5 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

5.1 Sumas de Riemann

Con la introducción del concepto de integral definida se trata de resolver el problema de hallar el área de una superficie plana delimitada por un arco de la gráfica de la función $y = f(x)$, las abscisas correspondientes a los extremos de este arco (rectas de ecuaciones $x = a$, $x = b$) y el eje OX.

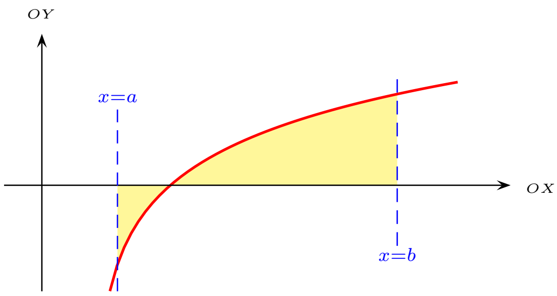


Figura 5.1: Área determinada por una curva y el eje OX.

Como es habitual en Matemáticas, cuando no sabemos resolver un problema, planteamos otro similar que sí sepamos resolver. La solución de este nuevo problema es una aproximación de la solución del problema inicial. A partir de ahí intentamos mejorar la aproximación. En el caso que vamos a estudiar, substituiremos la figura cuya área se desea calcular por otra figura formada por rectángulos. Tan solo tenemos que elegir la longitud y la altura de cada rectángulo, multiplicarlas para obtener su área y sumar las áreas de todos los rectángulos. Comenzamos eligiendo los puntos que definen las bases de los rectángulos.

Definición 5.1.1 Una partición del intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito de puntos $\{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n\}$ tales que: $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.

Se denotará por $\mathcal{P}[a, b]$ al conjunto de particiones de $[a, b]$.

Las longitudes de los rectángulos serán $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, ..., n$. Las alturas de los mismos estarán determinadas por los valores de la función en puntos concretos. Una vez elegidas las anchuras y alturas de los rectángulos, procedemos a calcular la suma de las áreas de los mismos.

Definición 5.1.2 Dada una partición $P \in \mathcal{P}[a,b]$ y una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, se define una suma de Riemann como $S(P,f) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$, con $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

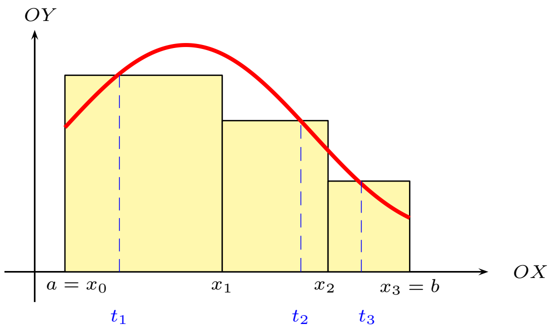


Figura 5.2: Suma de Riemann.

Observemos que estas sumas dependen tanto de la función como de la partición consideradas. Las sumas de Riemann tienen una interpretación geométrica sencilla en algunos casos. Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, las sumas aproximan el área limitada por la gráfica de f y el eje OX entre $x = a$ y $x = b$. Análogamente, se puede deducir que si $f(x) \leq 0$, $x \in [a,b]$, el valor opuesto de las sumas aproxima el área.

Existen dos casos particulares de especial importancia, para los que se consideran:

$$M_k = \text{máximo}\{f(x);\, x \in [x_{k-1},\, x_k]\},\ m_k = \text{mínimo}\{f(x);\, x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Con estos valores se definen:

(i) suma superior de Riemann de f en $[a,b]$ asociada a P: $\mathcal{U}(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot (x_k - x_{k-1})$,

(ii) suma inferior de Riemann de f en $[a,b]$ asociada a P: $\mathcal{L}(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (x_k - x_{k-1})$.

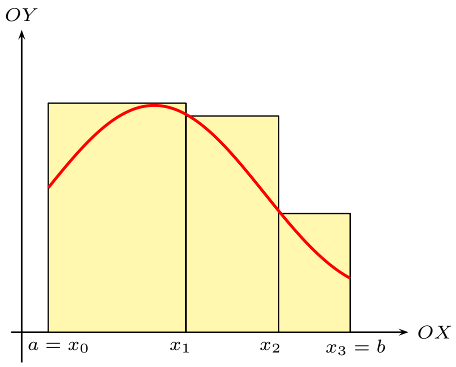


Figura 5.3: Suma superior

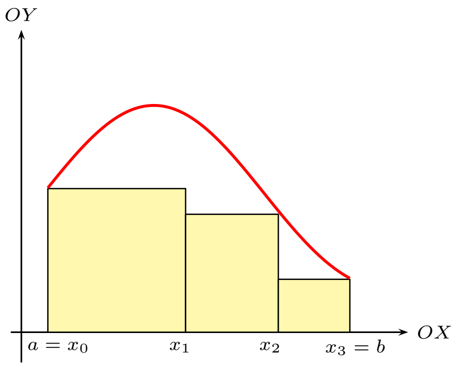


Figura 5.4: Suma inferior

Si $f(x) \geq 0$ para $x \in [a,b]$ entonces las sumas superiores aproximan por exceso el área limitada por la gráfica de f y el eje OX entre $x = a$ y $x = b$, mientras que con las sumas inferiores la aproximación es por defecto. Con una suma cualquiera no se puede determinar a priori si la aproximación es por defecto o por exceso. Además, para cualquier partición $P \in \mathcal{P}[a,b]$ se verifica $\mathcal{L}(P,f) \leq \mathcal{S}(P,f) \leq \mathcal{U}(P,f)$.

Las aproximaciones conseguidas con las sumas de Riemann mejoran al aumentar el número de puntos en la partición. En la Figura (5.5) se puede apreciar como al incluir un nuevo punto z entre x_1 e x_2 se reduce el valor de la suma superior (región de color verde) y se aumenta el de la inferior (región de color azul).

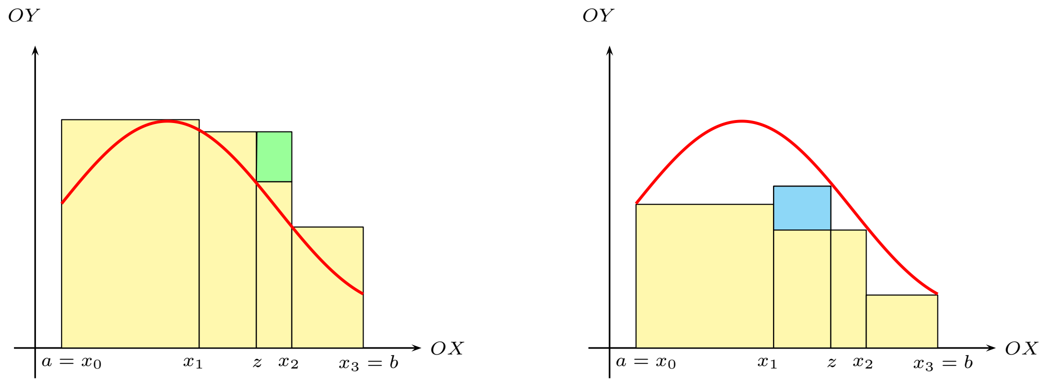


Figura 5.5: Efecto sobre as sumas del aumento de puntos en la partición.

Para conseguir una buena aproximación se deben incluir más puntos en todos los subintervalos ya creados, obligando a que los rectángulos sean cada vez más estrechos. Con este fin definimos el concepto de norma.

Definición 5.1.3 La norma duna partición $P \in \mathcal{P}[a,b]$ es el número:

$$\|P\| = \text{máximo}\{x_k - x_{k-1};\ 1 \leq k \leq n\}.$$

Así, conseguir que todos los rectángulos determinados por P sean cada vez más estrechos es equivalente a que $\|P\| \to 0$.

Definición 5.1.4 Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ se define:

Integral superior de f en $[a,b]$: $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\|P\|\to 0} \{\mathcal{U}(P,f);\ P \in \mathcal{P}[a,b]\}.$

Integral inferior de f en $[a,b]$: $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\|P\|\to 0} \{\mathcal{L}(P,f);\ P \in \mathcal{P}[a,b]\}.$

Las funciones continuas verifican que $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. En este caso, el valor común de ambas integrales se llama integral de f en $[a,b]$, y se denota por $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ o $\int_a^b f$.

Observación 5.1.5 Sea f una función continua en $[a,b]$, para cualquier suma de Riemman, se verifica:

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f) = \int_a^b f.$$

Esta igualdad tiene aplicaciones muy interesantes. Por ejemplo, dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, calcularemos la longitud de un arco de su gráfica. Para eso, se aproxima dicho arco por una poligonal que una los puntos $(x_k, f(x_k))$, siendo $P = \{x_0, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$.

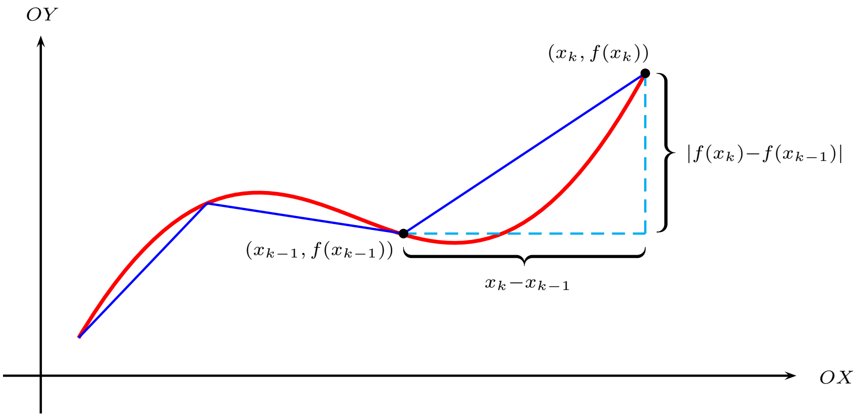


Figura 5.6: Poligonal que aproxima a una curva.

Sean $\Delta y_k = |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ y $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Si denotamos por $\Delta \ell_k$ la longitud del segmento que une $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ con $(x_k, f(x_k))$ se verifica:

$$\Delta \ell_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 \left[1 + \frac{(\Delta y_k)^2}{(\Delta x_k)^2}\right]} = \Delta x_k \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}.$$

Se $f \in \mathcal{C}^1[a, b]$ podemos aplicar el teorema del valor medio (ver resultado (5.5.1)) en cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ para deducir la existencia de $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que $f'(c_k) = \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}} = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}$. Entonces

$$\Delta \ell_k = \Delta x_k \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2}.$$

La longitud de la poligonal es: $\ell(P) = \sum_{k=1}^{n} \Delta \ell_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2}$. Esta expresión es una suma de Riemann asociada a la función $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$. Al ser función continua se verifica que la longitud del arco es:

$$\ell = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x.$$

Teorema 5.1.6 Propiedades de la integral. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$

(1) Aditividad respecto al intervalo: para todo $c \in (a, b)$ se cumple $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

(2) Linealidad: dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b f$.

Por convenio se definen: $\int_a^a f = 0$ y, si $a < b$, $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

5.2 Teoremas del cálculo integral

Teorema 5.2.1 (Teorema del valor medio del cálculo integral) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$, entonces existe un punto $c \in [a,b]$ tal que $\int\limits_a^b f = f(c) \cdot (b-a)$.

Demostración. Sean $m = f(\alpha) =$ mínimo$\{f(x); x \in [a,b]\}$, $M = f(\beta) =$ máximo$\{f(x); x \in [a,b]\}$ y $h = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$. Se verifica que $m \leq h \leq M$. Para comprobarlo se elige la partición $P = \{a,b\}$, para la que se cumple: $\mathcal{L}(P,f) = m \cdot (b-a)$, $\mathcal{U}(P,f) = M \cdot (b-a)$. Como la integral está acotada superiormente por cualquier suma superior, e inferiomente por cualquier suma inferior, podemos asegurar que $m \cdot (b-a) \leq \int\limits_a^b f \leq M \cdot (b-a)$. Al dividir esta expresión entre $b-a$ se obtiene $m \leq h \leq M$.

Por otra parte, al ser f continua en $[a,b]$ también lo es $g(x) = f(x) - h$. Además, $g(\alpha) = f(\alpha) - h \leq 0$ y $g(\beta) = f(\beta) - h \geq 0$, por lo que existe c entre α y β tal que $g(c) = 0$, es decir, $f(c) = h$. Substituyendo en la expresión anterior el valor de h se obtiene el resultado.

$\square$

Teorema 5.2.2 (Primer Teorema fundamental) Dadas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ función continua y $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int\limits_a^x f$, se verifica que F es derivable en (a,b) y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$.

Demostración. El valor de la derivada de F es:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int\limits_a^{x+h} f - \int\limits_a^x f\right].$$

La aditividad de la integral con respecto al intervalo permite escribir $\int\limits_a^{x+h} f = \int\limits_a^x f + \int\limits_x^{x+h} f$, por lo que:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} f.$$

El teorema del valor medio para funciones continuas dice que $\int\limits_x^{x+h} f = f(c) \cdot ((x+h) - x) = f(c) \cdot h$ con c entre x y $x+h$, por lo que $F'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(c)\cdot h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} f(c)$. Por último, como f es continua se verifica $\lim\limits_{h\to 0} f(c) = f(x)$ y $F'(x) = f(x)$.

$\square$

Definición 5.2.3 Una primitiva para una función f en un intervalo (a,b) es otra función g tal que $g'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$.

Proposición 5.2.4 Si $g_1(x)$ y $g_2(x)$ son primitivas de una misma función f, entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $g_1(x) = g_2(x) + k$.

Demostración. Que una función sea constante es equivalente a que su derivada sea nula. Observemos que $(g_1 - g_2)'(x) = g_1'(x) - g_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Así $g_1(x) - g_2(x) = k$, es decir $g_1(x) = g_2(x) + k$. □

Teorema 5.2.5 (Segundo teorema fundamental. Regla de Barrow) Sea f función continua en $[a, b]$ y g una primitiva de f, entonces $\int_a^b f = g(b) - g(a)$.

Demostración. Por el teorema (5.2.2) se verifica $\int_a^b f = F(b)$, siendo F la función definida en dicho teorema. Es evidente que $F(a) = 0$, por lo que $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. Si g es otra primitiva de f, se sabe que $F(x) = g(x) + k$, siendo k una constante. Entonces $F(b) - F(a) = g(b) + k - g(a) - k = g(b) - g(a)$, de lo que se deduce el resultado.

□

Teorema 5.2.6 (Cambio de variable) Supongamos que $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y con derivada continua, y que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua. Se verifica:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f[g(t)] \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t$$

5.3 Áreas de superficies planas

Es una propiedad conocida que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ entonces el área de un recinto plano determinado por la gráfica de la función f, las rectas de ecuaciones $x = a$, $x = b$ y el eje de abscisas viene dado por la integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Si $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$, la integral es negativa y el área viene dada por $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Si f cambia de signo en el intervalo $[a, b]$ se parte dicho intervalo en subintervalos en los que la función tome signo constante, y el área total vendrá dada por la suma de las áreas parciales. Esta se puede calcular mediante la integral $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Ejemplo 5.3.1 Calcular el área determinada por la gráfica de la función $f(x) = \cos(x)$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2\pi$.

Solución: Teniendo en cuenta que $\cos(x) \geq 0$ si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ y $\cos(x) \leq 0$ si $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ se verifica:

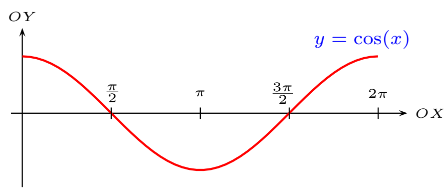


Figura 5.7: Gráfica de $y = \cos(x)$, $x \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} |\cos(x)|\, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} |\cos(x)|\, \mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |\cos(x)|\, \mathrm{d}x + \int_{3\pi/2}^{2\pi} |\cos(x)|\, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos(x)\, \mathrm{d}x - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(x)\, \mathrm{d}x + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos(x)\, \mathrm{d}x \\
&= 1 - (-2) + 1 = 4.
\end{aligned}$$

5.4 Cálculo del volumen de un cuerpo

Se quiere conocer el volumen de un cuerpo cuya longitud está limitada por las coordenadas $x = a$ y $x = b$. Se supondrá que se conoce el área de la sección transversal de este cuerpo para cualquier valor de $x \in [a, b]$, que se denominará $A(x)$ y se supondrá función continua de x. Para calcular el volumen se considera una partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_q\}$ del intervalo $[a, b]$, que dividirá al cuerpo en q partes. Para $k = 1, ..., q$ se elige $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ y se construye una figura cilíndrica cuya sección coincida con la del cuerpo en $x = c_k$ y su longitud sea $x_k - x_{k-1}$.

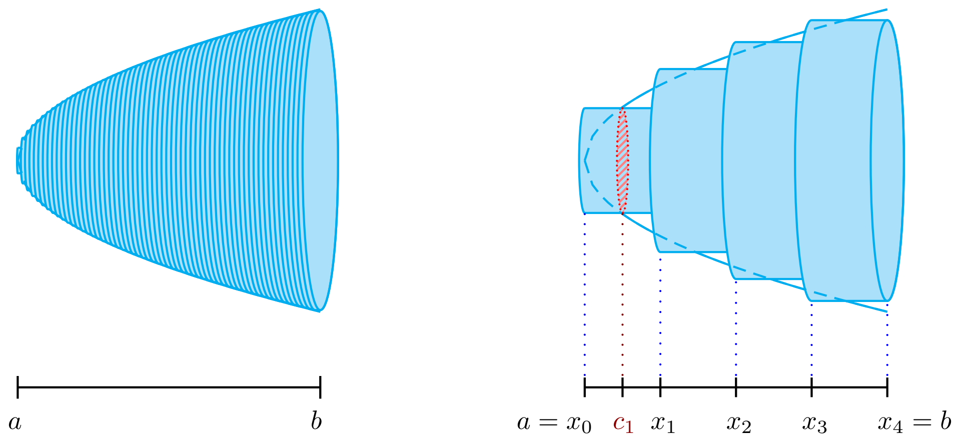


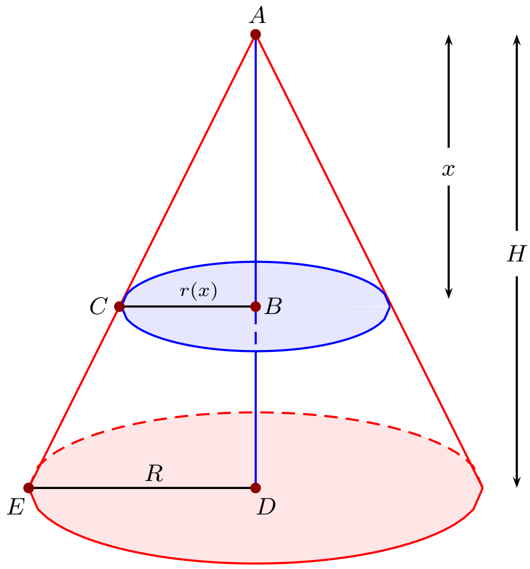
Figura 5.8: Aproximación del volumen de un cuerpo.

El volumen de cada una de estas figuras cilíndricas es $V_k = A(c_k)(x_k - x_{k-1})$. De esta forma, se consigue una primera aproximación del volumen buscado, que será $V(P) = \sum_{k=1}^{q} A(c_k)\,(x_k - x_{k-1})$. Si hacemos tender la norma de la partición a cero, obtendremos el volumen como límite de la suma anterior:

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{q} A(c_k)\,(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b A(x)\, \mathrm{d}x.$$

Ejemplo 5.4.1 Calcular el volumen de un cono.

Solución: Llamemos R al radio del círculo base del cono y H a su altura. En sentido vertical la longitud del cono varía en el intervalo $[0, H]$. Debido a la semejanza de los triángulos ABC e ADE, se verifica la relación $\frac{r(x)}{x} = \frac{R}{H}$. Así el área de cada sección plana perpendicular a dicha dirección es $A(x) = \pi \left(x\,\frac{R}{H}\right)^2$.



$$\begin{aligned} V &= \int_0^H A(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^H \pi\left(x\,\frac{R}{H}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi\frac{R^2}{H^2}\int_0^H x^2\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\frac{R^2}{H^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^H \\ &= \frac{1}{3}\pi R^2 H. \end{aligned}$$

□

5.5 Resultados auxiliares

Resultado 5.5.1 Teorema del valor medio del cálculo diferencial.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

El uso habitual de este teorema no es el de hallar el punto c, sino el de usarlo en consideraciones teóricas o para obtener estimaciones del valor de la función. Así, podemos asegurar que si f' es continua:

$$f(b) = f(a) + f'(c)\cdot(b-a) \approx f(a) + f'(a)\cdot(b-a).$$

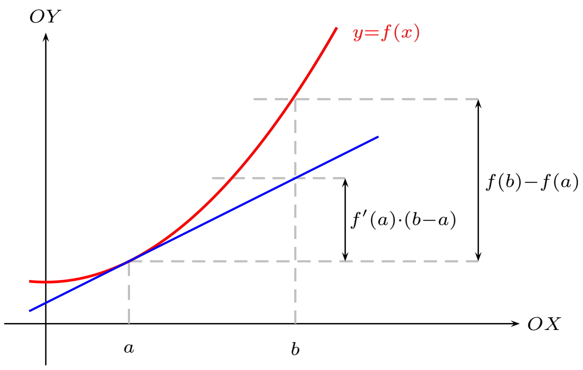


Figura 5.9: Aproximación ducha función