

# 《人工智能引论》课后练习-2

内容：逻辑与搜索 提交时间：2023-03-16 姓名：\_\_\_\_\_ 学号：\_\_\_\_\_

## 1. 图着色问题 (25 分)

我们课堂上讲的地图着色问题，其实更普遍被成为图着色问题。

我们总共有  $K$  中颜色，现在需要给图的每一个节点分配一种颜色，如果任意两个相邻节点不是相同的颜色，则该图是可  $K$  着色的。图  $K$  着色问题是一个经典的 NP-Complete 问题，具有许多实际应用，例如编译器的寄存器分配，课程安排，课上讲的  $N$  皇后其实也是一种图  $K$  着色问题。在该问题中，你将开发用于图着色的合取范式 (conjunctive normal form, CNF)。

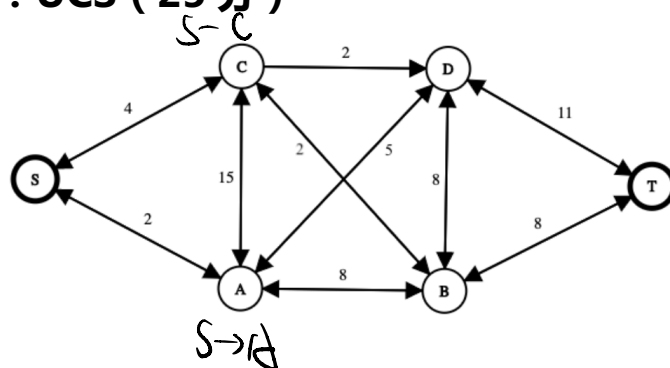
↓ ↓

假设该图  $G = \langle V, E \rangle$  有  $|V|$  个节点和  $|E|$  边，我们用变量  $color_{ik}$  表示第  $i$  节点是否是颜色  $k$ ，我们用变量  $neighbor_{ij}$  表示第  $i$  节点和第  $j$  节点是否有边相连。

- (a) (5 分) 请用命题逻辑表示约束每一个节点都着色了。
- (b) (5 分) 请用命题逻辑表示约束每一个节点最多只被一种颜色着色了。
- (c) (5 分) 请用命题逻辑表示约束任意相邻的两个节点的颜色不一样。
- (d) (10 分) 请将所有前面的约束合起来，并用 CNF 的形式表示。

$$\begin{aligned} (a) \quad F_a &= (color_{11} \vee \dots \vee color_{1K}) \wedge (color_{21} \vee \dots \vee color_{2K}) \dots (color_{|V|1} \vee \dots \vee color_{|V|K}) \\ (b) \quad F_b &= \neg [ (color_{11} \vee \dots \vee color_{1K-1}) \wedge (color_{11} \vee \dots \vee color_{1K-2} \vee color_{1K}) \wedge \\ &\quad (color_{12} \vee \dots \vee color_{1K}) ] \wedge \dots \wedge \neg [ (color_{|V|1} \vee \dots \vee color_{|V|K-1}) \wedge \\ &\quad (color_{|V|1} \vee \dots \vee color_{|V|K-2} \vee color_{|V|K}) \wedge (color_{|V|2} \vee \dots \vee color_{|V|K}) ] \\ (c) \quad F_c &= \neg [ neighbor_{12} \wedge [ (color_{11} \wedge color_{21}) \vee (color_{12} \wedge color_{22}) \dots \vee (color_{1K} \wedge color_{2K}) ] \\ &\quad \wedge \dots \wedge \neg [ neighbor_{|V|1} \wedge [ (color_{11} \wedge color_{|V|1}) \vee (color_{12} \wedge color_{|V|2}) \dots \vee (color_{1K} \wedge color_{|V|K}) ] \\ &\quad \wedge \dots \wedge \neg [ neighbor_{|V|1|V|H} \wedge [ (color_{|V|1} \wedge color_{|V|H}) \vee (color_{|V|1-1} \wedge color_{|V|H-1}) \dots \vee (color_{|V|1-k} \wedge color_{|V|H-k}) ] ] \\ (d) \quad F_d &= F_a \wedge F_b \wedge F_c \end{aligned}$$

## 2. 最短路径：UCS (25 分)



使用 UCS 算出 S 到 T 的最短路径及其代价。请给出离开优先队列节点的顺序。当两个节点可以同时离开优先队列的时候，顺序为 S、A、B、C、D、T。

$\{S\}$

leave

$S_{out} \Rightarrow \{A, C\}$   
2 4

$[S]$

$A_{out} \Rightarrow \{C, D, B\}$   
4 7 10

$[S, A]$

$C_{out} \Rightarrow \{B, D\}$   
6 6

$[S, A, C]$

$B_{out} \Rightarrow \{D, T\}$   
6 14

$[S, A, C, B]$

$D_{out} \Rightarrow \{T\}$   
14

$[S, A, C, B, D]$

$\Rightarrow T_{out}$  顺序  $[S, A, C, B, D, T]$

最短路径:  $S - C - B - T$  代价 14.

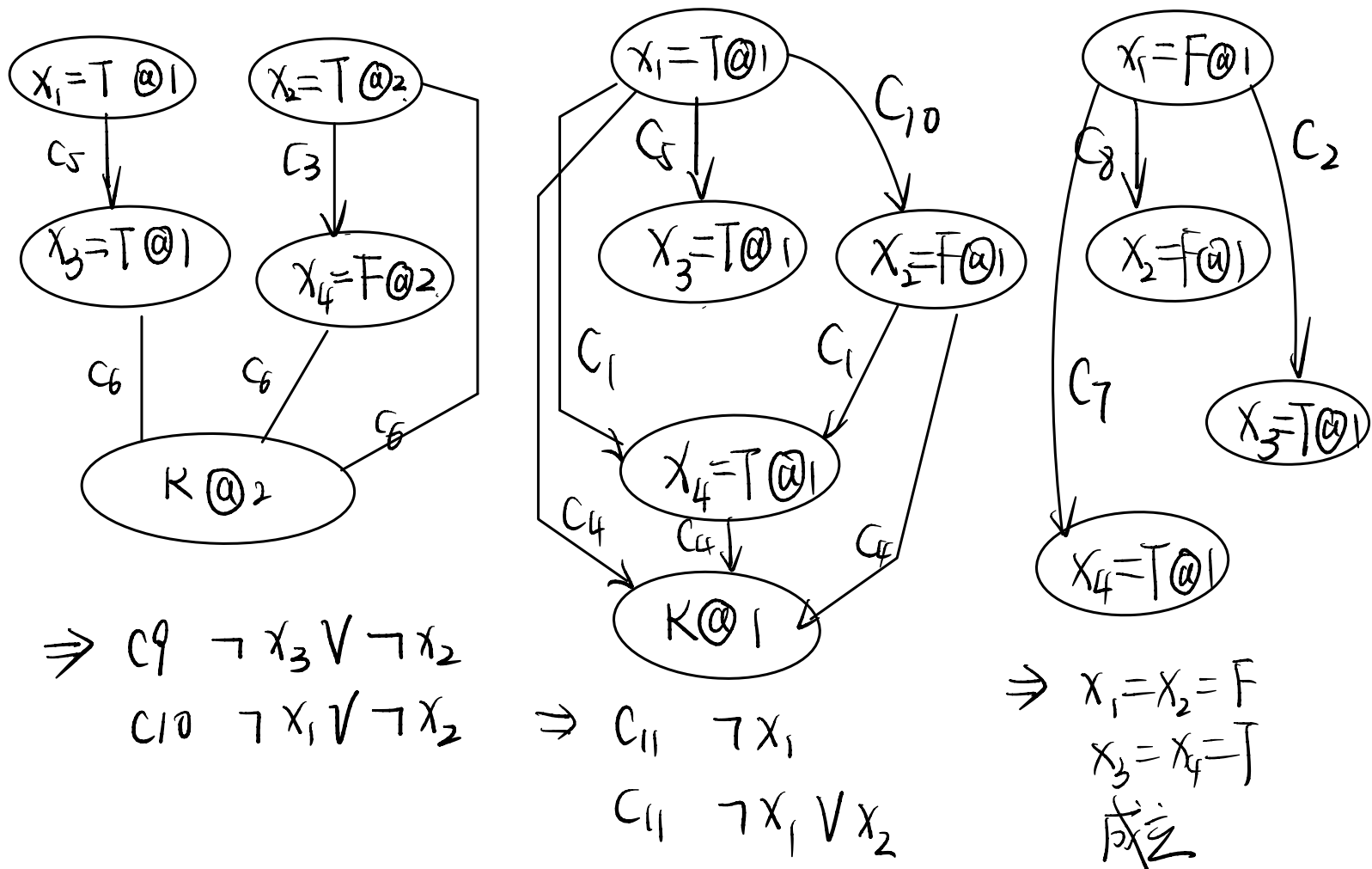
### 3. SAT 问题 : CDCL ( 50 分 )

考虑如下 CNF :

$c_1 : (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)$   
 $c_2 : (x_1 \vee x_3)$   
 $c_3 : (\neg x_4 \vee \neg x_2)$   
 $c_4 : (\neg x_4 \vee \neg x_1 \vee x_3)$   
 $c_5 : (x_3 \vee x_1)$   
 $c_6 : (\neg x_3 \vee \neg x_2 \vee x_4)$   
 $c_7 : (x_1 \vee x_4)$   
 $c_8 : (\neg x_2 \vee x_3)$

使用 CDCL 算法，并画出隐含图 ( implication graph )，当有矛盾 ( conflict ) 的时候，必须形成再回溯后就可以 BCP 的子句。学到的新子句以  $c_9, c_{10} \dots$  命名。新子句必须不能和已有的重复当有回溯的时候需要附上新的隐含图。并给出最后使 CNF 满足的变量赋值。

注意：深搜时必须以  $x_1, x_2 \dots$  的顺序考虑变量，每个变量的取值必须先 True 后 False。



### 3. SAT 问题 : CDCL ( 50 分 )

考虑如下 CNF :

$$\begin{aligned}c_1 : & (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4) \\c_2 : & (x_1 \vee x_3) \\c_3 : & (\neg x_4 \vee \neg x_2) \\c_4 : & (\neg x_4 \vee \neg x_1 \vee x_2) \\c_5 : & (x_3 \vee \neg x_1) \\c_6 : & (\neg x_3 \vee \neg x_2 \vee x_4) \\c_7 : & (x_1 \vee x_4) \\c_8 : & (\neg x_2 \vee x_1)\end{aligned}$$

使用 CDCL 算法 , 并画出隐含图 ( implication graph ) , 当有矛盾 ( conflict ) 的时候 , 必须形成再回溯后就可以 BCP 的子句。学到的新子句以  $c_9, c_{10} \dots$  命名。新子句必须不能和已有的重复当有回溯的时候需要附上新的隐含图。并给出最后使 CNF 满足的变量赋值。

注意 : 深搜时必须以  $x_1, x_2 \dots$  的顺序考虑变量 , 每个变量的取值必须先 True 后 False。