

Problema dos 3 corpos sob interacção gravítica num espaço tridimensional

Miguel Gonçalves (78850), Henrique Nogueira(78927)

Instituto Superior Técnico

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Mecânica Analítica

2º Semestre 2014/2015

Resumo

O problema dos 3 corpos baseia-se na procura de soluções exactas do movimento dos mesmos interagindo pela força gravítica. Dada a lei universal da força gravítica $\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \nabla r_{12}$ e com o auxílio de métodos iterativos computacionais procurámos encontrar e recriar soluções "estáveis" de forma a não só entender o processo teórico bem como permitir uma visualização agradável da dinâmica do movimento.

1 Breve descrição dos métodos numéricos e ferramentas utilizados

Para este trabalho computacional utilizou-se a linguagem de programação *Python*, recorrendo a uma biblioteca gráfica *2D Pygame*. De forma a fazer a transição para *3D* implementaram-se matrizes mudanças de base de rotação (as mesmas utilizadas a propósito dos ângulos de *Euler*), sendo possível assim criar um ambiente tal que o utilizador tivesse total liberdade na escolha da perspectiva de visualização das trajetórias. Foi possível com recurso a algumas ferramentas de programação obter animações de trajetórias dos 3 corpos, bem como a visualização de gráficos que iriam sendo realizados à medida que a animação avança.

Para resolver numericamente o problema implementou-se o método de *Runge-Kutta* de 4ª ordem ao sistema de 3 equações diferenciais - que para efeitos computacionais são 18 pois em cada uma delas estão implícitas 3 equações para as 3 dimensões espaciais; e como são equações de 2ª ordem subdivide-se cada uma em 2 equações de 1ª ordem de forma a se poder aplicar o *RK4*. Como ferramenta complementar utilizámos o *software Mathematica* para a resolução de equações não solúveis analiticamente e cálculos auxiliares.

2 Trajetórias estudadas

2.1 Trajetórias com simetria triangular

Uma outra situação de simetria geométrica interessante para o caso em estudo é a situação:

$$\begin{cases} d_{12} = d_{23} = d_{13} \\ m_1 = m_2 = m_3 = M \\ |\vec{v}_{01}| = |\vec{v}_{02}| = |\vec{v}_{03}| = v_0 \end{cases} \quad (1)$$

Estas condições representam a aplicação de condições espaciais iniciais tais que os três corpos formem um triângulo equilátero.

Dada esta simetria inicial directamente se chega á conclusão de que pelo menos duas condições se vão continuar a satisfazer para o resto do movimento.

$$\begin{cases} d_{12} = d_{23} = d_{13} \\ |\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = |\vec{v}_3| = v(t) \end{cases} \quad (2)$$

No entanto, a questão que se coloca é acerca da trajetória, isto é, será que a trajetória obtida corresponde a uma solução estável do problema dos 3 corpos?

A primeira observação a ser feita é que a força gravítica aplicada a cada corpo, como soma vectorial de duas forças gravíticas, é sempre radial, considerando o centro do triângulo formado, com sentido para o centro.

2.1.1 Órbita circular do triângulo equilátero

Visto que podemos controlar a intensidade da força fazendo o triângulo maior ou menor, e escolhendo a velocidade ideal tangencial a uma potencial órbita circular, torna-se claro que é possível encontrar uma solução estável para órbitas circulares onde a distância entre corpos se mantém sempre constante ao longo do movimento.

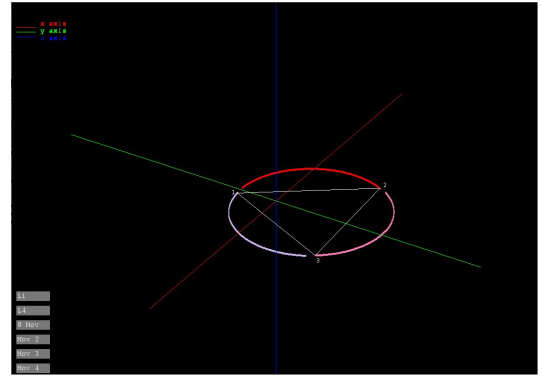


Figura 1: Movimento circular com simetria triangular

Um corpo em movimento circular tem uma aceleração centrípeta dada por $a = \frac{v^2}{R}$, sendo R o raio da circunferência imaginária. Assim, resolvendo com a expressão da força gravítica temos que:

$$\begin{aligned} a = \frac{v^2}{R} &\Rightarrow \vec{F} = -m_2 \frac{v^2}{R} \vec{e}_R \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -m_2 \frac{v^2}{R} \vec{e}_R \\ &\Rightarrow -G \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \nabla r_{12} + \frac{m_3 m_2}{r_{32}^2} \nabla r_{32} \right) = -m_2 \frac{v^2}{R} \vec{e}_R \\ &\Rightarrow -G \left(\frac{m \times m}{r^2} + \frac{m \times m}{r^2} \right) \cos(30^\circ) \vec{e}_R = -m \frac{v^2}{R} \vec{e}_R \\ &\Rightarrow 2GR \left(\frac{m}{r^2} \right) \cos(30^\circ) = v^2 \\ v(r) &= \sqrt{2GR \left(\frac{m}{r^2} \right) \cos(30^\circ)} \end{aligned} \quad (3)$$

Se os três corpos, para além das condições apresentadas, tiverem todos velocidade inicial no eixo dos zz , cria-se o efeito helicoidal presente na figura 2.

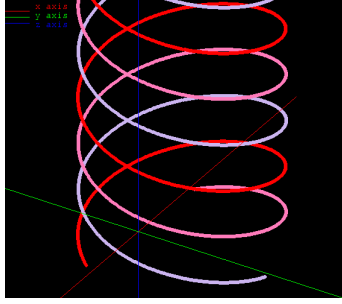


Figura 2: Movimento helicoidal

2.1.2 Órbitas não circulares de geometria triangular

Tendo em conta as condições descritas em 1, e tendo presente a ideia de que a aceleração tem sentido e direção para o centro do triângulo formado temos, considerando o corpo 2:

$$\begin{aligned} -G \left(\frac{m_1 \times m_2}{r_{12}^2} \nabla r_{12} + \frac{m_3 \times m_2}{r_{32}^2} \nabla r_{32} \right) &= \vec{F}_2 \Rightarrow \\ -G \left(\frac{m_1 \times m_2}{r_{12}^2} + \frac{m_3 \times m_2}{r_{32}^2} \right) \cos(30^\circ) \vec{e}_R &= \vec{F}_2 \Rightarrow \\ -2G \frac{m^2}{r^2} \cos(30^\circ) \vec{e}_R &= \vec{F}_2 \Rightarrow \\ \vec{F}_2 &= -G \frac{2m \cos(30^\circ) \times m}{r^2} \vec{e}_R \end{aligned} \quad (4)$$

Considerando o centro de massa dos 2 planetas complementares, sendo d_{2C} a distância do corpo 2 ao mesmo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{r} &= \cos(30^\circ) \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2(30^\circ)}{d^2} \Rightarrow \\ \vec{F}_2 &= -G \frac{2m \times m}{d^2} \cos^3(30^\circ) \vec{e}_R \end{aligned} \quad (5)$$

Ou seja, a menos da constante $\cos^3(30^\circ)$ é como se o planeta estivesse a orbitar o centro de massa dos outros dois complementares.

Pela primeira lei de Newton, a força aplicada sobre o corpo 2 é igual á força aplicada sobre este centro de massa, pelo que podemos inferir que **o problema dos 3 corpos é reduzido a uma interacção mútua entre 2 corpos**: um de massa m que orbita outro de massa $2m\cos^3(30^\circ)$.

Temos portanto uma órbita estável, embora seja claro que se trata de uma estabilidade muito frágil dado que qualquer ligeira assimetria irá provocar o colapso das equações derivadas nesta secção.

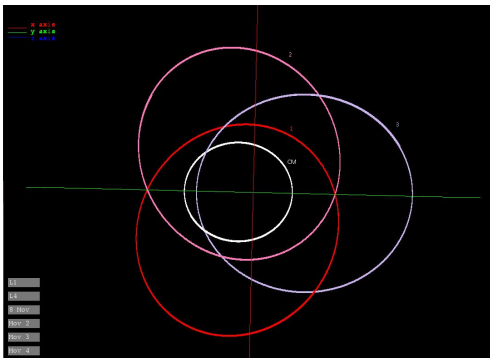


Figura 3: Movimento com simetria triangular não circular

2.2 Trajetórias em forma de 8

Este tipo de trajetórias foi recentemente descoberta empiricamente em 1993 por *Cristopher Moore*, já tendo previamente sido sugerida por outros estudos teóricos.

Para que sejam possíveis, os três corpos têm de possuir igual massa. A configuração inicial dos 3 corpos encontra-se demonstrada na figura 4. Existe alguma dificuldade em impor condições iniciais de forma a obter uma órbita deste tipo, mas uma vez conseguidas, é possível obter órbitas relativamente estáveis. A simulação efetuada encontra-se na figura 5.

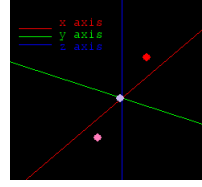


Figura 4: Configuração inicial

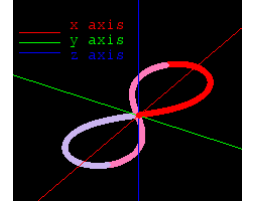


Figura 5: Trajetória

2.3 Pontos de Lagrange

Os pontos de *Lagrange* são localizações muito específicas no espaço em que um corpo de massa desprezável em relação a outros dois consegue manter uma posição relativa estável face a estes dois corpos. No total existem 5 pontos de *Lagrange*, sendo que para este trabalho computacional se simularam 2 pontos representativos, um deles entre o corpo mais massivo e o menos massivo (designado vulgarmente por **L1**), e outro numa órbita coincidente com a do corpo menos massivo em torno do mais massivo (**L4**).

O facto de o corpo que se encontra num dado ponto de *Lagrange* ter massa desprezável em relação aos outros é crucial, uma vez que só assim se pode desprezar a sua influência nas órbitas destes dois corpos.

2.3.1 Ponto L1

Constatações teóricas

Para se encontrar o primeiro ponto de *Lagrange*, é necessário constatar primeiramente que o período orbital de um corpo nesse ponto (corpo 3) será igual ao do corpo menos massivo (corpo 2) em torno do mais massivo (corpo 1). Assume-se também que os corpos descrevem órbitas circulares em torno do centro de massa do conjunto. O balanço das forças gravíticas a atuar no corpo 3 tem de ser tal que o seu período orbital seja o mesmo que o do corpo 2. Assim, considerando d a distância entre 2 e 1, respetivamente corpos de massa m e M ; e r a posição de **L1** relativamente ao corpo 1, vem que:

$$m' \left(G \frac{M}{r^2} - G \frac{m}{(d-r)^2} \right) = m' \omega^2 r \quad (6)$$

Sabendo que numa órbita circular o período orbital de 2 em torno de 1 é dado por $T^2 = \frac{4\pi d^3}{G(m+M)}$, é possível através de alguma manipulação algébrica chegar à equação 7.

$$(1 - \alpha)^2 - \beta \alpha^2 - \alpha^2 (1 - \alpha)^2 ((1 + \beta) \alpha - \beta) = 0 \quad (7)$$

Na equação 7, $\alpha = \frac{r}{d}$ e $\beta = \frac{m}{M}$.

Concretização numérica e simulação

Utilizando um sistema de 3 corpos tal que $\beta = 10^{-3}$, resolveu-se a equação 7 numericamente através do *software Mathematica* para α , tendo-se chegado a um valor de $\alpha = 0.932309$. Sabendo assim a posição do ponto **L1**, foi possível efetuar uma simulação que se encontra presente na figura 6.

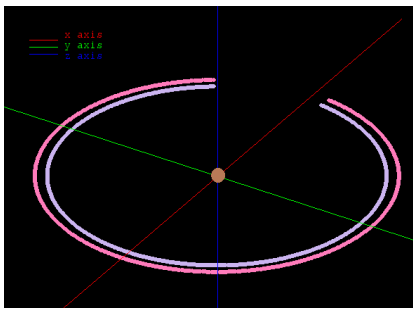


Figura 6: Simulação

Na figura 6, o corpo 3 está representado a cinzento, o corpo 2 a cor-de-rosa e o corpo 1 a castanho. Repare-se que mesmo estando o corpo 3 numa posição mais próxima do corpo 1 que o corpo 2, ambos possuem sempre a mesma posição relativa, e portanto o mesmo período orbital.

2.3.2 Ponto L4

Constatações teóricas

Nesta secção, manter-se-à a notação de corpos 1, 2 e 3. Ao contrário do ponto **L1**, este ponto de *Lagrange* encontra-se à mesma distância do corpo 1 que o corpo 2. A sua particularidade é que possui a mesma posição relativa em relação aos outros dois corpos, não orbitando em torno de nenhum deles. Ora para se conseguir esta situação é preciso ter em atenção algumas considerações geométricas.

Primeiramente, pode-se provar que o ponto **L4** dista do corpo 1 o mesmo que dista do 2, ou seja, os três corpos formam um triângulo equilátero como se pode observar na figura 7. Assim, é possível obter facilmente a direção da velocidade inicial do corpo 3 como indicada na figura, de forma a que se obtenha uma trajetória circular estável.

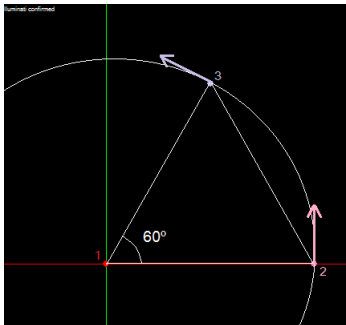


Figura 7: Configuração inicial

Efetuada uma simulação tendo por base a configuração inicial apresentada, obtiveram-se as trajetórias da figura 8.

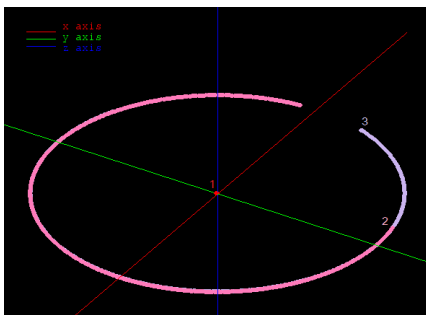


Figura 8: Simulação

De forma a estudar com mais rigor o ponto encontrado para candidato a ponto de *Lagrange*, efetuou-se um gráfico das distâncias do corpo 3 ao corpo 2 e ao corpo 1, que se esperariam manter

constantes o longo do tempo. No entanto, o gráfico da figura 9 mostra uma situação curiosa em que as distâncias oscilam em torno de uma posição de equilíbrio e se encontram perfeitamente em fase. Conclui-se assim que o ponto encontrado, apesar de não corresponder com o máximo rigor ao ponto **L4**, encontra-se perto deste uma vez que existe estabilidade em torno de uma distância de equilíbrio.

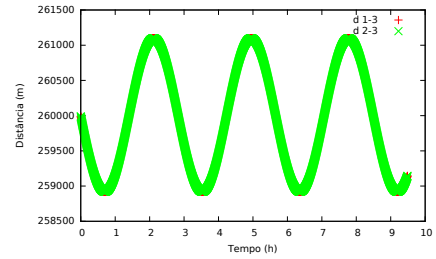


Figura 9: Distância dos corpos 1 e 2 ao corpo 3

Para confirmar a viabilidade do método utilizado para encontrar **L4**, efetuou-se uma perturbação na posição inicial do corpo 3 na direção xx de 0.004%. Notou-se então que as oscilações não eram já em torno de uma posição de equilíbrio, uma vez que esta posição variava como se pode verificar na figura 10. Assim se verifica o quão fundamental é a configuração de triângulo equilátero para este ponto de *Lagrange*, sendo que uma pequena perturbação nessa geometria resulta em variações tendenciosas da posição de equilíbrio, o que pode alterar completamente a trajetória do corpo 3 ao fim de algum tempo.

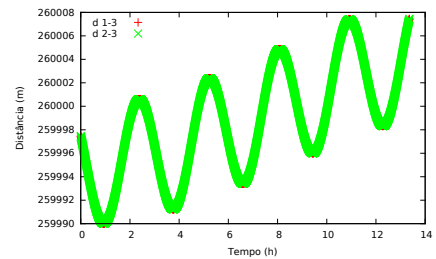


Figura 10: Distância dos corpos 1 e 2 ao corpo 3 - perturbação na geometria do triângulo equilátero

3 Quantidades conservadas

O sistema de 3 corpos é invariante a translações e a rotações, logo pelo teorema de *Noether*, há conservação de momentos linear e angular. Para além disso, o sistema é fechado e logo existe conservação de energia total.

Escolheram-se então duas das situações estudadas anteriormente para se efetuarem gráficos do momento angular e da energia ao longo do tempo.

Efetua-se assim um gráfico do momento angular associado aos corpos nas trajetórias relativas às órbitas da secção 2.1.2 que se encontra na figura 11 (repare-se que os momentos angulares dos 3 corpos são iguais e logo encontra-se sobrepostos).

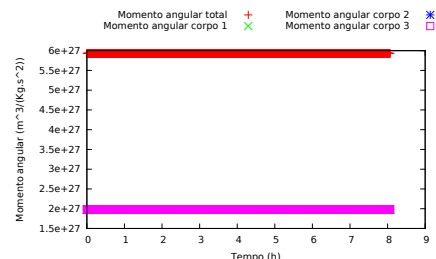


Figura 11: Momento angular total e dos corpos 1, 2 e 3 - situação do ponto órbitas não circulares de geometria triangular

Para verificar a conservação de energia total, utilizou-se como exemplo representativo as trajetórias em forma de 8 estudadas anteriormente, estando as energias cinética, potencial e mecânica totais do sistema representadas no gráfico da figura 12.

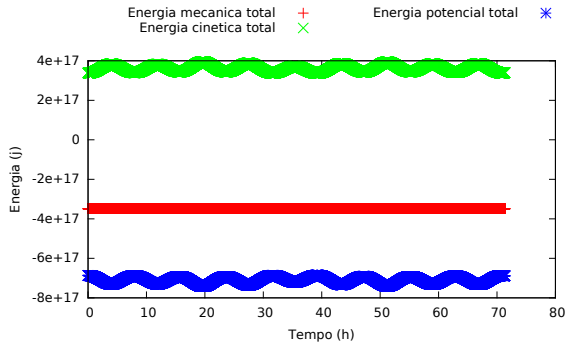


Figura 12: Energias cinética, potencial e mecânica totais - Trajetórias em forma de 8

4 Comparação com a aproximação *Restricted Three Body Problem*

Como última análise, implementou-se um sistema de 3 corpos com menos graus de liberdade, descrito de acordo com as aproximações características do *Restricted Three Body Problem*. Esta restrição ao problema dos 3 corpos restringe o seu movimento a um movimento planar. Para além disso, é admitido que existem dois corpos de massa muito superior a um terceiro e que se encontram em órbita circular em torno do centro de massa. Desta forma, é desprezado o efeito do corpo de menor massa nos corpos mais massivos.

Implementando assim todas estas restrições e não utilizando nas equações diferenciais os termos que correspondem à força de atração do corpo menos massivo sobre os mais massivos, efetuaram-se simulações de forma a obter comparações entre o modelo "teórico" (restrito) e o "real".

Implementando assim um sistema de três corpos tal que dois deles tivessem massas iguais e um terceiro tivesse uma massa de 0.5% das suas, verificou-se que o modelo teórico se aproxima do real (figuras 13 e 14). Os corpos 1 e 2 são os de maior massa e o 3 o de massa desprezável.

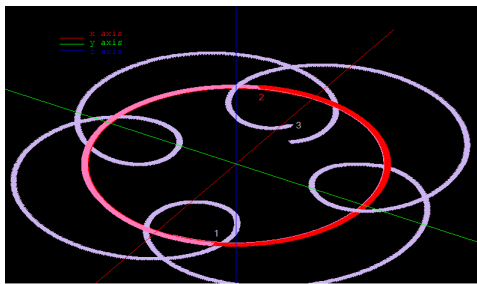


Figura 13: Trajetória correspondente ao modelo 'teórico' - corpo 3 com 0.5% da massa dos corpos 1 e 2

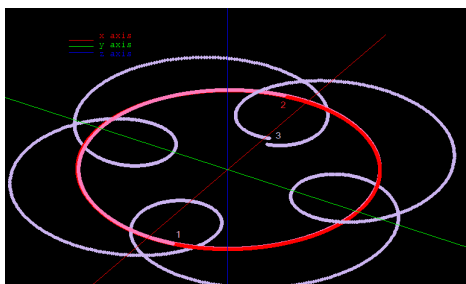


Figura 14: Trajetória correspondente ao modelo 'real' - corpo 3 com 0.5% da massa dos corpos 1 e 2

Por outro lado, se aumentarmos um pouco a massa do corpo 3, verifica-se que a aproximação deixa de ser válida pois já não se pode desprezar a força gravítica exercida por este corpo nos de maior massa (figuras 15 e 16).

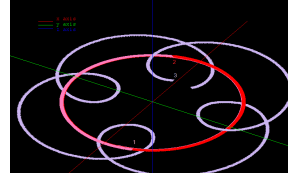


Figura 15: Trajetória correspondente ao modelo 'teórico' - corpo 3 com 0.5% da massa dos corpos 1 e 2

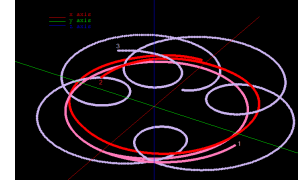


Figura 16: Trajetória correspondente ao modelo 'real' - corpo 3 com 3% da massa dos corpos 1 e 2

Para terminar, é interessante constatar que na aproximação teórica a energia não é conservada pois é como se o corpo 3 estivesse de facto a ser atuado por forças externas (dos corpos 1 e 2), não sendo assim o somatório das forças externas a atuar no sistema nulo. Esta curiosidade encontra-se representada na figura 17 em contraste com a energia mecânica total do modelo "real" (figura 18), para a situação em que a massa do corpo 3 é 0.5% da dos corpos 1 e 2. Repare-se que a diferença entre os gráficos não é mais nítida devido à reduzida massa do corpo 3 para estas simulações.

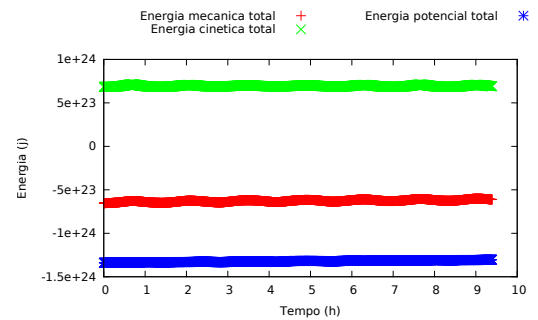


Figura 17: Não conservação de energia no modelo 'teórico'

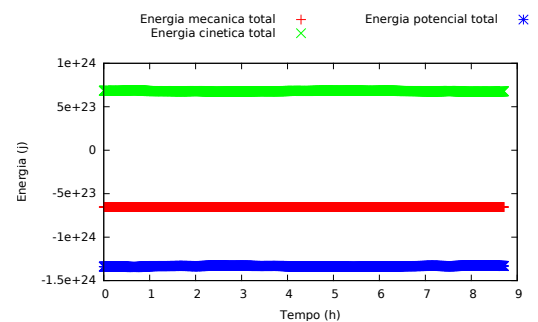


Figura 18: Conservação de energia no modelo 'real'

Referências

- [1] Dr David Tong, *Lectures on Classical Dynamics*
- [2] H. Goldstein, C. Poole and J. Saffko, *Classical Mechanics*
- [3] F. J. Muñoz-Almaraz, J. Galán, E. Freire, *Families of symmetric periodic orbits in the three body problem and the figure eight*