1 Tema a desenvolver: Diferenciabilidade dunha función escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Esquema: idea xeométrica, obtención da ecuación do plano tanxente, definición de diferenciabilidade. (Non se valora a exposición de exemplos)

Solución:ver sección 3 do tema 3.

□

2 Calcular o polinomio de Taylor de orde 2 da función $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$, no punto $(0,1)$.

Solución: O polinomio de Taylor de orde 2 da función f no punto $(0,1)$ ven dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x,y) &= f(0,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)\cdot(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\cdot(y-1) \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1)\cdot(x-0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1)\cdot(x-0)\cdot(y-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1)\cdot(y-1)^2\right]. \end{aligned}$$

Como $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$, $f(0,1) = \mathrm{e}^{0^2+1^2} = \mathrm{e}$.

Calculamos as derivadas parciais de primeira orde da función no punto indicado:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\mathrm{e}^{x^2+y^2}, \ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\mathrm{e}^{x^2+y^2}, \ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 2\mathrm{e} \end{cases}$$

Ademais, as derivadas parciais de orde 2 da función no punto indicado son:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\mathrm{e}^{x^2+y^2}(1+2x^2), \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = 2\mathrm{e} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x,y) = 4xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0,1) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\mathrm{e}^{x^2+y^2}(1+2y^2), \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = 6\mathrm{e} \end{cases}$$

Polo tanto o polinomio buscado é:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x,y) &= \mathrm{e} + 0\cdot(x-0) + 2\mathrm{e}\cdot(y-1) + \tfrac{1}{2}\left[2\mathrm{e}\cdot(x-0)^2 + 2\cdot 0\cdot(x-0)(y-1) + 6\mathrm{e}\cdot(y-1)^2\right] \\ &= \mathrm{e} + 2\mathrm{e}\cdot(y-1) + \tfrac{1}{2}\left[2\mathrm{e}\cdot(x-0)^2 + 6\mathrm{e}\cdot(y-1)^2\right] \end{aligned}$$

□

3 Dada a función $f(x,y) = x^3 - 6xy + y^3$, pídese:

(a) clasificar os seus puntos críticos,

(b) achar os extremos absolutos de f no conxunto M acoutado polo triángulo de vértices $(0,4)$, $(4,4)$ e $(2,0)$.

Solución:

(a) Os puntos críticos son as solucións de $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(3x^2-6y, 3y^2-6x\right) = (0,0)$. Se despexamos y na relación $3x^2-6y=0$ obtemos $y=\frac{x^2}{2}$. A continuación substituímos este valor en $3y^2-6x=0$.

$$3\left(\tfrac{x^2}{2}\right)^2 - 6x = 0 \Rightarrow \tfrac{3}{4}x^4 - 6x = 0 \Rightarrow 3x\left(\frac{1}{4}x^3-2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0, \\ x^3=8 \Rightarrow x=2. \end{cases}$$

Os puntos críticos son: $(0,0)$ e $(2,2)$. Para clasificalos calculamos a matriz hessiana neses puntos.

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 6y \end{pmatrix}$$

$\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta_2(0,0) = -36 < 0$. O punto é de sela.

$\mathcal{H}_f(2,2) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$, $\Delta_1(2,2) = 12 > 0$, $\Delta_2(2,2) = 108 > 0$. O punto é mínimo relativo.

(b) O apartado anterior xa proporciona o único extremo relativo condicionado no interior de M, que é o $(2,2)$. Traballamos agora na fronteira. Tendo en conta:

que a ecuación da recta que pasa por $(0,4)$ e $(4,4)$ é $y=4$,
que a ecuación da recta que pasa por $(0,4)$ con $(2,0)$ é $y=-2x+4$,
e que a ecuación da recta que pasa por $(4,4)$ con $(2,0)$ é $y=2x-4$,

a fronteira de M é o conxunto:

$$\mathcal{F}r(M) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 = \{(x,4);\, x\in[0,4]\} \cup \{(x,-2x+4);\, x\in[0,2]\} \cup \{(x,2x-4);\, x\in[2,4]\}.$$

• Os valores de f en F_1 son $g_1(x) = f(x,4) = x^3 - 6x\cdot 4 + 4^3 = x^3 - 24x + 64$. Estudamos os extremos para $x\in[0,4]$.

$g_1'(x) = 3x^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{8}$

Como $g_1''(x) = 6x$, $g_1''(\sqrt{8}) = 6\sqrt{8} > 0$, se ten un mínimo relativo condicionado para f en $(\sqrt{8},4)$. Ademais, nos extremos do intervalo, $(0,4)$ e $(4,4)$, temos máximos relativos condicionados.

• Os valores de f en F_2 son $g_2(x) = f(x,-2x+4) = x^3 - 6x(-2x+4) + (-2x+4)^3 = -7x^3 + 60x^2 - 120x + 64$. Estudamos os extremos para $x\in[0,2]$.

$$g_2'(x) = -21x^2 + 120x - 120 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1.2922 \\ \text{ou} \\ x = 4.4221 \end{cases}$$

Como $g_2''(x) = -42x + 120$, $g_2''(1.2922) = -42\cdot 1.2922 + 120 = 65.728 > 0$, no punto $(1.2922, 1.4156)$ existe un mínimo relativo condicionado para f. Ademais, nos extremos do intervalo, $(0,4)$ e $(2,0)$, temos máximos relativos condicionados.

• Os valores de f en F_3 son $g_3(x) = f(x,2x-4) = x^3 - 6x(2x-4) + (2x-4)^3 = 9x^3 - 60x^2 + 120x - 64$. Estudamos os extremos para $x\in[2,4]$.

$$g_3'(x) = 27x^2 - 120x + 120 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1.519\,5 \\ \text{ou} \\ x = 2.9250 \end{cases}$$

Como $g_3''(x) = 54x - 120$, $g_2''(2.9250) = 54 \cdot 2.9250 - 120 = 37.95 > 0$, no punto $(2.9250, 1.85)$ se ten un mínimo relativo condicionado para f. Ademais, nos extremos do intervalo, $(4, 4)$ e $(2, 0)$, temos máximos relativos condicionados.

Avaliamos f en todos os extremos relativos condicionados.

$$\begin{aligned}
&f(2,2) = 2^3 - 6 \cdot 2 \cdot 2 + 2^3 = -8 \\
&f(\sqrt{8}, 4) = \sqrt{8}^3 - 6 \cdot \sqrt{8} \cdot 4 + 4^3 = 18.745 \\
&f(1.292\,2, 1.4156) = 1.2922^3 - 6 \cdot 1.2922 \cdot 1.4156 + 1.4156^3 = -5.9810 \\
&f(2.9250, 1.85) = -1.1107 \\
&f(4,4) = 4^3 - 6 \cdot 4 \cdot 4 + 4^3 = 32 \\
&f(0,4) = 4^3 = 64 \\
&f(2,0) = 2^3 = 8
\end{aligned}$$

O valor máximo de f en M é 64 e o mínimo -8.

$\square$

$\boxed{4}$ Dada a rexión de $\mathbb{R}^2$: $D = \left\{(x, y);\ x \in [0, \sqrt{3}], y \in \left[x^2 - 2, \frac{x^2}{3}\right]\right\}$, parametrizala cambiando a orde das variables.

Solución: Para cada valor $x \in [0, \sqrt{3}]$ o segmento vertical contido en D comeza na curva $y = x^2 - 2$ e remata cando $y = \frac{x^2}{3}$. Deste xeito, a rexión é a descrita na figura (1).

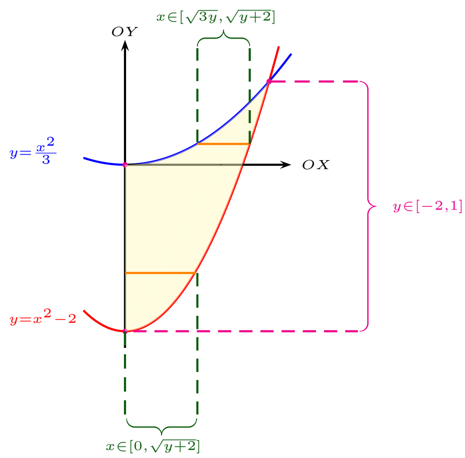

Figura 1: Conxunto D

O punto que se atopa máis abaixo en D é o $(0, -2)$, mentres que o que se atopa máis arriba é un dos da intersección das parábola, que procedemos a calcular:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 2 \\ y = \frac{x^2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 2 = \frac{x^2}{3} \Rightarrow 3x^2 - 6 = x^2 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Se $x = \sqrt{3}$ entón $y = 1$.

Se cambiamos a orde das variables, observamos que os valores de y oscilan entre -2 e 1. Para estimar a variación de x, unha vez fixado y, partiremos a rexión en dous anacos:

se $y \in [-2, 0]$ entón $x \in [0, \sqrt{y+2}]$, se $y \in [0, 1]$ entón $x \in [\sqrt{3y}, \sqrt{y+2}]$.

Por tanto $D = \{(x,y);\ y \in [-2,0], x \in [0, \sqrt{y+2}]\} \cup \{(x,y);\ y \in [0,1], x \in [\sqrt{3y}, \sqrt{y+2}]\}$.

$\square$

$\boxed{5}$ Calcular $\displaystyle\iint_R xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ sendo $R = \bar{\mathcal{B}}((1,0);1) \cap \bar{\mathcal{B}}((0,1);1)$

(a) usando coordenadas rectangulares,

(b) usando coordenadas polares.

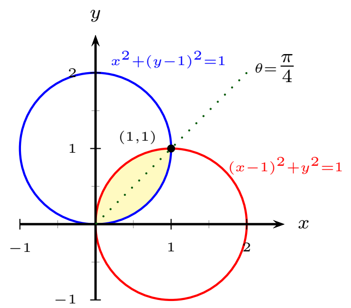

Figura 2: Conxunto R

Solución: Co obxectivo de parametrizar R calculamos a intersección das fronteiras das bólas $\bar{\mathcal{B}}((1,0);1)$ e $\bar{\mathcal{B}}((0,1);1)$.

$$\mathcal{F}r(\bar{\mathcal{B}}((1,0);1)) = \{(x,y);\ (x-1)^2 + y^2 = 1\},$$

$$\mathcal{F}r(\bar{\mathcal{B}}((0,1);1)) = \{(x,y); x^2 + (y-1)^2 = 1\}.$$

$$\left.\begin{array}{c|c} (x-1)^2 + y^2 = 1 & x^2 - 2x + y^2 = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 & x^2 + y^2 - 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow (x-1)^2 + x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right.$$

(a) Coordenadas rectangulares

A parametrización de R é $R = \left\{(x,y);\ x \in [0,1],\ y \in \left[1 - \sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-(x-1)^2}\right]\right\}$. Por tanto:

$$\iint_R xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} xy \, \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x$$

$$\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} xy \, \mathrm{d}y = \tfrac{x}{2} \left[y^2\right]_{y=1-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-(x-1)^2}} = \tfrac{x}{2} \left((1-(x-1)^2) - \left(1 - \sqrt{1-x^2}\right)^2 \right)$$

$$\int_0^1 \tfrac{x}{2} \left((1-(x-1)^2) - \left(1 - \sqrt{1-x^2}\right)^2 \right) \mathrm{d}x = \tfrac{1}{6}$$

(b) Coordenadas polares

A variación de θ na rexión R prodúcese no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Para calcular os valores de r en función de θ, calculamos as ecuación polares das circunferencias $(x-1)^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0 \Rightarrow r^2 - 2r\cos(\theta) = 0 \Rightarrow r = 2\cos(\theta)$$
$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow r^2 - 2r\,\mathrm{sen}(\theta) = 0 \Rightarrow r = 2\,\mathrm{sen}(\theta)$$

O valor de θ para o punto $(1,1)$ é $\frac{\pi}{4}$. Así, a variación de r depende de se θ é menor ou maior que $\frac{\pi}{4}$.

$$R^* = \left\{(r,\theta);\ \theta \in [0, \tfrac{\pi}{4}],\ r \in [0, 2\,\mathrm{sen}(\theta)]\right\} \cup \left\{(r,\theta);\ \theta \in [\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{2}],\ r \in [0, 2\cos(\theta)]\right\}$$

$$\iint_R xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_{R^*} r\cos(\theta) r\,\mathrm{sen}(\theta) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \iint_{R^*} r^3 \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left[\int_0^{2\,\mathrm{sen}(\theta)} r^3 \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{d}r \right] \mathrm{d}\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\int_0^{2\cos(\theta)} r^3 \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{d}r \right] \mathrm{d}\theta$$

$$\int_0^{2\,\mathrm{sen}(\theta)} r^3 \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{d}r = \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) \int_0^{2\,\mathrm{sen}(\theta)} r^3\,\mathrm{d}r = \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) \left[\tfrac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=2\,\mathrm{sen}(\theta)} = 4\cos(\theta)\,\mathrm{sen}^5(\theta)$$

$$\int_0^{\pi/4} 4\cos(\theta)\,\mathrm{sen}^5(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{12}$$

$$\int_0^{2\cos(\theta)} r^3 \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{d}r = \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) \int_0^{2\cos(\theta)} r^3\,\mathrm{d}r = \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) \left[\tfrac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=2\cos(\theta)} = 4\cos^5(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} 4\cos^5(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{12}$$

$$\iint_R xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{6}$$

$\square$