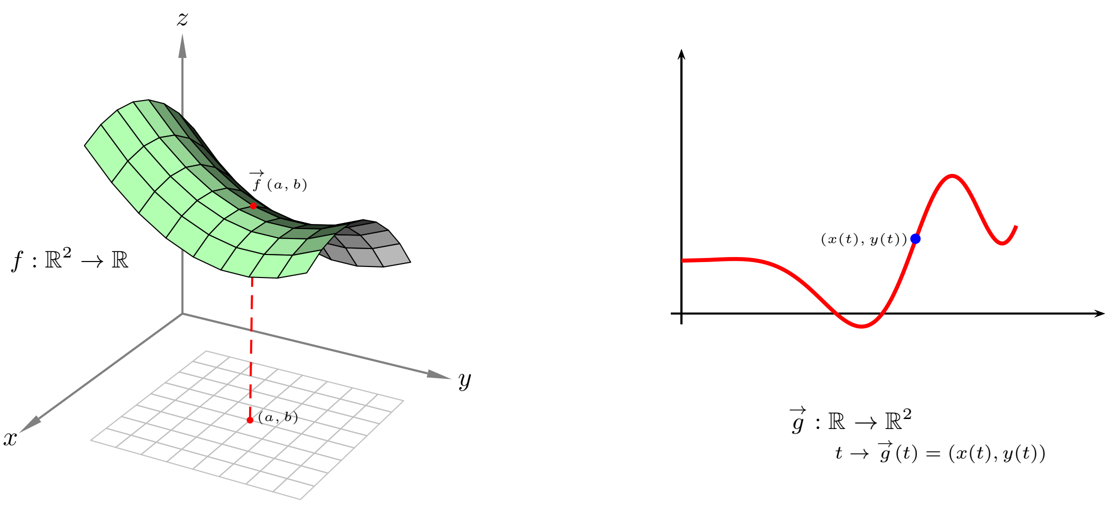
2 Funciones de varias variables

2.1 Funciones escalares y vectoriales

Se estudiarán en este tema las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, con originales en $\mathbb{R}^n$ e imágenes en $\mathbb{R}^p$. Los casos de mayor interés son: $p = 1$ o $n = 1$.

- Si $p = 1$, la función toma valores reales y se denomina función escalar. Una gráfica representativa de una función escalar solo se consigue en los casos $n = 1, 2$. Si $n = 2$, la gráfica cartesiana se debe construir en $\mathbb{R}^3$, reservando el plano XY para los originales y el eje OZ para las imágenes (ver Figura (2.1(a))).

- Si $n = 1$, la función es de la forma $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$. Llamaremos curvas en $\mathbb{R}^p$ a las funciones de este tipo. En su representación gráfica solo se considera el espacio de llegada (ver Figura (2.1(b))).



(a) Función escalar (b) Curva

Figura 2.1: Ejemplos de gráficas.

En el caso general, para cualesquiera n y p, la función $\vec{f}$ es equivalente a p funciones escalares, ya que si $\vec{f}(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^p$, entonces $\vec{f}(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_p(x_1, ..., x_n))$. Las funciones escalares

$f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son denominadas funciones componentes de $\vec{f}$. Por ejemplo, la función $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(x,y) = (x^2-2,\, \mathrm{sen}(xy),\, x^y)$ tiene asociadas las funciones componentes:

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\; f_1(x,y) = x^2 - 2,$$
$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\; f_2(x,y) = \mathrm{sen}(xy),$$
$$f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\; f_3(x,y) = x^y.$$

Definición 2.1.1 Se llama dominio de una función vectorial $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ al conjunto:

$$\mathrm{Dom}(\vec{f}) = \{\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n;\ \text{existe } \vec{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^p \text{ tal que } \vec{\boldsymbol{y}} = \vec{f}(\vec{\boldsymbol{x}})\}.$$

Dada una función vectorial $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, la existencia de $\vec{f}(\vec{\boldsymbol{x}})$ implica que existan $f_1(\vec{\boldsymbol{x}})$,...,$f_p(\vec{\boldsymbol{x}})$, por lo que:

$$\mathrm{Dom}(\vec{f}) = \mathrm{Dom}(f_1) \cap ... \cap \mathrm{Dom}(f_p).$$

Ejemplo 2.1.2 Determinar el dominio de la función $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{f}(x,y) = \left(\sqrt{36-4x^2-9y^2},\ \ln(xy)\right)$.
Solución: Las raíces cuadradas están definidas cuando su radicando es positivo. Por ello

$$\mathrm{Dom}(f_1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 36 - 4x^2 - 9y^2 \geq 0\}.$$

Ahora, reescribimos esta relación.

$$36 - 4x^2 - 9y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 36 \geq 4x^2 + 9y^2 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} \Leftrightarrow 1 \geq \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2.$$

El dominio es la elipse con centro $(0,0)$ y semiejes 3 y 2, y su interior.

Un logaritmo está definido si su argumento es estrictamente positivo. Por eso, $\mathrm{Dom}(f_2) = \{(x,y);\ x \cdot y > 0\}$. Es decir, es el conjunto formado polos cuadrantes primer y tercero sin contener a los ejes. De esta forma, $\mathrm{Dom}(\vec{f}) = \{(x,y);\ 36 - 4x^2 - 9y^2 \geq 0,\ x \cdot y > 0\}$ es el conjunto representado en la Figura (2.2).

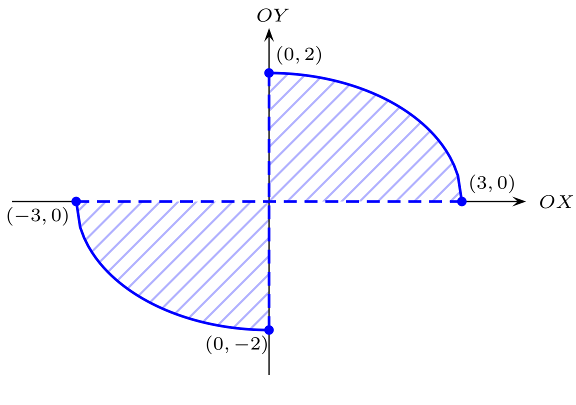


Figura 2.2: Dominio de $f(x,y) = \left(\sqrt{36-4x^2-9y^2}, \ln(xy)\right)$.

□

Ejemplo 2.1.3 Calcular el dominio de la función $\vec{g}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\vec{g}(x,y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-y}},\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

Solución: El denominador de g_1 debe ser no nulo, y el radicando del denominador estrictamente positivo, por lo que $\mathrm{Dom}(g_1)=\{(x,y);\ x-y>0\}$. Es el semiplano situado por debajo de la recta $x-y=0$, sin contener a dicha recta.

El denominador de g_2 debe ser no nulo, por lo que $\mathrm{Dom}(g_2)=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. Por tanto

$$\mathrm{Dom}(\vec{g})=\mathrm{Dom}(g_1)=\{(x,y);\ x-y>0\}.$$

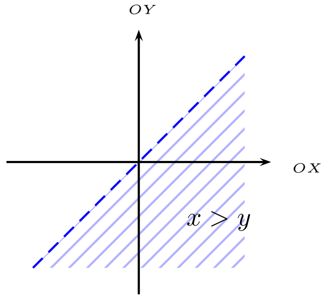


Figura 2.3: $\mathrm{Dom}(\vec{g})=\left(\frac{1}{\sqrt{x-y}},\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

□

Ejemplo 2.1.4 Calcular el dominio de la función $\vec{h}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\vec{h}(x,y)=\left(\mathrm{e}^{1/x},\,\mathrm{sen}(\frac{x}{y})\right)$.

Solución: $\mathrm{Dom}(h_1)=\{(x,y);\ x\neq 0\}$. Es decir, es el plano $\mathbb{R}^2$ excepto el eje OY.

$\mathrm{Dom}(h_2)=\{(x,y);\ y\neq 0\}$. Es decir, es el plano $\mathbb{R}^2$ excepto el eje OX. Por tanto $\mathrm{Dom}(\vec{h})$ es el plano $\mathbb{R}^2$ excepto los ejes.

□

Ejemplo 2.1.5 Calcúlese analíticamente y dibújese en el plano $\mathbb{R}^2$, el dominio de la función: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\ln\left(\frac{y}{x^2+y^2-1}\right)$. Expresar el dominio en coordenadas rectangulares y polares.

Solución: El cociente $\frac{y}{x^2+y^2-1}$ solo existe si $x^2+y^2-1\neq 0$. Además, el logaritmo solo está definido para los números reales estrictamente positivos, por lo que se debe exigir que $\frac{y}{x^2+y^2-1}>0$, es decir, numerador y denominador deben tener el mismo signo. Existen dos posibilidades para eso:

$$1^{\text{a}}\left\{\begin{array}{l} y>0\\ x^2+y^2-1>0\end{array}\right.,\quad 2^{\text{a}}\left\{\begin{array}{l} y<0\\ x^2+y^2-1<0\end{array}\right.$$

que son equivalentes a:

$$1^{\text{a}}\left\{\begin{array}{l} y>0\\ |(x,y)|>1\end{array}\right.,\quad 2^{\text{a}}\left\{\begin{array}{l} y<0\\ |(x,y)|<1\end{array}\right. .$$

Así, el dominio es: $\mathrm{Dom}(f)=\{(x,y);\ y>0,\ |(x,y)|>1\}\cup\{(x,y);\ y<0,\ |(x,y)|<1\}$, y la representación gráfica está en la Figura (2.4).

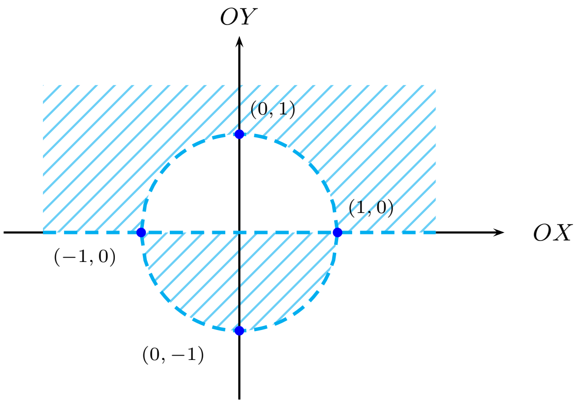


Figura 2.4: Dominio de la función $\ln\left(\frac{y}{x^2+y^2-1}\right)$

El dominio en coordenadas polares es: $\mathrm{Dom}(f) = \{(r,\theta);\ \theta \in (0,\pi),\ r > 1\} \cup \{(r,\theta);\ \theta \in (\pi, 2\pi),\ 0 < r < 1\}$.

□

Definición 2.1.6 Dada una función escalar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y un número real k, llamaremos conjunto de nivel de f asociado a k, y lo denotaremos por $L(k)$ al conjunto

$$f^{-1}(k) = \{\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{Dom}(f);\ f(\vec{\boldsymbol{x}}) = k\}.$$

Para dibujar los conjuntos de nivel $L(k)$ se acostumbra a tomar valores de k en progresión aritmética.

Si $n = 2$ el conjunto de nivel $L(k)$ es la curva o curvas que se obtienen al intersecar la gráfica de f con plano de ecuación $z = k$. Las curvas obtenidas por las intersecciones con distintos planos se proyectan sobre el plano XY.

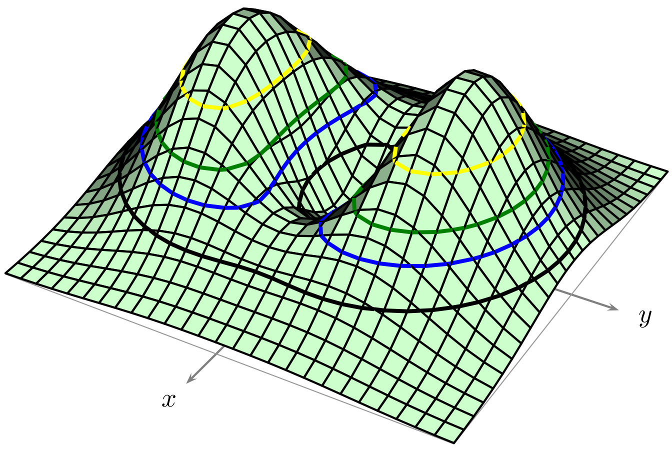


Figura 2.5: Intersección de gráfica con planos horizontales

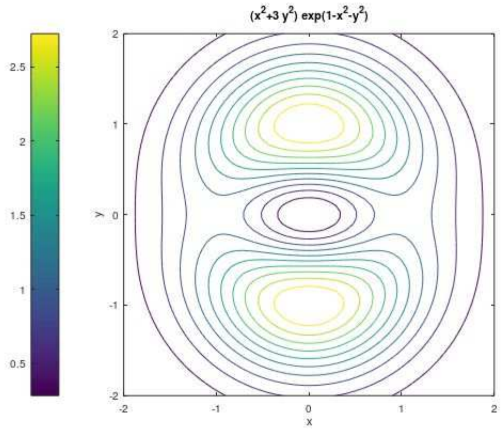


Figura 2.6: Curvas de nivel

Ejemplos conocidos de curvas de nivel son las curvas de altitud en los mapas topográficos (Figura (2.7)) y las isóbaras en los mapas meteorológicos (Figura (2.8)).

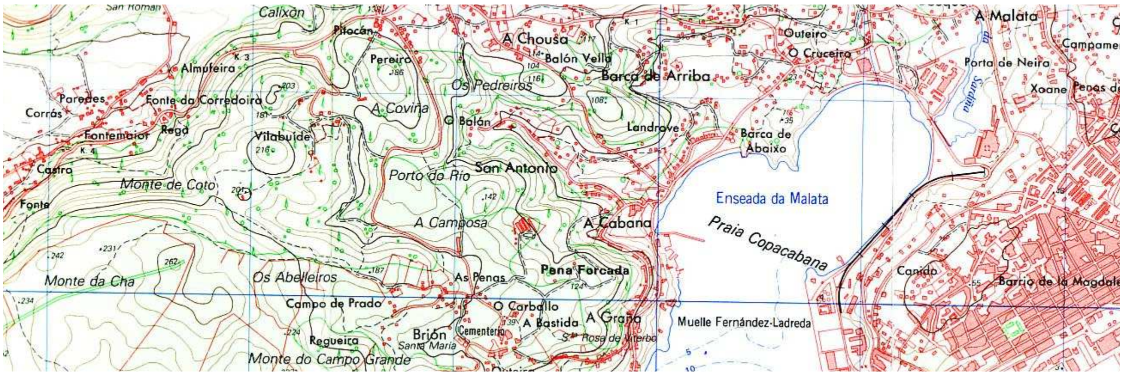


Figura 2.7: Líneas de altitud.

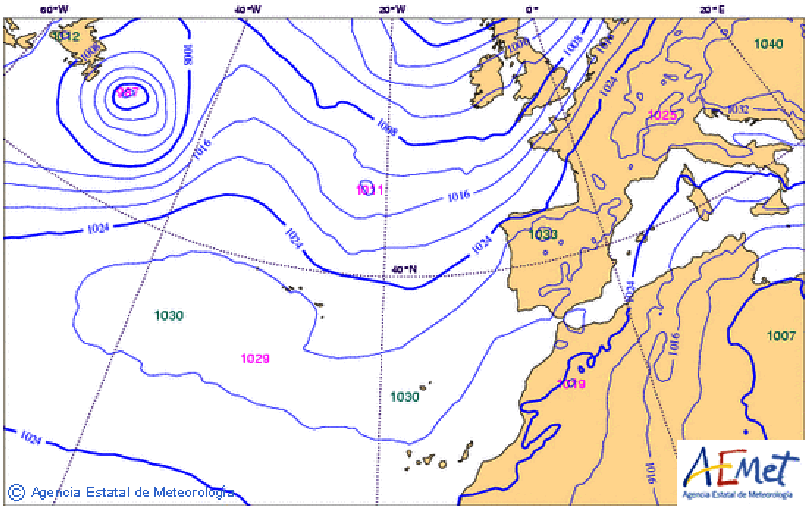


Figura 2.8: Mapa de isóbaras.

2.2 Límite y límites restringidos

Definición 2.2.1 La función vectorial $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, tiene por límite (global) $\vec{\ell}$ cuando $\vec{x}$ tiende a $\vec{a}$, y se escribe $\vec{\ell} = \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x})$, se verifica:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que si } \vec{x} \in \mathrm{Dom}(\vec{f}),\ 0 < |\vec{x} - \vec{a}| < \delta \Rightarrow |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{\ell}\,| < \varepsilon.$$

Definición 2.2.2 Dada una función vectorial $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, y un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$, se dice que $\vec{\ell}$ es el límite de $\vec{f}$ en el punto $\vec{a}$ relativo al conjunto S, y se escribe $\vec{\ell} = \lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{a} \\ \vec{x}\in S}} \vec{f}(\vec{x})$, si:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que si } \vec{x} \in \mathrm{Dom}(\vec{f}),\ \vec{x} \in S,\ 0 < |\vec{x} - \vec{a}| < \delta \Rightarrow |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{\ell}\,| < \varepsilon.$$

Observación 2.2.3 1. Si existe el límite de una función en un punto, existen todos los límites restringidos en dicho punto y sus valores coinciden con el del límite.

2. Si algún limite restringido no existe, entonces no existe el límite.

3. Si existen dos límites restringidos en un punto, y sus valores no coinciden, entonces no existe el límite en dicho punto.

En ocasiones será complicado calcular algún límite trabajando con coordenadas rectangulares, por lo que se usarán coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$. Para eso se debe tener en cuenta que:

$$(x,y) \to (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \to 0 \\ y \to 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2 \to 0 \\ y^2 \to 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x^2 + y^2 \to 0 \Leftrightarrow r^2 \to 0 \Leftrightarrow r \to 0$$

por lo que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \vec{f}(x,y) = \lim_{r\to 0} \vec{f}(r\,\cos(\theta),\, r\,\operatorname{sen}(\theta)).$$

Para puntos $(a,b) \neq (0,0)$, es necesario realizar previamente el cambio de variable $(s,t) = (x,y) - (a,b)$. Así,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \vec{f}(x,y) = \lim_{(s,t)\to(0,0)} \vec{f}(s+a, t+b).$$

$\square$

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} (x^2\,y - 3y) = 0 - 3 = -3.$

$\square$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{3xy}{x^2+y^2} = \dfrac{-6}{5}.$

$\square$

(3) Comprobar que no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

Solución: Si nos acercamos a $(0,0)$ por la recta de ecuación $y = kx$, se verifica:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=kx}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2k}{1+k^2} = \frac{2k}{1+k^2},$$

cuyo valor depende de k, de hecho todos los límites restringidos son distintos. En consecuencia, no existe el límite.

$\square$

(4) Utilizando coordenadas polares demostrar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0.$

Solución:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{5r^2\,\cos^2(\theta)\,r\,\operatorname{sen}(\theta)}{r^2} = \lim_{r\to 0} 5\,\cos^2(\theta)\,r\,\operatorname{sen}(\theta) = 0.$$

$\square$

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{x-2}{x^2-4y^2}$ es una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$. Para trabajar en coordenadas polares se debe realizar el cambio de variable $s = x-2$, $t = y-1$, con lo que

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x-2}{x^2-4y^2} &= \lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x-2}{x^2-(2y)^2} = \lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{s}{(s+2)^2-(2t+2)^2} \\
&= \lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{s}{s^2+4s+4-4t^2-8t-4} = \lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{s}{s^2+4s-4t^2-8t} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r\,\cos(\theta)}{r^2\,\cos^2(\theta)+4\,r\,\cos(\theta)-4\,r^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)-8\,r\,\mathrm{sen}(\theta)} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{\cos(\theta)}{r\,\cos^2(\theta)+4\,\cos(\theta)-4\,r\,\mathrm{sen}^2(\theta)-8\,\mathrm{sen}(\theta)} \\
&= \frac{\cos(\theta)}{4\,\cos(\theta)-8\,\mathrm{sen}(\theta)}.
\end{aligned}
$$

No existe el límite.

□

Proposición 2.2.4 Sean $\vec{f} = (f_1, ..., f_p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ y $\vec{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^n$. Condición necesaria y suficiente para que $\lim\limits_{\vec{\boldsymbol{x}}\to\vec{\boldsymbol{a}}} \vec{f}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \vec{\ell} = (\ell_1, ..., \ell_p)$ es que, para $k = 1, ..., p$, se verifique $\lim\limits_{\vec{\boldsymbol{x}}\to\vec{\boldsymbol{a}}} f_k(\vec{\boldsymbol{x}}) = \ell_k$.

Proposición 2.2.5 Dadas $\vec{f}, \vec{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ funciones vectoriales para las que existen $\lim\limits_{\vec{\boldsymbol{x}}\to\vec{\boldsymbol{a}}} \vec{f}(\vec{\boldsymbol{x}})$, $\lim\limits_{\vec{\boldsymbol{x}}\to\vec{\boldsymbol{a}}} \vec{g}(\vec{\boldsymbol{x}})$. Se verifica:

1. $\lim\limits_{\vec{\boldsymbol{x}}\to\vec{\boldsymbol{a}}} \vec{f}(\vec{\boldsymbol{x}}) + \lim\limits_{\vec{\boldsymbol{x}}\to\vec{\boldsymbol{a}}} \vec{g}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \lim\limits_{\vec{\boldsymbol{x}}\to\vec{\boldsymbol{a}}} (\vec{f} + \vec{g})(\vec{\boldsymbol{x}})$,

2. $\lim\limits_{\vec{\boldsymbol{x}}\to\vec{\boldsymbol{a}}} (\alpha \vec{f})(\vec{\boldsymbol{x}}) = \alpha \lim\limits_{\vec{\boldsymbol{x}}\to\vec{\boldsymbol{a}}} \vec{f}(\vec{\boldsymbol{x}})$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

3. si $\lim\limits_{\vec{\boldsymbol{x}}\to\vec{\boldsymbol{a}}} \vec{f}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \vec{\ell}$, entonces $\lim\limits_{\vec{\boldsymbol{x}}\to\vec{\boldsymbol{a}}} |\vec{f}(\vec{\boldsymbol{x}})| = |\vec{\ell}|$.

   Si f, g son funciones escalares se verifican, además, las siguientes propiedades:

4. $\lim\limits_{\vec{\boldsymbol{x}}\to\vec{\boldsymbol{a}}} (f \cdot g)(\vec{\boldsymbol{x}}) = \lim\limits_{\vec{\boldsymbol{x}}\to\vec{\boldsymbol{a}}} f(\vec{\boldsymbol{x}}) \cdot \lim\limits_{\vec{\boldsymbol{x}}\to\vec{\boldsymbol{a}}} g(\vec{\boldsymbol{x}})$,

5. si $\lim\limits_{\vec{\boldsymbol{x}}\to\vec{\boldsymbol{a}}} g(\vec{\boldsymbol{x}}) \neq 0$, entonces $\lim\limits_{\vec{\boldsymbol{x}}\to\vec{\boldsymbol{a}}} \left(\dfrac{f}{g}\right)(\vec{\boldsymbol{x}}) = \dfrac{\lim\limits_{\vec{\boldsymbol{x}}\to\vec{\boldsymbol{a}}} f(\vec{\boldsymbol{x}})}{\lim\limits_{\vec{\boldsymbol{x}}\to\vec{\boldsymbol{a}}} g(\vec{\boldsymbol{x}})}$.

2.3 Continuidad

Definición 2.3.1 Sea $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, se dice que

1. $\vec{f}$ es continua en un punto $\vec{\boldsymbol{a}}$ si $\lim\limits_{\vec{\boldsymbol{x}}\to\vec{\boldsymbol{a}}} \vec{f}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \vec{f}(\vec{\boldsymbol{a}})$.

2. $\vec{f}$ es continua en un conjunto si lo es en cada uno de sus puntos.

Proposición 2.3.2 Sea $\vec{f} = (f_1, ..., f_p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ y $\vec{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^n$. Condición necesaria y suficiente para que $\vec{f}$ sea continua en $\vec{\boldsymbol{a}}$ es que cada una de las funciones componentes f_k, $k = 1, ..., p$ sea continua en $\vec{\boldsymbol{a}}$.

Proposición 2.3.3 Propiedades de la continuidad de funciones en un punto $\vec{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^n$.

1. Si $\vec{f}, \vec{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ son funciones continuas en $\vec{\boldsymbol{a}}$, entonces $\vec{f} + \vec{g}$ es continua en $\vec{\boldsymbol{a}}$.
2. Si $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es continua en $\vec{\boldsymbol{a}}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda \vec{f}$ es continua en $\vec{\boldsymbol{a}}$.
3. Si $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es continua en $\vec{\boldsymbol{a}}$ y $\vec{g} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ o es en $\vec{f}(\vec{\boldsymbol{a}})$, entonces $\vec{g} \circ \vec{f}$ es continua en $\vec{\boldsymbol{a}}$.
4. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $\vec{\boldsymbol{a}}$, entonces $f \cdot g$ es continua en $\vec{\boldsymbol{a}}$.
5. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $\vec{\boldsymbol{a}}$ y $g(\vec{\boldsymbol{a}}) \neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es continua en $\vec{\boldsymbol{a}}$.

Algunos ejemplos de funciones continuas son:

(1) Las aplicaciones constantes son continuas en todo punto.

(2) Las proyecciones: $p_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p_k(x_1, ..., x_n) = x_k$, $k = 1, ..., n$ son continuas en todo punto.

(3) Los polinomios son funciones continuas, por ser suma de productos de proyecciones.

(4) El módulo $|\ | : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua por ser composición de continuas.

Ejemplo 2.3.4 Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

1.- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^3 + y^3}$

Solución: Es cociente de funciones continuas, por lo que es continua en todos los puntos en los que no se anula el denominador. Es decir, es continua excepto cuando $x = -y$.

□

2.- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x \cdot y}\right)$

Solución: La función sen es continua en todo punto, por lo que g será continua donde lo sea $\dfrac{1}{xy}$; es decir, en todos los puntos en los que $x \cdot y$ no se anula. El conjunto es $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \cdot y \neq 0\}$.

□

3.- $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

Solución: Como las funciones $\ln$ y $1 - x^2 - y^2$ son continuas en sus dominios de definición, la composición también. Es decir, es continua en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 - x^2 - y^2 > 0\} = \mathcal{B}((0, 0); 1)$.

□

4.- $\vec{j} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{j}(x, y) = \left(x^2 y, \dfrac{y + x^3}{1 + x^2}\right)$

Solución: La función $\vec{j}_1(x, y) = x^2 y$ es continua en $\mathbb{R}^2$ por ser polinómica. La función $\vec{j}_2(x, y) = \frac{y+x^3}{1+x^2}$ es continua en $\mathbb{R}^2$ por ser un cociente de polinomios y no anularse el polinomio denominador. Por tanto, $\vec{j}(x, y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$.

□

Proposición 2.3.5 Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en $\vec{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^n$ y $f(\vec{\boldsymbol{a}}) > 0$, entonces existe una bola $\mathcal{B}(\vec{\boldsymbol{a}}, r)$ tal que $f(\vec{\boldsymbol{x}}) > 0$ para todo $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{B}(\vec{\boldsymbol{a}}, r)$.

Demostración. Por ser f continua en $\vec{\boldsymbol{a}}$ se verifica:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tal que si } |\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{a}}| < \delta \text{ entonces } |f(\vec{\boldsymbol{x}}) - f(\vec{\boldsymbol{a}})| < \varepsilon$$

$$|f(\vec{\boldsymbol{x}}) - f(\vec{\boldsymbol{a}})| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(\vec{\boldsymbol{x}}) - f(\vec{\boldsymbol{a}}) < \varepsilon \Leftrightarrow f(\vec{\boldsymbol{a}}) - \varepsilon < f(\vec{\boldsymbol{x}}) < f(\vec{\boldsymbol{a}}) + \varepsilon$$

Si elegimos $\varepsilon = \frac{f(\vec{a})}{2}$ se verifica que existe δ_0 tal que $f(\vec{\boldsymbol{x}}) > f(\vec{\boldsymbol{a}}) - \frac{f(\vec{a})}{2} = \frac{f(\vec{a})}{2} > 0$ para $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{B}(\vec{\boldsymbol{a}}, \delta_0)$.

□

Corolario 2.3.6 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función continua. Se verifica:

(a) El conjunto $\{\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{Dom}(\vec{f});\ f(\vec{\boldsymbol{x}}) > 0\}$ es abierto.

(b) El conjunto $\{\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{Dom}(\vec{f});\ f(\vec{\boldsymbol{x}}) < 0\}$ es abierto.

(c) El conjunto $\{\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{Dom}(\vec{f});\ f(\vec{\boldsymbol{x}}) = 0\}$ es cerrado.

Teorema 2.3.7 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función continua en un conjunto compacto A, entonces existen los valores máximo$\{f(\vec{\boldsymbol{x}});\ \vec{\boldsymbol{x}} \in A\}$ y mínimo$\{f(\vec{\boldsymbol{x}});\ \vec{\boldsymbol{x}} \in A\}$.

2.4 Ejercicios

1.- Calcular los siguientes límites: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}}{x+1}$.

Solución: El primer límite es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Usaremos coordenadas polares.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta)\ r\,\mathrm{sen}(\theta)}{r^2} = \lim_{r\to 0}[\cos(\theta)\ \mathrm{sen}(\theta)] = \cos(\theta)\ \mathrm{sen}(\theta)$$

El valor del límite depende del ángulo bajo el que nos acerquemos al $(0,0)$, por lo que existirán límites restringidos con valores diferentes. Por ejemplo:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x=y}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{0}{0+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Para calcular el segundo límite se sustituyen x y y por 0. Así:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}}{x+1} = \frac{e^0}{1} = 1.$$

□

2.- Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Estudiar la continuidad en el punto $(0,0)$.

Solución: Calculamos el límite de la función en $(0,0)$ y $f(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\,\cos^2(\theta)\,r\,\operatorname{sen}(\theta)}{r^2}=\lim_{r\to 0}\left[r\,\cos^2(\theta)\,\operatorname{sen}(\theta)\right]=0.$$

Como $f(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$, la función es continua en $(0,0)$.

□

3.- Comprobar que la función $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y^2}$ tiene límite a lo largo de cada recta, pero no posee límite en el punto $(0,0)$.

Solución: Se calculan los límites a través de las rectas $y=\lambda x$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\lambda x}}\frac{x}{x+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+\lambda^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\lambda^2x}=1$$

Si ahora se calcula el límite restringido a la recta $x=0$ se obtiene:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}}\frac{x}{x+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=\lim_{y\to 0}0=0.$$

Como existen límites restringidos con valores diferentes, el límite (global) no existe.

□