Práctica 4: Derivadas y extremos

Índice

1. Derivada de una función real

Para calcular la derivada de una función (definida simbólicamente o en línea) debemos emplear el comando `diff`. Este comando proporciona como salida una función simbólica, por lo que es necesario cargar el paquete `symbolic` y definir las variable simbólicas de las que depende la función definida. Su sintaxis es, para las función definidas en línea:

`diff(función(variable),variable,orden).`

Para las funciones definidas simbólicamente la sintaxis es:

`diff(función,variable,orden)`

En el siguiente ejemplo se calculan las dos primeras derivadas de la función $\exp(x^2)$ cuando se define en línea.

editor

```
pkg load symbolic;
syms x;
f=@(x) exp(x^2);
derf1=diff(f(x),x,1)
derf2=diff(f(x),x,2)
```

Ventana de comandos

```
>> pkg load symbolic;
syms x;
>> f=@(x) exp(x^2)
>> derf1=diff(f(x),x,1)
derf1 = (sym)
                 / 2\
                 \x /
          2*x*e
>> derf2=diff(f(x),x,2)
derf2 = (sym)
                             / 2\
          /    2    \     \x /
     2*\2*x  + 1/*e
```

Para calcular una derivada de orden n, no es necesario calcular previamente las de orden $1,...,n-1$.

Ejercicio 1 Definir simbólicamente la función $g(x) = \operatorname{sen}(2x^2)$ y calcular su derivada de tercer orden en el punto $x = 2$.

2. Derivada de una función escalar

Se usa también en este caso el comando `diff`. Su sintaxis es, para las función definidas en línea:

```
diff(func(var_1,...,var_n),var_d,orden)
```

siendo `func` la función que se deriva, `var_1,...,var_n` las variables de las que depende la función, `var_d` la variable respecto de la que se deriva y `orden` el orden de la derivada. Para las funciones definidas simbólicamente la sintaxis es:

```
diff(func,var_d,orden)
```

Si queremos derivar respecto de varias variables debemos escribir `var_k,orden_k,...,var_j,orden_j`. En el siguiente ejemplo aplicamos el comando `diff` a una función definida simbólicamente. El orden de la derivada calculada se obtiene con la suma `orden_k+...+orden_j`.

editor

```
syms x y
f= x^2-3*x+2*y^2*x^3;
derf_x1=diff(f,x,1)
derf_y2=diff(f,y,2)
derf_x1y1=diff(f,x,1,y,1)
```

Ventana de comandos

```
syms x y
f= x^2-3*x+2*y^2*x^3;
>> derf_x1=diff(f,x,1)
derf_x1 = (sym)
     2  2
  6*x *y  + 2*x - 3
>> derf_y2=diff(f,y,2)
derfy2 = (sym)
     3
  4*x
>> derf_xy=diff(f,x,1,y,1)
derfx1y1 = (sym)
      2
  12*x *y
```

Ejercicio 2 Dada la función $f(x,y)=\frac{x}{y}$, calcular $\nabla f(2,3)$. (Observación: para definir una función vectorial, se debe crear una matriz fila que tenga en cada columna una componente de la función.)

3. Plano tangente a la gráfica de una función

A partir del valor de una función en un punto y de sus derivadas, podemos calcular la ecuación del plano tangente en un punto. Por ejemplo, para la función $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y+2}$ y el punto $(1,2)$

editor

```
syms x y;
% Elegimos el punto de trabajo
a=1; b=2;
% Definición de la función
f=@(x,y) 1/(x^2+y+2);
% Coeficiente de grado cero
c0=subs(f(x,y),{x,y},{1,2});
% Coeficientes de grado uno
derf1x=diff(f(x,y),x,1);
cx1=subs(derf1x,{x,y},{1,2})
derf1y=diff(f(x,y),y,1);
cy1=subs(derf1y,{x,y},{1,2})
% Ecuación del plano tangente
z=c0+cx1*(x-a)+cy1*(y-b)
```

Ventana de comandos

```
>>% Elegimos el punto de trabajo
>> a=1; b=2;
>>% Definicion de la función
>> f=@(x,y) 1/(x^2+y+2);
>>% Coeficiente de grado cero
>> c0=subs(f(x,y),x,y,1,2);
>>% Coeficientes de grado uno
>> derf1x=diff(f(x,y),x,1);
>> cx1=subs(derf1x,x,y,1,2);
>> derf1y=diff(f(x,y),y,1);
>> cy1=subs(derf1y,x,y,1,2);
>>% Ecuación del plano tangente
>> z=c0+cx1*(x-a)+cy1*(y-b)
z = (sym)
    2*x    y    9
  - --- - -- + --
     25   25   25
```

Ejercicio 3 Calcular el polinomio de segundo grado que mejor aproxima a la función $f(x, y) = x \cdot \cos(\pi y) + y\, e^x$ en un entorno de $(0, 2)$.

4. Optimización de una función

Procederemos a calcular los extremos relativos de una función escalar. Lo veremos con la función $f(x, y) = \dfrac{y^3 - 3y}{1 + x^2}$

Comenzamos calculando las derivadas de 1ª y 2ª orden.

editor

```
syms x y
% Se define la función
f=(y^3-3*y)/(1+x^2)
% Calculo de las derivadas de 1ª orden
dfx=diff(f,x);
dfy=diff(f,y);
```

Calculamos los puntos críticos anulando el vector gradiente $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ con la función `solve`.

editor

```
[X,Y]=solve(dfx==0, dfy==0,x,y)
Solucion=[X,Y]
```

Ventana de comandos

```
>> [X,Y]=solve(dfx==0, dfy==0,x,y)
X = (sym 2x1 matrix)
   [0]
   [ ]
   [0]
Y = (sym 2x1 matrix)
   [1 ]
   [  ]
   [-1]

>> Solucion=[X,Y]
Solucion = (sym 2x2 matrix)
   [0  1 ]
   [     ]
   [0 -1]
```

Los puntos críticos son $P = (0, 1)$ y $Q = (0, -1)$. A continuación definimos la matriz hessiana.

editor

```
% Calculo de las derivadas de 2ª orden
dfx2=diff(f,x,2);
dfxy=diff(f,x,y);
dfy2=diff(f,y,2);
hessiana= [dfx2 dfxy ; dfxy dfy2];
```

Definimos los determinantes que clasifican los puntos críticos

editor

```
Delta1(x,y)=hessiana(1,1);
Delta2(x,y)=det(hessiana);
```

Comprobamos el criterio en el punto $P = (0, -1)$.

editor

```
Delta1(0,-1)
Delta2(0,-1)
```

Ventana de comandos

```
Delta1(0,-1)
Delta2(0,-1)
Delta1(0,-1)

ans = (sym) -4
Delta2(0,-1)

ans = (sym) 24
```

El punto $(0, -1)$ es máximo relativo.

Comprobamos el criterio en el punto $Q = (0, 1)$.

editor

```
Delta1(0,1)
Delta2(0,1)
```

Ventana de comandos

```
Delta1(0,1)
Delta2(0,1)
Delta1(0,1)

ans = (sym) 4
Delta2(0,1)

ans = (sym) 24
```

El punto $(0, 1)$ es mínimo relativo.

Ejercicio 4 Dibujar, en el intervalo $[-1, 3]$, la función $f(x) = \operatorname{sen}(x) - 2\cos(x)$ y su recta tangente en el punto $x_0 = 1$.