Ejercicios básicos

$\boxed{1}$ Calcular los siguientes productos escalares:

a) $(2,3,-2)\cdot(1,7,6)$

b) $(2,7,4)\cdot(1,1,-2)$

Solución:

a) $(2,3,-2)\cdot(1,7,6) = 2\cdot 1 + 3\cdot 7 + (-2)\cdot 6 = 11$,

b) $(2,7,4)\cdot(1,1,-2) = 2\cdot 1 + 7\cdot 1 + 4\cdot(-2) = 1$

$\square$

$\boxed{2}$ Calcular el módulo de los vectores: $(2,-3,1)$ y $(1,-1,1)$.

Solución: $|(2,-3,1)| = \sqrt{2^2+(-3)^2+1^2} = \sqrt{14}$,

$|(1,-1,1)| = \sqrt{1^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{3}$.

$\square$

$\boxed{3}$ Representar los siguientes conjuntos $A, B, C, D \subset \mathbb{R}^2$, $E \subset \mathbb{R}^3$, y calcular el interior, la frontera y la adherencia:

$A = \{(x,y);\ 2 \le x \le 4,\ 1 < y < 3\}$, $B = \{(x,y);\ 1 < x^2+y^2 < 4,\ y > 0\}$, $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > x^2\}$,

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 < x^2 \le 4\}$ y $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \le z \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

Solución:

a) $\mathcal{F}r(A) = \{(2,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in [1,3]\} \cup \{(4,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in [1,3]\} \cup$

$\cup \{(x,1) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [2,4]\} \cup \{(x,3) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [2,4]\}$

$\mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 2 < x < 4,\ 1 < y < 3\}$,

$\overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 2 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 3\}$.

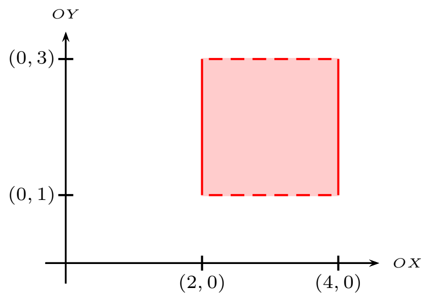

Figura 1: Conjunto A

b) $\mathcal{F}r(B) = \{(x,y);\ x^2+y^2 = 1,\ y > 0\} \cup \{(x,y);\ x^2+y^2 = 4,\ y > 0\}$

$\cup \{(x,0);\ |x| \in [1,2]\}$

$\mathring{B} = B$,

$\overline{B} = \{(x,y);\ 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$.

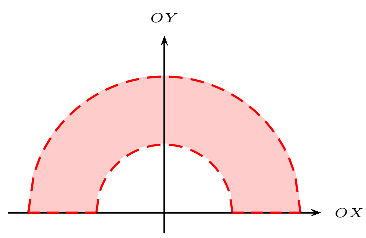

Figura 2: Conjunto B

c) $\mathcal{F}r(C) = \{(x, y);\ y = x^2\}$,
$\overset{\circ}{C} = C$,
$\overline{C} = \{(x, y);\ y \geq x^2\}$

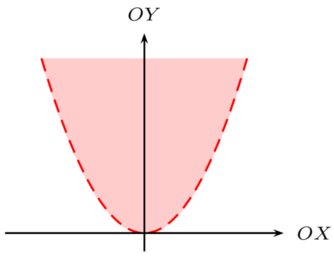

Figura 3: Conjunto C

d) $\mathcal{F}r(D) = \{(x, y);\ x^2 = 1\} \cup \{(x, y);\ x^2 = 4\}$,
$\overset{\circ}{D} = \{(x, y);\ 1 < x^2 < 4\}$,
$\overline{D} = \{(x, y);\ 1 \leq x^2 \leq 4\}$.

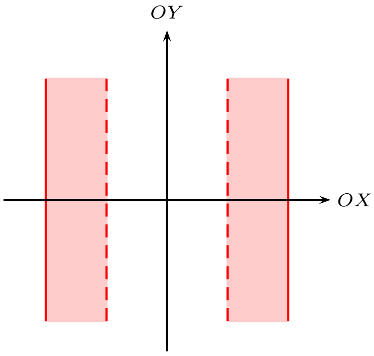

Figura 4: Conjunto D

e) Conjunto E. La frontera está compuesta por cuatro zonas diferenciadas. Son tres tapas laterales, una superior. De las tapas laterales, una es parte del plano $y = 0$, otra parte del plano $x = 0$ y la tercera, que también es tapa inferior, es parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$.

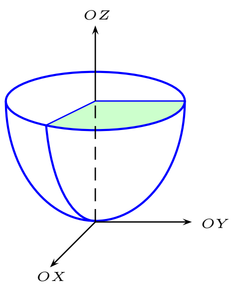

Figura 5: Superior $\mathcal{F}_1$

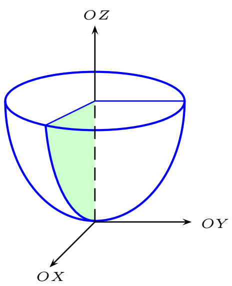

Figura 6: Lateral $\mathcal{F}_2$

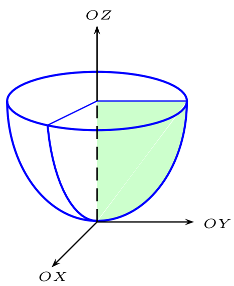

Figura 7: Lateral $\mathcal{F}_3$

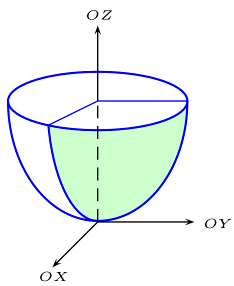

Figura 8: Inferior $\mathcal{F}_4$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}r(E) &= \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3 \cup \mathcal{F}_4 \\
&= \{(x, y, z);\ x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 4\} \cup \{(x, y, z);\ y = 0,\ x^2 \leq z \leq 4\} \\
&\quad \cup \{(x, y, z);\ x = 0,\ y^2 \leq z \leq 4\} \cup \{(x, y, z);\ z = x^2 + y^2,\ z \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}
\end{aligned}$$

$\overset{\circ}{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 < z < 4,\ x > 0,\ y > 0\}$.

$\overline{E} = E$.

□

$\boxed{4}$ Describir el conjunto $M = \left\{(r,\theta);\ \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right],\ r \leq 2\right\}$ en coordenadas cartesianas.

Solución: Para representar el conjunto M, fijémonos en que es la intersección de $P = \left\{(r,\theta);\ \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\right\}$ y $Q = \{(r,\theta);\ r \leq 2\}$

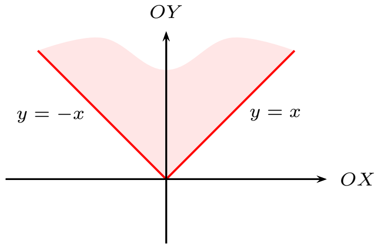

Figura 9: Conjunto P

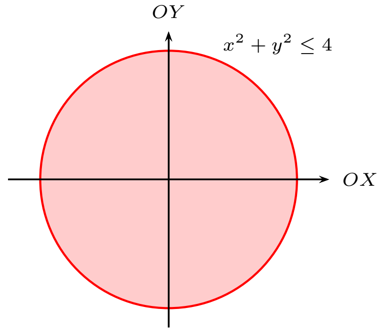

Figura 10: Conjunto Q

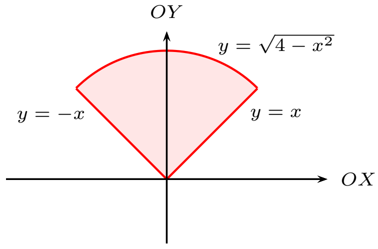

Figura 11: Conjunto M

En coordenadas cartesianas es el conjunto $\{(x,y);\ y \geq |x|,\ |(x,y)| \leq 2\}$.

□

$\boxed{5}$ Calcular la distancia entre los puntos de coordenadas polares $(r_1,\theta_1) = \left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ y $(r_2,\theta_2) = \left(3, -\frac{\pi}{3}\right)$.

Solución: Para calcular la distancia se necesitan las coordenadas cartesianas de cada punto.

$$(r_1,\theta_1) = \left(3, \tfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ y_1 = 3\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \end{cases} \qquad (r_2,\theta_2) = \left(3, -\tfrac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3\ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 1.5 \\ y_2 = 3\ \mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -2.5981 \end{cases}$$

$$|(0,3) - (1.5,-2.5981)\,| = |\,(-1.5, 5.5981)\,| = \sqrt{33.5887} = 5.7956$$

□

$\boxed{6}$ Hallar la ecuación, en coordenadas polares, de la circunferencia de centro $(a,0)$ y radio $a > 0$.

Solución: En coordenadas rectangulares la ecuación de la circunferencia es: $(x-a)^2 + (y-0)^2 = a^2$, que es equivalente a $x^2 - 2ax + y^2 = 0$.

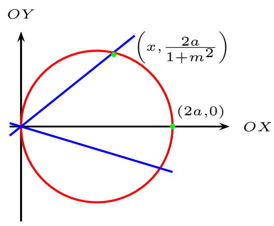

Figura 12: Circunferencia

La intersección de la circunferencia $(x-a)^2 + (y-0)^2 = a^2$ con cualquier recta que pase por el origen, de ecuación $y = mx$, es:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 2ax + y^2 = 0 \\ y = mx \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 2ax + m^2x^2 = 0 \Rightarrow (1+m^2)x^2 - 2ax = 0$$

$$\Rightarrow x[(1+m^2)x - 2a] = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{o} \\ (1+m^2)x - 2a \Rightarrow x = \frac{2a}{1+m^2} > 0 \end{cases}$$

Como las intersecciones se producen para cada recta en un punto del primer o cuarto cuadrantes, se verifica $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Además

$$x^2 - 2ax + y^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 - 2a\,r\ \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow r[r - 2a\ \cos(\theta)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ \text{o} \\ r = 2a\ \cos(\theta) \end{cases}$$

El valor $r = 0$ solo proporciona el punto $(0,0)$, mientras que $r = 2a\ \cos(\theta)$ proporciona todos los puntos de la circunferencia.

$\square$

$\boxed{7}$ Hallar la ecuación en coordenadas rectangulares de la superficie determinada por la ecuación en cilíndricas:

$$r^2\ \cos(2\theta) + z^2 + 1 = 0.$$

Solución: Puesto que $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)$, podemos escribir:

$r^2\ (\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)) + z^2 + 1 = 0$

$r^2\ \cos^2(\theta) - r^2\ \operatorname{sen}^2(\theta) + z^2 + 1 = 0$

$x^2 - y^2 + z^2 + 1 = 0$

$\square$

$\boxed{8}$ Determinar, en coordenadas rectangulares, la superficie cuya ecuación en coordenadas esféricas es:
$\rho = \operatorname{sen}(\theta)\ \operatorname{sen}(\phi)$.
Solución: Si $y = \rho\ \operatorname{sen}(\phi)\ \operatorname{sen}(\theta)$ entonces $\frac{y}{\rho} = \operatorname{sen}(\phi)\ \operatorname{sen}(\theta)$. Además $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$\rho = \operatorname{sen}(\theta)\ \operatorname{sen}(\phi) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = y.$

$\square$

$\boxed{9}$ Describir en coordenadas cilíndricas la región D de $\mathbb{R}^3$ limitada inferiormente por el plano $z = 0$, lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Solución: La proyección de D sobre el plano XY es la bola $\bar{\mathcal{B}}((0,0);1)$, por lo que $r \in [0,1]$ y $\theta \in [0, 2\pi)$. La variación de z se produce desde el plano $z = 0$ hasta alcanzar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Por eso $z \in [0, \sqrt{9 - r^2}]$. Entonces:

$$D^* = \{(r, \theta, z);\ r \in [0,1],\ \theta \in [0, 2\pi),\ z \in [0, \sqrt{9 - r^2}]\}$$

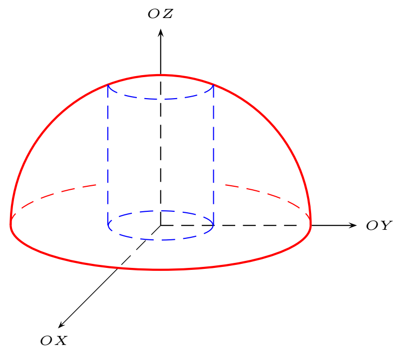

Figura 13: Rexión de $\mathbb{R}^3$

$\square$

$\boxed{10}$ Describir en coordenadas cilíndricas y esféricas la región de $\mathbb{R}^3$ limitada inferiormente por el semicono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Solución: Comenzamos dibujando la figura y calculando la intersección del semicono con la esfera.

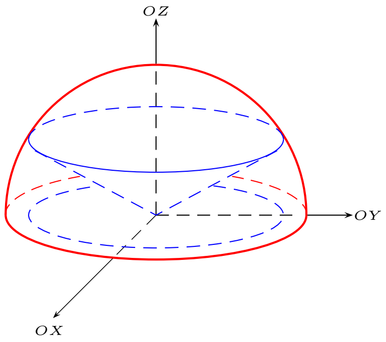

Figura 14: Cono y esfera

$$\left.\begin{array}{l} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z^2=x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z^2=x^2+y^2 \\ x^2+y^2=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x^2+y^2=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Coordenadas cilíndricas La intersección es la circunferencia $x^2+y^2=\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$, por lo que la proyección sobre el plano $z=0$ de la figura es $\mathcal{B}((0,0);\frac{1}{\sqrt{2}})$. Entonces $r\in[0,\frac{1}{\sqrt{2}}]$, $\theta\in[0,2\pi)$. Fijados valores de r y θ, a z varía desde el cono hasta la esfera, polo que $z\in[r,\sqrt{1-r^2}]$. Una parametrización en coordenadas cilíndricas es:

$$\{(r,\theta,z);\ r\in[0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}],\ \theta\in[0,2\pi),\ z\in[r,\sqrt{1-r^2}]\}$$

Coordenadas esféricas Como la proyección de la figura sobre el plano $z=0$ es una bola, $\theta\in[0,2\pi)$. Para estimar las variaciones de ϕ y ρ seccionamos la figura por un semiplano $\theta=cte$. En ella se puede observar que el valor mínimo de ϕ es 0. Para obtener el valor máximo tenemos en cuenta que para cualquier punto de la intersección del semicono con la esfera, se verifica: $z=\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, y que $\rho=1$, por lo que $\phi=\arccos\left(\frac{1/\sqrt{2}}{1}\right)=\frac{\pi}{4}$. Si fijamos un valor para ϕ, el recorrido de ρ es de 0 a 1, por lo que una parametrización en coordenadas esféricas es:

$$\{(\rho,\theta,\phi);\ \theta\in[0,2\pi),\ \phi\in[0,\tfrac{\pi}{4}],\ \rho\in[0,1]\}$$

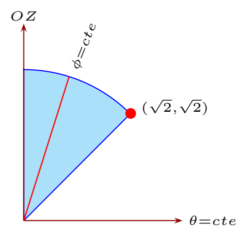

Figura 15: Sección $\theta=cte$

$\square$

Ejercicios complementarios

$\boxed{11}$ Calcular la frontera, interior y adherencia del conjunto $M=\mathcal{B}((0,0),1)\cap\{(x,y);\ x+y\geq 1\}$.

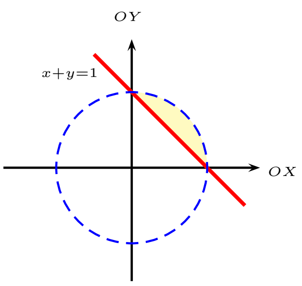

Figura 16: Conjunto M

Solución: Calculamos la intersección de la recta $x+y=1$ con la circunferencia $x^2+y^2=1$.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+(1-x)^2=1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ \text{o} \\ x=1 \end{array}\right.$$

Los puntos intersección son $(0,1)$ y $(1,0)$. La frontera está formada por un arco de circunferencia y un segmento de recta.

$$\mathcal{F}r(M)=\{(x,y);\ x^2+y^2=1,\ x\in[0,1]\}\cup\{(x,y);\ x+y=1,\ x\in[0,1]\}.$$

Además, $\overset{\circ}{M}=\mathcal{B}((0,0),1)\cap\{(x,y);\ x+y>1\}$, $\overline{M}=\overline{\mathcal{B}}((0,0),1)\cap\{(x,y);\ x+y\geq 1\}$.

$\square$

$\boxed{12}$ Dado el conjunto $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ |(x, y, z)| \leq 4,\ z \geq 0\}$, se pide: describir el conjunto y su frontera en coordenadas cilíndricas, y demostrar que es un conjunto acotado.

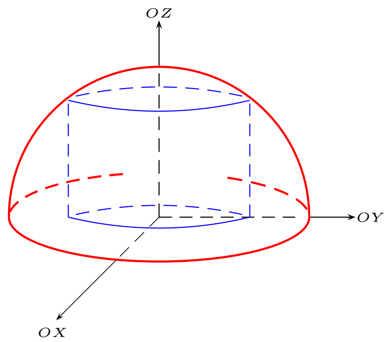

Figura 17: Cono y esfera

Solución: Para caracterizar el conjunto D en coordenadas cilíndricas, tenemos en cuenta que su proyección sobre el plano $z = 0$ es $\bar{\mathcal{B}}((0,0);1)$. Además, para cada punto de esta proyección, los valores de z oscilan entre $z = 0$ y $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} = \sqrt{16 - r^2}$. Por tanto, $D = \{(r, \theta, z);\ \theta \in [0, 2\pi),\ r \in [0, 1],\ z \in [0, \sqrt{16 - r^2}]\}$.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z^2 = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Comenzamos calculando la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con la esfera $|(x, y, z)| = 4$, puesto que esta intersección caracteriza la proyección del conjunto D sobre el plano $z = 0$. $\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + z^2 = 16 \Rightarrow$ $z^2 = 15$

$\square$

$\boxed{13}$ Hallar las coordenadas polares de $(x, y) = \left(-2, 2\sqrt{3}\right)$

Solución: $r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

$\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right) = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$ o $\frac{5\pi}{3}$. Como $\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$ está en el segundo cuadrante, se elige $\theta = \frac{2\pi}{3}$ Radianes.

$\square$

$\boxed{14}$ Hallar las coordenadas rectangulares de $(r, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

Solución:

$x = r\ \cos(\theta) = 2\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1,$

$y = r\ \mathrm{sen}(\theta) = 2\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$

$\square$

$\boxed{15}$ Hallar las coordenadas rectangulares del punto de coordenadas cilíndricas: $(r, \theta, z) = (2, \frac{2\pi}{3}, 1)$.

Solución:

$x = r\ \cos(\theta) = 2\ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \cdot (-0.5) = -1$

$y = r\ \mathrm{sen}(\theta) = 2\ \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \cdot 0.8660 = 1.7321$

$z = 1$

$\square$

$\boxed{16}$ Hallar las coordenadas cilíndricas del punto de coordenadas rectangulares: $(x, y, z) = (3, -3, -7)$.

Solución:

$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 4.2426$

$\arctan\left(\frac{-3}{3}\right) = \arctan(-1) = \frac{3\pi}{4}$ o $\frac{7\pi}{4}$ Radianes. Como $x > 0$, $y < 0$, se verifica que $\theta = \frac{7\pi}{4}$

$z = -7$

$\square$

$\boxed{17}$ Hallar las coordenadas rectangulares del punto de coordenadas esféricas: $(\rho, \theta, \phi) = \left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Solución:

$$x = \rho \text{ sen}(\phi) \cos(\theta) = 2 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$
$$y = \rho \text{ sen}(\phi) \text{ sen}(\theta) = 2 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$
$$z = \rho \cos(\phi) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$\square$

$\boxed{18}$ Hallar las coordenadas esféricas del punto de coordenadas rectangulares: $(x, y, z) = (0, 2\sqrt{3}, -2)$.

Solución: $\rho = \sqrt{0^2 + (2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$

Como $x = 0$, $y > 0$ se verifica que $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$\phi = \arccos\left(\frac{-2}{4}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ radianes

$\square$

$\boxed{19}$ Hallar una ecuación en coordenadas esféricas para la superficie cuya ecuación en coordenadas rectangulares es $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$.

Solución: Puesto que $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2^2$,

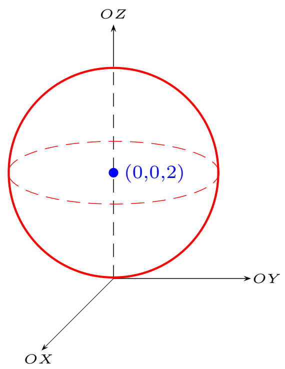

Figura 18: Esfera

La esfera tiene centro $(0, 0, 2)$ y radio 2.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \Leftrightarrow \rho^2 - 4\rho \cos(\phi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 0 \\ \text{o} \\ \rho = 4 \cos(\phi) \end{cases}$$

Como la esfera está en el semiespacio $z \geq 0$, el ángulo ϕ varía en $[0, \pi/2]$.

$\square$

$\boxed{20}$ Describir en coordenadas cartesianas los conjuntos de $\mathbb{R}^3$ cuya expresión en coordenadas cilíndricas es: $A = \{(r, \theta, z);\ z = 1\}$, $B = \{(r, \theta, z);\ \theta = \frac{\pi}{4}\}$ y $C = \{(r, \theta, z);\ r^2 + z^2 \leq 3\}$.

$\square$

$\boxed{21}$ Parametrizar, en coordenadas cilíndricas, la región de $\mathbb{R}^3$ limitada inferiormente por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y superiormente por $z = 8 - \sqrt{x^2 + y^2}$.