Ejercicios básicos

$\boxed{1}$ Calcular los polinomios de Taylor de orden 2 de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x,y)=\operatorname{sen}(x+2y)$, en el punto $(0,0)$,

b) $g(x,y)=\mathrm{e}^{(x-1)^2}\cos(y)$, en el punto $(1,0)$,

c) $h(x,y)=\dfrac{x}{y^2+1}$, en el punto $(1,1)$.

Solución:

a) $f(x,y)=\operatorname{sen}(x+2y)$, $f(0,0)=\operatorname{sen}(0)=0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos(x+2y),\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\cos(0)=1, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2\ \cos(x+2y),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=2\ \cos(0)=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-\operatorname{sen}(x+2y),\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=-\operatorname{sen}(0)=0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)=-2\ \operatorname{sen}(x+2y),\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)=-2\ \operatorname{sen}(0)=0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-4\ \operatorname{sen}(x+2y),\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=-4\ \operatorname{sen}(0)=0 \end{cases}$$

El polinomio buscado es:

$$\mathcal{P}_2(x,y)=0+1\cdot(x-0)+2\cdot(y-0)+\frac{1}{2}\left[0\cdot(x-0)^2+2\cdot 0\cdot(x-0)(y-0)+0\cdot(y-0)^2\right]=x+2y.$$

b) $g(x,y)=\mathrm{e}^{(x-1)^2}\cos(y)$, $g(1,0)=\mathrm{e}^0\ \cos(0)=1$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=2(x-1)\mathrm{e}^{(x-1)^2}\cos(y),\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(1,0)=2(1-1)\mathrm{e}^{(1-1)^2}\cos(0)=0, \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=-\mathrm{e}^{(x-1)^2}\operatorname{sen}(y),\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0)=-\mathrm{e}^{(1-1)^2}\operatorname{sen}(0)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=2\mathrm{e}^{(x-1)^2}\cos(y)(2x^2-4x+3),\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,0)=2\mathrm{e}^{(1-1)^2}\cos(0)(2-4+3)=2 \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(x,y)=-2(x-1)e^{(x-1)^2}\operatorname{sen}(y),\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(1,0)=-2(1-1)\,\mathrm{e}^{(1-1)^2}\operatorname{sen}(0)=0 \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=-\mathrm{e}^{(x-1)^2}\cos(y),\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1,0)=-\mathrm{e}^{(1-1)^2}\cos(0)=-1 \end{cases}$$

El polinomio buscado es:

$$\mathcal{Q}(x,y)=1+0\cdot(x-1)+0\cdot(y-0)+\tfrac{1}{2}\left[2\cdot(x-1)^2+2\cdot 0\cdot(x-1)(y-0)+(-1)\cdot(y-0)^2\right]=x^2-2x-\tfrac{1}{2}y^2+2.$$

c) $h(x,y)=\dfrac{x}{y^2+1}$, $h(1,1)=\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{y^2+1}, \ \dfrac{\partial h}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-2xy}{(y^2+1)^2}, \ \dfrac{\partial h}{\partial y}(1,1) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = 0, \ \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(1,1) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \dfrac{-2y}{(y^2+1)^2}, \dfrac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}(1,1) = \dfrac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial x}(1,1) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{8xy^2}{(y^2+1)^3} - 2\dfrac{x}{(y^2+1)^2}, \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(1,1) = \frac{8}{8} - 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

El polinomio buscado es: $R(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{2}\left[2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(y-1)^2\right]$.

□

$\boxed{2}$ Calcular la matriz Hessiana de $f(x,y) = x^3y + \mathrm{e}^x$, en el punto $(1,2)$.

Solución: El vector gradiente de f es: $\nabla f(x,y) = (\mathrm{e}^x + 3x^2y,\ x^3)$ por lo que la matriz Hessiana en un punto cualquiera (x,y) es: $\begin{pmatrix} \mathrm{e}^x + 6xy & 3x^2 \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$

En el punto $(1,2)$, $\begin{pmatrix} \mathrm{e}^1 + 6\cdot 1\cdot 2 & 3\cdot 1^2 \\ 3\cdot 1^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}+12 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

□

$\boxed{3}$ Calcular los extremos relativos de las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

a) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3$,

b) $g(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$.

Solución:

a) El valor de las derivadas parciales de f es:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 24x^2 + 12xy^2 = 4x\left(6x + x^2 + 3y^2\right) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 12x^2y + 4y^3 = 4y\left(3x^2 + y^2\right) \end{cases}$$

Existen cuatro opciones para obtener los puntos críticos:

$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\}$ punto crítico: $(0,0)$,

$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ 3x^2 + y^2 = 0 \end{array}\right\}$ punto crítico: $(0,0)$,

$\left.\begin{array}{l} 6x + x^2 + 3y^2 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6x + x^2 = 0 \Rightarrow x(6+x) = 0$, puntos críticos: $(0,0), (-6,0)$,

$$\left.\begin{array}{l} 6x + x^2 + 3y^2 = 0 \\ 3x^2 + y^2 = 0 \end{array}\right\}, \text{ punto crítico: } (0,0).$$

La matriz hessiana en un punto arbitrario es: $\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 48x + 12y^2 & 24xy \\ 24xy & 12x^2 + 12y^2 \end{pmatrix}$. En los puntos críticos serán:

• $\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ El criterio no decide, por lo que se deben estudiar los valores de la función alrededor de $(0,0)$. Se compara $f(0,0) = 0$ con los valores $f(x,0)$ con x cerca de 0.

$f(x,0) = x^4 + 8x^3 = x^3\,(x+8)$. Si x está cerca de 0 entonces $x+8 > 0$, por lo que el signo de $f(x,0)$ para $x \in (-1,1)$ coincide con el de x^3. Como $x^3 > 0$ para $x > 0$ e $x^3 < 0$ para $x < 0$ se puede afirmar que $(0,0)$ no es extremo.

• $\mathcal{H}_f(-6,0) = \begin{pmatrix} 12(-6)^2 + 48(-6) & 0 \\ 0 & 12(-6)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 & 0 \\ 0 & 432 \end{pmatrix}$.

Como $\begin{vmatrix} 144 & 0 \\ 0 & 432 \end{vmatrix} > 0$ y $|144| > 0$ se verifica que $(-6,0)$ es mínimo relativo.

b) $g(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$

Los puntos críticos de g son las soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4y + 4x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x^3 + 4y^3 = 0 \Rightarrow y = -x$$

Se sustituye esta relación en cualquiera de las ecuaciones y se obtiene:

$$4x^3 - 4x - 4x = 0 \Rightarrow x^3 - 2x = 0 \Rightarrow \left(x^2 - 2\right)x = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2} \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Los puntos críticos son: $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $(0,0)$.

La matriz Hessiana es: $\mathcal{H}_g(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$. Por tanto:

$\mathcal{H}_g(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \mathcal{H}_g(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 384 > 0$, $|20| = 20 > 0$. Son mínimos relativos.

$\mathcal{H}_g(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$. El criterio no decide.

□

$\boxed{4}$ Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^3 + y^3$, sujetos a la restricción $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Solución: El conjunto $A = \{(x,y);\ x^2+y^2=1\}$ es una circunferencia, por lo que es un conjunto compacto que verifica $\overset{\circ}{A} = \varnothing$ y $\mathcal{F}r(A) = A$. Además, por ser la función f continua, existirán los extremos absolutos pedidos.

Se en la relación $x^2+y^2-1=0$ despejamos y en función de x obtenemos $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$. Así, el conjunto A es la unión de $A_1 = \{(x,y);\ y = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1]\}$ e $A_2 = \{(x,y);\ y = -\sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1]\}$. Buscaremos extremos relativos en estos dos conjuntos. Para eso definimos $g_1(x) = f(x,\sqrt{1-x^2}) = x^3 + \left(\sqrt{1-x^2}\right)^3$, $x \in [-1,1]$ y $g_2(x) = f(x,-\sqrt{1-x^2}) = x^3 + \left(-\sqrt{1-x^2}\right)^3 = x^3 - \left(\sqrt{1-x^2}\right)^3$, $x \in [-1,1]$. Comenzamos trabajando con g_1.

$$g_1{}'(x) = 3x^2 - 3x\sqrt{1-x^2} = 3x\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{o} \\ x - \sqrt{1-x^2} = 0 \end{cases}$$

Si $x - \sqrt{1-x^2} = 0$ entonces: $x = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 = 1-x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.

El valor $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ no es solución de la ecuación $g_1{}'(x) = 0$, ya que $-\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{1-\frac{1}{2}} \neq 0$. Por tanto, tenemos como posibles extremos relativos $x = 0$ y $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Calculamos las derivadas de segundo orden.

$g_1{}''(x) = 6x - 3\sqrt{1-x^2} + 3\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$g_1{}''(0) = -3\sqrt{1} = -3$. Tenemos un máximo relativo.

$g_1{}''\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 6\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) - 3\sqrt{1-\frac{1}{2}} + 3\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = 4.2426$. Tenemos un mínimo relativo.

Además, en los extremos se verifica que se tiene un mínimo relativo en $x=-1$ y un máximo relativo en $x=1$. Así, los posibles extremos absolutos son: $(0,1)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, $(-1,0)$ y $(1,0)$.

Hacemos las cuentas para g_2.

$$g_2{}'(x) = 3x^2 + 3x\sqrt{1-x^2} = 3x\left(x + \sqrt{1-x^2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{o} \\ x + \sqrt{1-x^2} = 0 \end{cases}$$

Si $x + \sqrt{1-x^2} = 0$ entonces: $x = -\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 = 1-x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.

El valor $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ no es solución de la ecuación $g_2{}'(x) = 0$, ya que $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{1-\frac{1}{2}} \neq 0$. Por tanto, tenemos como posibles extremos relativos $x = 0$ y $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Calculamos las derivadas de segundo orden.

$g_2{}''(x) = 6x + 3\sqrt{1-x^2} - 3\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$g_2{}''(0) = 3\sqrt{1} = 3$ Tenemos un mínimo relativo.

$g_2{}''\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 6\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) - 3\sqrt{1-\frac{1}{2}} + 3\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = -4.2426$ Temos un máximo relativo.

Además, en los extremos se verifica que se tiene un mínimo relativo en $x=-1$ y un máximo relativo en $x=1$.

Los posibles extremos absolutos son: $(0,-1)$, $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, $(-1,0)$ e $(1,0)$. Evaluamos la función $f(x,y) = x^3+y^3$ en todos los extremos relativos:

$f(0,1)=1$, $f\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(-1,0)=-1$, $f(1,0)=1$, $f(0,-1)=-1$, $f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Así $(1,0)$ e $(0,1)$ son máximos absolutos y $(-1,0)$ e $(0,-1)$ mínimos absolutos.

$\square$

$\boxed{5}$ Demostrar que la caja rectangular de volumen dado y área superficial mínima es un cubo.

Solución: Si las dimensiones de la caja son $x>0$, $y>0$, $z>0$, la función a maximizar es $f(x,y,z)=2(xy+xz+yz)$, sujetos a la restricción $xyz=V$ (volumen fijo con $V>0$).

Reduzco el problema a dimensión 2. (En todos los cálculos posteriores se tendrá en cuenta, para las divisiones, $x\neq 0$, $y\neq 0$.)

$$xyz=V\Rightarrow z=\frac{V}{xy}$$

La función a minimizar ahora es $g(x,y)=2\left(xy+x\frac{V}{xy}+y\frac{V}{xy}\right)=2\left(xy+\frac{V}{x}+\frac{V}{y}\right)$. Calculamos sus puntos críticos.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=2\left(y-\frac{V}{x^2}\right)=0\Rightarrow y=\frac{V}{x^2}\Rightarrow V=yx^2\\[2mm] \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=2\left(x-\frac{V}{y^2}\right)=0\Rightarrow x=\frac{V}{y^2}\Rightarrow V=xy^2\end{array}\right\}\Rightarrow x^2y=xy^2\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\ y=0\\ x=y\end{array}\right.$$

Como x e y no pueden ser nulos, la única posibilidad es que $y=x$. Al sustituir esta relación en la condición del volumen fijo se obtiene $V=x^3$.

Veamos que tipo de punto crítico se obtiene con $x=y$.

$$\mathcal{H}_g(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial^2 g}{\partial y\,\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4V}{x^3} & 2\\ 2 & \frac{4V}{y^3}\end{pmatrix}$$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,x)=\frac{4V}{x^3}>0$

$\det\left(\mathcal{H}_g(x,x)\right)=\det\begin{pmatrix}\frac{4V}{x^3} & 2\\ 2 & \frac{4V}{x^3}\end{pmatrix}=\frac{16V^2}{x^6}-4=4(\frac{4V^2}{V^2}-1)=4\,(4-1)=12>0$

Se tiene un máximo relativo para g en (x,x). Como $z=\frac{V}{x^2}=\frac{x^3}{x^2}=x$ entonces $z=\frac{V}{xy}=\frac{V}{x^2}=x$. Así, se tiene un mínimo para $x=y=z$.

$\square$

$\boxed{6}$ Determinar los extremos absolutos de la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x-y^2$ sobre el conjunto $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\leq 9,\ x\leq 1\}$.

Solución: La función a optimizar es $f(x,y) = x - y^2$ y el conjunto es $M = \{(x,y);\ x^2+y^2 \leq 9;\ x \leq 1\}$. M es compacto y f es continua, por lo que existen los extremos absolutos de f en M. Se comienza calculando los extremos relativos de f en el interior de M.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$$

Como el gradiente de f nunca se anula, no existen extremos relativos en $\mathring{M}$.

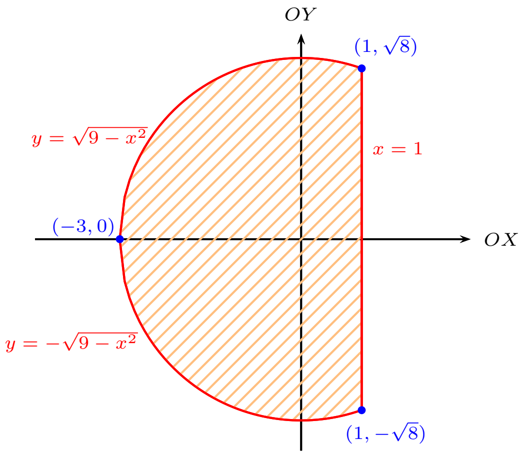

Figura 1: Conjunto $M = \{(x,y);\ x^2+y^2 \leq 9,\ x \leq 1\}$

Se buscan ahora extremos en la frontera, que es $\{(x,y);\ x^2+y^2=9,\ x\in[-3,1]\} \cup \{(1,y);\ y \in [-\sqrt{8},\sqrt{8}]\}$. El estudio se realiza independientemente en cada trozo.

- La restricción de f al conjunto $\{(x,y);\ x^2+y^2=9;\ y \geq 0,\ x \leq 1\}$ es $g(x) = f(x,\sqrt{9-x^2}) = x - (9-x^2) = x^2+x-9$, $x \in [-3,1]$.

  $g'(x) = 2x+1 = 0$, para $x = -\frac{1}{2}$

  $g''(x) = 2 > 0$, por lo que se tiene un mínimo relativo condicionado en $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{35}{4}}\right)$.

  Los puntos $(-3,0)$ e $(1,\sqrt{8})$ son máximos relativos condicionados.

- En $\{(x,y);\ x^2+y^2=9;\ y \leq 0,\ x \leq 1\}$ la función f también toma la expresión $f(x,-\sqrt{9-x^2}) = x-(9-x^2) = x^2+x-9$, por lo que las consecuencias son análogas: se tiene un mínimo relativo en $\left(-\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{35}{4}}\right)$ y máximos relativos en $(-3,0)$ y $(1,-\sqrt{8})$.

- La restricción de f al conjunto $\{(1,y);\ y \in [-\sqrt{8},\sqrt{8}]\}$ es $h(y) = f(1,y) = 1-y^2$.

  $h'(y) = -2y = 0$, para $y = 0$

  $h''(y) = -2 < 0$, por lo que se tiene un máximo relativo en $(1,0)$.

  Los puntos $(1,\sqrt{8})$ y $(1,-\sqrt{8})$ son mínimos relativos.

  En resumen, los valores en los extremos relativos condicionados son:

$$f(-3,0) = -3,\ f\left(1,\sqrt{8}\right) = 1-\left(\sqrt{8}\right)^2 = f(1,-\sqrt{8}) = -7,\ f\left(-\tfrac{1}{2}, -\sqrt{\tfrac{35}{4}}\right) = f\left(-\tfrac{1}{2}, \sqrt{\tfrac{35}{4}}\right) = -\tfrac{37}{4}\ ,\ f(1,0) = 1.$$

Entonces el valor máximo es 1, que se alcanza en el punto $(1,0)$, y el valor mínimo es $-\frac{37}{4}$, que se alcanza en los puntos $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{35}{4}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{35}{4}}\right)$.

$\square$

$\boxed{7}$ Determinar los extremos absolutos de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2+3y^2+x$, sobre el conjunto

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x+y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

Solución: El conjunto M, representado en la Figura (2), verifica:

$$\overset{\circ}{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x+y<1,\ x>0,\ y>0\}$$

$$\mathcal{F}r(M) = \{(x,1-x);\ x\in[0,1]\} \cup \{(x,0);\ x\in[0,1]\} \cup \{(0,y);\ y\in[0,1]\}$$

Se comienza calculando los extremos relativos de f en el interior. Para eso se debe anular el vector gradiente. $\nabla f(x,y) = (2x+1, 6y)$ se anula en el punto $(-\frac{1}{2}, 0) \notin \overset{\circ}{M}$.

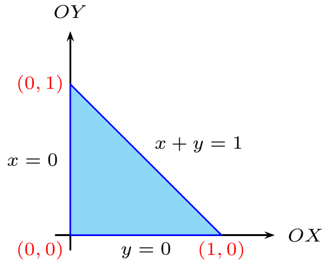

Figura 2: Conjunto M

Se estudian los extremos relativos de f independientemente en cada trozo de la frontera.

• $j(x) = f(x,1-x) = x^2+3(1-x)^2+x = 4x^2-5x+3$, $j'(x) = 8x-5 = 0$ para $x=\frac{5}{8}$. Como $j''\left(\frac{5}{8}, 1-\frac{5}{8}\right) = j''\left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right) = 8 > 0$, hay un mínimo relativo en $\left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)$. Hay máximos relativos en este lado en los puntos $(1,0)$ e $(0,1)$.

• $g(x) = f(x,0) = x^2+x$, $g'(x) = 2x+1 = 0$ para $x = \frac{-1}{2}$. Como $g''(x,0) = 2 > 0$ se tiene un mínimo relativo condicionado en $(0,0)$ y un máximo relativo condicionado en $(1,0)$.

• $h(y) = f(0,y) = 3y^2$, $h'(y) = 6y = 0$ para $y=0$. Como $h''(y) = 6 > 0$ se tiene un mínimo relativo condicionado en $(0,0)$ y un máximo relativo condicionado en $(0,1)$.

Se agrupa ahora toda la información:

Máximos relativos: $f(1,0) = 2$, $f(0,1) = 3$.

Mínimos relativos: $f\left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right) = \frac{23}{16}$ e $f(0,0) = 0$.

El valor máximo es 3 y el mínimo 0.

$\square$

Ejercicios complementarios

$\boxed{8}$ Calcular la matriz Hessiana de $g(x,y) = \frac{x^2}{y}$, en el punto $(3,1)$.

Solución: El vector gradiente de g es: $\nabla g(x,y) = \left(2\frac{x}{y}, -\frac{x^2}{y^2}\right)$, por lo que la matriz Hessiana en un punto cualquiera es $\begin{pmatrix} \frac{2}{y} & -2\frac{x}{y^2} \\ -2\frac{x}{y^2} & 2\frac{x^2}{y^3} \end{pmatrix}$

En el punto $(3,1)$, $\begin{pmatrix} \frac{2}{1} & -2\frac{3}{1^2} \\ -2\frac{3}{1^2} & 2\frac{3^2}{1^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 18 \end{pmatrix}$

$\square$

$\boxed{9}$ Calcular los extremos relativos de $h(x,y) = xy\,\mathrm{e}^{x+2y}$.

Solución: Los puntos críticos de h son las soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = y \cdot \mathrm{e}^{x+2y} + xy\,\mathrm{e}^{x+2y} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = x \cdot \mathrm{e}^{x+2y} + 2xy\,\mathrm{e}^{x+2y} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y\,\mathrm{e}^{x+2y}\,(1+x) = 0 \\ x\,\mathrm{e}^{x+2y}\,(1+2y) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y(1+x) = 0 \\ x(1+2y) = 0 \end{array}\right.$$

Como existen dos opciones para anular cada derivada, existirán cuatro para anular el gradiente.

1ª opción: $y = 0$, $x = 0$. Se obtiene el punto crítico $(0,0)$.

2ª opción: $y = 0$, $1 + 2y = 0$. No se obtienen puntos críticos.

3ª opción: $1 + x = 0$, $x = 0$. No se obtienen puntos críticos.

4ª opción: $1 + x = 0$, $1 + 2y = 0$. Se obtiene el punto crítico $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

La matriz Hessiana es: $\mathcal{H}_h(x,y) = \begin{pmatrix} y\,\mathrm{e}^{x+2y}\,(2+x) & \mathrm{e}^{x+2y}\,(1+x+2y+2xy) \\ \mathrm{e}^{x+2y}\,(1+x+2y+2xy) & 4x\,\mathrm{e}^{x+2y}\,(1+y) \end{pmatrix}$

$\mathcal{H}_h(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$. Punto silla.

$\mathcal{H}_h(-1,-\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2} & 0 \\ 0 & -2\,\mathrm{e}^{-2} \end{pmatrix}$,

$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2} & 0 \\ 0 & -2\,\mathrm{e}^{-2} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-4} > 0$, $\left| -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} \right| = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2} < 0$. Se obtiene un máximo relativo.

□

$\boxed{10}$ Calcular los extremos absolutos de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - 6xy^2 + y^2$ en la frontera de

$$M = B((0,0);1) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq 0\}.$$

Solución: El conjunto, representado en la Figura (3) tiene por frontera

$$\begin{aligned} F_1 \cup F_2 &= \{(x,y);\ x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\} \cup \{(x,0);\ x \in [-1,1]\} \\ &= \{(x,y);\ y = \sqrt{1-x^2},\ x \in [-1,1]\} \cup \{(x,0);\ x \in [-1,1] \end{aligned}$$

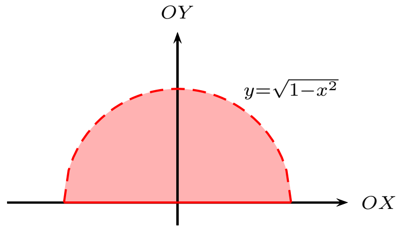

Figura 3: Conjunto M

Evaluamos f en $F_1 = \{(x,y);\ y = \sqrt{1-x^2},\ x \in [-1,1]\}$. Si $(x,y) \in F_1$ entonces

$$f(x,y) = x^2 - 6xy^2 + y^2 = x^2 - 6x(1-x^2) + (1-x^2) = 6x^3 - 6x + 1.$$

Estudiaremos los extremos relativos de $g(x) = 6x^3 - 6x + 1$, con $x \in [-1,1]$.

$$g'(x) = 18x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$g''(x) = 36x,$$

$g''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 36 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3} > 0$ Tenemos un mínimo relativo.

$g''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 36 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -12\sqrt{3} < 0$ Tenemos un máximo relativo.

En cuanto a los extremos del intervalo, tenemos un mínimo relativo en $x = -1$ y un máximo relativo en $x = 1$. Por tanto, f tiene mínimos relativos condicionados en $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ y $(-1, 0)$, y máximos relativos condicionados en $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ y $(1, 0)$.

Evaluamos f en $F_2 = \{(x, 0);\ x \in [-1, 1]\}$. Si $(x, y) \in F_2$ entonces $f(x, y) = x^2$. Estudiaremos los extremos relativos de $h(x) = x^2$, con $x \in [-1, 1]$.

$$h'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$h''(x) = 2,$$

$h''(0) = 2 > 0$ Tenemos un mínimo relativo.

En cuanto a los extremos del intervalo, tenemos máximos relativo en $x = -1$ y $x = 1$.

Por tanto, f tiene un mínimo relativo condicionado en $(0, 0)$ y máximos relativos condicionados en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

Evaluamos la función es todos estos puntos:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3} = -0.4880,$$
$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 6\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{2}{3} = 1.8214,$$
$$f(1, 0) = 1 = f(-1, 0) = 1,\ f(0, 0) = 0$$

El valor máximo es 1.8214 y el mínimo -0.4880.

□

$\boxed{11}$ La variación ℓ de la longitud de un alambre viene dada por $\ell(x, y, z) = x + y + 2z$, donde x es la presión, y la humedad y z la temperatura. Por las condiciones de trabajo, estas variables están sujetas a las restricciones $3x^2 + y^2 = 12$ y $x + y + z = 2$. Determinar los extremos absolutos de la longitud ℓ.

Solución: En los puntos del alambre se verifica que $z = 2 - x - y$, $y = \pm\sqrt{12 - 3x^2}$, por lo que en una zona tenemos $z = 2 - x - \sqrt{12 - 3x^2}$ y en otra $z = 2 - x + \sqrt{12 - 3x^2}$. Definimos las funciones

$$g_1(x) = x + \sqrt{12 - 3x^2} + 2(2 - x - \sqrt{12 - 3x^2}) = 4 - x - \sqrt{12 - 3x^2},\ x \in [-2, 2]$$

y

$$g_2(x) = x - \sqrt{12 - 3x^2} + 2(2 - x + \sqrt{12 - 3x^2}) = 4 - x + \sqrt{12 - 3x^2},\ x \in [-2, 2],$$

que miden la longitud del alambre en las dos zonas en las que lo podemos partir. Estudiamos por separado las funciones.

$$g_1'(x) = -1 - \frac{-6x}{2\sqrt{12 - 3x^2}} = -1 + \frac{3x}{\sqrt{12 - 3x^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{12 - 3x^2}} = 1$$

$$\frac{3x}{\sqrt{12-3x^2}} = 1 \Rightarrow 3x = \sqrt{12-3x^2} \Rightarrow 9x^2 = 12 - 3x^2 \Rightarrow 12x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Si $x = 1$ entonces $-1 + \frac{3 \cdot 1}{\sqrt{12 - 3 \cdot 1^2}} = 0$, pero si $x = -1$ entonces $-1 + \frac{3 \cdot (-1)}{\sqrt{12 - 3 \cdot 1^2}} = -2 \neq 0$. Por tanto, la única solución que obtenemos es $x = 1$, y los posibles extremo se alcanzan en $x \in \{-2, 1, 2\}$. Es decir, los posibles extremos para ℓ son $(-2, 0, 4)$, $(1, 3, -2)$ y $(2, 0, 0)$.

Del mismo modo,

$$g_2'(x) = -1 + \frac{-6x}{2\sqrt{12-3x^2}} = -1 - \frac{3x}{\sqrt{12-3x^2}} = 0 \Leftrightarrow -\frac{3x}{\sqrt{12-3x^2}} = 1$$

$$-\frac{3x}{\sqrt{12-3x^2}} = 1 \Rightarrow -3x = -\sqrt{12-3x^2} \Rightarrow 9x^2 = 12 - 3x^2 \Rightarrow 12x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Si $x = 1$ entonces $-1 - \frac{3 \cdot 1}{\sqrt{12 - 3 \cdot 1^2}} = -2 \neq 0$, y si $x = -1$ entonces $-1 - \frac{3 \cdot (-1)}{\sqrt{12 - 3 \cdot 1^2}} = 0$. Por tanto, la única solución que obtenemos es $x = -1$, y los posibles extremos se alcanzan para $x \in \{-2, -1, 2\}$. Es decir, los posibles extremos para ℓ son $(-2, 0, 4)$, $(-1, -3, 6)$ y $(2, 0, 0)$.

Los valores de ℓ en los posibles extremos son: $\ell(-2, 0, 4) = -2 + 0 + 2 \cdot 4 = 6$, $\ell(1, 3, -2) = 1 + 3 + 2 \cdot (-2) = 0$, $\ell(2, 0, 0) = 2 + 0 + 2 \cdot 0 = 2$, $\ell(-1, -3, 6) = -1 - 3 + 2 \cdot (6) = 8$, por lo que el valor máximo es 8 y el mínimo es 0.

$\square$