Ejercicios básicos

1 Usando la definición, obtener la derivada direccional de las funciones que a continuación se consideran en la dirección del vector $\vec{v}$ en el punto (a,b), siendo:

a) $f(x,y)=2x^2+3y^2$; $\vec{v}=\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right),\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$, $(a,b)=(1,1)$

b) $g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$; $\vec{v}=\left(\frac{3}{5},\frac{-4}{5}\right)$, $(a,b)=(3,4)$

c) $h(x,y)=\frac{1}{x-y}$; $\vec{v}=\left(\frac{12}{13},\frac{-5}{13}\right)$, $(a,b)=(2,1)$

2 Estudiar la existencia de las derivadas direccionales en $(0,0,0)$ de la función:

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x\,y^2}{x^2+y^4+z^2} & \text{se } (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

3 Hallar el gradiente de las siguientes funciones en un punto arbitrario.

a) $f(x,y)=\mathrm{e}^{2xy}$,

b) $g(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$,

c) $h(x,y,z)=x\ \operatorname{sen}(y\cdot z)$

4 Calcular funciones escalares f y g tales que:

a) $\nabla f(x,y,z)=(2x,\,2y,\,2z)$,

b) $\nabla g(x,y)=(\mathrm{e}^x\ \operatorname{sen}(y),\,\mathrm{e}^x\ \cos(y))$.

5 Para un punto (x,y) de una placa rectangular la temperatura es $T(x,y)=x^2y^3$. Si se considera el punto $(2,3)$ situado en dita placa,

a) ¿en qué dirección aumenta más rápido la temperatura en $(2,3)$?

b) ¿en que dirección disminuye más rápido a temperatura en $(2,3)$?

c) ¿en que dirección varía menos la temperatura?

6 Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a las siguientes superficies en los puntos que se indican.

a) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, punto $(1,2,2)$,

b) $z=\mathrm{e}^{3x}\ \operatorname{sen}(3y)$, punto $\left(0,\frac{\pi}{6},1\right)$,

c) $z=\ln(xy)$, punto $\left(\frac{1}{2},2,0\right)$.

7 La derivada direccional de $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ en el punto $(1,2)$ en la dirección do vector $\vec{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, y en la dirección de $\vec{v}=\left(\frac{3}{\sqrt{13}},-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ es 0. ¿Cuál es la derivada direccional de f en $(1,2)$ en la dirección del vector $\vec{w}=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$?

8 De la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ se sabe que es diferenciable y que en el punto $(1,2)$ el plano tangente a la gráfica es $2x+3y+4z=1$. ¿Se puede calcular con estos datos la derivada direccional de f en la dirección que une el punto $(1,2)$ con $(3,4)$?

$\boxed{9}$ Se considera $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy} + \dfrac{x}{y} + \operatorname{sen}((2x+3y)\pi)$. Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,-1)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(2,-1)$.

$\boxed{10}$ Calcular la matriz jacobiana de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $\vec{f}(x,y,z) = (2x+4y-z,\, 6x-3y-4z)$ en $(1,-3,2)$,

b) $\vec{g}(x,y,z) = (xyz,\, xy,\, x)$ en $(2,0,1)$.

Ejercicios complementarios

$\boxed{11}$ Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $D_{\vec{\boldsymbol{v}}} f(\vec{\boldsymbol{a}}) > 0$ para un punto concreto $\vec{\boldsymbol{a}}$ y cualquier vector unitario $\vec{\boldsymbol{v}}$.

$\boxed{12}$ Calcular las derivadas parciales de primer orden de las funciones $f(x,y) = x\,y + \frac{x}{x^2+y^2}$, $g(x,y,z) = \frac{x+y\,\mathrm{e}^z}{y^2+z}$.