1 Topología en $\mathbb{R}^n$

1.1 Producto escalar, módulo y distancia

Definición 1.1.1 Dados dos vectores de $\mathbb{R}^n$: $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)$ el producto escalar de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ es el número real

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \cdot y_1 + ... + x_n \cdot y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$$

Ejemplo 1.1.2 (a) Dados $\vec{x} = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{y} = (0, -3) \in \mathbb{R}^2$, se verifica $\vec{x} \cdot \vec{y} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) = -6$.
(b) Dados $\vec{x} = (3, 2, -4) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{y} = (1, 0, 8) \in \mathbb{R}^3$, se verifica $\vec{x} \cdot \vec{y} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-4) \cdot 8 = -29$.

$\square$

Proposición 1.1.3 Para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, se verifica:

(I) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$

(II) $(\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \vec{x} \cdot (\lambda \vec{y})$,

(III) $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$, $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$ si y solo si $\vec{x} = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$.

Demostración.

(I) $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + ... + x_n y_n = y_1 x_1 + ... + y_n x_n = \vec{y} \cdot \vec{x}$

(II) $(\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k) y_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

$\lambda(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

$\vec{x} \cdot (\lambda \vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k (\lambda y_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

(III) $\vec{x} \cdot \vec{x} = x_1^2 + ... + x_n^2 \geq 0$ por ser suma de cuadrados. Además,

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + ... + x_n^2 = 0 \Leftrightarrow (x_k)^2 = 0,\ k = 1, ..., n \ \Leftrightarrow x_k = 0,\ k = 1, ..., n \ \Leftrightarrow \vec{x} = (0, ..., 0)$$

$\square$

Definición 1.1.4 El módulo de un vector $\vec{\boldsymbol{x}} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ es el número real no negativo:

$$|\vec{\boldsymbol{x}}| = +\sqrt{\vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}}} = +\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

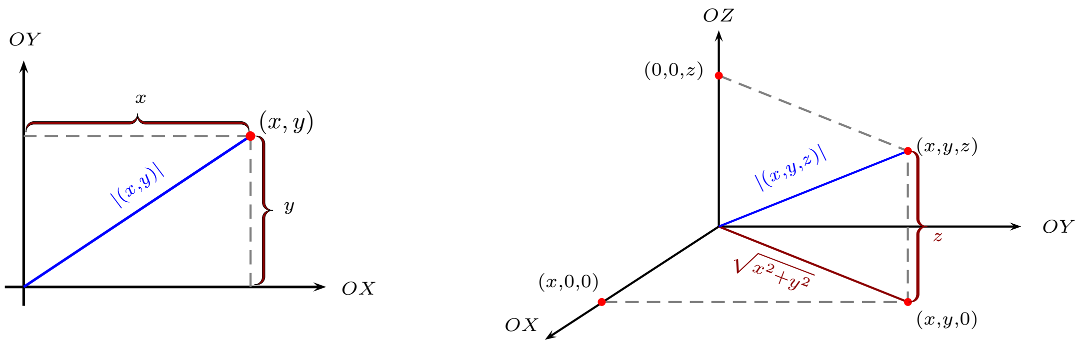
Observación 1.1.5 Es habitual ver en los textos de Física escrito el módulo de un vector $\vec{\boldsymbol{x}}$ con la notación x.

Ejemplo 1.1.6 (a) Para $(-5, 1) \in \mathbb{R}^2$, $|(-5, 1)| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$
(b) Para $(2, 3, -6) \in \mathbb{R}^3$, $|(2, 3, -6)| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{49} = 7$

□

Observemos que si $n = 1$, el módulo de $x \in \mathbb{R}$ coincide con su valor absoluto $|x|$.

Desde el punto de vista geométrico, el módulo del vector $\vec{\boldsymbol{x}}$ proporciona la longitud del segmento que une $\vec{\boldsymbol{x}}$ con $\vec{\mathbf{0}}$. Veámoslo gráficamente en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.



(a) Vector en $\mathbb{R}^2$ (b) Vector en $\mathbb{R}^3$

Figura 1.1: Módulo de vectores.

Proposición 1.1.7 Propiedades del módulo. Dados $\vec{\boldsymbol{x}}$, $\vec{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ se verifica:

(I) $|\vec{\boldsymbol{x}}| \geq 0$, $|\vec{\boldsymbol{x}}| = 0$ si y solo si $\vec{\boldsymbol{x}} = (0, ..., 0)$,

(II) $|\lambda \vec{\boldsymbol{x}}| = |\lambda|\, |\vec{\boldsymbol{x}}|$,

Demostración.

(I) $|\vec{\boldsymbol{x}}| \geq 0$ por definición de módulo. Ahora, dado $\vec{\boldsymbol{x}} = (x_1, ..., x_n)$ se verifica que $|\vec{\boldsymbol{x}}| = 0$ si y solo si $x_1^2 + ... + x_n^2 = 0$, es decir, $x_k = 0$ para todo $k = 1, ..., n$.

(II) $|\lambda \vec{\boldsymbol{x}}| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + ... + (\lambda x_n)^2} = \sqrt{\lambda^2\ [x_1^2 + ... + x_n^2]} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} = |\lambda|\, |\vec{\boldsymbol{x}}|$.

□

Definición 1.1.8 Dados dos vectores $\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^n$, la distancia entre $\vec{\boldsymbol{x}}$ y $\vec{\boldsymbol{y}}$ es el número real $|\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{y}}|$, que se designa por $d(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}})$.

Ejemplo 1.1.9 Dados los vectores $\vec{\boldsymbol{x}} = (5, -2, 3)$, $\vec{\boldsymbol{y}} = (0, 4, -3) \in \mathbb{R}^3$, su distancia es el valor $d(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = |(5, -2, 3) - (0, 4, -3)| = |(5, -6, 6)| = \sqrt{5^2 + (-6)^2 + 6^2} = \sqrt{97}$.

$\square$

Las propiedades del módulo se trasladan de forma inmediata a propiedades de la distancia.

Proposición 1.1.10 Dados $\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^n$ se verifica:

(I) $d(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) \geq 0$, $d(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = 0$ si y solo si $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{y}}$,

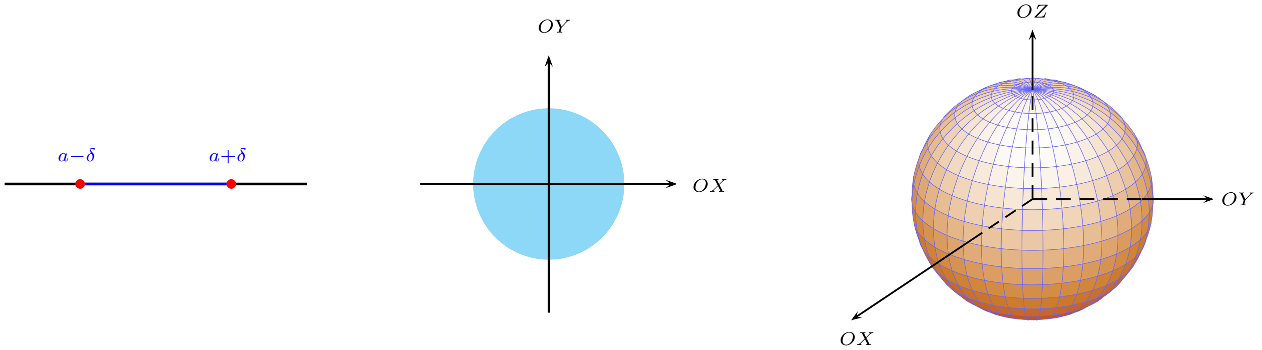
(II) $d(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = d(\vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{x}})$,

1.2 Clasificación de puntos y de conjuntos

Definición 1.2.1 Dados $\vec{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^n$ y $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, se llama bola abierta de centro $\vec{\boldsymbol{a}}$ e radio δ al conjunto: $\mathcal{B}(\vec{\boldsymbol{a}}, \delta) = \{\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n; d(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{a}}) < \delta\}$ y bola cerrada al conjunto: $\bar{\mathcal{B}}(\vec{\boldsymbol{a}}, \delta) = \{\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n; d(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{a}}) \leq \delta\}$.

Consecuencia inmediata de la definición es que $\mathcal{B}(\vec{\boldsymbol{a}}, \delta) \subset \bar{\mathcal{B}}(\vec{\boldsymbol{a}}, \delta)$.

Observación 1.2.2 Si $n = 1$ las bolas son intervalos centrados en el punto $a \in \mathbb{R}$ de extremos $a - \delta$, $a + \delta$. Si $n = 2$ las bolas cerradas son círculos de centro $\vec{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ y radio δ. Si $n = 3$ las bolas cerradas son esferas de centro $\vec{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ y radio δ y además, todo lo contenido en ellas.



(a) $n = 1$ (b) $n = 2$ (c) $n = 3$

Figura 1.2: Bolas cerradas.

$\square$

Definición 1.2.3 Dado $M \subset \mathbb{R}^n$ se dice que:

- $\vec{x}$ es punto interior a M si existe una bola $\mathcal{B}(\vec{x}, \delta) \subset M$. El conjunto de puntos interiores a M se denota por $\overset{\circ}{M}$.
- $\vec{x}$ es punto frontera de M si toda bola $\mathcal{B}(\vec{x}, \delta)$ contiene puntos de M y de $\mathbb{R}^n - M$. El conjunto de puntos frontera de M se denota por $\mathcal{F}r(M)$.
- $\vec{x}$ es punto de adherencia de M si toda bola $\mathcal{B}(\vec{x}, \delta)$ contiene puntos de M. El conjunto de puntos de adherencia de M se denota por $\bar{M}$.

Podemos comentar algunas propiedades de estos conjuntos que nos ayudarán a calcularlos en casos particuales.

Proposición 1.2.4 Dado $M \subset \mathbb{R}^n$ se verifica:

(I) $\overset{\circ}{M} \subset M \subset \bar{M}$,

(II) $\bar{M} = \mathcal{F}r(M) \cup \overset{\circ}{M}$, $\mathcal{F}r(M) \cap \overset{\circ}{M} = \varnothing$

(III) si $\vec{x} \in M$ y $\vec{x} \notin \overset{\circ}{M}$ entonces $\vec{x} \in \mathcal{F}r(M)$

Demostración.

(I) si $\vec{x} \in \overset{\circ}{M}$ entonces existe $\mathcal{B}(\vec{x}, \delta) \subset M$, por lo que $\vec{x} \in \mathcal{B}(\vec{x}, \delta) \subset M$.

Por otra parte, si $\vec{x} \in M$, para todo δ se cumple $\vec{x} \in \mathcal{B}(\vec{x}, \delta)$, por lo que $\vec{x} \in \mathcal{B}(\vec{x}, \delta) \cap M$.

(II) si $\vec{x} \in \bar{M}$ entonces para todo $\delta > 0$ se cumple $\mathcal{B}(\vec{x}, \delta) \cap M \neq \varnothing$. Si existe una bola $\mathcal{B}(\vec{x}, s) \subset M$ entonces $\vec{x} \in \overset{\circ}{M}$. En caso contrario, toda bola $\mathcal{B}(\vec{x}, \delta)$ tiene elementos de $\mathbb{R}^n - M$, por lo que $\vec{x} \in \mathcal{F}r(M)$.

(III) si $\vec{x} \in M$ entonces para todo $\delta > 0$ se cumple $\mathcal{B}(\vec{x}, \delta) \cap M \neq \varnothing$. Si existe una bola $\mathcal{B}(\vec{x}, s) \subset M$ entonces $\vec{x} \in \overset{\circ}{M}$. En caso contrario, toda bola $\mathcal{B}(\vec{x}, \delta)$ tiene elementos de $\mathbb{R}^n - M$, por lo que $\vec{x} \in \mathcal{F}r(M)$.

□

De esta forma, podemos asegurar que los puntos del interior de M son aquellos pertenecientes al conjunto y que no están en la frontera.

Observación 1.2.5

(a) Para representar las líneas que definen los conjuntos, dibujaremos con trazo continuo aquellas que pertenecen al conjunto, y con trazo discontinuo las que no.

(b) Para representar conjuntos definidos por desigualdades, representaremos en primer lugar las correspondientes igualdades. Cada línea divide el espacio de trabajo en varios trozos. Hay que decidir cuáles de ellos forman parte del conjunto.

Ejemplo 1.2.6 Calcular el interior, la adherencia y la frontera de los siguintes conjuntos:
$A = [2,3] \cup (5,6] \cup \{4,7,8\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le y < 1,\ 0 \le x \le y\}$, $C = \{(x,y);\ x = y^2\}$,
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\}$, $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < 1,\ |y| < x^2\}$ y
$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 3\}$.

Solución: Conjunto A Calculamos, por este orden, la frontera, el interior y la adherencia.
$\mathcal{F}r(B) = \{2,3,4,5,6,7,8\}$, $\overset{\circ}{B} = (2,3) \cup (5,6)$,
$\overline{B} = [2,3] \cup [5,6] \cup \{4,7,8\}$.

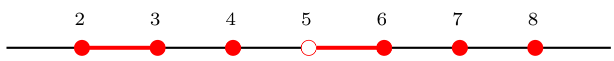


Figura 1.3: Conjunto A

Conjunto B Comenzamos representando las líneas $0 = y$, $0 = x$, $x = y$ (con trazo continuo, pues forman parte del conjunto) e $y = 1$ (con trazo discontinuo, pues no forma parte del conjunto). Cada una de estas líneas divide $\mathbb{R}^2$ en dos trozos. Uno de ellos pertenece al conjunto y el otro no.

La frontera está formada por los segmentos de estas línea que encierran al conjunto. Es decir, son las tres siguientes líneas:

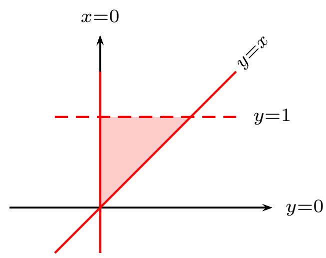


Figura 1.4: Conjunto B

$$\mathcal{F}r(A) = \{(x,y);\ y = 1,\ 0 \le x \le 1\} \cup \{(x,y);\ x = 0,\ 0 \le y \le 1\} \cup \{(x,x);\ 0 \le x \le 1\}.$$

El interior está formado por los elementos del conjunto que no forman parte de la frontera. Es decir: $\overset{\circ}{A} = \{(x,y);\ 0 < y < 1,\ 0 < x < y\}$. Por último, $\overline{A} = \mathcal{F}r(A) \cup \overset{\circ}{A} = \{(x,y);\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y\}$.

Conjunto C Observemos que cualquier punto del conjunto forma parte de la frontera, pues si consideramos una bola abierta centrada en el punto, ésta se sale del conjunto. Entonces $\mathcal{F}r(C) = C$. En consecuencia $\overset{\circ}{C} = \varnothing$ y $\overline{C} = C$.

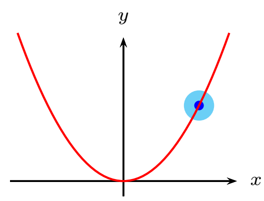


Figura 1.5: Conjunto C

Conjunto D Se representa en trazo discontinuo la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, que es la frontera del conjunto. Observamos que ningún punto del conjunto pertenece a la frontera, por lo que $\overset{\circ}{D} = D$. Finalmente $\overline{D} = \mathcal{F}r(D) \cap \overset{\circ}{D} = \{(x,y);\ x^2 + y^2 \le 1\}$.

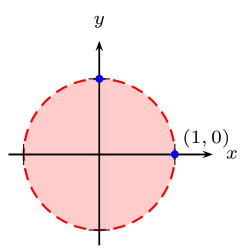


Figura 1.6: Conjunto D

Conjunto E Las líneas que definen la frontera son $x=0$, $x=1$, $y=x^2$ e $y=-x^2$. En concreto

$$\begin{aligned}\mathcal{F}r(E) &= \{(x,y);\ x=1,\ y\in[-1,1]\}\cup\{(x,y);\ y=x^2,\ x\in[0,1]\}\\ &\cup\{(x,y);\ y=-x^2,\ x\in[0,1]\}.\end{aligned}$$

Como estas líneas no forman parte del conjunto, tenemos $\overset{\circ}{E}=E$. Por tanto, $\overline{E}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\le x\le 1,\ |y|\le x^2\}$.

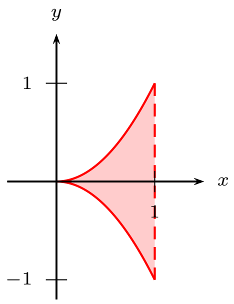


Figura 1.7: Conjunto E

Conjunto F. La frontera está compuesta por tres zonas diferenciadas. Podemos llamarlas tapas inferior, superior y lateral del tronco de cilindro.

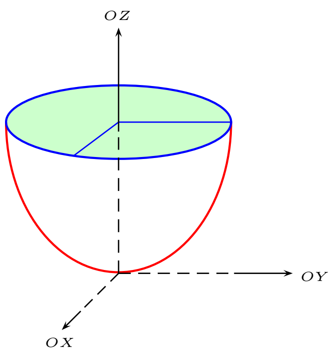


Figura 1.8: Tapa inferior $\mathcal{F}_1$

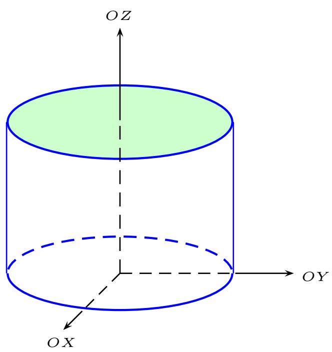


Figura 1.9: Tapa superior $\mathcal{F}_2$

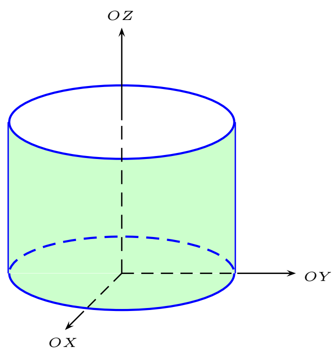


Figura 1.10: Tapa lateral $\mathcal{F}_3$

$$\mathcal{F}r(F)=\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2\cup\mathcal{F}_3=\{(x,y,0);\ |(x,y)|\le 1\}\cup\{(x,y,3);\ |(x,y)|\le 1\}\cup\{(x,y,0);\ |(x,y)|=1,\ z\in[0,3]\}$$

$$\overset{\circ}{F}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2<1,\ 0<z<3\}.$$

$$\overline{F}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le 3\}=F.$$

□

Definición 1.2.7 Un conjunto $A\subset\mathbb{R}^n$ se dice abierto si todos sus puntos son interiores. Es decir, si $A=\overset{\circ}{A}$.

Ejemplo 1.2.8 Algunos conjuntos abiertos son:

1. las bolas abiertas,
2. los rectángulos abiertos $(a_1,b_1)\times\ldots\times(a_n,b_n)=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n;\ a_k<x_k<b_k;\ k=1,\ldots,n\}$
3. $\overset{\circ}{A}$ para todo $A\subset\mathbb{R}^n$.

Definición 1.2.9 Un conjunto $B\subset\mathbb{R}^n$ se dice cerrado si $B=\overline{B}$.

Ejemplo 1.2.10 Algunos conjuntos cerrados son:

1. las bolas cerradas,
2. los puntos, las rectas y los planos,
3. los rectángulos cerrados $[a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n;\ a_k \leq x_k \leq b_k;\ k = 1, ..., n\}$,
4. $\bar{M}$ para todo $M \subset \mathbb{R}^n$.

Proposición 1.2.11 Propiedades de los conjuntos abiertos y cerrados

(I) M es abierto si y solo si $\mathcal{F}r(M) \cap M = \varnothing$.

(II) M es cerrado si y solo si $\mathcal{F}r(M) \subset M$.

(III) $\mathcal{F}r(M) = \mathcal{F}r(\mathbb{R}^n - M)$

(IV) M es abierto si y solo si $\mathbb{R}^n - M$ es cerrado.

(V) M es cerrado si y solo si $\mathbb{R}^n - M$ es abierto.

Demostración.

(I) Si M es abierto y $\vec{\boldsymbol{x}} \in M$ entonces $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathring{M}$, por lo que existe una bola $\mathcal{B}(\vec{\boldsymbol{x}}, \delta) \subset M$. Por eso $x \notin \mathcal{F}r(M)$.

Recíprocamente, si $\mathcal{F}r(M) \cap M = \varnothing$ y $\vec{\boldsymbol{x}} \in M$, entonces $\vec{\boldsymbol{x}} \notin \mathcal{F}r(M)$. Así, existirá una bola $\mathcal{B}(\vec{\boldsymbol{x}}, \delta)$ tal que $\mathcal{B}(\vec{\boldsymbol{x}}, \delta) \subset M$ o $\mathcal{B}(\vec{\boldsymbol{x}}, \delta) \subset \mathbb{R}^n - M$. Como esto último no es posible, entonces $\mathcal{B}(\vec{\boldsymbol{x}}, \delta) \subset M$, por lo que $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathring{M}$.

(II) Si M es cerrado entonces $M = \bar{M} = \mathring{M} \cup \mathcal{F}r(M)$, por lo que $\mathcal{F}r(M) \subset M$.

Recíprocamente, si $\mathcal{F}r(M) \subset M$ entonces $\bar{M} = \mathring{M} \cup \mathcal{F}r(M) \subset M$. Como también se verifica $M \subset \bar{M}$ se cumple que $M = \bar{M}$.

(III) Como $\mathbb{R}^n - (\mathbb{R}^n - M) = M$, los conjuntos $\mathcal{F}r(M)$ y $\mathcal{F}r(\mathbb{R}^n - M)$ se definen de la misma forma.

(IV) M abierto $\Leftrightarrow \mathcal{F}r(M) \cap M = \varnothing \Leftrightarrow \mathcal{F}r(M) = \mathcal{F}r(\mathbb{R}^n - M) \subset \mathbb{R}^n - M \Leftrightarrow \mathbb{R}^n - M$ cerrado.

(V) M cerrado $\Leftrightarrow \mathcal{F}r(M) \subset M \Leftrightarrow (\mathbb{R}^n - M) \cap \mathcal{F}r(M) = (\mathbb{R}^n - M) \cap \mathcal{F}r(\mathbb{R}^n - M) = \varnothing \Leftrightarrow \mathbb{R}^n - M$ abierto.

□

Definición 1.2.12 Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ está acotado si existe una bola que lo contiene.

En la definición anterior, no tiene importancia el centro o el radio de la bola. En particular, si elegimos una bola con centro $\vec{\mathbf{0}}$, comprobar si un conjunto es acotado es equivalente a comprobar que existe $K \in \mathbb{R}$ fijo tal que $|\vec{\boldsymbol{x}}| < K$ para todo $\vec{\boldsymbol{x}} \in C$.

Ejemplo 1.2.13 Comprobar que el conjunto $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 3\}$ es acotado.
Solución: Acotaremos el módulo de cualquier $(x,y,z) \in F$.

$$(x,y,z) \in F \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2 \leq 1 \\ z \leq 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \leq 1+3^2 = 10 \Rightarrow F \subset \bar{\mathcal{B}}((0,0,0);\sqrt{10})$$

□

Definición 1.2.14 Un conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si es cerrado y acotado.

Como ejemplos de conjuntos compactos mencionamos las bolas cerradas y los rectángulos cerrados.

1.3 Coordenadas polares

Dado un vector $(x,y) \neq (0,0)$ se considera el segmento que lo une con $(0,0)$. Su longitud se representa por r y coincide con el módulo de (x,y).

Además se considera el ángulo (medido en sentido antihorario) que forma el semieje positivo OX con el segmento antes citado, que se representa por θ. El vector define de forma única un valor $r > 0$ y un ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$.

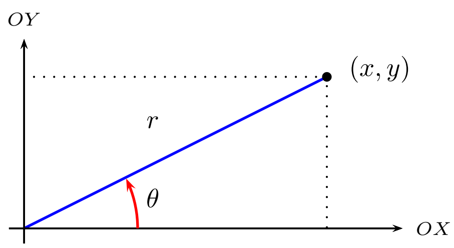


Figura 1.11: Coordenadas polares.

Las relaciones entre r, θ, x e y se deducen a partir de las razones trigonométricas de θ:

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r},\quad \operatorname{sen}(\theta) = \frac{y}{r},$$

de donde $x = r\,\cos(\theta)$, $y = r\,\operatorname{sen}(\theta)$. La transformación inversa tienen por ecuaciones:

$$r = \sqrt{x^2+y^2},\ \theta = \arctan\left(\tfrac{y}{x}\right).$$

Esta última presenta varios problemas:

(1) si $x = 0$, no está definido el cociente $\dfrac{y}{x}$. En este caso, el valor de θ es $\frac{\pi}{2}$ si $y > 0$, y $\frac{3\pi}{2}$ si $y < 0$.

(2) dado un valor real $\frac{y}{x}$, existe un ángulo en el intervalo $[0,\pi)$ y otro en $[\pi, 2\pi)$ cuyas tangentes toman el valor $\frac{y}{x}$. Para elegir el valor adecuado de θ se tendrá en cuenta el siguiente criterio: si $y > 0$, entonces $\theta \in [0,\pi)$ y si $y < 0$, entonces $\theta \in [\pi, 2\pi)$.

Observación 1.3.1 Si se fija una de las coordenadas polares, el conjunto que describe la otra es útil en la representación de conjuntos. Veámoslo:

- Si se fija $r = r_0 > 0$, el conjunto $\{(r_0, \theta);\ \theta \in [0, 2\pi)\}$ verifica:

$$r = r_0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = r_0 \Rightarrow x^2 + y^2 = (r_0)^2.$$

  El conjunto es la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio r_0.

- Si se fija $\theta = \theta_0$, el conjunto $\{(r, \theta_0);\ r > 0\}$ es la semirecta $\{(x, y);\ y = \tan(\theta)x,\ y > 0\}$ si $\theta \in [0, \pi)$, o $\{(x, y);\ y = \tan(\theta)x,\ y < 0\}$ si $\theta \in [\pi, 2\pi)$.

Ejemplo 1.3.2 Si $(x, y) = (2, 0)$, $r = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$, $\tan(\theta) = \frac{0}{2} = 0$. Los ángulos cuya tangente vale 0 son 0 y π. Ya que el signo de x es positivo, se debe elegir $\theta = 0$. Las coordenadas polares son $(r, \theta) = (2, 0)$.

Ejemplo 1.3.3 Si $(x, y) = (1, -1)$, $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $\tan(\theta) = \frac{-1}{1} = -1$. Los posibles valores de θ son $\frac{3\pi}{4}$ o $\frac{7\pi}{4}$. Como el vector pertenece al cuarto cuadrante se elige $\frac{7\pi}{4}$. Así, las coordenadas polares son $(r, \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$.

Ejemplo 1.3.4 Las coordenadas rectangulares de $(r, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ son:

$$x = 2\ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},\ \ y = 2\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\frac{1}{2} = 1.$$

Ejemplo 1.3.5 Las coordenadas rectangulares de $(r, \theta) = \left(5, \frac{\pi}{4}\right)$ son:

$$x = 5\ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5\,\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ y = 5\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5\,\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

□

Existen algunos conjuntos que se describen de forma muy cómoda usando coordenadas polares. Presentamos a continuación algunos ejemplos:

1. Circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio δ: $r = \delta$.
2. Bola abierta de centro $(0, 0)$ y radio δ: $r < \delta$.
3. Bola cerrada de centro $(0, 0)$ y radio δ: $r \leq \delta$.

Ejercicio 1.3.6 Describir la recta $y = \lambda x$ en coordenadas polares.

Solución: Para un punto (x, y) de la recta el valor de θ depende de si y es positivo o negativo. En la semirrecta $y = \lambda x$, $y > 0$, θ es el valor de $\arctan(\lambda)$ contenido en $(0, \pi)$, y en la semirrecta $y = \lambda x$, $y < 0$, el valor de $\arctan(\lambda)$ contenido en $(\pi, 2\pi)$.

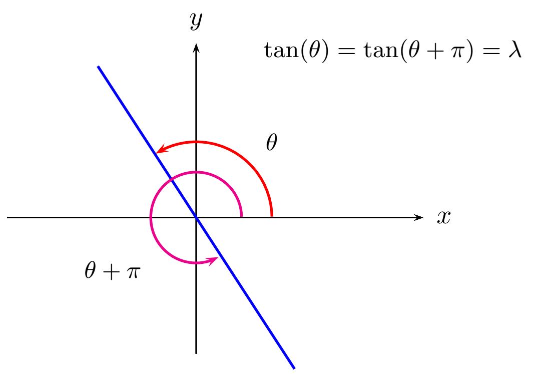


Figura 1.12: Coordenadas polares de la recta $y = \lambda x$

□

Ejercicio 1.3.7 Dibujar el conjunto

$$A = \{(r, \theta);\ 2 \leq r \leq 3\}.$$

<u>Solución</u>: Los conjuntos $r = 2$ y $r = 3$ son circunferencias centradas en el punto $(0, 0)$. El conjunto A es la corona circular limitada por dichas circunferencias.

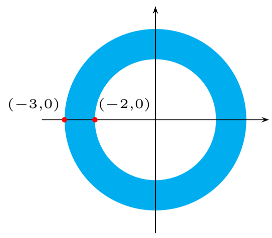


Figura 1.13: Corona circular

□

Ejercicio 1.3.8 Dibujar el conjunto

$$B = \{(r, \theta),\ \tfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2}\}.$$

<u>Solución</u>: Es la región que está limitada a la izquierda por la semirrecta $\theta = \frac{\pi}{4}$ y a la derecha por $\theta = \frac{\pi}{2}$. Observemos que es un conjunto no acotado.

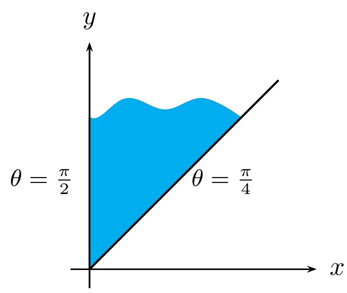


Figura 1.14: Región limitada por semirrectas

□

1.4 Coordenadas cilíndricas

El sistema de coordenadas cilíndricas representa un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mediante un conjunto ordenado de tres números reales (r, θ, z), siendo (r, θ) la representación polar de (x, y) y z el mismo valor que en coordenadas rectangulares.

El paso de coordenadas cilíndricas a rectangulares viene dada por las ecuaciones: $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, $z = z$, mientras que la transformación inversa es:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r \geq 0$

$$\theta = \left\{ \begin{array}{l} \arctan\left(\frac{y}{x}\right),\ \text{si } x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2},\ \text{si } x = 0,\ y > 0 \\ \frac{3\pi}{2},\ \text{si } x = 0,\ y < 0 \end{array} \right\}\ 0 \leq \theta < 2\pi,$$

$z = z$, $z \in \mathbb{R}$.

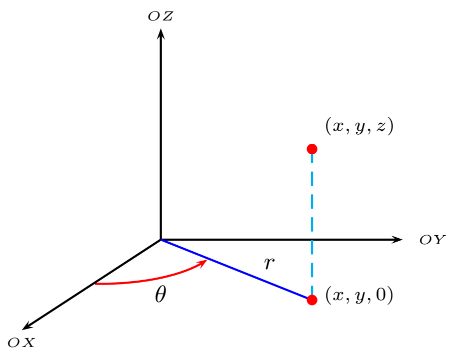


Figura 1.15: Coordenadas cilíndricas

Ejemplo 1.4.1 Expresar el punto $(r, \theta, z) = \left(4, \frac{5\pi}{6}, 3\right)$ en coordenadas rectangulares.

$$x = 4\cos\left(\tfrac{5\pi}{6}\right) = 4\,\frac{-\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3},\ y = 4\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{5\pi}{6}\right) = 4\,\tfrac{1}{2} = 2,\ z = 3.$$

$\square$

Ejemplo 1.4.2 Expresar el punto $(x, y, z) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ en coordenadas cilíndricas.

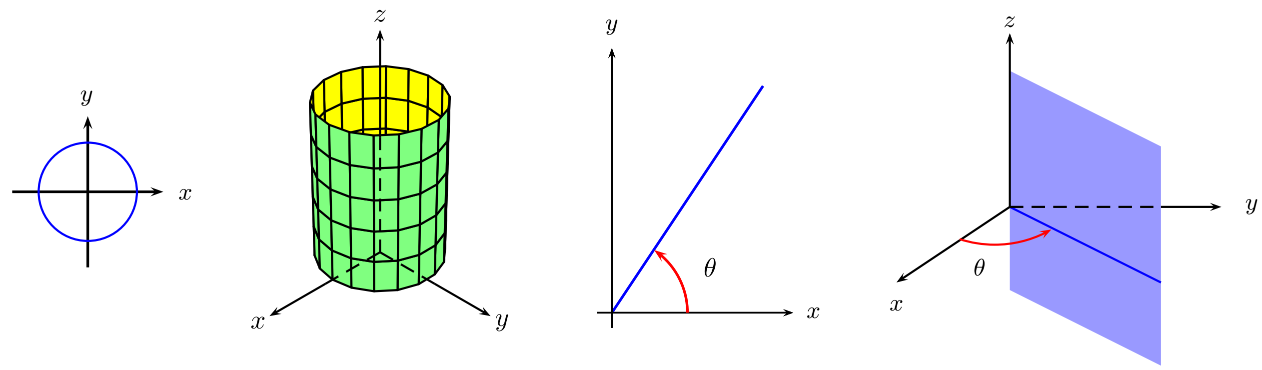
$$r = \sqrt{2+2} = 2, \ \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \arctan(1) \Rightarrow \theta = \tfrac{\pi}{4} \text{ o } \theta = \tfrac{5\pi}{4}.$$

Como $x > 0$, $y > 0$ entonces $\theta = \frac{\pi}{4}$. Las coordenadas cilíndricas son $(2, \frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$.

$\square$

El sistema de coordenadas cilíndricas recibe su nombre debido a que es describen, de forma sencilla, algunos cilindros (o partes de ellos) contenidos en $\mathbb{R}^3$. En concreto aquellos cuya proyección sobre uno de los planos coordenados es una circunferencia. Por ejemplo, el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, tiene por ecuación en coordenadas cilíndricas $r = 2$.

Observación 1.4.3 Las ecuaciones $r = cte$ y $\theta = cte$ tienen sentido tanto en coordenadas polares como en cilíndricas. Sin embargo, los conjuntos que representan dependen del espacio en el que están contenidos. La razón es el número de grados de libertad que quedan tras fijar una variable, que es 1 en $\mathbb{R}^2$ y 2 en $\mathbb{R}^3$. Así, tenemos:



(a) $r = cte$ en $\mathbb{R}^2$ (b) $r = cte$ en $\mathbb{R}^3$ (c) $\theta = cte$ en $\mathbb{R}^2$ (d) $\theta = cte$ en $\mathbb{R}^3$

Figura 1.16: Conjuntos básicos en coordenadas polares o cilíndricas.

1.5 Coordenadas esféricas

En el sistema de coordenadas esféricas un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ se representa mediante un conjunto ordenado de tres números reales, (ρ, θ, ϕ), siendo:

- $\rho = |(x, y, z)|$ la distancia entre (x, y, z) y $(0, 0, 0)$,
- θ el mismo ángulo que en coordenadas cilíndricas,
- ϕ el ángulo que forman el semieje positivo OZ y el segmento que une $(0, 0, 0)$ con (x, y, z), medido desde el semieje hasta el segmento.

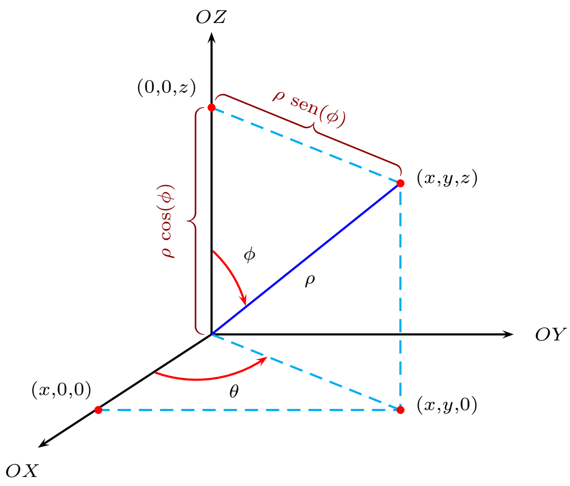


Figura 1.17: Coordenadas esféricas.

La transformación de coordenadas esféricas a rectangulares viene dada por las siguientes ecuaciones:

$$x = \rho \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta), \ y = \rho \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta), \ z = \rho \cos(\phi),$$

y la inversa por: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\rho > 0$,

$$\theta = \left\{ \begin{array}{l} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \text{ si } x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, \text{ si } x = 0, \ y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, \text{ si } x = 0, \ y < 0 \end{array} \right\}, 0 \leq \theta < 2\pi, \text{ por ser un ángulo orientado.}$$

$$\phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right), 0 < \phi < \pi, \text{ por ser el menor ángulo determinado por dos segmentos.}$$

Ejemplo 1.5.1 Pasar de coordenadas rectangulares a esféricas $(x, y, z) = (-2, 2\sqrt{3}, 4)$

$r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{32}$.
$\theta = \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right) = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$ o $\theta = \frac{5\pi}{3}$. Como $x < 0$, $y > 0$ entonces $\theta = \frac{2\pi}{3}$.
$\phi = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{32}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$ o $\phi = \frac{5\pi}{4}$. Como $\phi \in [0, \pi]$ entonces $\phi = \frac{\pi}{4}$.

□

Ejemplo 1.5.2 Pasar de coordenadas esféricas a rectangulares $(\rho, \phi, \theta) = \left(4, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$.

$$\left. \begin{array}{l} x = 4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\,\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}, \\ y = 4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\,\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \sqrt{2}, \\ z = 4 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow (x, y, z) = \left(\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right).$$

□

El sistema de coordenadas esféricas es útil principalmente para el estudio de problemas tridimensionales que tengan un centro de simetría.

Ejercicio 1.5.3 Describir en coordenadas cartesianas los conjuntos de $\mathbb{R}^3$ cuya expresión en coordenadas esféricas es: $A = \{(\rho, \theta, \phi); \ \rho \leq 1\}$, $B = \{(\rho, \theta, \phi); \ \theta = \frac{\pi}{4}\}$ y $C = \{(\rho, \theta, \phi); \ \phi = \frac{\pi}{4}\}$.

Solución: El conjunto A coincide con la bola cerrada de centro $(0,0,0)$ y radio 1, ya que:

$$\begin{aligned}\rho \le 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2+z^2} \le 1\\ &\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+z^2 \le 1\\ &\Leftrightarrow \quad (x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2 \le 1^2.\end{aligned}$$

Es decir, el conjunto está formado por la esfera de centro $(0,0,0)$ y su interior.

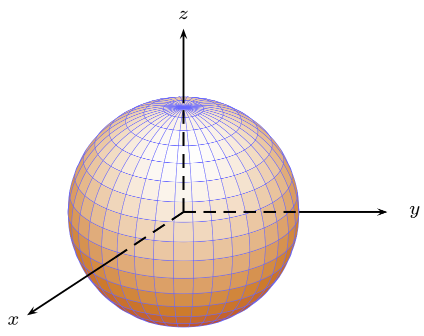


Figura 1.18: Esfera

El conjunto B es el semiplano de ecuación $x=y$, con $x>0$, ya que:

$$\theta = \frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 = \frac{y}{x} \Rightarrow x=y.$$

Se debe tener en cuenta que en el plano $x=y$ los posibles valores de θ son $\frac{\pi}{4}$ o $\frac{3\pi}{4}$. Si $\theta=\frac{\pi}{4}$ necesariamente $x>0$.

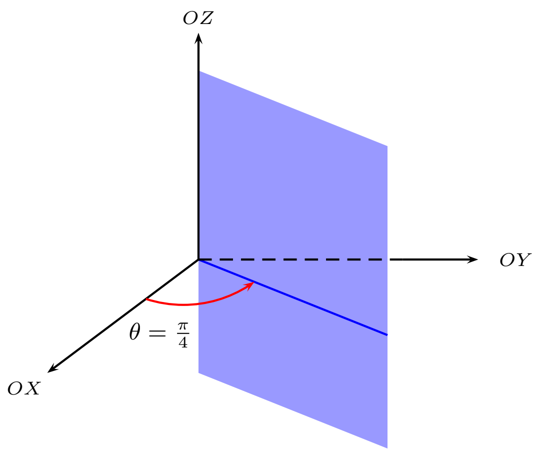


Figura 1.19: Semi plano

El conjunto C es el semicono de ecuación $z=\sqrt{x^2+y^2}$, ya que:

$$\begin{aligned}\cos(\phi) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2z\\ &\Rightarrow \quad 2(x^2+y^2+z^2) = 4z^2\\ &\Rightarrow \quad z^2 = x^2+y^2.\end{aligned}$$

Basta tener en cuenta ahora que para $z=+\sqrt{x^2+y^2}$ el valor de ϕ es $\frac{\pi}{4}$.

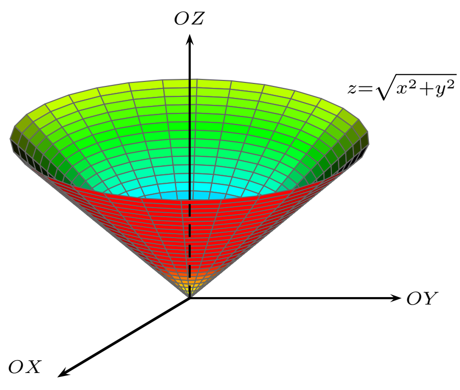


Figura 1.20: Semicono