Solución del examen de primera oportunidad (20/01/2023)

Ejercicio 1.

1.a. En $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ es continua por ser suma y cociente de funciones continuas (x, y y los escalares son funciones continuas) así como cociente de funciones continuas donde el denominador no se anula. Vemos para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ lo es en $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(6 - \frac{y^3}{3(x^2 + y^2)}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 6 - \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{3(x^2 + y^2)}$$

Para salir de la indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ utilizamos el criterio de coordenadas polares para el segundo límite, obteniéndose (con el de subconjuntos no lograremos resolver dará siempre 6):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 6 - \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{3(x^2 + y^2)} = 6 - \lim_{r\to 0} \frac{(r\sin(\theta))^3}{3r^2} = 6 - \lim_{r\to 0} \frac{r\sin^3(\theta)}{3} = 6$$

Se ha considerado que se tiene una función acotada ($\sin^3(\theta)$ lo es al serlo $\sin(\theta)$) por otra convergente a 0 (el límite cuando $r \to 0$ de $\frac{r}{3}$ es 0). Para que la función sea continua en dicho punto, el valor obtenido ha de coincidir con $f(0,0)$. Por tanto se tiene que la función es continua en él solo si $\alpha = 6$.

Por tanto la función será continua en $\mathbb{R}^2$ si $\alpha = 6$ (si no existiese el límite de la función entonces no habría ningún valor de α para el que lo fuese).

1.b. Si una función es diferenciable en un punto será continua en dicho punto. Por tanto si no es continua en un punto no será diferenciable en él (es una de la maneras para decidir si lo es; aquí la más sencilla). Para $\alpha = 1$ (considerando el apartado anterior) la función no es continua en $(0,0)$ y, al no ser diferenciable en él, no será diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Considerando lo indicado se podría decir que una función no continua (en $\mathbb{R}^2$) es no diferenciable.

1.c. Se ha de usar el vector (no unitario). Valen (también si nos pidiesen la derivada direccional en esa dirección para la que obtendríamos el vector unitario desde el dado) las tres alternativas que vimos siendo válida la de gradiente de la función en el punto por el vector por ser diferenciable la función en el punto). Se tiene:

$$D_{(2,2)}f(1,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f\big((1,1) + t(2,2)\big) - f(1,1)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{6 - \frac{(1+2t)^3}{3((1+2t)^2 + (1+2t)^2)} - \left(6 - \frac{1}{6}\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{(1+2t)}{6} + \frac{1}{6}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-2t}{6t} = \lim_{t\to 0} \frac{-1}{3} =$$

$$= -\frac{1}{3}$$

Obviamente para obtener $f(a,b)$ se va a la parte conveniente de la función en llave considerando cual es el punto (a,b).

Ejercicio 2.

2.a. Se trata de una función continua en $\mathbb{R}^2$ por ser suma y producto de funciones continuas así como cociente de funciones continuas donde el denominador no se anula. Se deben estudiar los extremos absolutos de la función en el conjunto $\{(x,y); x^2+y^2=6\}$ (es donde están los sensores), que es un conjunto compacto. Es una frontera (en particular una circunferencia), el caso 1.2 discutido en clase. Por tanto (función continua en un conjunto compacto) se alcanzarán dichos extremos.

Aquí se utilizará una de las maneras para resolver el problema, la que vimos en clase.

Despejando de $x^2+y^2=6$ se obtiene $y=\pm\sqrt{6-x^2}$. Se trata de dos funciones, la rama positiva y la negativa de la circunferencia. Será necesario restringir la función a ellas (también se podría restringir a sendas funciones de y obtenidas despejando la x). Considerando la rama positiva se obtiene la siguiente función restringida:

$$g_1(x)=T\left(x,\sqrt{6-x^2}\right)=19+\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{6-x^2}}{2}$$

Obtenemos los extremos relativos de esta función (recuérdese que $\sqrt{6-x^2}=(6-x^2)^{1/2}$). Aplicando la condición necesaria, con la función derivada igualada a 0, se obtienen los puntos críticos.

$$g_1'(x)=0\rightarrow\frac{1}{2}+\frac{x\frac{1}{2}(6-x^2)^{-1/2}(-2x)}{2}+\frac{(6-x^2)^{1/2}}{2}=0\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{1+\frac{-x^2}{\sqrt{6-x^2}}+\sqrt{6-x^2}}{2}=0\rightarrow\frac{\sqrt{6-x^2}-x^2+6-x^2}{2\sqrt{6-x^2}}=0\rightarrow\sqrt{6-x^2}=2x^2-6\rightarrow$$

$$\rightarrow 6-x^2=4x^4-24x^2+36\rightarrow 4x^4-23x^2+30=0\rightarrow 4t^2-23t+30=0\rightarrow$$

$$\rightarrow t=\frac{23\pm\sqrt{23^2-480}}{8}=\frac{23\pm 7}{8}\rightarrow t=\frac{15}{4}\ y\ t=2\rightarrow x=\frac{\pm\sqrt{15}}{2}\ y\ x=\pm\sqrt{2}$$

En el procedimiento se ha descartado que x pueda ser $\pm\sqrt{6}$. No es problema pues vamos a considerar estos valores posteriormente. Al elevar al cuadrado (apareciendo una ecuación bicuadrada) hemos pasado de un polinomio de grado 2 a uno de grado 4 introduciendo dos raíces. Se puede observar que $x=\pm\sqrt{2}$ no verifica $\sqrt{6-x^2}=2x^2-6$. Por tanto $x=\frac{\pm\sqrt{15}}{2}$ serán los puntos críticos (vemos que pertenecen a $\left[-\sqrt{6},\sqrt{6}\right]$ lo cual, obviamente, siempre ocurrirá entre los correspondientes valores para cualquier rama de una circunferencia). Aplicamos la condición suficiente. Con cualquiera de las que conocemos es más rápido ver únicamente si son extremos relativos. Elegimos, por mayor sencillez, la que se basa en el estudio del signo de la función derivada a ambos lados del punto crítico (han de tomarse valores pertenecientes a $\left[-\sqrt{6},\sqrt{6}\right]$). Recuérdese que para resolver el problema llegaría con considerar los puntos críticos indicados.

$$g_1'(1) = \frac{\sqrt{6-1^2} - 2\cdot 1^2 + 6}{2\sqrt{6-1^2}} = 0.623 > 0; g_1'(2) = -0.207 < 0$$

Por tanto $x = \frac{\sqrt{15}}{2}$ es un máximo relativo (de la función restringida y también condicionado a la rama positiva). Puede verse que $g_1'(-2) < 0\ y\ g_1'(-1) > 0$. Por tanto $x = -\frac{\sqrt{15}}{2}$ es un mínimo relativo. Han de considerarse además los puntos de intersección. Por tanto consideramos $x = \sqrt{6}\ \ y\ x = -\sqrt{6}$. Estos serán extremos relativos condicionados a la rama positiva.

Haciendo lo mismo con la rama negativa se obtiene:

$$g_2(x) = 19 + \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{6-x^2}}{2}$$

$$g_2'(x) = 0 \to \frac{1}{2} - \frac{x\frac{1}{2}(6-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{2} - \frac{(6-x^2)^{1/2}}{2} = 0 \to$$

$$\to \frac{\sqrt{6-x^2} + x^2 - 6 + x^2}{2\sqrt{6-x^2}} = 0 \to \sqrt{6-x^2} = -2x^2 + 6 \to 4x^4 - 23x^2 + 30 = 0$$

Se obtiene la misma ecuación que al buscar los puntos críticos de $g_1(x)$. En este caso $x = \pm\sqrt{2}$ serán los puntos críticos. De nuevo, suponiendo menor trabajo, llegaría con considerarlos. Aplicando la condición suficiente se ve que $g_2'(-2.2) = 2.20 > 0\ y\ g_2'(-1) = -0.39 < 0$ y que $g_2'(1) = -0.39 < 0\ y\ g_2'(2.2) = 2.20 > 0$ por lo que $x = -\sqrt{2}$ es un máximo relativo y $x = \sqrt{2}$ es un mínimo relativo. Los puntos con $x = \sqrt{6}\ \ y\ x = -\sqrt{6}$ a considerar ahora, ya han sido seleccionados por lo que en total se tienen 6 puntos, esto es, 6 valores de la función a comparar.

Los puntos (se obtienen yendo con el valor de la coordenada a la rama correspondiente) a comparar son:

$$\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \sqrt{6 - \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}\right) = \left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{3}{2}\right); \left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{3}{2}\right); (\sqrt{6}, 0); (-\sqrt{6}, 0); (\sqrt{2}, -2)\ y\ (-\sqrt{2}, -2)$$

Y los valores de la función son:

$$T\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{3}{2}\right) = g_1\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right) = 21.42; T\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{3}{2}\right) = 16.58; T(\sqrt{6}, 0) = 20.22$$

$$T(-\sqrt{6}, 0) = 17.78; T(\sqrt{2}, -2) = 18.29\ y\ T(-\sqrt{2}, -2) = 19.71$$

El máximo absoluto (máximo valor de los anteriores) será 21.42 y el mínimo absoluto será 16.58 (serán valores en grados centígrados). Por tanto, el sistema de calefacción no estará en funcionamiento. No hay duda.

Suponiendo un mayor trabajo, podrían haberse obtenido y usado los extremos relativos del conjunto (nótese que para esto es necesario haber indicado, como se hizo, el tipo de extremo relativo). Puede observarse que $x = -\sqrt{6}$ es un máximo relativo en la rama positiva y un mínimo relativo en la negativa. Por tanto no es un extremo relativo condicionado al conjunto. Tampoco lo será $x = \sqrt{6}$ pues es un mínimo relativo en la rama positiva y un máximo relativo en la negativa. Habría llegado, por tanto, con considerar los 4 restantes puntos para resolver el problema.

2.b. Ahora el conjunto es $\{(x, y); x^2 + y^2 \leq 6\}$ (caso 1.3 discutido en clase). De nuevo, se buscan los extremos absolutos (se pide el máximo absoluto). Usando el mismo razonamiento que en el apartado anterior, se alcanzarán estos extremos en dicho compacto.

Ya se han considerado en el apartado anterior los puntos a considerar para la frontera del conjunto. A continuación vemos cuáles se deben considerar en su interior. Para ello aplicamos la condición necesaria resolviendo el sistema $grad(T) = \vec{0}$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial T}{\partial x}(x, y) = 0 \rightarrow \dfrac{1}{2} + \dfrac{y}{2} = 0 \\ \dfrac{\partial T}{\partial y}(x, y) = 0 \rightarrow \dfrac{x}{2} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = 0; y = -1$$

Se obtiene el punto $(0, -1)$, que pertenece al interior del conjunto (pues el módulo es $\sqrt{0^2 + 1^2}$ que es menor que $\sqrt{6}$). Por tanto lo consideramos. A continuación, a diferencia de como hicimos anteriormente, no clasificamos el punto crítico (no vemos si es punto de silla, de máximo relativo o de mínimo relativo). Ya solo vemos si es un extremo relativo. Recuérdese que, suponiendo menos trabajo, llega con considerar los puntos obtenidos con la condición necesaria para resolver el problema. Para clasificarlo aplicaríamos la condición suficiente (usaremos esta, la equivalente a la que evalúa la paridad de primera derivada que no se anula en el punto crítico para funciones reales de variable real) observando el signo de los menores diagonales de la matriz Hessiana en dicho punto mientras que para ver si es extremo llega con observar el del segundo menor diagonal. La matriz Hessiana será:

$$H_T(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, y) & \dfrac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial y \partial x}(x, y) & \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Será la misma en el punto. Como se observa, el segundo menor diagonal es $\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$ por lo que no es extremo relativo, tratándose de un punto de silla. Por lo tanto no consideramos el punto.

Finalmente comparamos todos los puntos, los considerados para la frontera y para el interior. Considerando el procedimiento seguido tendríamos la comparación hecha en el apartado anterior. Por tanto el máximo absoluto en el conjunto (el máximo de la frontera) tiene valor 21.42 y se produce en el punto $\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{3}{2}\right)$. La temperatura máxima en el recinto será 21.42.

Ejercicio 3. Se trata de un problema de aplicación. La distancia será la longitud de arco entre $x = 0$ y $x = \frac{2}{3}$ (de la curva en el plano dada) que se calcula (considerando la fórmula correspondiente) mediante:

$$l = \int_0^{2/3} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

Por tanto:

$$f'(x) = \frac{-2x}{1 - x^2}; l = \int_0^{2/3} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx = \int_0^{2/3} \sqrt{1 + \frac{(-2)^2 x^2}{(1 - x^2)^2}} dx =$$

$$= \int_0^{2/3} \sqrt{\frac{(1 - x^2)^2 + 4x^2}{(1 - x^2)^2}} dx = \int_0^{2/3} \sqrt{\frac{1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2}{(1 - x^2)^2}} dx = \int_0^{2/3} \sqrt{\frac{1 + x^4 + 2x^2}{(1 - x^2)^2}} dx =$$

$$= \int_0^{2/3} \frac{\sqrt{1 + x^4 + 2x^2}}{\sqrt{(1 - x^2)^2}} dx = \int_0^{2/3} \frac{\sqrt{(1 + x^2)^2}}{1 - x^2} dx = \int_0^{2/3} \frac{1 + x^2}{1 - x^2} dx$$

Se trata de la integral de una función racional impropia (el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador). Por tanto es necesario comenzar dividiendo para obtenerla como suma de un polinomio y una racional propia.

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 1 & -x^2 + 1 \\ \cline{2-2} -x^2 + 1 & -1 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Por tanto se tiene que $\frac{1+x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{2}{1-x^2}$. Ahora descomponemos la racional propia en fracciones simples:

$$1 - x^2 = (1 + x)(1 - x) \rightarrow \frac{2}{1-x^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} = \frac{A(1-x)+B(1+x)}{(1+x)(1-x)} \rightarrow 2 = A(1 - x) + B(1 + x)$$

Se eligen las raíces por sencillez:

$$x = -1 \rightarrow 2 = 2A \rightarrow A = 1$$

$$x = 1 \rightarrow 2 = 2B \rightarrow B = 1$$

Por tanto $\frac{1+x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{2}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$. Así, la integral que se desea calcular será $\int_0^{2/3} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \int_0^{2/3} -1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} dx = -\int_0^{2/3} 1 dx + \int_0^{2/3} \frac{1}{1+x} dx + \int_0^{2/3} \frac{1}{1-x} dx$. Se ha aplicado la propiedad de la linealidad de la integral apareciendo integrales inmediatas, de manera que:

$$l = -x + \ln|1 + x| - \ln|1 - x|]_0^{\frac{2}{3}} = -x + \ln\left|\frac{(1 + x)}{(1 - x)}\right|\Bigg]_0^{\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3} + \ln\left|\frac{\left(1 + \frac{2}{3}\right)}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)}\right|$$

Por tanto la distancia será $\ln(5) - \frac{2}{3} = 0.943$ hm o, si se prefiere, 94.3 m.

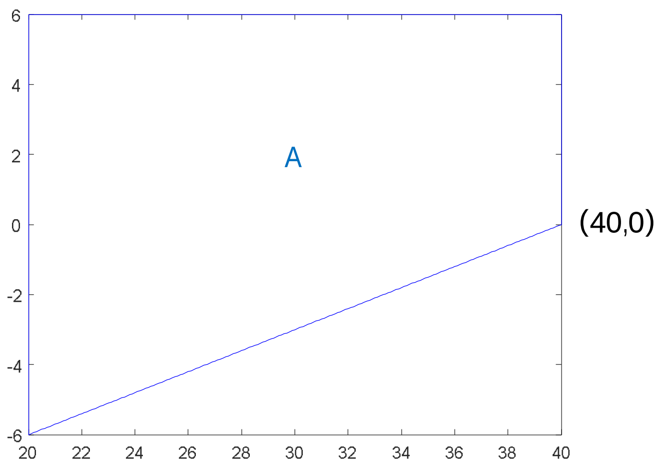
Ejercicio 4. El volumen, mediante una integral doble, será

$\iint_A h(x,y) - g(x,y)dxdy$ con $g(x,y) = 0$ siéndolo al estar $h(x,y)$ sobre $g(x,y)$; o, si se prefiere, $\iint_A h(x,y)dxdy$ al ser $h(x,y)$ positiva (en A). A continuación representamos la región. Los puntos de corte (necesarios para la representación) serán:

$$\left.\begin{array}{c} x = 20 \\ y = \frac{3x}{10} - 12 \end{array}\right\} \rightarrow y = -6. \text{ Se tiene el punto } (20,-6).$$

$$\left.\begin{array}{c} x = 40 \\ y = \frac{3x}{10} - 12 \end{array}\right\} \rightarrow y = 0. \text{ Se tiene el punto } (40,0).$$

Los otros dos puntos son evidentes. La región será:



Es mejor tomar inicialmente un rango entre dos valores para la x pues de la otra forma habrá dos zonas siendo necesario resolver dos integrales (la integral será la suma de dos integrales aplicando la propiedad de la aditividad para la integral doble). Así:

$$x \in [20,40] \rightarrow y \in \left[\frac{3x}{10} - 12{,}6\right]$$

Vemos que haciéndolo de este modo la región queda parametrizada del mismo modo que lo está en el enunciado. Se tiene por tanto que (es necesario integrar primero respecto a y de manera que la función es una constante):

$$\iint_A h(x,y)dxdy = \int_{20}^{40}\left(\int_{\frac{3x}{10}-12}^{6}(x-20)^2dy\right)dx = \int_{20}^{40} y(x-20)^2\Big]_{3x/10-12}^{6}dx =$$

$$= \int_{20}^{40}\left(6 - \frac{3x}{10} + 12\right)(x-20)^2dx = \int_{20}^{40}\left(-\frac{3x}{10} + 18\right)(x^2 - 40x + 400)dx =$$

$$= \int_{20}^{40} -\frac{3x^3}{10} + 30x^2 - 840x + 7200dx = -\frac{3x^4}{40} + 10x^3 - 420x^2 + 7200x\Big]_{20}^{40} =$$

$$= -3 \cdot 40^3 + 10 \cdot 40^3 - 420 \cdot 40^2 + 7200 \cdot 40 + \frac{3 \cdot 20^4}{40} - 10 \cdot 20^3 + 420 \cdot 20^2 - 7200 \cdot 20$$

Operando se obtiene 20000 como valor. Por tanto el volumen de nieve será de 20000 m^3 suponiendo que se esté trabajando en metros.

Ejercicio 5. En vez de resolverla directamente buscamos un método sencillo para ello. De considerar una transformación para ello, se nos ocurren, considerando la región W, la que permite el cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas y la que permite el cambio a coordenadas cilíndricas. Resulta sencillo mediante la primera opción (se ve que le va muy bien). Considerándola se tiene que $\rho \in [0,2]$, $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ al tenerse que $z < 0$ y $\theta \in [0,2\pi]$ $\left(W^* = \left\{(\rho, \theta, \varphi); \rho \in [0,2], \theta \in [0,2\pi], \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right\}\right)$. El Jacobiano de la transformación es $\rho^2 \sin(\varphi)$.

Recordamos que en este caso da igual el orden de integración. La integral (en la segunda integral de abajo, la integral en W^*, va el valor absoluto de dicho Jacobiano) queda:

$$\iiint_W \cos\left((x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\right) dxdydz = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_0^2 \cos\left((\rho^2)^{3/2}\right) \rho^2 \sin(\varphi)\, d\rho \right) d\varphi \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(\varphi) \left(\int_0^2 \cos(\rho^3) \rho^2\, d\rho \right) d\varphi \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(\varphi) \left.\frac{\sin(\rho^3)}{3}\right]_0^2 d\varphi \right) d\theta =$$

$$= \frac{\sin(8)}{3} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(\varphi)\, d\varphi \right) d\theta = \frac{\sin(8)}{3} \int_0^{2\pi} -\cos(\varphi)\Big]_{\pi/2}^{\pi} d\theta = \frac{\sin(8)}{3} \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= \frac{2\pi \sin(8)}{3}$$

Ejercicio 6. Sea *F* la función integral de límite superior variable de una función *f* siendo el inferior el extremo izquierdo de un intervalo. Si *f* es una función continua en él entonces *F* será derivable en él (en el intervalo abierto tal y como lo tenéis en la teoría) y su derivada será la función *f*.

6.a. Sí, porque de acuerdo al teorema *F* será el conjunto de primitivas en el intervalo (sin considerar el teorema únicamente se sabe que existe *F* al ser *f* una función (Riemann) integrable por ser continua). Sin embargo puede no ser expresable en términos de funciones elementales o de alguna función conocida.

6.b. Sí. También usa la propiedad de la aditividad de la integral y considera la continuidad de *f*.