Solución del examen de segunda oportunidad (22/6/2023)

Ejercicio 1

a) En $\mathbb{R}^2 - (1{,}1)$ es continua por ser suma, producto y cociente en el que el denominador no se anula de funciones continuas (x e y son continuas en $\mathbb{R}^2 - (1{,}1)$). Sólo tenemos problema para, basándonos en esto, afirmar que es continua en el punto $(1{,}1)$ (único donde el denominador se anula), tratándose de un punto singular. Nos acercamos con la función al punto

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)^3-(y-1)^3}{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

Substituyendo tenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Usando el criterio de coordenadas polares (con seguridad nos permitirá decidir) y considerando la propiedad trigonométrica respectiva:

$$\lim_{(s+1,t+1)\to(1,1)} \frac{(s+1-1)^3-(t+1-1)^3}{(s+1-1)^2+(t+1-1)^2} = \lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{s^3-t^3}{s^2+t^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta - r^3\sin^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r(\cos^3\theta - \sin^3\theta)$$

Que es 0 por ser función acotada por función convergente a 0. Dado que, observando la función, es igual a $f(1{,}1)$ la función es continua en $(1{,}1)$.

b) A través de la continuidad, al ser la función continua en el punto, no podemos indicar si es diferenciable en el punto. Nos quedan el ver si la derivada direccional para cierta dirección no coincide con el gradiente de la función en el punto por el vector (podremos decir que no lo es), ver si no existe alguna derivada direccional (podremos decir que no lo es), ver si existen las funciones derivadas parciales en el entorno del punto y son continuas en él, o utilizar la definición viendo en caso de que existan las derivadas parciales si el límite existe y su valor es cero. Utilizamos este último procedimiento. Por ejemplo utilizamos la siguiente expresión:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f\big((1{,}1)+(h_1,h_2)\big) - f(1{,}1) - \nabla f(1{,}1)\cdot(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

Comenzamos calculando las derivadas parciales (son derivadas direccionales) en el punto. Dado que se trata de un punto singular ha de hacerse a través de la definición.

$$D_1 f(0{,}0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1{,}1) = \lim_{h\to 0} \frac{f\big((1{,}1)+h(1{,}0)\big) - f(1{,}1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,1) - f(1{,}1)}{h}$$

Yendo a las expresiones apropiadas, observando cómo está definida la función, se tiene

$$D_1 f(0{,}0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

La otra derivada parcial será

$$D_2f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f\big((1,1)+h(0,1)\big)-f(1,1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(1,1+h)-f(1,1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h^3}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} -1 = -1$$

Así $\nabla f(1,1) = (1,-1)$. Por tanto calculamos

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(1+h_1,1+h_2)-0-(1,-1)\cdot(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\frac{h_1^3-h_2^3}{h_1^2+h_2^2}-h_1+h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1^3-h_2^3+(-h_1+h_2)(h_1^2+h_2^2)}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1^3-h_2^3-h_1^3-h_1h_2^2+h_1^2h_2+h_2^3}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Utilizando el criterio de coordenadas polares (tras simplificar) se tiene que este límite es igual a

$$\lim_{r\to 0}\frac{-r\cos\theta\, r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta\, r\sin\theta}{(r^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{r\to 0}\cos^2\theta\sin\theta - \cos\theta\sin^2\theta =$$

$$= \cos^2\theta\sin\theta - \cos\theta\sin^2\theta$$

Al depender de θ no existirá el límite. Por tanto la función no es diferenciable en $(1,1)$.

Ejercicio 2

a) Nótese que es equivalente que nos diesen $g(x,y) = \ln(xy),\ xy > 0$. Buscamos primero la dirección de máxima pendiente (la variación de la función, esto es, la derivada direccional es máxima). Sabemos que si la función es diferenciable y el gradiente de la función en el punto no es el vector nulo dicha dirección será la de este vector gradiente (además de que su módulo será el valor de dicha derivada direccional). La función es diferenciable en $(1,1)$ por ser composición y producto de funciones diferenciables en dicho punto (además, apoyándose en esta propiedad, lo será en $(0,\infty)$ lo que también se puede deducir observando que existen las derivadas parciales en dicho abierto, es decir, tienen un valor siendo distinto de ∞ en él). Utilizando las reglas de derivación, las derivadas de las funciones elementales y considerando constantes las variables con respecto a las que no se deriva (podemos al buscar las derivadas parciales en un punto no singular) se tiene

$$D_1g(x,y) = \frac{1}{xy}y = \frac{1}{x} \qquad D_2g(x,y) = \frac{1}{xy}x = \frac{1}{y}$$

Por tanto, el gradiente de la función en el punto será

$$\nabla g(1,1) = \big(D_1g(1,1), D_2g(1,1)\big) = (1,1)$$

A continuación buscamos la dirección de mínima pendiente que será la de pendiente nula. Dado que la función es diferenciable sabemos que la derivada direccional en el punto será igual al gradiente en el punto por el vector en la dirección. Provocamos por tanto el que la derivada direccional sea nula

$$\nabla g(1{,}1) \cdot (v_1, v_2) = 0$$

Deseamos conocer (v_1, v_2). Vemos que su dirección será perpendicular a la de máxima pendiente al tener que el producto escalar de ambos vectores es nulo. Y que, obviamente, habrá dos orientaciones. Tenemos que

$$v_1 + v_2 = 0$$

Por tanto los vectores $(v_1, -v_1)$ y $(v_2, -v_2)$, para cualquier valor que tomemos, tendrán la dirección de pendiente mínima. Pero debemos dar un vector unitario. Consideramos la definición de vector unitario (vector de módulo 1)

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$$

Resolvemos el sistema formado por las dos últimas ecuaciones (aquí se hace por substitución). Introduciendo la primera en la segunda vemos que $v_1^2 + (-v_1)^2 = 1 \rightarrow 2v_1^2 = 1 \rightarrow v_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Yendo a la primera ecuación tenemos que $v_2 = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Los vectores $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ tendrán pendiente mínima y serán unitarios. Elegimos cualquiera de ellos.

b) Sabemos que la expresión del polinomio de Taylor de orden 2 (necesario que $f \in C^3$ en el entorno en que se utilice el polinomio) será

$$P(x, y) = g(1{,}1) + \nabla g(1{,}1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}(x-1 \quad y-1)H_g(1{,}1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

Se ha utilizado notación matricial. El gradiente ya lo tenemos. Calculamos la matriz Hessiana.

$$D_{11}g(x, y) = D_1\big(D_1 g(x, y)\big) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{1}{x^2}$$

$D_{12}g(x, y) = D_2\big(D_1 g(x, y)\big) = 0$ (si se desea, considérese que $D_1 g(x, y)$ es una constante)

$$D_{22}g(x, y) = -\frac{1}{y^2}$$

Al existir para cada punto del dominio en un entorno de él y ser continuas en él las funciones derivadas parciales y la función derivada parcial cruzada mostrada (de segundo orden), en el dominio la otra derivada cruzada coincidirá con dicha derivada cruzada (esto ya se deduce si se comprueba que $g \in C^2$ en el dominio). Así

$$D_{21}g(x, y) = 0$$

Podría haberse calculado por el procedimiento habitual. Por tanto

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} D_{11}g(x,y) & D_{12}g(x,y) \\ D_{21}g(x,y) & D_{22}g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$H_g(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Y $g(1,1) = \ln(1) = 0$. Así

$$P(x,y) = 0 + (1,1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1 \quad y-1)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

Con respecto al último sumando, multiplicando primero, por ejemplo, las dos últimas matrices

$$P(x,y) = x - 1 + \mathrm{y} - 1 + \frac{1}{2}(x-1 \quad y-1)\begin{pmatrix} -x+1 \\ -y+1 \end{pmatrix} =$$

$$= x + y - 2 + \frac{1}{2}(-(x-1)^2 - (y-1)^2) = x + y - 2 - \frac{1}{2}(x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2) =$$

$$= -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{y^2}{2} + 2y - 3$$

Obviamente, usando propiedades de los logaritmos, $g(x,y) = \ln(x) + \ln(y)$. Se puede comprobar que se obtiene el mismo resultado si se suman los polinomios de Taylor de segundo orden de $g_1(x,y) = \ln(x)$ y $g_2(x,y) = \ln(x)$.

Ejercicio 3

Se buscan extremos absolutos. La función a minimizar es el área frontal. Su minimización un tema de interés real. Tomamos por ejemplo x como la dimensión de la base e y como la altura. Por tanto la función a minimizar será $A_m(x,y) = xy$. El área de pantalla será $(x - 0.5 - 0.5)(y - 1 - 1)$ y sabemos que ha de ser 72. Por tanto tenemos como condición $(x-1)(y-2) = 72$. Observamos que se trata de una curva no cerrada, esto es, no se trata de un conjunto acotado. Por tanto, aun siendo la función continua (obviamente la función A_m), no podemos garantizar que se alcanzarán extremos absolutos. De entre los tipos vistos de problemas de extremos condicionados es del tipo que se indicó como tipo 1.3.

Recuérdese que para resolver el problema podría usarse el método de los multiplicadores de Lagrange con el que utiliza la función lagrangiana (o Lagrangiano). Aquí no seguiremos este procedimiento si no uno equivalente que es el que se vio (aquí no tendremos problema al usar éste). Buscaremos los extremos relativos de la función restringida a dicha curva. Serán extremos relativos de esta función. En caso de haber un único extremo relativo se tratará de un extremo absoluto condicionado a la curva. Substituyendo la condición en la función obtenemos la función restringida. Por ejemplo obtenemos una función restringida dependiente de y. Así, será

$$a(y) = \left(\frac{72}{y-2} + 1\right)y$$

Para calcular los extremos relativos primero obtenemos los puntos críticos con la condición necesaria. Para ello primero derivamos calculando la función derivada e igualamos ésta a 0.

$$a(y) = \left(\frac{72 + y - 2}{y-2}\right)y = \frac{y^2 + 70y}{y-2}$$

$$a'(y) = \frac{(2y + 70)(y-2) - (y^2 + 70y)}{(y-2)^2}$$

$$a'(y) = 0 \rightarrow (2y + 70)(y-2) - (y^2 + 70y) = 0 \text{ siempre que } y \neq 2$$

Resolvemos la ecuación calculando las raíces

$$2y^2 + 70y - 4y - 140 - y^2 - 70y = 0$$

$$y^2 - 4y - 140 = 0$$

$$y^2 - 4y - 4 \cdot 45 = 0 \rightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 + 4^2 \cdot 35}}{2} =$$

$$= 2\left(1 \pm \sqrt{1 + 35}\right) = 2(1 \pm 6)$$

Tenemos como raíces 14 y -10. Vemos que el denominador no se anula para estos valores (ninguna raíz es 2) por lo que no tenemos que hacer nada más, esto es, estos son los valores que anulan la función derivada. Ahora acabamos de obtener los puntos críticos. El negativo no puede ser solución al tratarse este problema de un problema de aplicación y por tanto no lo consideramos.

Posiblemente no estemos en el caso en que haya un único extremo relativo. Sin embargo nótese que si 14 es extremo relativo se tratará del extremo absoluto a considerar. Por ejemplo, si 14 es mínimo relativo (-10 será máximo relativo) solo podrá haber valores negativos de y con valores de la función menores. Debemos comprobar que es un mínimo absoluto dando con seguridad la solución al ejercicio (para ello vemos que es un mínimo relativo). Para ver si es un mínimo relativo utilizamos la condición suficiente (recordemos que podríamos utilizar otra) que se basa en el análisis de si la primera derivada que no se anula en el punto crítico es par para decidir si es extremo relativo así como en el signo de esta derivada para decidir el tipo de extremo relativo. La que se obtiene a partir del desarrollo de Taylor.

Para calcular $a''(y)$ tomamos la expresión correspondiente, en nuestro la primera donde calculamos $a'(y)$, que simplificada es

$$a'(y) = \frac{y^2 - 4y - 140}{(y-2)^2}$$

Por tanto

$$a''(y) = \frac{(2y-4)(y-2)^2 - (y^2-4y-140)\cdot 2\cdot (y-2)}{(y-2)^4} =$$

$$= \frac{2y^2-4y-4y+8-2y^2+8y+280}{(y-2)^3} = \frac{288}{(y-2)^3}$$

Así $a''(14) \neq 0$ por lo que es un extremo relativo. Además $a''(14) = 0.166 > 0$ por lo que es un mínimo relativo.

Por tanto la x será $\frac{72}{y-2} + 1 = 7$ y por tanto el área frontal pedida será $14 \cdot 7 = 98$ cm^2.

Se tiene además que las medidas totales son realistas para un móvil. Se tiene que una dimensión es 14 cm y que la otra es 7 cm.

Ejercicio 4

a) Analizando el problema vemos que, teniendo en cuenta la cota máxima, la cota de llenado es realista. Además, el calado máximo (la cota mínima será $z = 0$) también tiene sentido. Observamos que para $z = 2$ tenemos puntos que verifican $x^2 + y^2 \leq 8$, los de un círculo de radio $\sqrt{8}$ (la planta de la piscina está definida por los puntos que verifican $x^2 + y^2 \leq 9.2$).

Podemos considerar como región el volumen, resolviendo una integral triple. Una posibilidad para este procedimiento es proyectar sobre el plano XY y considerar que $x \in \left[-\sqrt{8}, \sqrt{8}\right]$; así $y \in \left[-\sqrt{8-x^2}, \sqrt{8+x^2}\right]$ y con la x y la y fijadas se tiene que $z \in [0.25(x^2+y^2), 2]$ y se comenzará integrando respecto a esta variable para seguir integrando con respecto a y (de acuerdo al orden en que se fijaron las variables). Una opción interesante, considerando la forma de la región, sería utilizar coordenadas cilíndricas. Seguiríamos el esquema indicado teniéndose que $r \in \left[0, \sqrt{8}\right]$, $\theta \in [0,2\pi)$ y con r y la θ fijadas obtendríamos yendo al paraboloide que $z = 0.25r^2$ de manera que $z \in [0.25r^2, 2]$ siendo posible integrar respecto a θ o a r tras integrar respecto a z. Recuérdese que a la hora de integrar el que el intervalo esté definido sin corchete es irrelevante. También el que solo sirve el apoyarse en usar la proyección si se proyecta perpendicularmente al eje z considerado.

Podríamos resolver mediante una integral doble como se hará aquí. Proyectamos sobre un plano. Por ejemplo sobre el plano XY. Será la integral en él de la función que está arriba ($z = 2$) menos la que está abajo. Una opción, que no se considerará, es utilizar coordenadas polares (con éstas sale más fácil). Así, por ejemplo tenemos que $x \in \left[-\sqrt{8}, \sqrt{8}\right]$ e $y \in \left[-\sqrt{8-x^2}, \sqrt{8+x^2}\right]$. Por tanto se debe calcular

$$\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\int_{-\sqrt{8-x^2}}^{\sqrt{8+x^2}} 2 - \frac{(x^2+y^2)}{4}\, dy \right) dx$$

La función a integrar se denotará por $l(x,y)$ considerando que a ella nos referiremos de nuevo después. Así, $l(x,y) = 2 - \frac{(x^2+y^2)}{4}$. Resolvemos la integral.

$$\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(2-\frac{x^2}{4}\right)y - \frac{y^3}{12}\Bigg]_{(y=)-\sqrt{8-x^2}}^{\sqrt{8-x^2}} dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(2-\frac{x^2}{4}\right)\sqrt{8-x^2} - \frac{(8-x^2)^{\frac{3}{2}}}{12} + \left(2-\frac{x^2}{4}\right)\sqrt{8-x^2} - \frac{(8-x^2)^{\frac{3}{2}}}{12} dx =$$

$$= 2\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(2-\frac{x^2}{4}\right)\sqrt{8-x^2} - \frac{(8-x^2)^{\frac{3}{2}}}{12} dx$$

$$= 2\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \sqrt{8-x^2}\left(2-\frac{x^2}{4}-\frac{8-x^2}{12}\right)dx = 2\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \sqrt{8-x^2}\left(\frac{16}{12}-\frac{2}{12}x^2\right)dx$$

Hemos llegado a aquí operando y considerando la propiedad de la linealidad de la integral. Ahora debemos usar el cambio de variable correspondiente. Sabemos que para integrales de este tipo debemos tomar $x = \frac{\sqrt{8}}{1}\sin t$ $(dx = \sqrt{8}\cos t\, dt)$ o bien $x = \frac{\sqrt{8}}{1}\cos t$ $(dx = \sqrt{8}\sin t\, dt)$. Tomando el primer cambio la integral queda (ya modificando los límites de integración que pasan de ser $x = -\sqrt{8}$ y $x = -\sqrt{8}$ a $t = arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ y $t = arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$; aquí, de cara al estilo usado, excepcionalmente se han usado paréntesis en las funciones trigonométricas)

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{8-8\sin^2 t}\left(\frac{4}{3}-\frac{8}{6}\sin^2 t\right)\sqrt{8}\cos t\, dt =$$

$$\frac{2\cdot 4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{8\cos^2 t}\,(1-\sin^2 t)\sqrt{8}\cos t\, dt = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{8}\cos t\cos^2 t\sqrt{8}\cos t\, dt =$$

$$= \frac{8}{3}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8(\cos^2 t)^2\, dt\right)$$

La hemos dejado así a propósito. Aplicando propiedades trigonométricas la integral queda

$$\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt = \frac{64}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos^2 2t + 2\cos 2t}{4} dt =$$

$$= \frac{64}{12}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} 1 + \frac{1+\cos 4t}{2} + 2\cos 2t\, dt = \frac{16}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2} + \frac{\cos 4t}{2} + 2\cos 2t\, dt =$$

$$= \frac{16}{3}\left(\frac{3t}{2} + \frac{\sin 4t}{8} + \sin 2t\right)\Bigg]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3}\frac{3\pi}{2} = 8\pi$$

El volumen será de 8π m^3. Se seguirá omitiendo, por simplificar, la resolución de las integrales inmediatas del segundo tipo.

b) Se pide el área de la región si se ha calculado con integral doble, como aquí, lo pedido en el apartado a). Así, se toma $l(x,y) = 1$. Obviamente, existe la opción de resolver sin utilizar integral doble.

Por tanto se resolverá la integral

$$\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\int_{-\sqrt{8-x^2}}^{\sqrt{8+x^2}} dy \right) dx$$

Se van a utilizar coordenadas polares pues deben de usarse según el enunciado (es necesario utilizar integral doble). Así, en este caso, se va a utilizar el método más eficiente (obviamente el resultado será el mismo por cualquier procedimiento). Por tanto se resolverá (da igual con respecto a qué variable integrar primero)

$$\int_{0}^{\sqrt{8}} \left(\int_{0}^{2\pi} r d\theta \right) dr$$

Se ha introducido el cambio de variable (recuérdese que el jacobiano de la transformación en valor absoluto es r). Y, de nuevo, se ha agrupado convenientemente la integral. El valor de la integral será

$$\int_{0}^{\sqrt{8}} \left(\int_{0}^{2\pi} r d\theta \right) dr = \int_{0}^{\sqrt{8}} r\theta]_{0}^{2\pi} \, dr = 2\pi \int_{0}^{\sqrt{8}} r \, dr = 2\pi \frac{r^2}{2}\Big]_{0}^{\sqrt{8}} = 8\pi$$

El área será de 8π m^2.

Ejercicio 5

a) Nótese que tal y como está planteado el problema existen dos regiones posibles, una en el primer cuadrante y otra entre el primer y cuarto cuadrantes.

Este es un ejemplo en el que para calcular la superficie va bien el usar coordenadas polares pero se indica que se empleen las cartesianas. Además en coordenadas cartesianas habrá dos zonas de integración si se integra de cierta manera. Bien si no se emplea integral doble y se integran funciones de x al ser necesario considerar funciones dos a dos integrando la diferencia entre la que está arriba y la que está abajo. Se aplicaría la propiedad de la aditividad de la integral considerando los puntos de intersección. Bien si se emplea integral doble fijando primero la variable x al ser necesario integrar en $D = D_1 \cup D_2$ para lo que, considerando los puntos de intersección, se elegirían D_1 y D_2 tales que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ de manera que se pudiese usar la propiedad de aditividad de la integral doble. Aquí no se va a utilizar la integral doble y además se van a considerar funciones de y para tener solo una zona. En este problema, usándose integral doble o no, la dificultad al integrar es equivalente si se consideran o no dos zonas.

Elegimos la primera posibilidad mencionada. Así, se observa que la región de la que se quiere calcular el área está en el primer cuadrante. La coordenada del punto de intersección entre $h(x)$ e $i(x)$ la calculamos igualando ambas funciones y resolviendo. Para ello elevamos al cuadrado esta ecuación y obtenemos

$$1 - x^2 = x^2 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Al elevar al cuadrado hemos introducido una raíz. Es fácil ver que $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ no es solución de la ecuación original. Así, el punto de intersección es $\frac{1}{\sqrt{2}}$..

Fijamos y entre 0 y $\frac{1}{\sqrt{2}}$.. En x estamos entre las funciones $h^*(y) = \sqrt{1-y^2}$ (rama positiva) en la parte superior e $i^*(y) = y$ en la parte inferior. Por tanto debemos calcular

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-y^2} - y\,dy$$

Aplicamos la propiedad de la linealidad de la integral de manera que calculamos

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-y^2}\,dy - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y\,dy$$

Resolvemos aplicando cualquiera de los dos cambios de variable validos conocidos en la segunda integral. Por ejemplo $y = \cos t$, por lo que $dy = -\sin t\,dt$, $y = 0 \rightarrow t = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow t = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$. Así

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin^2 t}\,(-\sin t)\,dt - \frac{y^2}{2}\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t\,dt - \frac{1}{4} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt - \frac{1}{4} =$$

$$= -\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4} = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}$$

La superficie será de $\frac{\pi}{8}$ m^2.

b) A modo de comprobación se observa que para $z = 0$ se tiene la superficie de la base calculada. También se observa que la colchoneta tiene un espesor de 0.3. El volumen se calculará como

$$\int_0^{0,3} A(z)\,dz = \int_0^{0,3} \frac{\pi}{8}(1 - ze^{-z})\,dz = \frac{\pi}{8}z\Big]_0^{0.3} - \frac{\pi}{8}\int_0^{0,3} ze^{-z}\,dz$$

La segunda integral que salió tras aplicarse la propiedad de la linealidad de la integral ha de resolverse utilizando el método de integración por partes, para lo que se la considerará una integral indefinida. Se debe llamar u al polinomio (recuérdese la regla nemotécnica LIATE)

$$u = z \rightarrow du = dz$$

$$dv = e^{-z}dz \rightarrow v = \int e^{-z}dz = -e^{-z}$$

La segunda integral original (ya se consideran los límites de integración) será

$$uv]_0^{0.3} - \int_0^{0.3} vdu = -ze^{-z}]_0^{0.3} - \int_0^{0.3} -e^{-z}dz = -ze^{-z}]_0^{0.3} - e^{-z}]_0^{0.3}$$

La integral a calcular queda

$$\frac{\pi}{8}z\Big]_0^{0.3} - \frac{\pi}{8}(-ze^{-z} - e^{-z})\Big]_0^{0.3} = \frac{\pi}{8}z\Big]_0^{0.3} + \frac{\pi}{8}(ze^{-z} + e^{-z})\Big]_0^{0.3} =$$

$$= \frac{\pi}{8}0.3 + \frac{\pi}{8}(0.3e^{-0.3} + e^{-0.3} - 1)$$

El volumen será de 0.1033 m^3.

Ejercicio 6

a) Para una función real de variable real (f) derivable, en cada intervalo cerrado ($[a, b]$) existe (al menos) un punto c perteneciente al intervalo abierto tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

b) Si una función real de variable real es continua en un intervalo cerrado entonces existe (al menos) un punto d perteneciente a dicho intervalo tal que la integral definida de la función entre el extremo izquierdo del intervalo y el derecho es igual al producto de la longitud del intervalo por la función evaluada en d.