4 Aplicaciones de la diferenciación de funciones de varias variables

4.1 Teorema de Taylor para funciones reales

El teorema del valor medio del cálculo diferencial afirma que, para una función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, en cada intervalo $[a,b]$ existe $c\in(a,b)$ verificando:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),$$

o, de forma equivalente,

$$f(b)=f(a)+f'(c)\cdot(b-a).$$

Además, en el tema anterior se demostró que la recta (polinomio de grado 1) que, pasando por $(a,f(a))$, mejor aproxima a f cerca de a es $\mathcal{P}(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$. En esta sección veremos como estos resultados se pueden obtener también para un polinomio de grado 2, exigiendo ahora que a función f se pueda derivar dos veces.

Teorema 4.1.1 Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función dos veces derivable. Dado un intervalo $[a,b]$ y $x_0\in(a,b)$ fijo, para todo $x\in(a,b)$ existe un c entre x y x_0 tal que:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\,(x-x_0)+\tfrac{1}{2}\,f''(c)\,(x-x_0)^2. \tag{4.1}$$

Calculemos ahora el polinomio de grado 2 que mejor aproxima a la función cerca de x_0. Para garantizar el parecido entre polinomio y función se exige:

$$\mathcal{P}(x_0)=f(x_0),\ \mathcal{P}'(x_0)=f'(x_0),\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\mathcal{P}(x)}{(x-x_0)^2}=0.$$

Por comodidad se escribe el polinomio buscado en la forma $\mathcal{P}(x)=\alpha+\beta\,(x-x_0)+\gamma\,(x-x_0)^2$. Entonces se verifica:

$$\mathcal{P}(x_0)=\alpha+\beta\,(x_0-x_0)+\gamma\,(x_0-x_0)^2=\alpha\Rightarrow\alpha=f(x_0)$$

$$\mathcal{P}'(x_0)=\beta\,+2\gamma\,(x_0-x_0)=\beta\Rightarrow\beta=f'(x_0)$$

Podemos escribir ahora $\mathcal{P}(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \gamma\,(x - x_0)^2$. En consecuencia:

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \mathcal{P}(x)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \gamma\,(x - x_0)^2]}{(x - x_0)^2} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\,(x - x_0) - \gamma\,(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} \\
&= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\,(x - x_0)}{(x - x_0)^2} - \gamma \right) \\
&= \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\,(x - x_0)}{(x - x_0)^2} \right) - \gamma
\end{aligned}
$$

Entonces $\gamma = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\,(x - x_0)}{(x - x_0)^2}$. Este límite es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ que resolveremos con teorema de L'Hôpital.

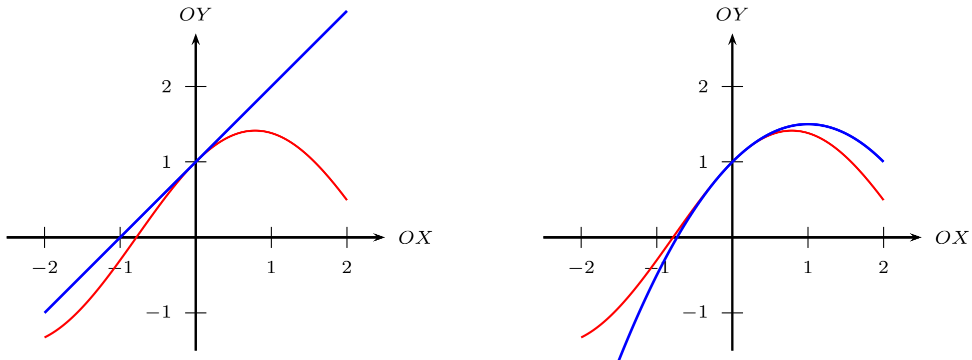
$$
\gamma = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\,(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} = \frac{1}{2} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{2}\, f''(x_0).
$$

Por eso, el polinomio buscado es: $\mathcal{P}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\,(x - x_0)^2$.

El grado del polinomio usado para aproximar una función puede crecer, siempre que la función se pueda derivar más veces. La expresión general del polinomio es:

$$
\mathcal{P}(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\, f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k.
$$

En la Figura (4.1) se representan (con color azul) algunos polinomios que aproximan a la función $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$ en un entorno de $x = 0$.



$\mathcal{P}_1(x) = 1 + x$ $\quad$ $\mathcal{P}_2(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2}$

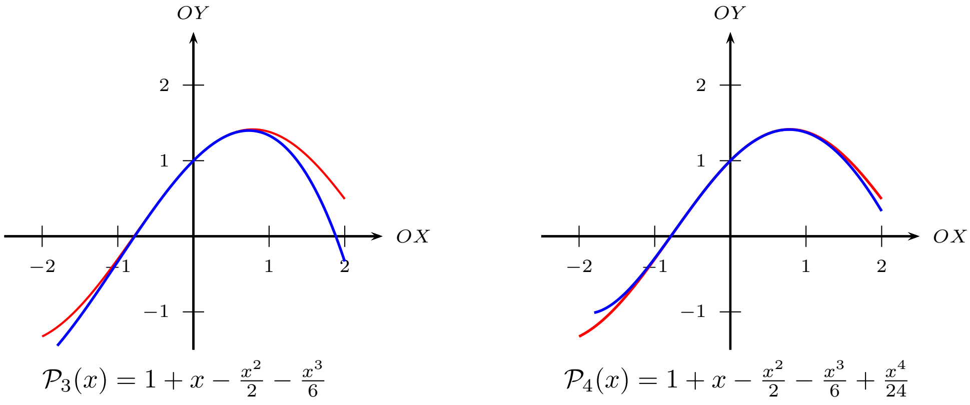


Figura 4.1: Polinomios que aproximan a $\operatorname{sen}(x) + \cos(x)$.

4.2 Teorema de Taylor para funciones escalares

El resto del tema lo desarrollaremos para funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, pudiéndose generalizar de forma sencilla para dimensión mayor.

El polinomio de Taylor para una función escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se obtendrá aplicando el teorema en el caso real al segmento que une los puntos (a, b) y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La ecuación paramétrica de la recta determinada por estos dos puntos es: $\alpha(t) = (a, b) + t\,[(x, y) - (a, b)]$, con $t \in \mathbb{R}$, y la restricción de la función f a dicha recta es la función dependiente de la variable real t, $\Phi(t) = f\,[(a, b) + t\,[(x, y) - (a, b)]]$. El valor de la función Φ y de sus derivadas en $t = 0$ está determinado por el valor de f y sus derivadas parciales en (a, b), y el punto intermedio c de la ecuación (4.1) será un punto del segmento $\mathcal{S} = \{(a, b) + t\,[(x, y) - (a, b)],\ 0 < t < 1\}$.

Teorema 4.2.1 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en $\operatorname{Dom}(f)$, y sean (a, b) y (x, y) dos puntos tales que el segmento $\mathcal{S}$ está contenido en $\operatorname{Dom}(f)$. Entonces existe un $(c_1, c_2) \in \mathcal{S}$ para el que se verifica:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c_1, c_2) \cdot (x - a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_1, c_2) \cdot (x - a) \cdot (y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c_1, c_2) \cdot (y - b)^2\right]. \end{aligned}$$

Además, el polinomio que mejor aproxima a f en un entorno de (a, b) es:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x, y) &= f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \cdot (x - a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \cdot (x - a) \cdot (y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \cdot (y - b)^2\right]. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.2 Aproximar la función $f(x,y)=\dfrac{1}{1+xy}$ en un entorno del punto $(3,1)$ mediante un polinomio de segundo grado.
Solución: Las derivadas parciales de f hasta orden dos son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{-y}{(1+xy)^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-x}{(1+xy)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{2y^2}{(1+xy)^3},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{xy-1}{(1+xy)^3},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{2x^2}{(1+xy)^3}.$$

Así,

$$f(3,1)=\frac{1}{4},\ \frac{\partial f}{\partial x}(3,1)=\frac{-1}{16},\ \frac{\partial f}{\partial y}(3,1)=\frac{-3}{16},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,1)=\frac{2}{64},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(3,1)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(3,1)=\frac{2}{64},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,1)=\frac{18}{64},$$

por lo que el polinomio de grado dos será:

$$\mathcal{P}(x,y)=\tfrac{1}{4}+\left[\tfrac{-1}{16}(x-3)-\tfrac{3}{16}(y-1)\right]+\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{32}(x-3)^2+2\tfrac{2}{64}(x-3)(y-1)+\tfrac{18}{64}(y-1)^2\right].$$

□

Ejemplo 4.2.3 Hallar el polinomio de grado dos asociado a $g(x,y)=\operatorname{sen}(xy)$ en el punto $(0,1)$.
Solución: El valor de g en el punto $(0,1)$ es $g(0,1)=\operatorname{sen}(0)=0$, y el de sus derivadas parciales hasta orden dos son:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=y\cos(xy), && \frac{\partial g}{\partial x}(0,1)=1,\\
&\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=x\cos(xy), && \frac{\partial g}{\partial y}(0,1)=0,\\
&\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=-y^2\operatorname{sen}(xy), && \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,1)=0,\\
&\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y)=\cos(xy)-xy\operatorname{sen}(xy), && \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(0,1)=\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(0,1)=1,\\
&\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=-x^2\operatorname{sen}(xy) && \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,1)=0.
\end{aligned}$$

El polinomio buscado es: $\mathcal{P}(x,y)=0+\frac{1}{1}x+\frac{1}{2}[0\cdot x^2+2\cdot 1\cdot x\,(y-1)]=x+xy-x=xy$.

□

4.3 Puntos críticos: clasificación

La fórmula de Taylor es la herramienta que permite el estudio de la existencia de los máximos y mínimos relativos.

Definición 4.3.1 Dada una función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ se dice que:

1. f tiene en $(a,b)\in\overset{\circ}{\mathrm{Dom}}(f)$ un máximo relativo si existe una bola $\mathcal{B}((a,b),\delta)\subset\mathrm{Dom}(f)$ tal que $f(x,y)\leq f(a,b)$ para todo $(x,y)\in\mathcal{B}((a,b),\delta)$,

2. f tiene en $(a,b) \in \overset{\circ}{\mathrm{Dom}}(f)$ un mínimo relativo si existe una bola $\mathcal{B}((a,b),\delta) \subset \mathrm{Dom}(f)$ tal que $f(x,y) \geq f(a,b)$ para todo $(x,y) \in \mathcal{B}((a,b),\delta)$.

Cuando se trate indistintamente con máximos o mínimos relativos, se hablará de extremos relativos.

Proposición 4.3.2 Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiene un extremo relativo en un punto $(a,b) \in \overset{\circ}{\mathrm{Dom}}(f)$ y existe la derivada direccional $D_{\vec{\boldsymbol{v}}} f(a,b)$ entonces $D_{\vec{\boldsymbol{v}}} f(a,b) = 0$.

Demostración. Si f posee un máximo relativo en (a,b) entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(a,b) \geq f(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathcal{B}((a,b);\delta)$. Por tanto $f(a,b) \geq f[(a,b)+t(v_1,v_2)]$ para todo t tal que $(a,b)+t(v_1,v_2) \in \mathcal{B}((a,b);\delta)$, es decir, para $t \in (-\delta,\delta)$.

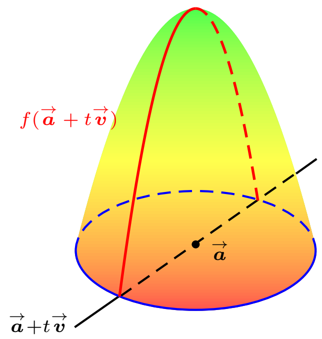


Figura 4.2: Extremo relativo

Se considera la función $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Phi(t) = f((a,b)+t(v_1,v_2))$. Esta función verifica:

$$\Phi(0) = f(a,b) \geq f[(a,b)+t(v_1,v_2)] = \Phi(t),\ t \in (-\delta,\delta)$$

por lo que Φ tiene un máximo relativo en 0 y, en consecuencia $\Phi'(0) = 0$. Es decir $D_{\vec{\boldsymbol{v}}} f(a,b) = 0$.

En el caso de tener un mínimo relativo, la demostración es análoga.

□

Caso particular de esta propiedad es el siguiente corolario.

Corolario 4.3.3 Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(a,b) \in \overset{\circ}{\mathrm{Dom}}(f)$ un punto en el que existe el vector gradiente $\nabla f(a,b)$. Si f tiene un extremo relativo en (a,b), entonces $\nabla f(a,b) = (0,0)$.

Definición 4.3.4 Un punto crítico para una función escalar es aquel en el que se anulan todas las derivadas parciales de primer orden.

Observación 4.3.5 El hecho de que las derivadas parciales sean nulas no implica la existencia de un extremo relativo. Por ejemplo, la función $f(x,y) = x^2 - y^2$ verifica $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$, por lo que posee derivadas parciales nulas en $(0,0)$. Sin embargo, f no presenta un máximo en $(0,0)$ ya que $f(0,0) = 0$ y $f(x,0) = x^2 > 0$ para $x \neq 0$; y no presenta un mínimo, ya que $f(0,0) = 0$ y $f(0,y) = -y^2 < 0$ para $y \neq 0$.

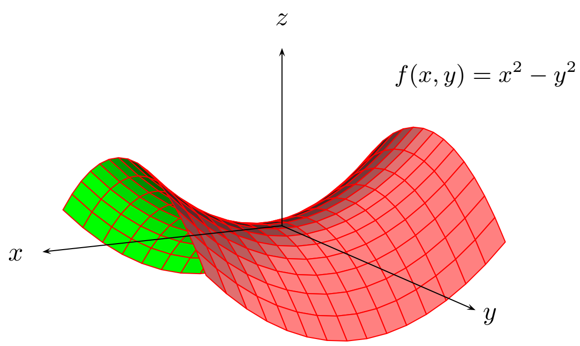


Figura 4.3: Punto crítico que non es extremo.

Ejemplo 4.3.6 Dada la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=(x^2+3y^2)\,\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}$ se verifica:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\,\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}+(x^2+3y^2)\,\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}(-2x)=2x\,\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}[1-x^2-3y^2]=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ \quad\text{o}\\ x^2+3y^2=1\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=6y\,\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}+(x^2+3y^2)\,\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}(-2y)=2y\,\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}[3-x^2-3y^2]=0\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\ \quad\text{o}\\ x^2+3y^2=3\end{cases}$$

Los puntos críticos son $(0,0)$, $(0,\pm1)$ y $(\pm1,0)$. Se puede observar por la gráfica de la función, representada en la Figura (4.4), que $(0,0)$ es un mínimo, $(0,\pm1)$ son máximos y $(\pm1,0)$ non son extremos.

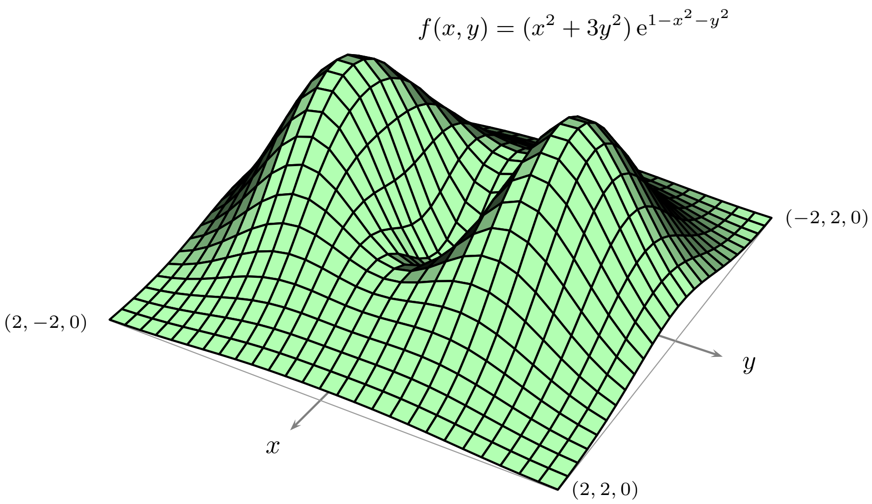


Figura 4.4: Gráfica de función con varios puntos críticos.

□

Definición 4.3.7 Un punto crítico que non sea extremo se denomina punto silla.

Ejemplo 4.3.8 Hallar los puntos críticos de $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$.
Solución: Los puntos críticos son las soluciones de $\nabla f(x,y)=(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=6x^2+y^2+10x,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2xy+2y=2y\,(x+1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\Rightarrow 2y(x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ \text{o}\\ x+1=0\end{cases}$$

- Si $y = 0$ entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 6x^2 + 10x = 6x\left(x + \frac{5}{3}\right)$, por lo que se obtienen los puntos críticos $(0, 0)$ y $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$.
- Si $x = -1$ entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, y) = 6 + y^2 - 10 = 0$, por lo que $y^2 = 4$, es decir, $y = \pm 2$. Se obtienen los puntos críticos $(-1, 2)$ y $(-1, -2)$.

$\square$

4.4 Matriz Hessiana

Definición 4.4.1 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función escalar para la que existen las derivadas parciales de segundo orden en un punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Se define la matriz Hessiana de f en (a, b) como:

$$\mathcal{H}_f(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix}$$

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^2$ en un entorno de (a, b), se puede escribir:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c_1, c_2) \cdot (x - a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_1, c_2) \cdot (x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c_1, c_2) \cdot (y - b)^2\right]. \end{aligned}$$

El término de grado 1 se escribe como $\nabla f(a, b) \cdot (x - a, y - b)$, mientras que el de grado 2 se puede escribir en función de la matriz Hessiana de la forma:

$$(x - a \;\; y - b) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c_1, c_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_1, c_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_1, c_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c_1, c_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} = (x - a \;\; y - b)\; \mathcal{H}f(c_1, c_2) \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix},$$

por lo que:

$$f(x, y) = f(a, b) + \nabla f(a, b) \cdot (x - a, y - b) + \frac{1}{2}(x - a \;\; y - b)\; \mathcal{H}f(c_1, c_2) \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}.$$

Para un punto crítico (a, b) de una función escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de clase C^2 se verifica $\nabla f(a, b) = (0, 0)$, por lo que:

$$f(x, y) - f(a, b) = \frac{1}{2}(x - a, y - b)\mathcal{H}_f(c_1, c_2)(x - a, y - b)^t$$

Así, se deduce que el signo de $f(x, y) - f(a, b)$ coincide con el de $(x - a, y - b)\mathcal{H}_f(c_1, c_2)(x - a, y - b)^t$. Además, para (c_1, c_2) cerca de (a, b), los valores de $(x - a, y - b)\mathcal{H}_f(c_1, c_2)(x - a, y - b)^t$ están muy próximos a los de $(x - a, y - b)\mathcal{H}_f(a, b)(x - a, y - b)^t$.

Por eso, podemos extraer conclusiones cuando:

- $(x-a, y-b)\mathcal{H}_f(a,b)(x-a, y-b)^t$ sea siempre estrictamente positivo ($\mathcal{H}_f(a,b)$ es matriz definida positiva). El signo de $f(x,y) - f(a,b)$ será siempre positivo, por lo que $f(a,b)$ es mínimo relativo.
- $(x-a, y-b)\mathcal{H}_f(a,b)(x-a, y-b)^t$ sea siempre estrictamente negativo ($\mathcal{H}_f(a,b)$ es matriz definida negativa). El signo de $f(x,y) - f(a,b)$ será siempre negativo, por lo que $f(a,b)$ es máximo relativo.
- $(x-a, y-b)\mathcal{H}_f(a,b)(x-a, y-b)^t$ cambie de signo ($\mathcal{H}_f(a,b)$ es matriz indefinida). El signo de $f(x,y) - f(a,b)$ será a veces positivo y otras negativo, por lo que $f(a,b)$ no es extremo relativo.

Sin embargo, no podemos extraer conclusiones cuando:

- $(x-a, y-b)[\mathcal{H}_f(a,b)](x-a, y-b)^t$ sea positivo o cero ($\mathcal{H}_f(a,b)$ es matriz semidefinida positiva),
- $(x-a, y-b)[\mathcal{H}_f(a,b)](x-a, y-b)^t$ sea negativo o cero ($\mathcal{H}_f(a,b)$ es matriz semidefinida negativa),

pues en estos casos, si existe algún (x,y) para el que $(x-a, y-b)\mathcal{H}_f(a,b)(x-a, y-b)^t = 0$, el signo de esta expresión para vectores cerca de (x,y) no se puede determinar.

Aunque desde el punto de vista teórico el estudio de los extremos relativos está concluido, desde el punto de vista práctico no es así, ya que no se puede evaluar la expresión $(x-a, y-b)[\mathcal{H}_f(a,b)](x-a, y-b)^t$ para todo (x,y). Por eso, nuestro próximo objetivo será establecer una condición, computacionalmente sencilla, que permita decidir el signo de $(x-a, y-b)\mathcal{H}_f(a,b)(x-a, y-b)^t$.

Definición 4.4.2 Una matriz $A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es simétrica si coincide con su traspuesta A^t. Es decir, $a_{ik} = a_{ki}$ para todo $i, k \in \{1, ..., n\}$.

Por ejemplo, la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ es simétrica, pues $A^t = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A$, mientras que $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ no es simétrica, ya que $B^t = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \neq B$.

Observemos que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^2$ en un entorno de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, entonces la matriz $\mathcal{H}_f(a,b)$ es simétrica.

Para una matriz $A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ definimos los siguientes determinantes:

$$\Delta_1 = \det\begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix},\ \Delta_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Proposición 4.4.3 una matriz simétrica $A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ verifica:

(i) si $\Delta_1 > 0$ y $\Delta_2 > 0$ entonces A es definida positiva,

(ii) si $\Delta_1 < 0$ y $\Delta_2 > 0$ entonces A es definida negativa,

(iii) si $\Delta_2 < 0$ entonces A es indefinida.

Por ejemplo, a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ es definida positiva, ya que:

$$\det \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} = 2 > 0 \text{ y } \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 6 > 0,$$

mientras que $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ es definida negativa, pues:

$$\det \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix} = -3 < 0 \text{ y } \det \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = 10 > 0.$$

Nosotros aplicaremos la proposición (4.4.3) a matrices Hessianas asociadas a funciones escalares evaluadas en puntos críticos. En concreto, para una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con punto crítico (a, b) tenemos:

$$\Delta_1(a,b) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \end{pmatrix}, \ \Delta_2(a,b) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix}.$$

Como consecuencia de la proposición (4.4.3) tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.4.4 Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ función con punto crítico (a, b) y matriz Hessiana $\mathcal{H}_f(a, b)$, se verifica:

- si $\Delta_1(a, b) > 0$ y $\Delta_2(a, b) > 0$ entonces (a, b) es mínimo relativo,
- si $\Delta_1(a, b) < 0$ y $\Delta_2(a, b) > 0$ entonces (a, b) es máximo relativo,
- si $\Delta_2(a, b) < 0$ entonces (a, b) es punto silla.

Ejemplo 4.4.5 Hallar los extremos relativos de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.
Solución: Las derivadas parciales de primer orden verifican:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 2,$$

por lo que los puntos críticos son $(1, 2)$, $(1, -2)$, $(-1, 2)$ y $(-1, -2)$.

Las derivadas parciailes de segundo orden toman los valores:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y,$$

por lo que as matrices hessianas son:

$$\mathcal{H}_f(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix},$$

$\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 72 > 0$, $|6| = 6 > 0$, f presenta en $(1,2)$ un mínimo relativo.

$\mathcal{H}_f(-1,2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$,
$\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = -72 < 0$, f no tiene un extremo relativo en $(-1,2)$.

$\mathcal{H}_f(1,-2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$,
$\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = -72 < 0$, f no tiene un extremo relativo en $(1,-2)$

$\mathcal{H}_f(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$,
$\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = 72 > 0$, $|-6| = -6 < 0$, f tiene en $(-1,-2)$ un máximo relativo.

□

Ejemplo 4.4.6 Calcular los extremos relativos de la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = 2xy - \frac{1}{2}x^4 - y^2$.
Solución: Los puntos críticos de g son las soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -2x^3 + 2y = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2x - 2y = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} -x^3 + y = 0 \\ x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^3 + x = 0 \Rightarrow \left(-x^2+1\right)x = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ \text{o} \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$$

Así, los puntos críticos son: $(0,0)$, $(1,1)$ y $(-1,-1)$.

la matriz hessiana es: $\mathcal{H}_g(x,y) = \begin{pmatrix} -6x^2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

En los puntos críticos se verifica:

$\mathcal{H}_g(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$. El punto $(0,0)$ es una silla.

$\mathcal{H}_g(1,1) = \mathcal{H}_g(-1,-1) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $|-6| = -6 < 0$, $\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 8 > 0$. Los puntos $(1,1)$ y $(-1,-1)$ son máximos relativos.

□

Ejemplo 4.4.7 Calcular y clasificar os puntos críticos de la función $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = x^4 - 3x^2y + 3y - y^3$.

Solución: Las derivadas parciales de la función son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= 4x^3-6xy=2x\left(2x^2-3y\right)\\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= -3x^2-3y^2+3\end{aligned}$$

Los puntos críticos anulan estas dos derivadas.

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ \text{o}\\ 2x^2-3y=0\Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x^2\end{cases}$$

Si $x=0$ entonces $\frac{\partial h}{\partial y}(0,y)=-3y^2+3=0\Leftrightarrow y=\pm1$. Se obtienen los puntos críticos $(0,1)$ y $(0,-1)$.

Si $y=\frac{2}{3}x^2$ entonces $\frac{\partial h}{\partial y}\left(x,\frac{2}{3}x^2\right)=-3x^2-3\left(\frac{2}{3}x^2\right)^2+3=-\frac{4}{3}x^4-3x^2+3$. Esta derivada se anula si

$$\begin{aligned}-\tfrac{4}{3}x^4-3x^2+3=0 \quad&\Leftrightarrow\quad -\tfrac{4}{3}\left(x^2\right)^2-3x^2+3=0\\ &\Leftrightarrow\quad x^2=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot3}}{2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{-\frac{8}{3}}=-\frac{3}{8}\left(3\pm5\right)=\begin{cases}-\frac{3}{8}8=-3\\ \text{o}\\ -\frac{3}{8}\left(-2\right)=\frac{3}{4}\end{cases}\end{aligned}$$

El único valor posible de x^2 es $\frac{3}{4}$, por lo que los valores de x son $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Al ser $y=\frac{2}{3}x^2$, los puntos críticos que se obtienen son: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Se calcula ahora la matriz hessiana en los puntos críticos.

$$\mathcal{H}_h(x,y)=\begin{pmatrix}12x^2-6y & -6x\\ -6x & -6y\end{pmatrix}$$

$\mathcal{H}_h(0,1)=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & -6\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix}-6 & 0\\ 0 & -6\end{vmatrix}=36>0$, $|-6|=-6<0$. Es un máximo relativo.

$\mathcal{H}_h(0,-1)=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{vmatrix}=36>0$, $|6|=6>0$. Es un mínimo relativo.

$\mathcal{H}_h\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}12\frac{3}{4}-6\frac{1}{2} & -6\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -6\frac{\sqrt{3}}{2} & -6\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & -3\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix}6 & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & -3\end{vmatrix}=-45<0$. Es un punto silla.

$\mathcal{H}_h\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}6 & 3\sqrt{3}\\ 3\sqrt{3} & -3\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix}6 & 3\sqrt{3}\\ 3\sqrt{3} & -3\end{vmatrix}=-45<0$. É un punto silla.

$\square$

Ejemplo 4.4.8 Calcular los extremos relativos de $f(x,y)=\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(y)+\cos(x+y)$, con $0<x<2\pi$, $0<y<2\pi$.

Solución: Al igualar las derivadas parciales a 0, se obtiene un sistema de ecuaciones cuyas soluciones proporcionan los puntos críticos.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos(x)-\operatorname{sen}(x+y)=0\\[2mm] \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\cos(y)-\operatorname{sen}(x+y)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \cos(x)=\cos(y)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}y=x\\ \text{o}\\ y=-x\end{array}\right.$$

1ª opción: $y = x$

$$0=\cos(x)-\operatorname{sen}(2x)=\cos(x)-2\operatorname{sen}(x)\cos(x)=\cos(x)(1-2\operatorname{sen}(x))\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos(x)=0\\ 1-2\operatorname{sen}(x)=0\Rightarrow\operatorname{sen}(x)=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Las soluciones en $(0, 2\pi)$ de esta ecuación son: $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$, $x_3 = \frac{\pi}{6}$ y $x_4 = \frac{5\pi}{6}$. Los puntos críticos que se consiguen son: $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$.

2ª opción: $y = -x$ $\cos(x) - \operatorname{sen}(0) = \cos(x) = 0$.

Las soluciones de esta ecuación en $(0, 2\pi)$ son: $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Los puntos críticos que se obtienen son: $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Se calculan las derivadas parciales de segundo orden para obtener el Hessiano:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\, x^2}(x,y)=-\operatorname{sen}(x)-\cos(x+y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial^2\, f}{\partial y\partial x}(x,y)=-\cos(x+y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial\, y^2}(x,y)=-\operatorname{sen}(y)-\cos(x+y).$$

$\mathcal{H}_f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$ se verifica que no se tiene un extremo relativo.

$\mathcal{H}_f\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, $|2| = 2$, es mínimo relativo.

$\mathcal{H}_f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}$, $|-1| = -1$, es máximo relativo.

$\mathcal{H}_f\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$. Al igual que en el caso anterior, es máximo relativo.

$\mathcal{H}_f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Al ser $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} < 0$ no se tiene un extremo relativo.

$\mathcal{H}_f\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Al ser $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} < 0$ no se tiene un extremo relativo.

□

4.5 Extremos condicionados

El objetivo que se persigue ahora es encontrar los extremos relativos para funciones escalares cuando, en lugar de trabajar en todo el dominio de definición, solo se considera un subconjunto de él.

Definición 4.5.1 Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y un conjunto $M \subset \mathbb{R}^2$, se dice que $f(a, b)$ es el máximo absoluto de f en M se $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in M$, y $f(a, b)$ es el mínimo absoluto de f en M si $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in M$.

Cando se hable indistintamente de máximos o mínimos absolutos, los llamaremos extremos absolutos.

Definición 4.5.2 Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y un conjunto $M \subset \mathbb{R}^2$, se dice que f posee en $(a, b) \in M$ un máximo relativo condicionado a M si existe una bola $\mathcal{B}((a, b), \delta)$ tal que $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathcal{B}((a, b), \delta) \cap M$, y f posee en (a, b) un mínimo relativo condicionado al conjunto M si existe una bola $\mathcal{B}((a, b), \delta)$ tal que $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathcal{B}((a, b), \delta) \cap M$.

Cando se hable indistintamente de máximos o mínimos relativos condicionados, los llamaremos extremos relativos condicionados.

Resulta evidente que un extremo absoluto será extremo absoluto condicionado para cualquier conjunto $M \subset \mathbb{R}^2$.

Puesto que $M = \overset{\circ}{M} \cup \mathcal{F}r(M)$, la búsqueda de extremos condicionados se puede separar en dos etapas. Comprobaremos a continuación que en $\overset{\circ}{M}$, las condiciones de extremo relativo y extremo relativo condicionado son equivalentes. La demostración la haremos suponiendo que $(a, b) \in \overset{\circ}{M}$ es un un máximo relativo para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- (a, b) máximo relativo $\Rightarrow$ existe $\delta > 0$ tal que $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathcal{B}((a, b); \delta)$, por lo que $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathcal{B}((a, b); \delta) \cap M$,
- $(a, b) \in \overset{\circ}{M} \Rightarrow$ existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $\mathcal{B}((a, b); \varepsilon_1) \subset M$.

  (a, b) máximo relativo condicionado a $M \Rightarrow$ existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathcal{B}((a, b); \varepsilon_2) \cap M$.

  Sea $\varepsilon =$ mínimo$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, entonces $\mathcal{B}((a, b); \varepsilon) \cap M = \mathcal{B}((a, b); \varepsilon)$. Por tanto $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathcal{B}((a, b); \varepsilon)$. Es decir, (a, b) es extremo relativo (sin condición).

En el caso de tener un mínimo en lugar de un máximo, la demostración es similar.

De esta forma, los extremos relativos condicionados a M que no son extremos relativos, deben estar en $\mathcal{F}r(M)$. En este caso, los métodos vistos hasta ahora no son válidos. Como ejemplo, se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2 = 4 - |(x,y)|^2$ (véase Figura (4.5)), en la que los valores crecen a medida que nos acercamos a $(0,0)$. En el rectángulo $[1,2] \times [1,3]$ el valor máximo se alcanza en $(1,1)$ y el mínimo en $(2,3)$. En ambos dos casos, el vector gradiente no es nulo. En concreto $\nabla f(1,1) = (-2,-2)$ y $\nabla f(2,3) = (-4,-6)$. Para encontrar los extremos condicionados en estos casos usaremos el método de *reducción de la dimensión*, consistente en sustituir una variable en función de otras.

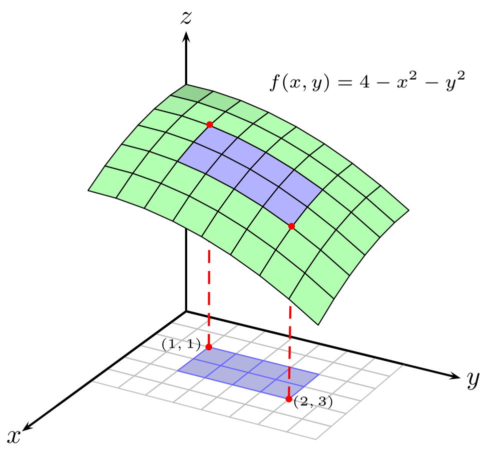


Figura 4.5: Extremos condicionados.

Ejemplo 4.5.3 Hallar los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ en $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Solución: Como la función f es continua, por ser un polinomio, y el conjunto S es compacto, existen los extremos absolutos condicionados que queremos hallar. Estos extremos se encuentran en $\overset{\circ}{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 2\}$ o en $\mathcal{F}r(S) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 2\}$. Comenzamos trabajando en $\overset{\circ}{S}$.

Los puntos críticos de f son las soluciones del sistema:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y = 0;\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - x = 0$$

es decir $(x,y) = (0,0)$, que pertenece a $\overset{\circ}{S}$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = -1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

$\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $|\,2\,| = 2 > 0$; $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$. La matriz es definida positiva, por lo que $(0,0)$ es mínimo relativo.

Se trabaja ahora en $\mathcal{F}r(S)$. Si $(x,y) \in \mathcal{F}r(S)$ entonces $y^2 = 2 - x^2$, $y = \pm\sqrt{2 - x^2}$, $x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$. Se define la restricción de f en la semicircunferencia superior:

- $g_1(x) = f\left(x, \sqrt{2 - x^2}\right) = x^2 + 2 - x^2 - x\sqrt{2 - x^2} = 2 - x\sqrt{2 - x^2}$, $x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.

$$\begin{aligned} g_1'(x) &= -\sqrt{2 - x^2} - x\frac{-2x}{2\sqrt{2 - x^2}} = -\sqrt{2 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{2 - x^2}} \\ &= \frac{-(2 - x^2)}{\sqrt{2 - x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{2 - x^2}} = \frac{2(x^2 - 1)}{\sqrt{2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \end{aligned}$$

$g_1'(x) > 0$ para $x \in \left(-\sqrt{2}, -1\right) \cup \left(1, \sqrt{2}\right)$, por lo que g_1 crece en este subconjunto, y $g_1'(x) < 0$ para $x \in (-1,1)$, por lo que decrece en $(-1,1)$. Entonces se tiene un máximo relativo en $x = -1$, mínimo relativo en $x = 1$, y se debe estudiar también lo que ocurre en $x = \pm\sqrt{2}$.

Puesto que $g_1(-1) = 3$, $g_1(1) = 1$, $g_1\left(\pm\sqrt{2}\right) = 2$, el máximo se alcanza en $x = -1$ y el mínimo en $x = 1$.

- Se define la restricción de f en la semicircunferencia inferior:

  $g_2(x) = f\left(x, -\sqrt{2-x^2}\right) = x^2 + 2 - x^2 + x\sqrt{2-x^2} = 2 + x\sqrt{2-x^2}$, $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

  $$g_2'(x) = \sqrt{2-x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}} = \sqrt{2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{2-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

  $g_2'(x) > 0$ para $x \in (-1, 1)$, por lo que g_2 crece en este intervalo, y $g_2'(x) < 0$ para $x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$, por lo que decrece en $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$. Entonces $x = 1$ es un máximo relativo, $x = -1$ un mínimo relativo, y se debe estudiar lo que ocurre en $x = \pm\sqrt{2}$.

  Al ser $g_2(-1) = 1$, $g_2(1) = 3$ y $g_2\left(\pm\sqrt{2}\right) = 2$, el máximo se alcanza en $x = 1$ y el mínimo en $x = -1$.

Con los datos obtenidos, los posibles mínimos relativos condicionados son $f(0,0) = 0$, $f(1,1) = f(-1,-1) = 1$, por lo que el mínimo absoluto es $f(0,0) = 0$. El máximo absoluto es $f(1,-1) = f(-1,1) = 3$.

□

Ejemplo 4.5.4 Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^3 - 4xy + 2y^2 + 40$ en el conjunto $B = \{(x,y);\ 1 \le x \le 2,\ -2 \le y \le 2\}$.

Solución: $B = \overset{\circ}{B} \cup \mathcal{F}r(B)$, siendo:

$$\overset{\circ}{B} = \{(x,y);\ 1 < x < 2,\ -2 < y < 2\}$$

y

$$\mathcal{F}r(B) = \{(1,y);\ \ -2 \le y \le 2\} \cup \{(2,y);\ \ -2 \le y \le 2\} \cup \{(x,2);\ 1 \le x \le 2\} \cup \{(x,-2);\ 1 \le x \le 2\}.$$

Se comienza buscando los extremos en $\overset{\circ}{B}$. Los puntos críticos de f son las soluciones del sistema $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 4y = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4x + 4y = 0$; es decir $(0,0)$ y $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Como $(0,0) \notin B$, no se trabaja con él.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4$$

$\mathcal{H}_f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 8 \end{vmatrix} = 8 > 0$; $\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 16 > 0$. La matriz es definida positiva, por lo que es mínimo. Además, $f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{3} + 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 40 = 38.8148$.

Se trabaja ahora en $\mathcal{F}r(B)$, restringiendo f a cada lado del rectángulo.

- $f(1,y) = 1 - 4y + 2y^2 + 40 = 2y^2 - 4y + 41$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,y) = 4y - 4 = 4(y-1) = 0$ para $y = 1$.

  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,y) = 4 > 0$, por lo que $f(1,1) = 39$ es mínimo relativo. Además, como $f(1,2) = 41$, $f(1,-2) = 57$ se alcanza el máximo en $(1,-2)$ y el mínimo en $(1,1)$.

- $f(2,y) = 8 - 8y + 2y^2 + 40 = 2y^2 - 8y + 48$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,y) = 4y - 8 = 4(y-2) = 0$ para $y = 2$.

  $\frac{\partial f}{\partial y}(2,y) > 0$ para $y \in (2,-2)$, por lo que $f(2,y)$ es decreciente en $(-2,2)$, y así el valor mínimo que alcanza es $f(2,2) = 40$ y el máximo $f(2,-2) = 72$.

- $f(x,2) = x^3 - 8x + 48$, $f'(x,2) = 3x^2 - 8 = 0$ para $x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$. Como $\frac{\partial f}{\partial x}(x,2) < 0$ para $x \in \left(1, \sqrt{\frac{8}{3}}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,2) > 0$ para $x \in \left(\sqrt{\frac{8}{3}}, 2\right)$, $f\left(\sqrt{\frac{8}{3}}, 2\right) = 39.2907$ es mínimo relativo. Como además $f(1,2) = 41$ y $f(2,2) = 40$, se alcanza el mínimo en $\left(\sqrt{\frac{8}{3}}, 2\right)$ y el máximo en $(1,2)$.
- $f(x,-2) = x^3 + 8x + 48$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,-2) = 3x^2 + 8 > 0$ para $x \in (1,2)$. Entonces se alcanza el mínimo en $(1,-2)$ y su valor es $f(1,-2) = 57$. El máximo se alcanza en $(2,-2)$, siendo su valor $f(2,-2) = 72$.

Se concluye entonces que el valor máximo es 72 y se alcanza en $(2,-2)$, el valor mínimo es 38.8148 y se alcanza en $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

$\square$