Práctica 5: Integración

Índice

1. Primitivas

Para calcular una primitiva de una función definida simbólicamente se utiliza el comando `int(func,var)`, siendo `func` la función a integrar, y `var` la variable respecto de la que se integra. Una vez cargado el paquete `symbolic`, y tras definir las variables con las que vamos a trabajar, podemos proceder a calcular la primitiva. Por ejemplo:

editor

```
pkg load symbolic
syms x
int(2*x^3+cos(x),x)
```

Ventana de comandos

```
>> pkg load symbolic
>> syms a b x
>> int(2*x^3+cos(x),x)
ans = (sym)
  4
 x
---- + sin(x)
 2
```

El procedimiento también es válido para calcular integrales parciales de funciones escalares.

editor

```
syms x y
int(2*x^2*y+1,x)
int(2*x^2*y+1,y)
```

Ventana de comandos

```
>> syms x y
>> int(2*x^2*y+1,x)
ans = (sym)
       3
   2*x  * y
  -------- + x
      3

>> int(2*x^2*y+1,y)
ans = (sym)
  2   2
 x  *y  + y
```

Ejercicio 1 Calcular a primitiva de la función $f(x) = x^n$.

Como es previsible, los comandos `int` y `diff` son inversos.

Ejercicio 2 Comprobar que, partiendo de la función $x^2 \ln(x)$ y aplicando sucesivamente los comandos `int` y `diff` se obtiene la función de partida.

Ejercicio 3 Repetir el ejercicio 2 partiendo de la misma función y aplicando el comando `diff` y a continuación el comando `int`.

Cuando Octave no obtiene una primitiva en términos de funciones elementales, porque no existe o no sabe calcularla, puede dar la respuesta en términos de funciones especiales o devolver la expresión original. Eso ocurre, por ejemplo, con la función $\operatorname{sen}(x^2)$.

editor

```
int(sin(x^2),x)
```

Ventana de comandos

```
>> int(sin(x^2),x)
ans = (sym)
                                        /        \
                                        |\/ 2 *x|
3*\/  2  * \/ pi  * fresnels|-------|*gamma(3/4)
                                        |        |
                                        \\/ pi /
------------------------------------------------
                   8*gamma(7/4)
```

2. Integrales definidas

2.1. Integrales definidas para funciones definidas en forma simbólica

Para funciones definidas simbólicamente, el método para calcular la integral definida de una determinada función f en un intervalo $[a, b]$ es el uso del comando `int` con la sintaxis: `int(f,var,a,b)`, donde `var` es la variable simbólica respecto de la que se integra. Por ejemplo, para calcular $\int_0^1 x^2$ el código puede ser:

editor

```
f=x^2;
int(f,x,0,1)
```

Ventana de comandos

```
>> f=x^2;
>> int(f,x,0,1)
ans = (sym) 1/3
```

Si la función no se puede integrar en el intervalo elegido, por ejemplo por no estar acotada, Octave lo indica dando como valor ∞. Por ejemplo, la función $\frac{1}{x^2}$ no está acotada en $[-1, 1]$.

editor

```
int(1/x^2,x,-1,1)
```

Ventana de comandos

```
>> int(1/x^2,x,-1,1)
ans = (sym) oo
```

En el caso en que Octave no pueda calcular el valor de una integral definida simbólicamente (ya sea porque no existe primitiva o porque este valor viene dado por una expresión demasiado compleja) este se aproxima numéricamente. Por ejemplo:

editor

```
syms x;
int(sin(x)/x,x,1,2)
```

Ventana de comandos

```
>> syms x;
>> int(sin(x)/x),x,1,2)
ans = (sym) -Si(1) + Si(2)
```

Podemos obtener un valor aproximado de la integral anterior utilizando el comando `double`:

editor

```
I=int(sin(x)/x,1,2);
double(I)
```

Ventana de comandos

```
I=int(sin(x)/x,1,2)
>> double(I)
ans = 0.65933
```

2.2. Integrales definidas para funciones definidas en línea

El comando `quad`, basado en un método numérico de aproximación, es el que permite calcular integrales definidas. Se usa para funciones definidas en línea, y su sintaxis es: `quad(f,a,b)`, siendo `f` la función a integrar, `a` el extremo inferior del intervalo de integración y `b` el superior. Como ejemplo calcularemos $\int_1^2 x^2$.

editor

```
f=@(x) x^2
quad(f,1,2)
```

Ventá de comandos

```
>> f=@(x) x^2
f =
@(x) x ^ 2
>> quad(f,1,2)
ans = 2.3333
```

La integración de funciones definidas en línea también detecta el problema ya comentado de trabajar con funciones no acotadas.

editor

```
f=@(x) 1/x^2
quad(f,-1,1)
```

Ventá de comandos

```
>> f=@(x) 1/x^2
f =
@(x) 1 / x ^ 2
>> quad(f,-1,1)
warning: division by zero
warning: called from
    @<anonymous>at line 1 column 9
ans = Inf
```

Ejercicio 4 El área encerrada por la gráfica de una función f y el eje OX en el intervalo $[a, b]$ viene dado por la expresión $\int_a^b |f|$. Escribir el código que permite este cálculo y aplicarlo a la función $\operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

3. Integrales dobles

El comando `dblquad` permite el cálculo de integrales dobles de funciones escalares de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ cuando éstas están definidas en línea. El método que sigue el comando es realizar una partición del rectángulo y evaluar la función en determinados puntos, que los agrupa en una matriz. Por eso, las operaciones que al actuar sobre una matriz no lo hacen directamente sobre cada posición deben ir precedidas dun punto(.). Por ejemplo, para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2y^2$, y $D = [-1, 1] \times [0, 3]$.

editor

```
f= @(x,y) x.^2+2*y.^2
dblquad (f,-1,1,0,3)
```

Ventá de comandos

```
>> f=@(x,y) x.^2+2*y.^2
f =
@(x, y) x .^ 2 + 2 * y .^ 2
>> dblquad (f,-1,1,0,3)
ans = 38.000
```

Ejercicio 5 Usar el método de integración simbólica estudiado en la subsección (2.1) para elaborar un algoritmo que permita calcular la integral doble $\displaystyle\iint_T x^2y$, siendo T el triángulo de vértices $(-1, 0)$, $(3, 1)$, $(1, 2)$.