Ejercicios básicos

1 Usando la definición, obtener la derivada direccional de las funciones que a continuación se consideran en la dirección del vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ en el punto (a,b), siendo:

a) $f(x,y)=2x^2+3y^2$; $\vec{\boldsymbol{v}}=\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right),\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$, $(a,b)=(1,1)$

b) $g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$; $\vec{\boldsymbol{v}}=\left(\frac{3}{5},\frac{-4}{5}\right)$, $(a,b)=(3,4)$

c) $h(x,y)=\frac{1}{x-y}$; $\vec{\boldsymbol{v}}=\left(\frac{12}{13},\frac{-5}{13}\right)$, $(a,b)=(2,1)$

Solución:

a) 1ª forma:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{f\left[(1,1)+t\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]-g(1,1)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{f\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}},1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)-5}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{3\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+3\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2-5}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{3+\frac{6t}{\sqrt{2}}+\frac{t^2}{2}+2+\frac{4t}{\sqrt{2}}+\frac{t^2}{2}-5}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{10t}{\sqrt{2}}+t^2}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{10}{\sqrt{2}}+t\right)=\frac{10}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

2ª forma: Sean $\alpha(t)=(1,1)+t\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right),\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}},1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ y $\Phi=f\circ\alpha$. Se verifica $\Phi'(0)=D_{\vec{\boldsymbol{v}}}f(1,1)$

$$\Phi(t)=f\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}},1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)=2\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+3\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2=5\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\Phi'(t)=10\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Phi'(0)=10\frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) 1ª forma:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{g\left[(3,4)+t\left(\frac{3}{5},\frac{-4}{5}\right)\right]-g(3,4)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{g\left(3+\frac{3t}{5},4-\frac{4t}{5}\right)-5}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{9+\frac{4}{25}t^2+\frac{18t}{5}+16+\frac{16}{25}t^2-\frac{32t}{5}}-5}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{25-\frac{14}{5}t+\frac{20}{25}t^2}-5}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{-\frac{14}{5}+\frac{40}{25}t^2}{2\sqrt{25-\frac{14}{5}t+\frac{20}{25}t^2}}}{1}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{14}{5}+\frac{40}{25}t^2}{2\sqrt{25-\frac{14}{5}t+\frac{20}{25}t^2}}=-\frac{14}{50}
\end{aligned}$$

2ª forma: Sean $\beta(t)=(3,4)+t\left(\frac{3}{5},\frac{-4}{5}\right)=\left(3+\frac{3t}{5},4-\frac{4t}{5}\right)$ y $\Gamma=g\circ\beta$. Se verifica $\Gamma'(0)=D_{\vec{\boldsymbol{v}}}g(3,4)$

$$\Gamma(t)=g\left(3+\frac{3t}{5},4-\frac{4t}{5}\right)=\sqrt{\left(3+\frac{3t}{5}\right)^2+\left(4-\frac{4t}{5}\right)^2}$$

$$\Gamma'(t)=\frac{1}{2\sqrt{\left(3+\frac{3t}{5}\right)^2+\left(4-\frac{4t}{5}\right)^2}}\left[2\left(3+\frac{3t}{5}\right)\frac{3}{5}+2\left(4-\frac{4t}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$$

$\Gamma'(0) = \frac{1}{2\sqrt{3^2+4^2}}\left(2\cdot 3\cdot \frac{3}{5} + 2\cdot 4\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\right) = -\frac{7}{25}$

c) 1ª forma:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{h\left[(2,1)+t\left(\frac{12}{13},\frac{-5}{13}\right)\right]-h(2,1)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{h\left(2+\frac{12t}{13},1-\frac{5t}{13}\right)-1}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2+\frac{12t}{13}-1+\frac{5t}{13}}-1\right]\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{1}{1+\frac{17t}{13}}-1\right]\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{13}{13+17t}-1\right] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{17t}{13+17t}\right] = \lim_{t\to 0}\frac{17t}{13t+17t^2}
\end{aligned}$$

2ª forma: Sean $\lambda(t) = (2,1)+t\left(\frac{12}{13},\frac{-5}{13}\right) = \left(2+\frac{12t}{13},1-\frac{5t}{13}\right)$ y $\Sigma = h\circ\lambda$. Se verifica $\Sigma'(0) = D_{\vec{v}}h(2,1)$

$\Sigma(t) = h\left(2+\frac{12t}{13},1-\frac{5t}{13}\right) = \frac{1}{\left(2+\frac{12t}{13}\right)-\left(1-\frac{5t}{13}\right)} = \frac{1}{1+\frac{17t}{13}} = \frac{1}{\frac{13+17t}{13}} = \frac{13}{17t+13}$

$\Sigma'(t) = \frac{-13\cdot 17}{(17t+13)^2}$

$\Sigma'(0) = \frac{-13\cdot 17}{13^2} = -\frac{17}{13}$

□

$\boxed{2}$ Estudiar la existencia de las derivadas direccionales en $(0,0,0)$ de la función:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^2}{x^2+y^4+z^2} & \text{si } (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
D_v f(0,0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(tv_1,tv_2,tv_3)-f(0,0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{tv_1\ (tv_2)^2}{(tv_1)^2+(tv_2)^4+(tv_3)^2}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{t^3v_1\ (v_2)^2}{t^2\left[(v_1)^2+t^2\,(v_2)^4+(v_3)^2\right]} = \lim_{t\to 0}\frac{v_1\ (v_2)^2}{(v_1)^2+t^2\,(v_2)^4+(v_3)^2}
\end{aligned}$$

- Si $v_1\neq 0$ o $v_3\neq 0$, entonces:

$$D_v f(0,0,0) = \frac{v_1\ (v_2)^2}{(v_1)^2+(v_3)^2}$$

- Si $v_1 = v_3 = 0$, entonces $v_2 = \pm 1$, por lo que:

$$D_v f(0,0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t^2} = 0$$

□

$\boxed{3}$ Hallar el gradiente de las siguientes funciones en un punto arbitrario.

a) $f(x,y) = \mathrm{e}^{2xy}$,

b) $g(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$,

c) $h(x,y,z) = x\ \mathrm{sen}(y\cdot z)$

Solución:

a) $f(x,y) = \mathrm{e}^{2xy}$, $\nabla f(x,y) = \left(2y\,\mathrm{e}^{2xy}, 2x\,\mathrm{e}^{2xy}\right)$

b) $g(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\nabla g(x,y) = \left(\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)$

c) $h(x,y,z) = x\,\operatorname{sen}(y\cdot z)$, $\nabla h(x,y,z) = (\operatorname{sen}(yz),\, xz\,\cos(yz),\, xy\,\cos(yz))$

$\square$

$\boxed{4}$ Calcular funciones escalares f y g tales que:

a) $\nabla f(x,y,z) = (2x,\, 2y,\, 2z)$,

b) $\nabla g(x,y) = (\mathrm{e}^x\,\operatorname{sen}(y),\, \mathrm{e}^x\,\cos(y))$.

Solución:

a) Si $\nabla f(x,y,z) = (2x,\, 2y,\, 2z)$ entonces $\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z \end{array}\right.$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x \Rightarrow f(x,y,z) = x^2 + \alpha(y,z)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial \alpha}{\partial y}(y,z) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial y}(y,z) = 2y \Rightarrow \alpha(y,z) = y^2 + \beta(z)$$

En este momento se puede escribir $f(x,y,z) = x^2 + \alpha(y,z) = x^2 + y^2 + \beta(z)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \beta'(z) \end{array}\right\} \Rightarrow \beta'(z) = 2z \Rightarrow \beta(z) = z^2 + cte$$

Finalmente, $f(x,y,z) = x^2 + \alpha(y,z) = x^2 + y^2 + \beta(z) = x^2 + y^2 + z^2 + cte$

b) Si $\nabla g(x,y) = (\mathrm{e}^x\,\operatorname{sen}(y), \mathrm{e}^x\,\cos(y))$ entonces $\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \mathrm{e}^x\,\operatorname{sen}(y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \mathrm{e}^x\,\cos(y) \end{array}\right.$

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \mathrm{e}^x\,\operatorname{sen}(y) \Rightarrow g(x,y) = \mathrm{e}^x\,\operatorname{sen}(y) + \alpha(y)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \mathrm{e}^x\,\cos(y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \mathrm{e}^x\,\cos(y) + \alpha'(y) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha'(y) = 0 \Rightarrow \alpha(y) = cte$$

Finalmente, $g(x,y) = \mathrm{e}^x\,\operatorname{sen}(y) + \alpha(y) = \mathrm{e}^x\,\operatorname{sen}(y) + cte$

$\square$

$\boxed{5}$ Para un punto (x,y) de una placa rectangular la temperatura es $T(x,y) = x^2y^3$. Si se considera el punto $(2,3)$ situado en dita placa,

a) ¿en qué dirección aumenta más rápido la temperatura en $(2,3)$?

b) ¿en que dirección disminuye más rápido a temperatura en $(2,3)$?

c) ¿en que dirección varía menos la temperatura?

Solución:

a) La dirección en la que el crecimiento es más rápido viene dada por la dirección del vector gradiente en el punto.

$$\nabla T(x,y) = (2xy^3, 3x^2y^2) \Rightarrow \nabla T(2,3) = (2\cdot 2\cdot 3^3,\, 3\cdot 2^2\cdot 3^2) = (108, 108)$$

Como $|(108,108)| = \sqrt{108^2+108^2} = 108\sqrt{2}$, el vector unitario que proporciona esta dirección es $\frac{|(108,108)|}{108\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

b) La dirección en la que el decrecimiento es más rápido viene dada por la dirección opuesta al del vector gradiente en el punto. Por eso, el vector unitario que proporciona esta dirección es $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

c) La dirección en la que la temperatura varía menos es aquella en la que la derivada direccional en el punto es nula. Para eso, se necesita que el vector unitario que marca esa dirección sea perpendicular al vector gradiente.

$$\omega \perp \nabla T(2,3) \Leftrightarrow (\omega_1,\omega_2)\cdot(108,108) = 0 \Leftrightarrow 108\omega_1 + 108\omega_2 = 0 \Leftrightarrow \omega_2 = -\omega_1$$

Como ω debe ser unitario se cumple $1 = |\,(\omega_1,\omega_2)\,| = |\,(\omega_1,-\omega_1)\,| = \sqrt{\omega_1^2+(-\omega_1^2)} = \sqrt{2}\,|\omega_1|$. Entonces $|\omega_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, es decir, $\omega_1 = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$, por lo que los posibles vectores son $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

□

$\boxed{6}$ Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a las siguientes superficies en los puntos que se indican.

a) $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$, punto $(1,2,2)$,

b) $z = \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{sen}(3y)$, punto $\left(0, \frac{\pi}{6}, 1\right)$,

c) $z = \ln(xy)$, punto $(\frac{1}{2}, 2, 0)$.

Solución:

a) El punto $(1,2,2)$ pertenece a la superficie, ya que $\sqrt{9-1^2-2^2} = 2$. Si $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$ entonces:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2-y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{-2\cdot 1}{2\cdot 2} = -\frac{1}{2}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y}{2\sqrt{9-x^2-y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{-2\cdot 2}{2\cdot 2} = -1$

La ecuación del plano es: $z = 2 - \frac{1}{2}(x-1) - 1(y-2) = \frac{9}{2} - y - \frac{1}{2}x$

b) El punto $(0, \frac{\pi}{6}, 1)$ pertenece a la superficie, ya que $\mathrm{e}^{3\cdot 0}\,\mathrm{sen}(3\frac{\pi}{6}) = 1$. Si $g(x,y) = \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{sen}(3y)$ entonces:

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{sen}(3y)$, $\frac{\partial g}{\partial x}(0,\frac{\pi}{6}) = 3\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}) = 3$

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 3\mathrm{e}^{3x}\cos(3y)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(0,\frac{\pi}{6}) = 3\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

La ecuación del plano es: $z = 1 + 3(x-0) + 0(y-\frac{\pi}{6}) = 1 + 3x$

c) El punto $(\frac{1}{2}, 2, 0)$ pertenece a la superficie, ya que $\ln\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right) = 0$. Si $h(x,y) = \ln(xy)$ entonces:

$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial h}{\partial x}(\frac{1}{2},2) = 2$

$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y}$, $\frac{\partial h}{\partial y}(\frac{1}{2},2) = \frac{1}{2}$

La ecuación del plano es: $z = 0 + 2(x-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(y-2) = 2x + \frac{1}{2}y - 2$

□

$\boxed{7}$ La derivada direccional de $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ en el punto $(1,2)$ en la dirección do vector $\vec{\boldsymbol{u}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, y en la dirección de $\vec{\boldsymbol{v}} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ es 0. ¿Cuál es la derivada direccional de f en $(1,2)$ en la dirección del vector $\vec{\boldsymbol{w}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$?

Solución: Si la función no es diferenciable en el punto $(1,2)$ no se puede contestar a la pregunta. Si fuese diferenciable, se tendría lo siguiente.

$$Df_{\vec{\boldsymbol{u}}}(1,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -1$$

$$Df_{\vec{\boldsymbol{v}}}(1,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = 0 \Rightarrow 3\,\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) - 2\,\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 0$$

Si multiplicamos por 2 la primera ecuación y le sumamos la segunda se obtiene: $5\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -2$ por lo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\dfrac{2}{5}$. Entonces $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -1 + \dfrac{2}{5} = -\dfrac{3}{5}$

Por tanto: $Df_{\vec{\boldsymbol{w}}}(1,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{-2}{5}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{-3}{5}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{8}{5\sqrt{5}}$

□

$\boxed{8}$ De la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se sabe que es diferenciable y que en el punto $(1,2)$ el plano tangente a la gráfica es $2x+3y+4z=1$. ¿Se puede calcular con estos datos la derivada direccional de f en la dirección que une el punto $(1,2)$ con $(3,4)$?

Solución: La ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto (a,b) es:

$$\begin{aligned} z &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b) \\ &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot x - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot y - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot b \\ &= \left[f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot a - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot b\right] + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot y \end{aligned}$$

El plano dado se puede escribir en la forma: $z = \frac{1}{4} - \frac{2}{4}x - \frac{3}{4}y$, por lo que al identificar coeficientes se obtiene:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) &= -\tfrac{2}{4} \\ \tfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) &= -\tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

El vector gradiente en el punto $(1,2)$ es $\left(-\frac{2}{4}, -\frac{3}{4}\right)$.

La dirección que une los puntos $(1,2)$ y $(3,4)$ viene dada por $(3,4)-(1,2)=(2,2)$. Puesto que su módulo es $|(2,2)| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$, el vector unitario que la define es $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Por tanto, el valor pedido es:

$$\nabla f(1,2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{2}{4}, -\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{5}{8}\sqrt{2}$$

□

$\boxed{9}$ Se considera $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy} + \dfrac{x}{y} + \operatorname{sen}((2x+3y)\pi)$. Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,-1)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(2,-1)$.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\mathrm{e}^{xy} + 2\pi\ \cos((2x+3y)\pi) + \frac{1}{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\mathrm{e}^{xy} - \frac{x}{y^2} + 3\pi\cos((2x+3y)\pi) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 1\cdot\mathrm{e}^0 + 2\pi\cos(3\pi) + \frac{1}{1} = 2 - 2\pi \\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = 2\cdot\mathrm{e}^{-2} - 2 + 3\pi\cos(\pi) = 2\mathrm{e}^{-2} - 2 - 3\pi \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2\mathrm{e}^{xy} - 4\pi^2\operatorname{sen}(\pi\,(2x+3y)) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \mathrm{e}^{xy} - 6\pi^2\operatorname{sen}(\pi\,(2x+3y)) - \frac{1}{y^2} + xy\mathrm{e}^{xy} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = 1\cdot\mathrm{e}^0 - 4\pi^2\operatorname{sen}(3\pi) = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2,-1) = \mathrm{e}^{-2} - 6\pi^2\operatorname{sen}(\pi) - 1 - 2\mathrm{e}^{-2} = -\mathrm{e}^{-2} - 1 \end{array}\right.$$

$\square$

$\boxed{10}$ Calcular la matriz jacobiana de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $\vec{f}(x, y, z) = (2x + 4y - z,\ 6x - 3y - 4z)$ en $(1, -3, 2)$,

b) $\vec{g}(x, y, z) = (xyz,\ xy,\ x)$ en $(2, 0, 1)$.

Solución:

a)

$$f_1(x, y, z) = 2x + 4y - z \Rightarrow \nabla f_1(x, y, z) = (2, 4, -1) \Rightarrow \nabla f_1(1, -3, 2) = (2, 4, -1)$$
$$f_2(x, y, z) = 6x - 3y - 4z \Rightarrow \nabla f_2(x, y, z) = (6, -3, -4) \Rightarrow \nabla f_2(1, -3, 2) = (6, -3, -4)$$

$$\mathcal{J}_{\vec{f}}(1, -3, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

b)

$$g_1(x, y, z) = xyz \Rightarrow \nabla g_1(x, y, z) = (yz,\ xz,\ xy),\ \nabla g_1(2, 0, 1) = (0, 2, 0)$$
$$g_2(x, y, z) = xy \Rightarrow \nabla g_2(x, y, z) = (y,\ x,\ 0),\ \nabla g_2(2, 0, 1) = (0, 2, 0)$$
$$g_3(x, y, z) = x \Rightarrow \nabla g_3(x, y, z) = (1, 0, 0),\ \nabla g_3(2, 0, 1) = (1, 0, 0)$$

$$\mathcal{J}_{\vec{g}}(2, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

Ejercicios complementarios

$\boxed{11}$ Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $D_{\vec{v}} f(\vec{a}) > 0$ para un punto concreto $\vec{a}$ y cualquier vector unitario $\vec{v}$.

Solución: Si $\vec{v}$ es unitario, también lo es $-\vec{v}$. Además:

$$D_{-\vec{v}} f(\vec{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{a} + t(-\vec{v})) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{a} - t\vec{v}) - f(\vec{a})}{t}$$

Realizamos el cambio de variable $h = -t$. Con este cambio se verifica $t \to 0 \Leftrightarrow -h \to 0 \Leftrightarrow h \to 0$, con lo que:

$$D_{-\vec{v}} f(\vec{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{a} - t\vec{v}) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{-h\to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{v}) - f(\vec{a})}{-h} = -\lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{v}) - f(\vec{a})}{h} = -D_{\vec{v}} f(\vec{a})$$

$\square$

$\boxed{12}$ Calcular las derivadas parciales de primer orden de las funciones $f(x, y) = x\,y + \frac{x}{x^2+y^2}$, $g(x, y, z) = \frac{x + y\,e^z}{y^2+z}$.

Solución:

$$\nabla f(x, y) = \left(y + \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot(2x+0)}{(x^2+y^2)^2},\ x + \frac{0\cdot(x^2+y^2) - x\cdot(0+2y)}{(x^2+y^2)^2}\right) = \left(y + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\ x - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
\nabla g(x,y,z) &= \left(\frac{(1+0)(y^2+z)-(x+y\mathrm{e}^z)\cdot 0}{(y^2+z)^2}, \frac{(0+\mathrm{e}^z)(y^2+z)-(x+y\mathrm{e}^z)2y}{(y^2+z)^2}, \frac{(0+ye^z)(y^2+z)-(x+y\mathrm{e}^z)(0+1)}{(y^2+z)^2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{y^2+z}, \frac{y^2\mathrm{e}^z+z\mathrm{e}^z-2xy-2y^2\mathrm{e}^z}{(y^2+z)^2}, \frac{y^3\mathrm{e}^z+yz\mathrm{e}^z-x-y\mathrm{e}^z}{(y^2+z)^2}\right)
\end{aligned}
$$

□