Ejercicios básicos

$\boxed{1}$ Calcular y representar el dominio de las funciones:

a) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2-y^2}}$.

b) $g(x,y)=\sqrt{9-x^2}-\sqrt{4-y^2}$.

<u>Solución</u>:

a) Existe $f(x,y)$ si y solo si existe $\sqrt{4x^2-y^2}$ y es distinto de 0.

Para que exista $\sqrt{4x^2-y^2}$ es necesario que $4x^2-y^2\geq 0$. Además el denominador no debe anularse, por lo que se necesita $\sqrt{4x^2-y^2}\neq 0$, es decir, $4x^2-y^2\neq 0$.

Por tanto:

$$\mathrm{Dom}(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 4x^2-y^2>0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 4x^2>y^2\}.$$

Para representar el conjunto, dibujaremos $4x^2=y^2$, es decir, las líneas $(2x)^2=y^2$, que equivalen a $y=\pm(2x)$. Estas líneas dividen $\mathbb{R}^2$ en cuatro trozos. De estos cuatro, solo debemos quedarnos con los que verifican $4x^2>y^2$, que son los rayados en la Figura (1).

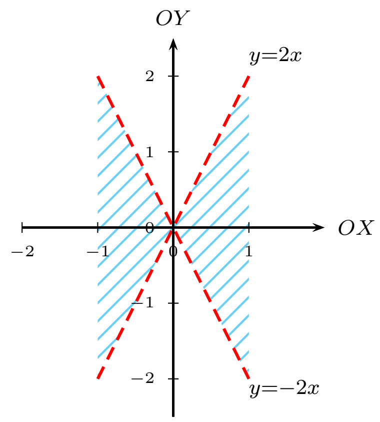


Figura 1: Dominio de f.

b) Existe $g(x,y)$ si y solo si se existen $\sqrt{9-x^2}$ y $\sqrt{4-y^2}$.

Para que exista $\sqrt{9-x^2}$ es necesario que $9-x^2\geq 0$, es decir $9\geq x^2$, $3\geq |x|$.

Para que exista $\sqrt{4-y^2}$ es necesario que $4-y^2\geq 0$, es decir $4\geq y^2$, $2\geq |y|$.

Por tanto, $\mathrm{Dom}(g)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \ |x|\leq 3\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \ |y|\leq 2\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \ |x|\leq 3,\ \ |y|\leq 2\}$.

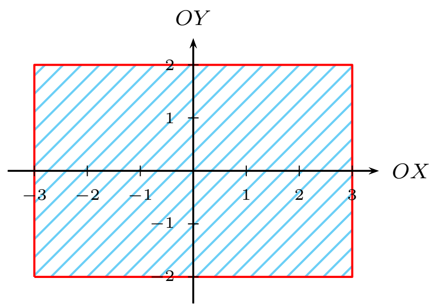


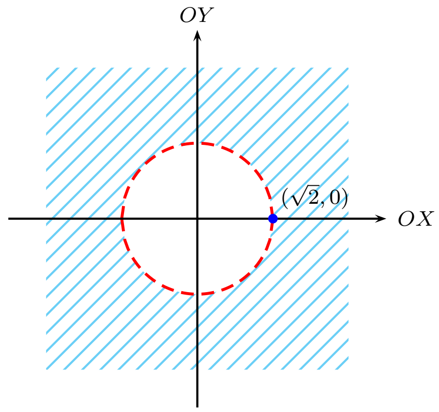
Figura 2: Dominio de g.

$\square$

$\boxed{2}$ Calcúlese analíticamente y dibújese en el plano $\mathbb{R}^2$, el dominio de la función:

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ h(x, y) = \ln\left[\ln(x^2 + y^2 - 1)\right].$$

Expresar el dominio en coordenadas polares.



Solución Existe $\ln\left[\ln\left(x^2 + y^2 - 1\right)\right]$ si y solo si $\ln(x^2+y^2-1) > 0$, y $\ln(x^2 + y^2 - 1) > 0$ si y solo si $x^2 + y^2 - 1 > 1$. Por tanto:

$$\mathrm{Dom}(h) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 > 2\} = \{(r, \theta);\ r > \sqrt{2}\}.$$

$\square$

$\boxed{3}$ Dibujar las curvas de nivel de las funciones: $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = xy$ para $k = 0, -1, 4$.
Solución:

$f(x, y) = x^2 + y^2$
$L(0) = \{(x, y);\ x^2 + y^2 = 0\} = \{(0, 0)\}$
$L(-1) = \{(x, y);\ x^2 + y^2 = -1\} = \varnothing$
$L(4) = \{(x, y);\ x^2 + y^2 = 4\}$

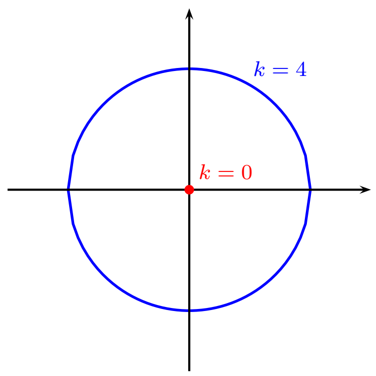


Figura 3: Conjuntos de nivel de f

$g(x,y) = xy$	
$L(0) = \{(x,y);\ xy = 0\} = \{(x,0);\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y);\ y \in \mathbb{R}\}$	
$L(-1) = \{(x,y);\ xy = -1\}$	
$L(4) = \{(x,y);\ xy = 4\}$	

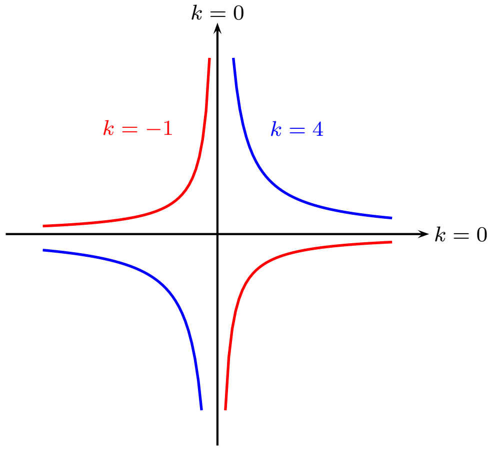


Figura 4: Conjuntos de nivel de g

$\square$

$\boxed{4}$ Calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-xy+3}{x^2+5xy-y^3}$,

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{x^2+y^2-2x+1}$,

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$,

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[y \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right]$.

<u>Solución</u>:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-xy+3}{x^2+5xy-y^3} = \frac{3}{-1^3} = -3$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{x^2+y^2-2x+1}$,

Es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Para resolverla se realiza en primer lugar el cambio de variable: $(s,t) = (x,y)-(1,0) = (x-1,y)$. Si $(x,y)\to(1,0)$ entonces $(s,t)\to(0,0)$, por lo que se puede escribir:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{x^2+y^2-2x+1} &= \lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{(s+1)t-t}{(s+1)^2+t^2-2(s+1)+1} \\
&= \lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{st}{s^2+2s+1+t^2-2s-2+1} \\
&= \lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{st}{s^2+t^2}
\end{aligned}$$

Se realiza ahora el cambio a coordenadas polares: $s = r\,\cos(\theta)$, $t = r\,\operatorname{sen}(\theta)$,

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{st}{s^2+t^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r\,\cos(\theta)\,r\,\operatorname{sen}(\theta)}{r^2} = \lim_{r\to(0,0)} (\cos(\theta)\,\operatorname{sen}(\theta)) = \cos(\theta)\,\operatorname{sen}(\theta)$$

El límite no existe, ya que la evolución de las imágenes es diferente dependiendo del ángulo θ con el que nos acercamos a $(0,0)$.

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1}$

Es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, que se resolverá usando la regla de L$'$Hôpital.

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1} = \lim_{r\to 0} \frac{2\,r}{\frac{2\,r}{2\sqrt{r^2+1}}-0} = \lim_{r\to 0} 2\sqrt{r^2+1} = 2$$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[y \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right] = 0$

ya que $y \to 0$ y la función $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ está acotada.

$\square$

$\boxed{5}$ Dada a función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4-y^2}}{\sqrt{2-x^2}}$.

a) Determinar su dominio.

b) Describir el conjunto $f^{-1}(0)$.

Solución:

a) Para que la función esté bien definida en un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ los radicandos deben ser positivos o iguales a cero, e además el denominador debe ser distinto de cero. En consecuencia,

$$\begin{cases} 4-y^2 \geq 0 \\ 2-x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 \leq 4 \\ x^2 < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq y \leq 2 \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

por tanto $\operatorname{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}, -2 \leq y \leq 2\}$.

b) El conjunto $f^{-1}(0)$ es el conjunto de nivel cero de f, y está formado por aquellos puntos cuya imagen por la función f toma el valor 0. Por tanto, $f^{-1}(0) = \{(x,y) \in \operatorname{Dom}(f);\ f(x,y) = 0\}$. Ahora bien,

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-y^2} = 0 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2 \text{ para } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

En consecuencia,

$$f^{-1}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}, y = \pm 2\}.$$

Se muestran, a modo ilustrativo, la representación del dominio de f y del conjunto de nivel 0 en la Figura (5).

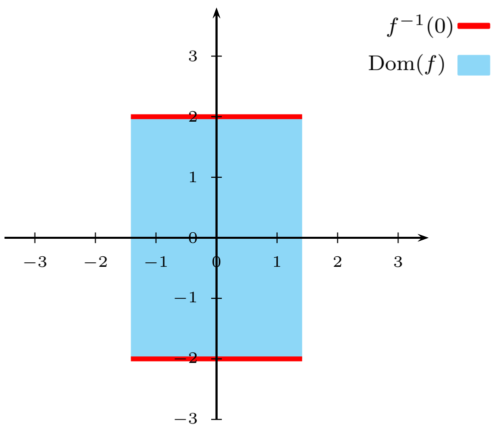


Figura 5: Conjuntos asociado a la función $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{4 - y^2}}{\sqrt{2 - x^2}}$.

$\square$

$\boxed{6}$ Determinar el conjunto más grande en el que la función $f(x, y) = \ln(2x + 3y)$ es continua.

Solución: La función f es una composición de funciones continuas.

$$(x, y) \to 2x + 3y \to \ln(2x + 3y)$$

La primera es continua en todo punto por ser polinómica, y a segunda, el logaritmo, es continua donde está definida, es decir, en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x + 3y > 0\}$.