3 Diferenciación de funciones vectoriales

3.1 Derivada direccional

El estudio de la derivada de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en un punto $a \in \mathbb{R}$ pretende determinar la recta que mejor aproxima la gráfica de f cerca del punto $(a, f(a)) \in \mathbb{R}^2$. De entre todas las rectas que representen a funciones de y frente a x, cuyas ecuaciones son de la forma $y = mx + n$, elegimos las que pasan por el punto $(a, f(a))$. Si $x = a$ entonces $f(a) = m \cdot a + n$, por lo que $n = f(a) - m \cdot a$.

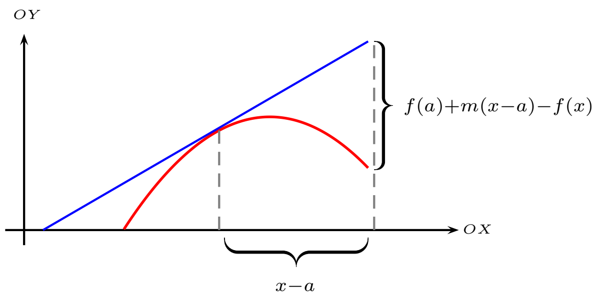

Figura 3.1: Recta que mejor aproxima a una curva.

Así, las rectas con las que trabajaremos son las de ecuación $y = mx + f(a) - m \cdot a = f(a) + m(x - a)$. De entre todas, elegimos aquella en la que la distancia entre las imágenes de f y de la recta sea menor que la distancia $d(x, a)$. Esta propiedad se alcanza exigiendo que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - [f(a) + m(x - a)]}{x - a} = 0. \tag{3.1}$$

Tengamos en cuenta que el límite del denominador en la ecuación (3.1) es 0, por lo que para que el límite del cociente exista, el del numerador también debe ser 0. Así tenemos asegurado que las imágenes en la recta están próximas a las imágenes de f. Además, al ser el límite del cociente 0, necesariamente el numerador debe acercarse a 0 más rápido que el denominador; es decir, la distancia entre imágenes en f y en la recta, es menor que a distancia entre x y a.

Se calcula el valor de m que verifica $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - [f(a) + m(x - a)]}{x - a} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - [f(a) + m(x - a)]}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - m(x - a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \lim_{x \to a} \frac{m(x - a)}{x - a} = \left(\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) - m. \end{aligned}$$

La recta buscada tiene por pendiente:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \tag{3.2}$$

valor que se denota por $f'(a)$. Además, $f'(a)$ puede interpretarse de forma geométrica como la tangente del ángulo formado por el semieje positivo OX y la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$.

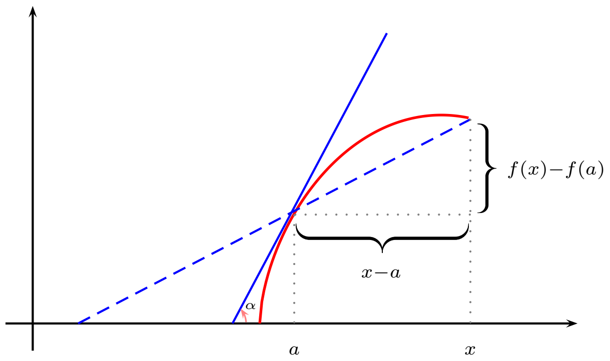

Figura 3.2: Derivada dunha función real.

En este tema se tratará de generalizar el concepto de derivada a funciones vectoriales. Para que esta generalización sea intuitiva, se comienza con funciones escalares.

Dados $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función escalar y $\vec{\boldsymbol{a}} \in \overset{\circ}{\mathrm{Dom}}(f)$, se desea estudiar la variación de la función cuando nos acercamos hacia a $\vec{\boldsymbol{a}}$ desde puntos próximos. Para eso se elige una recta que pase por $\vec{\boldsymbol{a}}$, cuya ecuación paramétrica es $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{a}} + t\,\vec{\boldsymbol{v}}$, $t \in \mathbb{R}$, $\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$. Compararemos la evolución de las imágenes con las de los originales.

Definición 3.1.1 Dados $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{\boldsymbol{a}} \in \overset{\circ}{\mathrm{Dom}}(f)$ y $\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$ un vector con módulo 1, se define la derivada direccional de f en $\vec{\boldsymbol{a}}$ en la dirección del vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ como el número real:

$$D_{\vec{\boldsymbol{v}}} f(\vec{\boldsymbol{a}}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{\boldsymbol{a}} + t\vec{\boldsymbol{v}}) - f(\vec{\boldsymbol{a}})}{t}, \; t \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

La elección del vector con módulo 1 se debe a que es interesante trabajar solo una vez con cada sentido de la recta.

Observemos la similitud entre las ecuaciones (3.2) y (3.3). En ambas se compara, mediante cocientes, una distancia entre imágenes con otra entre originales. En las dos ecuaciones el numerador es la diferencia entre las imágenes de un punto cualquiera de la recta y la imagen de a. El denominador en (3.2) es, salvo el signo, la distancia entre x y a. En la ecuación (3.3) también sucede eso, ya que la distancia entre $\vec{\boldsymbol{x}}$ y $\vec{\boldsymbol{a}}$ es:

$$d(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{a}}) = |\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{a}}| = |\vec{\boldsymbol{a}} + t\vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{a}}| = |t\vec{\boldsymbol{v}}| = |t|\,|\vec{\boldsymbol{v}}| = |t|.$$

En el caso particular $n = 1$, es decir, cuando se esté trabajando con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, solo se pueden calcular dos derivadas direccionales, que son las correspondientes a los vectores unitarios 1 y -1. La asociada al vector 1 es $D_1 f(a) = f'(a)$ y la asociada a -1 es $D_{-1} f(a) = -f'(a)$.

Observemos que la definición de derivada direccional puede interpretarse como la derivada de una función real de variable real. Si se consideran la función $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\alpha(t) = \vec{\boldsymbol{a}} + t\vec{\boldsymbol{v}}$, y la composición $\Phi = f \circ \alpha$, se verifica:

$$\Phi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(t) - \Phi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{\boldsymbol{a}} + t\vec{\boldsymbol{v}}) - f(\vec{\boldsymbol{a}})}{t} = D_{\vec{\boldsymbol{v}}} f(\vec{\boldsymbol{a}}).$$

Ejercicio 3.1.2 Demostrar que se existe a derivada $D_{\vec{\boldsymbol{v}}} f(\vec{\boldsymbol{a}})$, también existe $D_{-\vec{\boldsymbol{v}}} f(\vec{\boldsymbol{a}})$ y se verifica que $D_{-\vec{\boldsymbol{v}}} f(\vec{\boldsymbol{a}}) = -D_{\vec{\boldsymbol{v}}} f(\vec{\boldsymbol{a}})$.

<u>Solución</u>:

$$\begin{aligned} D_{-\vec{\boldsymbol{v}}} f(\vec{\boldsymbol{a}}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{\boldsymbol{a}} + t\,(-\vec{\boldsymbol{v}})) - f(\vec{\boldsymbol{a}})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{\boldsymbol{a}} - t\,\vec{\boldsymbol{v}}) - f(\vec{\boldsymbol{a}})}{t} \\ &= \lim_{-h\to 0} \frac{f(\vec{\boldsymbol{a}} + h\,\vec{\boldsymbol{v}}) - f(\vec{\boldsymbol{a}})}{-h} = -\lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{\boldsymbol{a}} + h\,\vec{\boldsymbol{v}}) - f(\vec{\boldsymbol{a}})}{h} = -D_{\vec{\boldsymbol{v}}} f(\vec{\boldsymbol{a}}). \end{aligned}$$

□

Desde el punto de vista geométrico, para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\vec{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2)$ y $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2)$, la derivada direccional se consigue seccionando la gráfica de f mediante el plano que pasa por $(a_1, a_2, 0)$, y tiene como vectores directores $(v_1, v_2, 0)$ y $(0, 0, 1)$ (ver Figura (3.3)). Esta sección es una curva, de la que se estudia su pendiente en el punto $(\vec{\boldsymbol{a}}, f(\vec{\boldsymbol{a}}))$ en el sentido determinado por $\vec{\boldsymbol{v}}$.

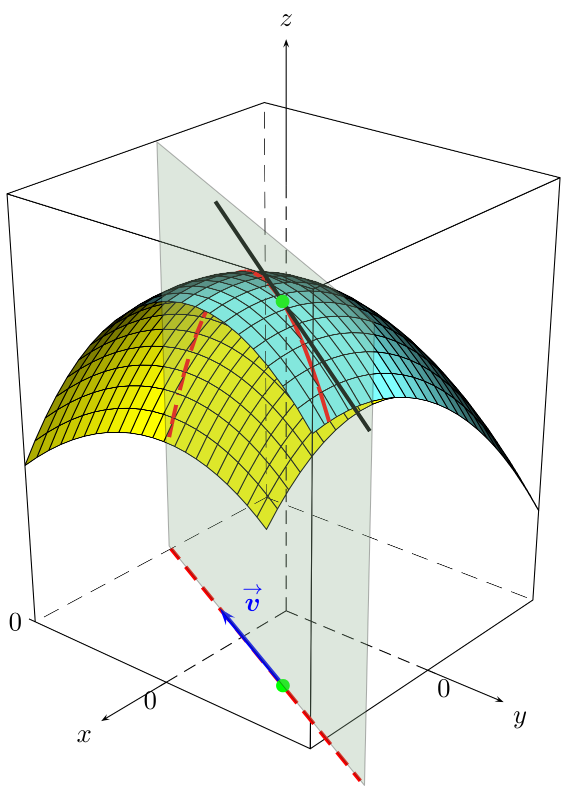

Figura 3.3: Derivada direccional.

Ejemplo 3.1.3 Si $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es constante, entonces $f(\vec{\boldsymbol{a}}+t\vec{\boldsymbol{v}}) = f(\vec{\boldsymbol{a}})$, y por eso $D_{\vec{\boldsymbol{v}}} f(\vec{\boldsymbol{a}}) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0}{t} = 0$. □

Ejemplo 3.1.4 Para $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2+y^2$, y $\vec{\boldsymbol{v}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, se calculará $D_{\vec{\boldsymbol{v}}} f(a,b)$.

$$\begin{aligned} D_{\vec{\boldsymbol{v}}} f(a,b) &= \lim_{t\to 0} \frac{f\left[(a,b)+t\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]-f(a,b)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f\left(a+t\frac{1}{\sqrt{2}}, b+t\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-f(a,b)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\left(a+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(b+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2-a^2-b^2}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{2at}{\sqrt{2}}+\frac{t^2}{2}+\frac{2bt}{\sqrt{2}}+\frac{t^2}{2}}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{2a}{\sqrt{2}}+\frac{t}{2}+\frac{2b}{\sqrt{2}}+\frac{t}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}(a+b). \end{aligned}$$

También se puede calcular considerando la función

$$\Phi(t) = f\left[(a,b)+t\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = f\left(a+\tfrac{t}{\sqrt{2}}, b+\tfrac{t}{\sqrt{2}}\right) = \left(a+\tfrac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(b+\tfrac{t}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Entonces $\Phi'(t) = 2\left(a+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}+2\left(b+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(a+b+\frac{2t}{\sqrt{2}}\right)$ y $\Phi'(0) = \frac{2}{\sqrt{2}}(a+b)$. □

Proposición 3.1.5 (Propiedades de las derivadas direccionales.) Sean $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ funciones para las que existen $D_{\vec{\boldsymbol{v}}} f(\vec{\boldsymbol{a}})$ y $D_{\vec{\boldsymbol{v}}} g(\vec{\boldsymbol{a}})$. Se verifica:

(i) existe $D_{\vec{\boldsymbol{v}}}(f+g)(\vec{\boldsymbol{a}})$ y su valor es $D_{\vec{\boldsymbol{v}}}(f+g)(\vec{\boldsymbol{a}}) = D_{\vec{\boldsymbol{v}}} f(\vec{\boldsymbol{a}}) + D_{\vec{\boldsymbol{v}}} g(\vec{\boldsymbol{a}})$.

(ii) existe $D_{\vec{\boldsymbol{v}}}(f\cdot g)(\vec{\boldsymbol{a}})$ y su valor es $D_{\vec{\boldsymbol{v}}}(f\cdot g)(\vec{\boldsymbol{a}}) = D_{\vec{\boldsymbol{v}}} f(\vec{\boldsymbol{a}})\cdot g(\vec{\boldsymbol{a}}) + f(\vec{\boldsymbol{a}})\cdot D_{\vec{\boldsymbol{v}}} g(\vec{\boldsymbol{a}})$.

(iii) si $g(\vec{\boldsymbol{a}})\neq 0$ entonces existe $D_{\vec{\boldsymbol{v}}}\left(\frac{f}{g}\right)(\vec{\boldsymbol{a}})$ y su valor es $D_{\vec{\boldsymbol{v}}}\left(\frac{f}{g}\right)(\vec{\boldsymbol{a}}) = \frac{D_{\vec{\boldsymbol{v}}} f(\vec{\boldsymbol{a}})\cdot g(\vec{\boldsymbol{a}}) - f(\vec{\boldsymbol{a}})\cdot D_{\vec{\boldsymbol{v}}} g(\vec{\boldsymbol{a}})}{g(\vec{\boldsymbol{a}})^2}$.

Demostración. (i) Se consideran $H(t) = (f+g)(\vec{\boldsymbol{a}}+t\vec{\boldsymbol{v}})$, $\Phi(t) = f(\vec{\boldsymbol{a}}+t\vec{\boldsymbol{v}})$ y $\Gamma(t) = g(\vec{\boldsymbol{a}}+t\vec{\boldsymbol{v}})$. Entonces $H(t) = \Phi(t)+\Gamma(t)$, por lo que:

$$D_{\vec{\boldsymbol{v}}}(f+g)(\vec{\boldsymbol{a}}) = H'(0) = (\Phi+\Gamma)'(0) = \Phi'(0)+\Gamma'(0) = D_{\vec{\boldsymbol{v}}} f(\vec{\boldsymbol{a}}) + D_{\vec{\boldsymbol{v}}} g(\vec{\boldsymbol{a}}).$$

(ii) Se consideran $H(t) = (f\cdot g)(\vec{\boldsymbol{a}}+t\vec{\boldsymbol{v}})$, $\Phi(t) = f(\vec{\boldsymbol{a}}+t\vec{\boldsymbol{v}})$ y $\Gamma(t) = g(\vec{\boldsymbol{a}}+t\vec{\boldsymbol{v}})$. Entonces $H(t) = \Phi(t)\cdot\Gamma(t)$, por lo que:

$$D_{\vec{\boldsymbol{v}}}(f\cdot g)(\vec{\boldsymbol{a}}) = H'(0) = \Phi'(0)\cdot\Gamma(0)+\Phi(0)\cdot\Gamma'(0) = D_{\vec{\boldsymbol{v}}} f(\vec{\boldsymbol{a}})\cdot g(\vec{\boldsymbol{a}}) + f(\vec{\boldsymbol{a}})\cdot D_{\vec{\boldsymbol{v}}} g(\vec{\boldsymbol{a}}).$$

(iii) Se consideran $H(t) = (f/g)(\vec{\boldsymbol{a}}+t\vec{\boldsymbol{v}})$, $\Phi(t) = f(\vec{\boldsymbol{a}}+t\vec{\boldsymbol{v}})$ y $\Gamma(t) = g(\vec{\boldsymbol{a}}+t\vec{\boldsymbol{v}})$. Entonces $H(t) = \Phi(t)/\Gamma(t)$, por lo que:

$$D_{\vec{\boldsymbol{v}}}\left(\frac{f}{g}\right)(\vec{\boldsymbol{a}}) = H'(0) = \frac{\Phi'(0)\cdot\Gamma(0)-\Phi(0)\cdot\Gamma'(0)}{[\Gamma(0)]^2} = \frac{D_{\vec{\boldsymbol{v}}} f(\vec{\boldsymbol{a}})g(\vec{\boldsymbol{a}}) - f(\vec{\boldsymbol{a}})D_{\vec{\boldsymbol{v}}} g(\vec{\boldsymbol{a}})}{[g(\vec{\boldsymbol{a}})]^2}.$$

□

3.2 Derivadas parciales

Un caso particular de derivada direccional es aquel en la que el vector unitario considerado es de la forma:

$$\vec{\boldsymbol{e}}_k = (0, ..., 0, \overset{\overset{k}{\downarrow}}{1}, 0, ..., 0).$$

La derivada direccional $D_{\vec{\boldsymbol{e}}_k} f(\vec{\boldsymbol{a}}) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\vec{\boldsymbol{a}} + t\,\vec{\boldsymbol{e}}_k) - f(\vec{\boldsymbol{a}})}{t}$ se denomina derivada parcial de f en $\vec{\boldsymbol{a}}$ respecto de x_k, y se denota por $f_{x_k}(\vec{\boldsymbol{a}})$ o $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{\boldsymbol{a}})$. Esta derivada indica como varía a función con respecto a la variable x_k.

Para el cálculo práctico das derivadas parciales son importantes los siguientes resultados:

Proposición 3.2.1 Sean $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones derivables para todo $k = 1, ..., n$ y sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(\vec{\boldsymbol{x}}) = g(x_1, ..., x_n) = f_1(x_1) \cdot ... \cdot f_n(x_n)$. Se verifica que existen todas las derivadas parciales de g y sus valores son:

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(\vec{\boldsymbol{x}}) = f_1(x_1) \cdot ... \cdot f_{k-1}(x_{k-1}) \cdot f_k'(x_k) \cdot f_{k+1}(x_{k+1}) \cdot ... \cdot f_n(x_n).$$

Demostración. Por comodidad se realiza la demostración en el caso de dos variables, $g(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, y para la derivada respecto de x.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \lim_{t \to 0} \frac{g[(x, y) + t(1, 0)] - g(x, y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g(x + t, y) - g(x, y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f_1(x + t)f_2(y) - f_1(x)f_2(y)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{[f_1(x + t) - f_1(x)]f_2(y)}{t} = \left(\lim_{t \to 0} \frac{f_1(x + t) - f_1(x)}{t}\right) f_2(y) = f_1'(x)f_2(y).
\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 3.2.2 Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = \operatorname{sen}(x)\, y^2\, e^{8z}$. Si consideramos las funciones reales: $f_1(x) = \operatorname{sen}(x)$, $f_2(y) = y^2$ y $f_3(z) = e^{8z}$, entonces se puede escribir $g(x, y, z) = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)$, por lo que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) &= f_1'(x)\, f_2(y)\, f_3(z) = \cos(x)\, y^2\, e^{8z}, \\
\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) &= f_1(x)\, f_2'(y)\, f_3(z) = \operatorname{sen}(x)\, 2y\, e^{8z}, \\
\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) &= f_1(x)\, f_2(y)\, f_3'(z) = \operatorname{sen}(x)\, y^2\, 8\, e^{8z}.
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 3.2.3 Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es tal que existe $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{\boldsymbol{a}})$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en $f(\vec{\boldsymbol{a}})$, entonces existe $\dfrac{\partial (g \circ f)}{\partial x_k}(\vec{\boldsymbol{a}})$ y su valor es $g'[f(\vec{\boldsymbol{a}})] \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{\boldsymbol{a}})$.

Demostración. Para el vector $\vec{\boldsymbol{e}}_k \in \mathbb{R}^n$ se verifica $\dfrac{\partial(g\circ f)}{\partial x_k}(\vec{\boldsymbol{a}}) = D_{\vec{\boldsymbol{e}}_k}(g\circ f)(\vec{\boldsymbol{a}})$. Si definimos $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, $\alpha(t)=\vec{\boldsymbol{a}}+t\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_k$, para un punto de la recta $\vec{\boldsymbol{a}}+t\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_k$, se cumple $(g\circ f)(\vec{\boldsymbol{x}}) = (g\circ f)(\vec{\boldsymbol{a}}+t\,\vec{\boldsymbol{e}}_k) = (g\circ f\circ\alpha)(t)$, entonces:

$$D_{\vec{\boldsymbol{e}}_k}(g\circ f)(\vec{\boldsymbol{a}}) = [(g\circ f)\circ\alpha]'(0) = [g\circ(f\circ\alpha)]'(0) = g'[(f\circ\alpha)(0)]\cdot(f\circ\alpha)'(0) = g'[f(\vec{\boldsymbol{a}})]\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{\boldsymbol{a}}).$$

□

Ejemplo 3.2.4 Se considera la función de tres variables $h(x,y,z)=\mathrm{e}^{(2x^2y)^2}$. La función h se puede escribir como la composición de las funciones $f(x,y,z)=2x^2y$ y $g(t)=\mathrm{e}^{t^2}$.

Ya que $g'(t)=2t\,\mathrm{e}^{t^2}$ entonces $g'(f(x,y,z)) = 2\cdot 2x^2y\,\mathrm{e}^{(2x^2y)^2} = 4x^2y\,\mathrm{e}^{4x^4y^2}$. Además:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=4xy,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2x^2 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0,$$

por lo que se verifica:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) &= 4x^2y\,\mathrm{e}^{4x^4y^2}\,4x\mathrm{e} = 16x^3y^2\,\mathrm{e}^{4x^4y^2},\\
\frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) &= 4x^2y\,\mathrm{e}^{4x^4y^2}\,2x^2 = 8x^4y\,\mathrm{e}^{4x^4y^2},\\
\frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) &= 0.
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 3.2.5 Calcular todas las derivadas parciales de las siguientes funciones: $f(x,y)=x-y$, $g(x,y)=x^3y-yx$, $h(x,y)=x\sqrt{y}+\dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$, $k(x,y)=\operatorname{sen}(x\mathrm{e}^y)$, $j(x,y,z)=y^2-3z^3x$.

<u>Solución</u>: (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-1$.

(b) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=3x^2y-y$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=x^3-x$.

(c) $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y)=\sqrt{y}-\dfrac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}$, $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y)=\dfrac{x}{2\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

(d) $\dfrac{\partial k}{\partial x}(x,y)=\cos(x\mathrm{e}^y)\mathrm{e}^y$, $\dfrac{\partial k}{\partial y}(x,y)=\cos(x\mathrm{e}^y)x\mathrm{e}^y$.

(e) $\dfrac{\partial j}{\partial x}(x,y,z)=-3z^3$, $\dfrac{\partial j}{\partial y}(x,y,z)=2y$, $\dfrac{\partial j}{\partial z}(x,y,z)=-9z^2x$.

□

Definición 3.2.6 Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función para la que existen todas las derivadas parciales en un punto $\vec{\boldsymbol{a}}$, se define el vector gradiente de f en $\vec{\boldsymbol{a}}$ como $\nabla f(\vec{\boldsymbol{a}}) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{\boldsymbol{a}}), \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{\boldsymbol{a}}), ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{\boldsymbol{a}})\right)$.

Ejemplo 3.2.7 Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x^2y+z$. Calcularemos $\nabla f(1,-2,3)$.

Calculamos las derivadas parciales en un punto arbitrario.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2xy,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=x^2,\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=1$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2,3)=-4,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,-2,3)=1,\ \frac{\partial f}{\partial z}(1,-2,3)=1$$

Por tanto $\nabla f(1,-2,3)=(-4,1,1)$.

□

Una propiedad bien conocida de las funciones reales de variable real es que si son derivables en un punto, también son continuas en dicho punto. Esta propiedad no se verifica para funciones escalares, es decir, la existencia de las derivadas direccionales no implica la continuidad. Esto no es extraño, ya que cuando se estudia la continuidad de una función en un punto $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$, se observa la evolución de las imágenes de todos los originales cerca de $\vec{a}$. Sin embargo, cuando se estudia la existencia de las derivadas direccionales, se trabaja únicamente con los originales cerca de $\vec{a}$ que además pertenezcan a una recta. Es decir, en un caso se trabaja con todos los puntos y en el otro no.

Ejemplo 3.2.8 Se consideran $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$, $\vec{a}=(0,0)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ un vector unitario cualquiera. Si $v_1\neq 0$ se verifica:

$$\frac{f[(0,0)+t\,(v_1,v_2)]-f(0,0)}{t}=\frac{f(tv_1,tv_2)-0}{t}=\frac{\frac{tv_1t^2(v_2)^2}{t^2(v_1)^2+t^4(v_2)^4}}{t}=\frac{v_1(v_2)^2}{(v_1)^2+t^2(v_2)^4},$$

entonces $D_{\vec{v}}f(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{v_1(v_2)^2}{(v_1)^2+t^2(v_2)^4}=\frac{(v_2)^2}{v_1}$.

Si $v_1=0$ se verifica:

$$\frac{f[(0,0)+t\,(v_1,v_2)]-f(0,0)}{t}=\frac{f(tv_1,tv_2)-0}{t}=\frac{f(0,tv_2)}{t}=\frac{0}{t}=0,$$

por lo que $D_{\vec{v}}f(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}0=0$. Así, existen las derivadas direccionales para cualquier dirección.

Se comprobará a continuación que no existe el límite de f en $(0,0)$. Para eso calcularemos dos límites restringidos con valores diferentes. En concreto se consideran los conjuntos $\{(x,y);\ x=y^2\}$ y $\{(x,y);\ x=0\}$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2\,y^2}{y^4+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y)=\lim_{y\to 0}0=0.$$

Al existir dos límites restringidos con valores diferentes, el límite (global) no existe.

□

Por último, para comprobar que no existe ninguna relación entre la continuidad y la existencia de derivadas direccionales, veamos un ejemplo de una función continua para la que solo existen dos derivadas direccionales.

Ejemplo 3.2.9 Se considera $f(x,y) = \begin{cases} y \ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

La función es continua en $(0,0)$, ya que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y \ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$. En cuanto a las derivadas direccionales, al considerar $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2)$ unitario se verifica:

$$D_{\vec{\boldsymbol{v}}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tv_1, 0+tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\, v_2 \ \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{(tv_1)^2+(tv_2)^2}\right)}{t} = \lim_{t\to 0}\left[v_2 \ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t^2}\right)\right].$$

Este límite solo existe si $v_2 = 0$, es decir $\vec{\boldsymbol{v}} = (\pm 1, 0)$.

$\square$

3.3 Diferencial de una función escalar

Se va a introducir un concepto más fuerte que el de derivada direccional, cuya existencia implique además la continuidad de la función. Para eso nos basamos en la idea de aproximar la gráfica de una función real de variable real mediante una recta cerca de un punto. Si trasladamos esta idea a una dimensión mayor, la recta se sustituye por un plano que aproxime de forma adecuada la gráfica de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cerca de $(a, b, f(a,b))$. La ecuación de cualquier plano que represente a una función de z frente a (x,y) es $z = \lambda x + \mu y + \gamma$. Si además pasa por $(a, b, f(a,b))$ se verifica:

$$f(a,b) = \lambda a + \mu b + \gamma \Rightarrow \gamma = f(a,b) - \lambda a - \mu b.$$

Entonces, los planos que pasan por $(a,b,f(a,b))$ tienen de ecuación $z = f(a,b) + \lambda(x-a) + \mu(y-b)$. Para tener una buena aproximación se exige:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - [f(a,b) + \lambda(x-a) + \mu(y-b)]}{|(x,y)-(a,b)|} = 0. \tag{3.4}$$

Desde el punto de vista geométrico, la relación (3.4) implica que la longitud del segmento que une las imágenes de (x,y) en la superficie $z = f(x,y)$ y en el plano buscado sea menor que la distancia entre (x,y) y (a,b) (véase Figura (3.4)).

La determinación del plano será completa cuando se conozcan los valores de λ y μ. Para ello tendremos en cuenta que si un límite (global) existe, también existirán todos los límites restringidos, y sus valores coinciden con el del límite (global). Si se calculan los límites a través de las rectas $x = a$, $y = b$ se obtendrán los valores deseados.

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ x=a}} \frac{f(x,y) - [f(a,b) + \lambda(x-a) + \mu(y-b)]}{|(x,y)-(a,b)|} = \lim_{y\to b} \frac{f(a,y) - [f(a,b) + \mu(y-b)]}{|y-b|} \\ &= \pm\lim_{y\to b} \frac{f(a,y) - [f(a,b) + \mu(y-b)]}{y-b} = \pm\lim_{y\to b}\left[\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} - \mu\right]. \end{aligned}$$

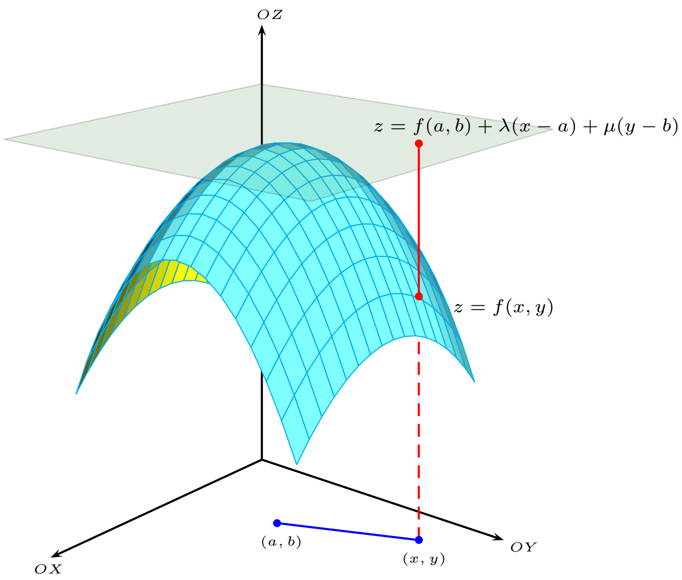

Figura 3.4: Plano que aproxima a una gráfica.

Por tanto:

$$\mu = \lim_{y\to b} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a,b+t)-f(a,b)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f[(a,b)+t(0,1)]-f(a,b)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ y=b}} \frac{f(x,y)-[f(a,b)+\lambda(x-a)+\mu(y-b)]}{|(x,y)-(a,b)|} = \lim_{x\to a} \frac{f(x,b)-[f(a,b)+\lambda(x-a)]}{|x-a|} \\ &= \pm\lim_{x\to a} \frac{f(x,b)-[f(a,b)+\lambda(x-a)]}{x-a} = \pm\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}-\lambda\right]. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\lambda = \lim_{x\to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t,b)-f(a,b)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f[(a,b)+t(1,0)]-f(a,b)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).$$

Así, si existe un plano que aproxime bien la gráfica de f alrededor de $(a,b,f(a,b))$, su ecuación tiene que ser:

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b) = f(a,b) + \nabla f(a,b)\cdot[(x,y)-(a,b)].$$

Con los valores obtenidos para λ y μ solo se tiene asegurada una buena aproximación en las rectas $x=a$, $y=b$. Para demostrar que la aproximación es buena en cualquier dirección, se debe comprobar que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-f(a,b)-\nabla f(a,b)\cdot[(x,y)-(a,b)]}{|(x,y)-(a,b)|} = 0.$$

Ejemplo 3.3.1 Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^2 + y$, comprobar que existe un plano que aproxima bien la gráfica de f cerca del punto $(1,3)$.
Solución: Se calculan las derivadas parciales de f en $(1,3)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x,\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = 4,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1,\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = 1.$$

Como $f(1,3) = 5$, el plano tiene por ecuación: $z = 5 + 4(x-1) + (y-3)$. Se comprueba ahora si aproxima bien la gráfica de la función.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{2x^2 + y - [5 + 4(x-1) + 1(y-3)]}{|(x,y)-(1,3)|} &= \lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{2(x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}} = \lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{2s^2}{\sqrt{s^2+t^2}} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{2\,r^2\,\cos^2(\theta)}{r} = \lim_{r\to 0}\left[2\,r\,\cos^2(\theta)\right] = 0.\end{aligned}$$

En el calculo del límite tenemos en cuenta que la función $\cos(\theta)$ es acotada.

□

Definición 3.3.2 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función, $\vec{a} \in \overset{\circ}{\mathrm{Dom}}(f)$, se dice que f es diferenciable en $\vec{a}$ si existe el vector gradiente $\nabla f(\vec{a})$, y se verifica:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \nabla f(\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{a})}{|\vec{x}-\vec{a}|} = 0.$$

Algunos ejemplos de funciones diferenciables son las funciones constantes y las proyecciones.

Proposición 3.3.3 Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en un punto $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, entonces se verifica:

1. $f + g$ es diferenciable en $\vec{a}$,
2. se $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces λf es diferenciable en $\vec{a}$,
3. $f \cdot g$ es diferenciable en $\vec{a}$,
4. se $g(\vec{a}) \neq 0$ entonces $\dfrac{f}{g}$ es diferenciable en $\vec{a}$,
5. se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en $f(\vec{a})$ entonces a composición $h \circ f$ es diferenciable en $\vec{a}$.

Proposición 3.3.4 Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\vec{a}$ entonces es continua en $\vec{a}$.

Demostración. Se f es diferenciable en $\vec{a}$, entonces:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \nabla f(\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{a})}{|\vec{x}-\vec{a}|} = 0.$$

Como el límite es 0, también lo será el límite del numerador. Por eso:

$$0 = \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left[f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \nabla f(\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{a})\right] = \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} [f(\vec{x}) - f(\vec{a})] - \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left[\nabla f(\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{a})\right].$$

Además,

$$\begin{aligned}
\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \nabla f(\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{a}) &= \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})\cdot(x_i-a_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})\cdot(x_i-a_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})\cdot \lim_{\vec{x}\to\vec{a}}(x_i-a_i)\right) = 0
\end{aligned}$$

Por tanto $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left[f(\vec{x})-f(\vec{a})\right] = 0$, es decir, $\left(\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})\right) - f(\vec{a}) = 0,\ \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$. □

Proposición 3.3.5 Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es diferenciable en $\vec{a}$, entonces existen todas las derivadas direccionales de f en $\vec{a}$, y para $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$, $|\vec{v}|=1$, se verifica:

$$D_{\vec{v}} f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{v}. \tag{3.5}$$

Si f no es diferenciable en $\vec{a}$, la igualdad (3.5) puede verificarse o no, dependiendo de la función y del punto considerados.

Proposición 3.3.6 (Propiedades del vector gradiente) Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ diferenciable en $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$, se verifica:

1. Si $\nabla f(\vec{a}) = (0,...,0)$ entonces $D_{\vec{v}} f(\vec{a}) = 0$, para todo $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$, $|\vec{v}|=1$.
2. Si $\nabla f(\vec{a}) \neq (0,...,0)$, el máximo valor das derivadas direccionales es $|\nabla f(\vec{a})|$ y se obtiene para el vector $\frac{\nabla f(\vec{a})}{|\nabla f(\vec{a})|}$.

Demostración. 1.- $D_{\vec{v}} f(\vec{a}) = (0,...,0)\cdot\vec{v} = 0$.
2.- Supongamos $\nabla f(\vec{a}) \neq (0,...,0)$ y designemos por θ al ángulo formado por $\nabla f(\vec{a})$ y $\vec{v}$, entonces:

$$D_{\vec{v}} f(\vec{a}) = |\nabla f(\vec{a})||\vec{v}|\ \cos(\theta) = |\nabla f(\vec{a})|\cos(\theta).$$

La derivada direccional alcanza su máximo valor cuando $\cos(\theta) = 1$; esto es, cuando $\vec{v}$ tiene la misma dirección y sentido que $\nabla f(\vec{a})$. Además, cuando $\nabla f(\vec{a})$ es ortogonal a $\vec{v}$, la derivada direccional es cero.

□

Ejercicio 3.3.7 Dada la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = 3-x^2-2y^2$, hallar:
(a) su derivada direccional en $(3,2)$ para $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$,
(b) $\nabla f(3,2)$,
(c) el máximo valor de las derivadas direccionales en $(3,2)$,
(d) encontrar un vector unitario $\vec{w}$ tal que $D_{\vec{w}} f(3,2) = 0$.

□

3.4 Derivadas parciales de orden superior

Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es una función escalar, también lo son sus derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$,...,$\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$. Estas derivadas parciales se llaman derivadas parciales de segundo orden de f, o segundas derivadas parciales. Para funciones de dos variables existen cuatro derivadas parciales de segundo orden, que se denotan de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)=f_{xx}(a,b),\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{xy}(a,b),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)=f_{yx}(a,b),\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)=f_{yy}(a,b).$$

Ejercicio 3.4.1 Calcular todas las derivadas parciales de segundo orden de las funciones:
$f(x,y)=3xy^2-2y+5x^2y^2$, $g(x,y,z)=y\,\mathrm{e}^x+x\,\operatorname{sen}(2z)$, $h(x,y)=2\,\mathrm{e}^{xy^2}$

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3y^2+10\,xy^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=6xy-2+10\,x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=10\,y^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=6y+20xy,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=6x+10\,x^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)=y\,\mathrm{e}^x+\operatorname{sen}(2z),\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)=\mathrm{e}^x,\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)=2x\,\cos(2z),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y,z)=y\,\mathrm{e}^x,\ \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y,z)=\mathrm{e}^x,\ \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial^2 g}{\partial z\partial x}(x,y,z)=2\,\cos(2z)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y,z)=0,\ \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}(x,y,z)=0,\ \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(x,y,z)=-4x\,\operatorname{sen}(2z)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=y^2 2\,\mathrm{e}^{xy^2},\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=4xy\,\mathrm{e}^{xy^2},$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y)=2y^4\,\mathrm{e}^{xy^2},\ \frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 h}{\partial y\partial x}(x,y)=4y\,\mathrm{e}^{xy^2}[1+xy^2],\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y)=4x\,\mathrm{e}^{xy^2}[1+2xy^2].$$

□

Teorema 3.4.2 (Condición suficiente para la igualdad de las segundas derivadas parciales mixtas) Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función tal que las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_j}$ existen en una bola $\mathcal{B}(\vec{a},r)$ y son continuas en $\vec{a}$, entonces también existe $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}(\vec{a})$ se cumple $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}(\vec{a})=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_j}(\vec{a})$.

El proceso de cálculo de derivadas parciales se puede continuar indefinidamente, ya que las segundas derivadas parciales de una función también son funciones escalares. Así, hablaríamos de derivadas parciales de tercer orden, o terceras derivadas parciales, ...

Definición 3.4.3 Una función $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^p$ en un conjunto abierto $B\subset\mathbb{R}^n$, si todas las derivadas parciales hasta el orden p son continuas en B.

3.5 Diferenciabilidad de las funciones vectoriales

Definición 3.5.1 La función $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en $\vec{a} \in \overset{\circ}{\mathrm{Dom}(\vec{f})}$ si y solo si son diferenciables en $\vec{a}$ cada una de las funciones componentes $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

En este caso las derivadas parciales se agrupan en una matriz, llamada *matriz jacobiana*, definida a continuación.

$$J_{\vec{f}}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}.$$

Cuando $p = n$, el determinante de la matriz jacobiana se denomina *jacobiano*.

Ejemplo 3.5.2 Dada $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{f}(x,y) = (x^2\,y + y^3,\ x\,y^4)$, se calculará la matriz jacobiana de $\vec{f}$ en $(2,1)$.

Las derivadas parciales de f_1 y f_2 son:

$$f_1(x,y) = x^2y + y^3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 2xy, & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = x^2 + 3y^2, \\ \frac{\partial f_1}{\partial x}(2,1) = 4, & \frac{\partial f_1}{\partial y}(2,1) = 7. \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = xy^4 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = y^4, & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 4xy^3, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(2,1) = 1, & \frac{\partial f_2}{\partial y}(2,1) = 8. \end{cases}$$

La matriz jacobiana es: $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$.

□

3.6 Regla de la cadena

Dadas las funciones $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ y $\vec{g} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ diferenciables respectivamente en $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{f}(\vec{a}) = \vec{b} \in \mathbb{R}^p$, la composición $\vec{g} \circ \vec{f}$ es diferenciable en $\vec{a}$ y su matriz jacobiana asociada es:

$$\mathcal{J}_{\vec{g}\circ\vec{f}}(\vec{a}) = \mathcal{J}_{\vec{g}}(\vec{b})\,\mathcal{J}_{\vec{f}}(\vec{a}).$$

Caso Particular Consideremos la composición de una función vectorial $\vec{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ (curva en $\mathbb{R}^3$) y una escalar $f(x, y, z)$.

$$\vec{\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}.$$

La función compuesta $G = f \circ \vec{\sigma}$ es una función de una variable real: $G(t) = f(x(t), y(t), z(t))$. Al aplicar la regla de la cadena:

$$G'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{\sigma}(t)) \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{\sigma}(t)) \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{\sigma}(t)) \right) \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \nabla f(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t)$$

Ejemplo 3.6.1 Calcular $\mathcal{J}_{\vec{g} \circ \vec{f}}(0, 0)$, siendo: $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(x, y) = (x^3 + y^3, \, \mathrm{sen}(xy), \, \mathrm{e}^{x+y})$, $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{g}(x, y, z) = (x + y + z, \, xyz)$

<u>Solución</u>: $\vec{f}(0, 0) = (0, 0, 1)$

$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = 3x^2$, $\frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 3y^2$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0) = 0$

$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = y \, \cos(xy)$, $\frac{\partial f_2}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = x \, \cos(xy)$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}(0, 0) = 0$

$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) = \mathrm{e}^{x+y}$, $\frac{\partial f_3}{\partial x}(0, 0) = 1$, $\frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y) = \mathrm{e}^{x+y}$, $\frac{\partial f_3}{\partial y}(0, 0) = 1$

$$\mathcal{J}_{\vec{f}}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) = 1$, $\frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) = 1$, $\frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) = 1$,

$\frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) = yz$, $\frac{\partial g_2}{\partial x}(0, 0, 1) = 0$, $\frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) = xz$, $\frac{\partial g_2}{\partial y}(0, 0, 1) = 0$, $\frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) = xy$, $\frac{\partial g_2}{\partial z}(0, 0, 1) = 0$.

$$\mathcal{J}_{\vec{g}}(0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J}_{\vec{g} \circ \vec{f}}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$