f \quad and \quad y_1' = -py_1$$

$$u' = \frac{y_1 y' - y_1' y}{y_1^2} \tag{2.17}$$

$$= \frac{y_1(-py + f) - (-py_1)y}{y_1^2} \tag{2.18}$$

$$= \frac{f}{y_1} \tag{2.19}$$

对 $u' = f/y_1$ 得到：

$$u = (c + \int f(x)/y_1(x)dx)$$

因为 $y = uy_1$，所以得证。

有初值的问题，现在我们很方便找到一个当 $x = x_0$ 时 u 的表达式，即：

$$y = y_1(x)(c + \int_{x_0}^{x} \frac{f(t)}{y_1(t)}dt)$$

因为

$$y(x_0) = y_1(x_0)(c + \int_{x_0}^{x_0} \frac{f(t)}{y_1(t)}dt) = cy_1(x_0)$$

我们可以得出当 $y(x_0) = y_0$ 当且仅当 $c = y_0/y_1(x_0)$。

2.3　可分离方程