Ejercicios básicos

$\boxed{1}$ Calcular $\displaystyle\iint_R f$ en los siguientes casos:

(a) $f(x,y)=\frac{1}{(x+y)^2}$, $R=[3,4]\times[1,2]$,

(b) $f(x,y)=\frac{x^2}{1+y^2}$, $R=[0,1]\times[0,1]$,

Solución:

(a) $\displaystyle\iint_R \tfrac{1}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_3^4\left[\int_1^2 \tfrac{1}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$

$$\int_1^2 \tfrac{1}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}y=\left[-\frac{1}{x+y}\right]_{y=1}^{y=2}=-\tfrac{1}{x+2}+\tfrac{1}{x+1},\ \int_3^4\left(-\tfrac{1}{x+2}+\tfrac{1}{x+1}\right)\,\mathrm{d}x=0.0408$$

(b) $\displaystyle\iint_R \tfrac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\left[\int_0^1 \tfrac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\right]\,\mathrm{d}y$

$$\int_0^1 \tfrac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{1+y^2}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{1+y^2}\,\tfrac{1}{3},\ \int_0^1 \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y=\tfrac{\pi}{12}$$

□

$\boxed{2}$ Calcular la integral $\displaystyle\iint_T \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ siendo T la región acotada por el paralelogramo de vértices $(2,0)$, $(2,4)$,$(-2,0)$ y $(-2,-4)$.

Solución: La región T se puede parametrizar mediante:

$$T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\in[-2,2],\ x-2\le y\le x+2\}$$

Entonces: $\displaystyle\iint_T \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-2}^{2}\left[\int_{x-2}^{x+2}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}y\right]\,\mathrm{d}x$

$$\int_{x-2}^{x+2}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}y=[y\,\mathrm{e}^x]_{y=x-2}^{y=x+2}=(x+2)\mathrm{e}^x-(x-2)\mathrm{e}^x=4\,\mathrm{e}^x$$

$$\int_{-2}^{2}4\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=[4\,\mathrm{e}^x]_{x=-2}^{x=2}=4\,\mathrm{e}^2-4\,\mathrm{e}^{-2}=29.0148$$

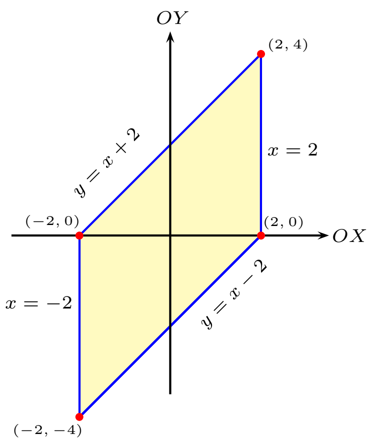


Figura 1: Paralelogramo

□

$\boxed{3}$ Calcular el área de la región D del primer cuadrante limitada por las curvas $xy = 2$, $xy = 4$, $y = x$, $y = 3x$.

Solución: Para calcular el valor del área se debe partir la región en tres trozos. Cada trozo está determinado por las intersecciones de dos curvas. Las intersecciones que se encuentran en el primer cuadrante se calculan a continuación.

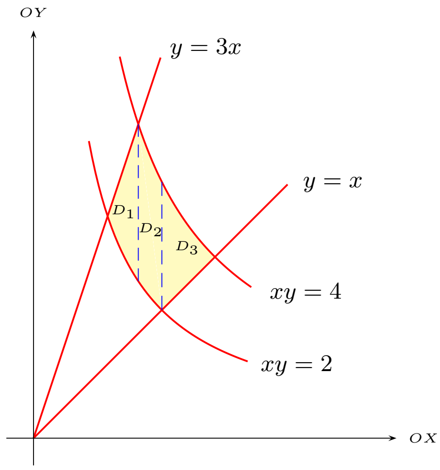


Figura 2: Área en $\mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{array}{l} xy = 2 \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow (x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$\left.\begin{array}{l} xy = 2 \\ y = 3x \end{array}\right\} \Rightarrow (x, y) = \left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 3\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} xy = 4 \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow (x, y) = (2, 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} xy = 4 \\ y = 3x \end{array}\right\} \Rightarrow (x, y) = \left(\sqrt{\tfrac{4}{3}}, 3\sqrt{\tfrac{4}{3}}\right)$$

$$\begin{aligned} D &= D_1 \cup D_2 \cup D_3 \\ &= \{(x,y);\ x \in \left[\sqrt{2/3}, \sqrt{4/3}\right], y \in \left[\tfrac{2}{x}, 3x\right]\} \cup \{(x,y);\ x \in \left[\sqrt{4/3}, \sqrt{2}\right], y \in \left[\tfrac{2}{x}, \tfrac{4}{x}\right]\} \\ &\quad \cup \{(x,y);\ x \in \left[\sqrt{2}, 2\right], y \in \left[x, \tfrac{4}{x}\right]\} \end{aligned}$$

Área(D) =Área(D_1)+Área(D_2)+Área(D_3) $= \iint_{D_1} 1 + \iint_{D_2} 1 + \iint_{D_3} 1$

Área(D_1) $= \iint_{D_1} 1 = \int_{\sqrt{2/3}}^{\sqrt{4/3}} \left[\int_{2/x}^{3x} 1 \, \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x$

$$\int_{2/x}^{3x} 1 \, \mathrm{d}y = [y]_{y=2/x}^{y=3x} = 3x - \frac{2}{x}, \int_{\sqrt{2/3}}^{\sqrt{4/3}} \left(3x - \frac{2}{x}\right) \mathrm{d}x = 0.3068$$

Área(D_2) $= \iint_{D_2} 1 = \int_{\sqrt{4/3}}^{\sqrt{2}} \left[\int_{2/x}^{4/x} 1 \, \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x$

$$\int_{2/x}^{4/x} 1 \, \mathrm{d}y = [y]_{y=2/x}^{y=4/x} = \frac{4}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2}{x}, \int_{\sqrt{4/3}}^{\sqrt{2}} \frac{2}{x} \, \mathrm{d}x = 0.4054$$

Área(D_3) $= \iint_{D_3} 1 = \int_{\sqrt{2}}^{2} \left[\int_{x}^{4/x} 1 \, \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x$

$$\int_{x}^{4/x} 1 \, \mathrm{d}y = [y]_{y=x}^{y=4/x} = \frac{4}{x} - x, \int_{\sqrt{2}}^{2} \left(\frac{4}{x} - x\right) \mathrm{d}x = 0.3862.$$

Área$(D) = 0.3068 + 0.4054 + 0.3862 = 1.0984$

□

$\boxed{4}$ Calcular el área encerrada por las gráfica de las funciones $y = x$, $y = (2-x)^2$ y $x = 0$.

Solución: Comenzamos calculando la intersección de la recta $y = x$ con la parábola $y = (2-x)^2$.

$$\left.\begin{array}{c} y = x \\ y = (2-x)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Área$= \int_0^1 \left[\int_x^{(2-x)^2} 1 \, dy \right] dx$

$\int_x^{(2-x)^2} 1 \, dy = (2-x)^2 - x = 4 - 4x + x^2 - x = 4 - 5x + x^2$

$\int_0^1 (4 - 5x + x^2) \, dx = \frac{11}{6}$

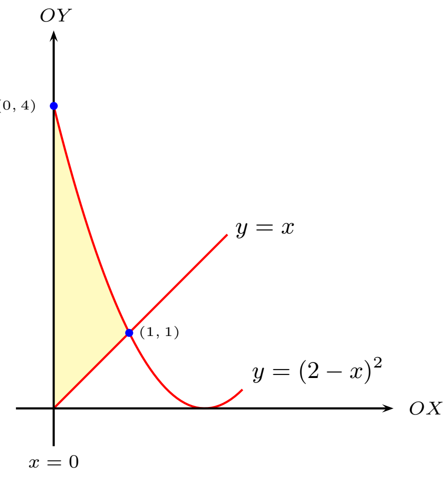


Figura 3: Región en $\mathbb{R}^2$

□

$\boxed{5}$ Calcular el área de la región del plano acotada por la curva $x = y^3$ y su recta tangente en el punto $(1,1)$.

Solución: La curva $x = y^3$ y la gráfica de la función $f(y) = y^3$, considerando x como función de la variable y. Calculamos $f'(y) = 3y^2$ y evaluamos en el punto $y = 1$: $f'(1) = 3$ para obtener la función cuya gráfica sea la recta tangente en el punto $(1,1)$: $r(y) = 3y - 2$.

Hallamos los puntos de intersección de la recta tangente con la curva igualando: $y^3 = 3y - 2$, que tiene como soluciones $y = 1$, $y = -2$.

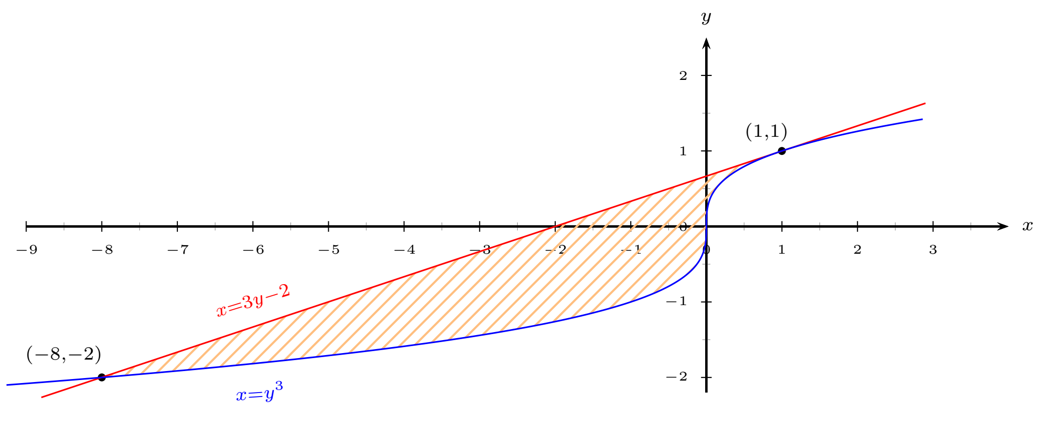


Figura 4: Área encerrada por una curva y una tangente

Para $y \in [-2,1]$ se cumple que $r(y) \leq f(y)$. Por tanto, el área buscada viene dada por:

$$\int_{-2}^{1} (f(y) - r(y))\, \mathrm{d}y = \int_{-2}^{1} \left(y^3 - 3y + 2\right)\, \mathrm{d}y = \left[\tfrac{y^4}{4} - \tfrac{3}{2}y^2 + 2y\right]_{-2}^{1} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{2} + 2 - 4 + 6 + 4 = \tfrac{27}{4}.$$

□

6 Calcular la integral doble $\displaystyle\iint_R (3x + 4y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ siendo R la parte de la corona circular que se encuentra en el semiplano $y \geq 0$ y está limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

<u>Solución</u>: La región R se parametriza en coordenadas polares como:

$$\{(r, \theta);\ r \in [1,2],\ \theta \in [0, \pi]\}.$$

$$\iint_R (3x + 4y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \left[\int_1^2 (3r\, \cos(\theta) + 4(r^2\, \mathrm{sen}^2(\theta))\, r\, \mathrm{d}r\right]\, \mathrm{d}\theta$$

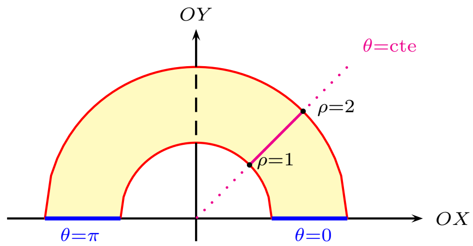


Figura 5: Corona circular

$$\int_1^2 (3r\, \cos(\theta) + 4(r^2\, \mathrm{sen}^2(\theta))\, r\, \mathrm{d}r = \cos(\theta) \int_1^2 3\, r^2\, \mathrm{d}r + \mathrm{sen}^2(\theta) \int_1^2 4\, r^3\, \mathrm{d}r = 7\, \cos(\theta) + 15\, \mathrm{sen}^2(\theta)$$

$$\int_0^{\pi} \left[7\, \cos(\theta) + 15\, \mathrm{sen}^2(\theta)\right]\, \mathrm{d}\theta = \tfrac{15}{2}\pi$$

□

7 Calcular $\displaystyle\iint_A \mathrm{e}^{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ siendo A la parte de la bola cerrada de centro $(0,0)$ y radio 1 tal que $y \geq |x|$.

<u>Solución</u>: La región A se parametriza en coordenadas polares mediante: $\left\{(r, \theta)\,;\ 0 \leq r \leq 1,\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}\right\}$.

$$\iint_A \mathrm{e}^{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \mathrm{e}^{r^2}\, r\, \mathrm{d}\theta\right] \mathrm{d}r$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \mathrm{e}^{r^2}\, r\, \mathrm{d}\theta = r\, \mathrm{e}^{r^2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \mathrm{d}\theta = \tfrac{\pi}{2}\, r\, \mathrm{e}^{r^2}$$

$$\int_0^1 \tfrac{\pi}{2}\, r\, \mathrm{e}^{r^2}\, \mathrm{d}r = 1.3495$$

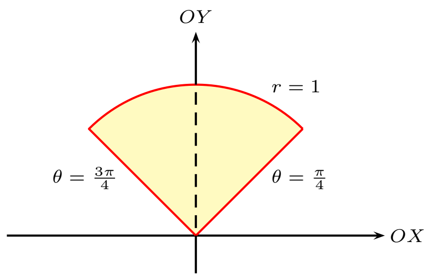


Figura 6: Región A

□

8 Calcular la integral sobre $D = [-1,1] \times [0,2] \times [1,2]$ de la función $f(x,y,z) = xyz$.

<u>Solución</u>: Se verifica

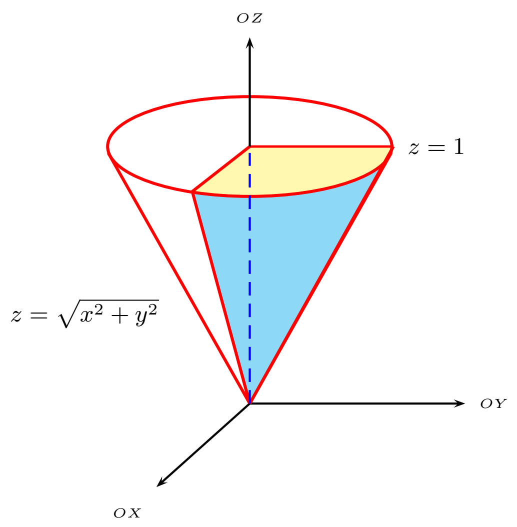
$$\iiint_D xyz\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^2 \left(\int_1^2 xyz\, \mathrm{d}z\right)\, \mathrm{d}y\right)\, \mathrm{d}x$$

$$\int_1^2 xyz\ \mathrm{d}z = xy \int_1^2 z\ \mathrm{d}z = \tfrac{3}{2}xy,$$
$$\int_0^2 \tfrac{3}{2}xy\ \mathrm{d}y = \tfrac{3}{2}x \int_0^2 y\ \mathrm{d}y = \tfrac{3}{2}x\,2 = 3x,$$
$$\int_{-1}^1 3x\ \mathrm{d}x = 0.$$

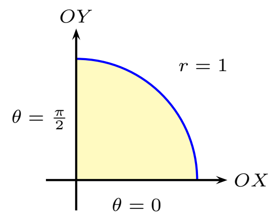
□

$\boxed{9}$ Un sólido Ω está limitado, en el primer octante, por el semicono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y los planos $z = 1$, $x = 0$, $y = 0$. Calcular la integral $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$.

Solución:



(a) Ω



(b) Proyección sobre el plano XY

Figura 7: Sólido limitado por cono e plano

La proyección de Ω sobre el plano XY es la parte de la bola $\bar{\mathcal{B}}((0,0),1)$ contenida en el primer cuadrante, en concreto $\{(r,\theta);\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 1\}$. Además la variación de z se produce entre el semicono y el plano $z = 1$. Por eso la región de integración se parametriza en coordenadas cilíndricas en la forma:

$$\Omega = \{(r,\theta,z);\ 0 \le \theta \le \tfrac{\pi}{2}\,;\ 0 \le r \le 1;\ r \le z \le 1\}$$

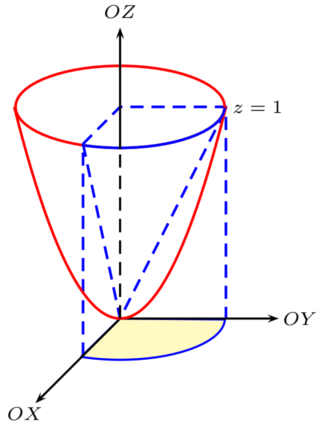
Entonces:

$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} r\ r\ \ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \left[\int_r^1 r^2\ \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right] \mathrm{d}\theta.$$
$$\int_r^1 r^2\ \mathrm{d}z = r^2 \int_r^1\ \mathrm{d}z = r^2\,[z]_{z=r}^{z=1} = r^2(1-r) = r^2 - r^3$$
$$\int_0^1 \left(r^2 - r^3\right)\ \mathrm{d}r = \tfrac{1}{12}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{12}\ \mathrm{d}\theta = \tfrac{\pi}{24}$$

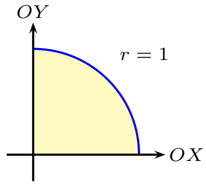
□

$\boxed{10}$ Calcular la integral triple de la función $f(x, y, z) = xyz$ sobre la región de S que se encuentra en el primer octante de $\mathbb{R}^3$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) y está limitada inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, y superiormente por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solución: Con el objeto de parametrizar la región, la proyectamos sobre el plano XY.



(a) Región S



(b) Proyección sobre el plano XY

Figura 8: Sólido limitado por cono y paraboloide

La intersección del cono con el paraboloide se obtiene resolviendo el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} z = x^2 + y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{array}\right\} \Rightarrow z = z^2 \Rightarrow z^2 - z = 0 \Rightarrow z(z-1) = 0 \Rightarrow z = \left\{\begin{array}{l} 0 \\ \text{o} \\ 1 \end{array}\right.$$

Si $z = 0$ se obtiene el punto $(0, 0, 0)$, y si $z = 1$ se obtiene la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano $z = 1$. La proyección del sólido sobre el plano XY es $\{(x, y),\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0)$, y fijado un punto (x, y) en dicha proyección los valores de z oscilan entre el paraboloide y el cono. Por eso, una parametrización del sólido en coordenadas cilíndricas es: $S = \{(r, \theta, z);\ r \in [0, 1],\ \theta \in [0, \pi/2],\ z \in [r^2, r]\}$. Entonces:

$$\iiint_S xyz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_0^1 \left[\int_0^{\pi/2} \left[\int_{r^2}^{r} r \cos(\theta)\ r \operatorname{sen}(\theta)\ z\ r \, \mathrm{d}z \right] \mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}r$$

$$\begin{aligned} \int_{r^2}^{r} r^3 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)\ z \, \mathrm{d}z &= r^3 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \int_{r^2}^{r} z \, \mathrm{d}z = r^3 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \left[\tfrac{z^2}{2} \right]_{z=r^2}^{z=r} \\ &= r^3 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \left(\tfrac{r^2}{2} - \tfrac{r^4}{2} \right) = \tfrac{1}{2} r^5 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)(1 - r^2) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2} r^5 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)(1 - r^2) \, \mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2} r^5 (1 - r^2) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \, \mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2} r^5 (1 - r^2) \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} r^5 (1 - r^2)$$

$$\int_0^1 \tfrac{1}{4} r^5 (1 - r^2) \, \mathrm{d}r = \int_0^1 \tfrac{1}{4}(r^5 - r^7) \, \mathrm{d}r = \tfrac{1}{96}$$

□

$\boxed{11}$ Calcular $\iiint\limits_{\Omega} (x+2z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ siendo $\Omega = \{(x,y,z);\ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9,\ z \ge 0\}$.

Solución: La parametrización en coordenadas esféricas de Ω es: $\{(\rho,\theta,\phi)\,;\ 1 \le \rho \le 3,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}\ \}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} \ (x+2z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \ &= \int_1^3 \left[\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho\ \mathrm{sen}(\phi)\ \cos(\theta) + 2\rho\ \cos(\phi))\,\rho^2\ \mathrm{sen}(\phi)\ \mathrm{d}\phi\right]\ \mathrm{d}\theta\right]\ \mathrm{d}\rho \\
&= \int_1^3 \left[\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho^3\ \mathrm{sen}^2(\phi)\cos(\theta) + 2\rho^3\ \mathrm{sen}(\phi)\cos(\phi))\ \mathrm{d}\phi\right]\ \mathrm{d}\theta\right]\ \mathrm{d}\rho
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho^3\ \mathrm{sen}^2(\phi)\cos(\theta) + 2\rho^3\ \mathrm{sen}(\phi)\cos(\phi))\ \mathrm{d}\phi \ &= \ \rho^3\ \cos(\theta)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^2(\phi)\ \mathrm{d}\phi + 2\rho^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}(\phi)\cos(\phi)\ \mathrm{d}\phi \\
&= \ \rho^3\ \cos(\theta)\,\tfrac{1}{4}\pi + 2\rho^3\,\tfrac{1}{2} = \tfrac{\pi}{4}\,\rho^3\ \cos(\theta) + \rho^3
\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\tfrac{\pi}{4}\rho^3\ \cos(\theta) + \rho^3\right)\ \mathrm{d}\theta = \tfrac{\pi}{4}\rho^3\int_0^{2\pi}\cos(\theta)\ \mathrm{d}\theta + \rho^3\int_0^{2\pi}\ \mathrm{d}\theta = \tfrac{\pi}{4}\,\rho^3\cdot 0 + \rho^3\,2\pi = 2\pi\,\rho^3$$

$$\int_1^3 2\pi\rho^3\mathrm{d}\rho = 2\pi\cdot 20 = 40\pi$$

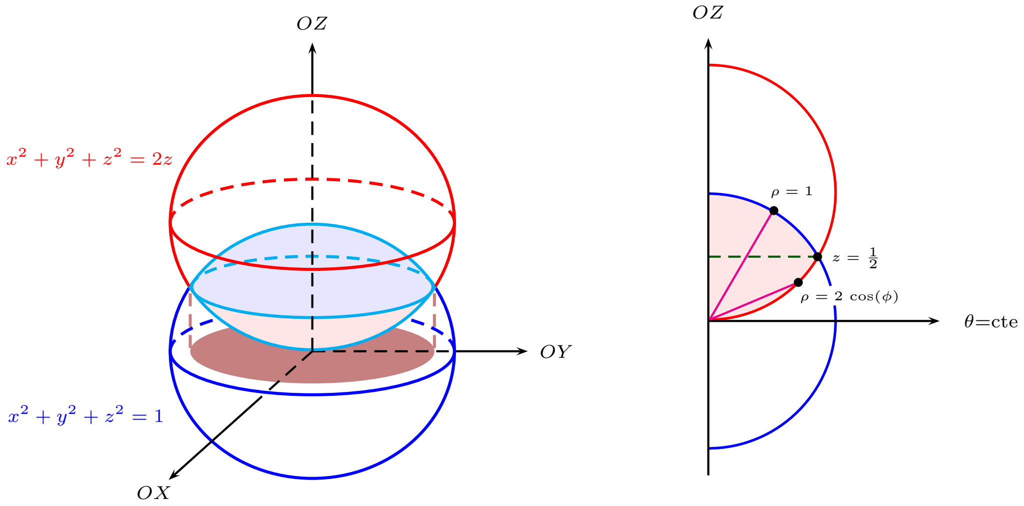
$\square$

$\boxed{12}$ Calcular $\iiint\limits_{D} z^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ donde D es la parte común de las bolas $x^2+y^2+z^2 \le 1$ y $x^2+y^2+z^2 \le 2z$.

Solución: La esfera $x^2+y^2+z^2=1$ tiene centro $(0,0,0)$ y radio 1, mientras que $x^2+y^2+z^2=2z$ se puede escribir en la forma $x^2+y^2+(z-1)^2=1$, por lo que su centro está en $(0,0,1)$ y su radio es 1. La intersección de las esferas es:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ x^2+y^2+z^2 &= 2z \end{aligned}\right\} \Rightarrow z = \tfrac{1}{2} \Rightarrow x^2+y^2+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = \tfrac{3}{4}.$$

La proyección de D sobre el plano $z=0$ es la bola $\bar{\mathcal{B}}((0,0);\frac{\sqrt{3}}{2})$. En consecuencia $\theta \in [0,2\pi]$. Ambas esferas y sus secciones por un plano $\theta = \mathrm{cte}$ se representan en la Figura (9).



(a) Conjunto D (b) Proyección $\theta=\mathrm{cte}$

Figura 9: Esferas en $\mathbb{R}^3$

La circunferencia intersección de las esferas se encuentra a altura $z=\frac{1}{2}$ y además es parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$, por lo que $\rho=1$. Entonces el valor de ϕ en esta circunferencia es: $\arccos\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)=\arccos\left(\frac{1/2}{1}\right)=\frac{\pi}{3}$.

En la sección de D para $\theta=\mathrm{cte}$ se observa que $\phi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, y que el valor de ρ depende de ϕ. Si $\phi\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ entonces $\rho\in[0,1]$, mientras que si $\phi\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ entonces ρ oscila entre 0 y alcanzar la esfera $x^2+y^2+z^2=2z$, cuya ecuación en coordenadas esféricas es $\rho^2=2\,\rho\,\cos(\phi)$, o de forma equivalente, $\rho=2\,\cos(\phi)$. En consecuencia, si $\phi\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ entonces $\rho\in[0,2\,\cos(\phi)]$. La parametrización de D en coordenadas esféricas es:

$$\begin{aligned} D &= D_1\cup D_2\\ &= \left\{(\rho,\phi,\theta);\ 0\le\theta<2\pi,\ 0\le\phi\le\tfrac{\pi}{3},\ 0\le\rho\le 1\right\}\\ &\quad\cup\left\{(\rho,\phi,\theta);\ 0\le\theta<2\pi,\ \tfrac{\pi}{3}\le\phi\le\tfrac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le 2\,\cos(\phi)\right\}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\iiint_D z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iiint_D \rho^2\,\cos^2(\phi)\,\rho^2\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\iiint_D \rho^4\,\cos^2(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\\ &= \iiint_{D_1}\rho^4\,\cos^2(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi+\iiint_{D_2}\rho^4\,\cos^2(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

Se calcula la integral en D_1

$$\iiint_{D_1}\rho^4\,\cos^2(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi/3}\left[\int_0^1\rho^4\,\cos^2(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\phi\right]\mathrm{d}\theta$$

$$\int_0^1\rho^4\,\cos^2(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{d}\rho=\cos^2(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi)\int_0^1\rho^4\,\mathrm{d}\rho=\tfrac{1}{5}\,\cos^2(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi)$$

$$\int_0^{\pi/3}\tfrac{1}{5}\,\cos^2(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{d}\phi=\tfrac{7}{120}$$

$$\int_0^{2\pi}\tfrac{7}{120}\,\mathrm{d}\theta=\tfrac{7}{60}\pi$$

Se calcula la integral sobre D_2

$$\iiint\limits_{D_2} \rho^4 \cos^2(\phi) \operatorname{sen}(\phi)\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \left[\int_{\pi/3}^{\pi/2} \left[\int_0^{2\cos(\phi)} \rho^4 \cos^2(\phi) \operatorname{sen}(\phi)\, \mathrm{d}\rho \right] \mathrm{d}\phi \right] \mathrm{d}\theta$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\cos(\phi)} \rho^4 \cos^2(\phi) \operatorname{sen}(\phi)\, \mathrm{d}\rho &= \cos^2(\phi) \operatorname{sen}(\phi) \int_0^{2\cos(\phi)} \rho^4\, \mathrm{d}\rho = \cos^2(\phi) \operatorname{sen}(\phi) \left[\tfrac{1}{5}\rho^5\right]_{\rho=0}^{\rho=2\cos(\phi)} \\ &= \cos^2(\phi) \operatorname{sen}(\phi)\, \tfrac{1}{5} \left(2^5 \cos^5(\phi) - 0\right) = \tfrac{32}{5} \cos^7(\phi) \operatorname{sen}(\phi) \end{aligned}$$

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \tfrac{32}{5} \cos^7(\phi) \operatorname{sen}(\phi)\, \mathrm{d}\phi = \tfrac{1}{320}$$

$$\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{320}\, \mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{160}\pi$$

Finalmente $\displaystyle\iiint\limits_D z^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \tfrac{7}{60}\pi + \tfrac{1}{160}\pi = \tfrac{59}{480}\pi$

$\square$

Ejercicios complementarios

$\boxed{13}$ Calcular $\displaystyle\iint\limits_R f$ siendo $f(x,y) = y\,\mathrm{e}^{xy}$ e $R = [0,1] \times [0,1]$.

Solución: $\displaystyle\iint\limits_R y\,\mathrm{e}^{xy}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\int_0^1 y\,\mathrm{e}^{xy}\, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$

$\displaystyle\int_0^1 y\,\mathrm{e}^{xy}\, \mathrm{d}x = [\mathrm{e}^{xy}]_{x=0}^{x=1} = \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^y - 1, \int_0^1 (\mathrm{e}^y - 1)\, \mathrm{d}y = 0.7183$

$\square$

$\boxed{14}$ Calcular $\displaystyle\iint\limits_D (1 + x^2 + y^2)^{3/2} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ con $D = \bar{\mathcal{B}}((0,0);1)$.

Solución: La región D se parametriza en coordenadas polares como $D^* = \{(r,\theta);\ r \in [0,1],\ \theta \in [0, 2\pi)\}$.

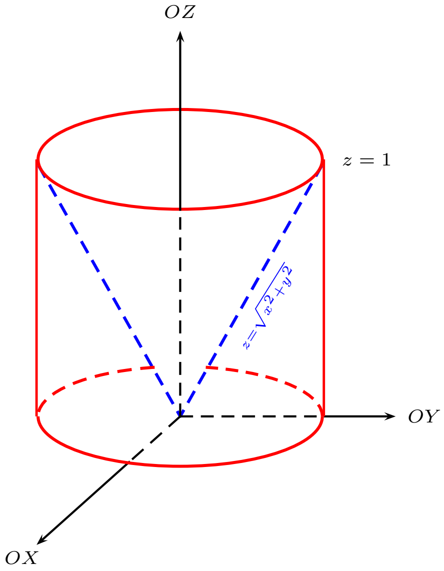
Entonces: $\displaystyle\iint\limits_D (1 + x^2 + y^2)^{3/2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint\limits_{D^*} (1 + r^2)^{3/2}\, r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (1 + r^2)^{3/2}\, r\, \mathrm{d}r \right] \mathrm{d}\theta.$

$$\int_0^1 (1 + r^2)^{3/2}\, r\, \mathrm{d}r = 0.9314$$

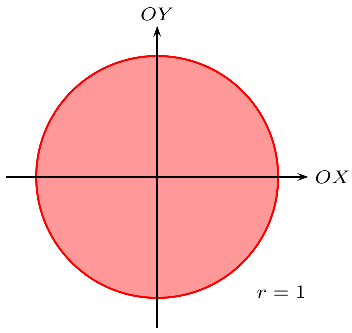
$$\int_0^{2\pi} 0.9314\, \mathrm{d}\theta = 5.8522$$

$\square$

$\boxed{15}$ Calcular la integral $\displaystyle\iiint\limits_V (2zx^2 + 2zy^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$ siendo V el volumen exterior a la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$, con $z \geq 0$.



(a) V



(b) Proyección XY

Figura 10: Volumen delimitado por cono y cilindro

Solución: El cono y el cilindro están representados en la Figura (10).

La intersección de la hoja superior del cono con el cilindro es la circunferencia de ecuación:

$$\left.\begin{array}{c} x^2+y^2=z^2 \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right\} \Longrightarrow x^2+y^2=1,\ z=1$$

El conjunto V está descrito por: $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq z\leq\sqrt{x^2+y^2}\}$, y en coordenadas cilíndricas su parametrización es: $V=\{(r,\theta,z);\ 0<r\leq 1,\ 0\leq\theta<2\pi,\ 0\leq z\leq r\}$. Por tanto, el cambio de variable transforma la integral en:

$$\iiint\limits_V (2zx^2+2zy^2)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z=\iiint\limits_V 2zr^2\ r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z=\int_0^1\left[\int_0^{2\pi}\left[\int_0^r 2zr^3\ \mathrm{d}z\right]\ \mathrm{d}\theta\right]\ \mathrm{d}r$$

$$\int_0^r 2zr^3\ \mathrm{d}z=r^3\int_0^r 2z\ \mathrm{d}z=r^3\left[z^2\right]_{z=0}^{z=r}=r^2r^3-0=r^5$$

$$\int_0^{2\pi} r^5\ \mathrm{d}\theta=r^5\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=r^5\ [\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}=r^5\,(2\pi-0)=2\pi r^5$$

$$\int_0^1 2\pi r^5\ \mathrm{d}r=\frac{\pi}{3}$$

$\square$

$\boxed{16}$ Dada la región de $\mathbb{R}^2$: $D=\left\{(x,y);\ x\in[0,\sqrt{3}],y\in\left[x^2-2,\frac{x^2}{3}\right]\right\}$, parametrizarla cambiando el orden de las variables.

Solución: Para cada valor $x \in [0, \sqrt{3}]$ el segmento vertical contenido en D comienza en la curva $y = x^2 - 2$ y acaba cuando $y = \frac{x^2}{3}$. De esta forma, la región es la descrita en la Figura (11).

Si cambiamos el orden de las variables, observamos que los valores de y oscilan entre -2 y 1. Para estimar la variación de x, una vez fijado y, partiremos la región en dos trozos:

si $y \in [-2, 0]$ entonces $x \in [0, \sqrt{y+2}]$,

si $y \in [0, 1]$ entonces $x \in [\sqrt{3y}, \sqrt{y+2}]$.

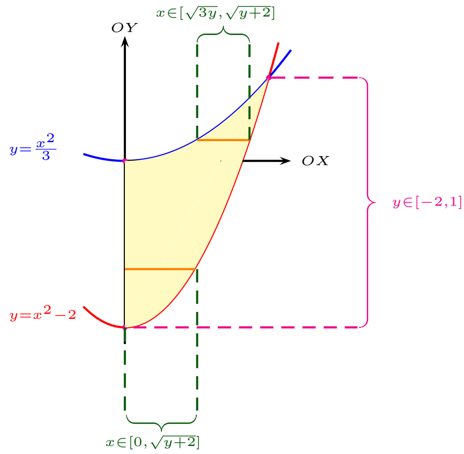


Figura 11: Conjunto D

Por tanto $D = \{(x,y);\ y \in [-2,0], x \in [0, \sqrt{y+2}]\} \cup \{(x,y);\ y \in [0,1], x \in [\sqrt{3y}, \sqrt{y+2}]\}$

□

$\boxed{17}$ Usar integrales triples para hallar el volumen del sólido T limitado superiormente por el cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ e inferiormente por el paraboloide elíptico $z = x^2 + 3y^2$.

Solución: Calculamos la intersección de las dos figuras, resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} z = 4 - y^2 \\ z = x^2 + 3y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 - y^2 = x^2 + 3y^2 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 4$$

La proyección de la figura sobre el plano $z = 0$ es $\{(x,y);\ x^2+4y^2 = 4\} = \{(x,y);\ y \in [-1,1],\ x \in [-2\sqrt{1-y^2}, 2\sqrt{1-y^2}]\}$

Por tanto $T = \{(x,y,z);\ y \in [-1,1],\ x \in [-2\sqrt{1-y^2}, 2\sqrt{1-y^2}],\ z \in [x^2+3y^2, 4-y^2]\}$

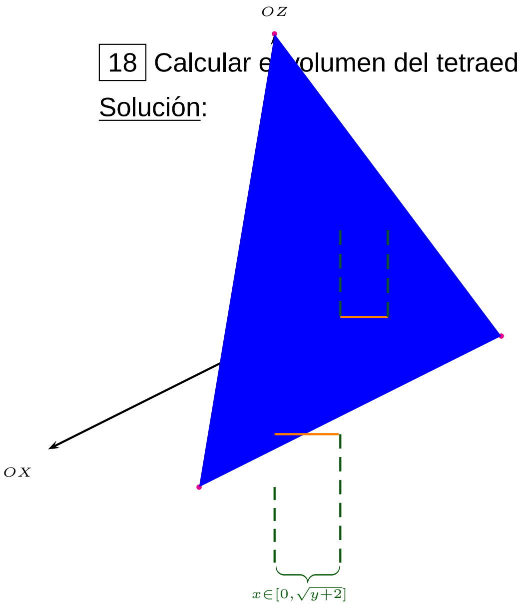
$$V = \iiint_T 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} \left[\int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} \left[\int_{x^2+3y^2}^{4-y^2} 1\,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$$

$$\int_{x^2+3y^2}^{4-y^2} 1\,\mathrm{d}z = 4 - x^2 - 4y^2$$

$$\begin{aligned} \int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} \left(4 - x^2 - 4y^2\right)\mathrm{d}x &= \left[4x - \frac{x^3}{3} - 4y^2x\right]_{x=-2\sqrt{1-y^2}}^{x=2\sqrt{1-y^2}} = \left[4x(1-y^2) - \frac{x^3}{3}\right]_{x=-2\sqrt{1-y^2}}^{x=2\sqrt{1-y^2}} \\ &= \left(8\sqrt{1-y^2}(1-y^2) - \frac{\left(2\sqrt{1-y^2}\right)^3}{3}\right) - \left(-8\sqrt{1-y^2}(1-y^2) + \frac{\left(2\sqrt{1-y^2}\right)^3}{3}\right) \\ &= 16\left(1-y^2\right)\sqrt{1-y^2} - \frac{16}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^{1} \left(16(1-y^2)\sqrt{1-y^2} - \frac{16}{3}\,(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\right)\,\mathrm{d}y = 12.5664$$

$\square$



$\boxed{18}$ Calcular el volumen del tetraedro T de vértices $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,3,0)$ y $(0,0,4)$.

<u>Solución</u>:

Por tanto $T=\{(x,y,z);\ x\in[0,2],\ y\in[0,-\frac{3}{2}x+3],\ z\in[0,-2x-\frac{4}{3}y+4]\}$

$$V=\iiint\limits_T 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int\limits_0^2\left[\int\limits_0^{-\frac{3}{2}x+3}\left[\int\limits_0^{-2x-\frac{4}{3}y+4}1\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$\int\limits_0^{-2x-\frac{4}{3}y+4}1\,\mathrm{d}z=-2x-\frac{4}{3}y+4$$

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{-\frac{3}{2}x+3}\left(-2x-\frac{4}{3}y+4\right)\mathrm{d}y &= \left[-2xy-\frac{4}{6}y^2+4y\right]_{y=0}^{y=-\frac{3}{2}x+3}=-2x\left(-\frac{3}{2}x+3\right)-\frac{4}{6}\left(-\frac{3}{2}x+3\right)^2+4\left(-\frac{3}{2}x+3\right)\\ &= (-2x+4)\left(-\frac{3}{2}x+3\right)-\frac{4}{6}\left(-\frac{3}{2}x+3\right)^2\end{aligned}$$

$$\int\limits_0^2(-2x+4)\left(-\frac{3}{2}x+3\right)-\frac{4}{6}\left(-\frac{3}{2}x+3\right)^2\,\mathrm{d}x=4$$

$\square$