

6 | INTEGRACIÓN MÚLTIPLE

6.1	Integrales dobles	63
6.1.1	Integración en rectángulos	63
6.1.2	Integración en regiones más generales	67
6.2	Integrales triples	71
6.3	Aplicaciones al cálculo de áreas y volúmenes	75
6.4	Integración en otras variables	78
6.4.1	Coordenadas polares	78
6.4.2	Coordenadas cilíndricas	80
6.4.3	Coordenadas esféricas	83
6.5	Superficies en \mathbb{R}^3	85

6.1 Integrales dobles

6.1.1. Integración en rectángulos

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar continua en un rectángulo $D = [a, b] \times [c, d]$ con $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in D$. La gráfica de f es una superficie situada por encima do rectángulo D . Esta superficie y los planos $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, $z = 0$ limitan una región en \mathbb{R}^3 (ver Figura 6.1). Se define la integral de f sobre D , y se denotará por $\iint_D f$ o $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$, como el volumen de esa región.

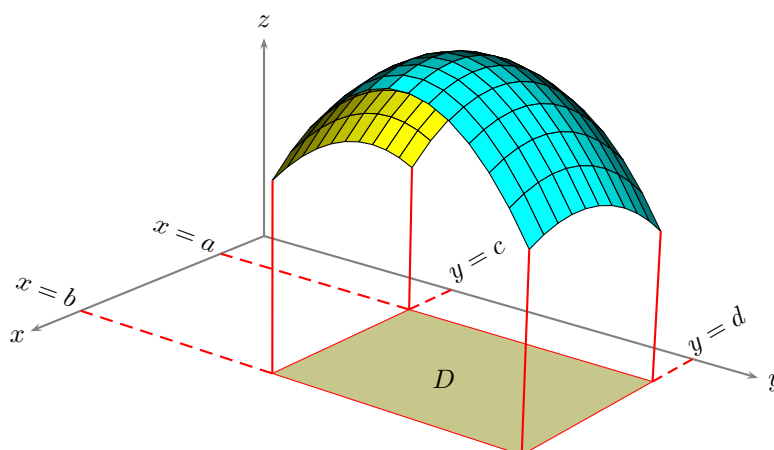


Figura 6.1: Volumen en \mathbb{R}^3 .

La primera aproximación en la que se puede pensar para encontrar el valor del volumen de la figura (6.1) es un proceso de aproximación mediante sumas de Riemann, como se hace con las funciones de variable

real. Formaremos paralelepípedos cuyos volúmenes aproximen al que queremos calcular.

Para fijar las bases de los paralelepípedos, definimos el concepto de partición de un rectángulo.

Definición 6.1.1 Se considera un rectángulo

$$D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y); x \in [a, b], y \in [c, d]\} \subset \mathbb{R}^2$$

y $\{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}([a, b])$, $\{y_0, \dots, y_p\} \in \mathcal{P}([c, d])$. Una partición de D es el conjunto $P = \{(x_i, y_k); i = 0, \dots, n, k = 0, \dots, p\}$. Esta partición divide D en rectángulos pequeños $D_{ik} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{k-1}, y_k]$.

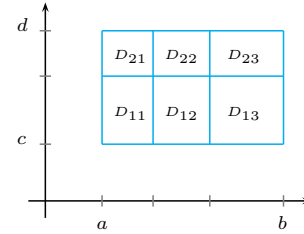


Figura 6.2: Partición de un rectángulo.

Definición 6.1.2 La norma de una partición $P = \{(x_i, y_k); i = 0, \dots, n, k = 0, \dots, p\}$ de un rectángulo $D = [a, b] \times [c, d]$ es el número:

$$\begin{aligned} \|P\| &= \text{máximo}\{(x_i - x_{i-1}) \cdot (y_k - y_{k-1}); i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p\} \\ &= \text{máximo}\{\text{área}(D_{ik}); i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p\}. \end{aligned}$$

Las bases de los paralelepípedos con los que construimos las sumas son los rectángulos determinados por una partición (ver Figura 6.2), y las alturas vienen dadas por el valor de la función en un punto de cada elemento de la partición (ver Figura 6.3).

Definición 6.1.3 Dados $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ función continua, D un rectángulo contenido en \mathbb{R}^2 y $P = \{(x_i, y_k); i = 0, \dots, n, k = 0, \dots, p\}$ una partición de D , una suma de Riemann asociada a f y P es:

$$\begin{aligned} S(P, f) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p f(\alpha_i, \beta_k) \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_k - y_{k-1}) \\ &= \sum_{i,k} f(\alpha_i, \beta_k) \cdot \text{área}(D_{ik}), \text{ con } (\alpha_i, \beta_k) \in D_{ik}. \end{aligned}$$

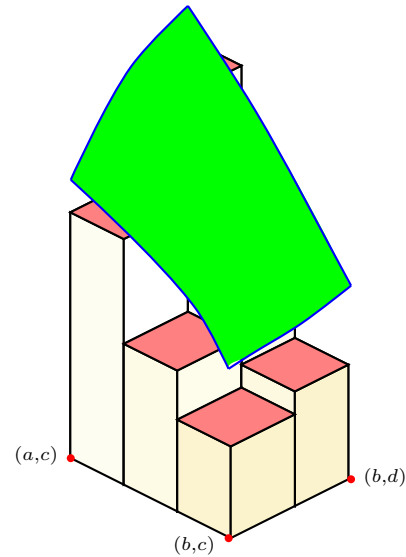


Figura 6.3: Aproximación por paralelepípedos.

Observación 6.1.4 Si f es función continua y hacemos $\|P\| \rightarrow 0$ entonces: $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(P, f) = \iint_D f$.

Ejemplo 6.1.5 Si $f(x, y) = 1 - \frac{x}{2}$ y $D = [0, 2] \times [0, 1]$, entonces $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = 1$, ya que la integral es el volumen del sólido de la Figura (6.4).

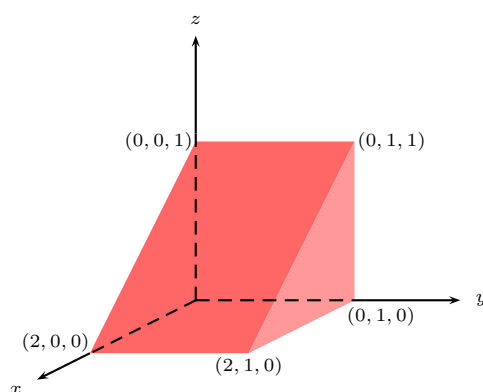


Figura 6.4: Gráfica de la función $f(x, y) = 1 - \frac{x}{2}$.

□

Este procedimiento es útil cuando las figuras de las que se desea calcular el volumen son sencillas, lo que no suele suceder. Veamos un procedimiento general más efectivo.

Es sabido que el volumen de un sólido cuya longitud está limitada por los valores $x = a$, $x = b$ y tal que el área de cada sección plana $A(x)$ es función continua, se puede calcular mediante: $V = \int_a^b A(x) dx$. Estas secciones $A(x)$ se obtienen cortando el sólido por planos perpendiculares al eje OX . La sección determinada por el plano $x = x_0$ es la región situada bajo la gráfica de $h(y) = f(x_0, y)$ con $y \in [c, d]$ (ver figura (6.5)). Por tanto, el área de la sección es $A(x_0) = \int_c^d h(y) dy$. Entonces $V = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$. Esta integral se conoce como *integral iterada*, ya que primero se integra respecto de y , y después respecto de x .

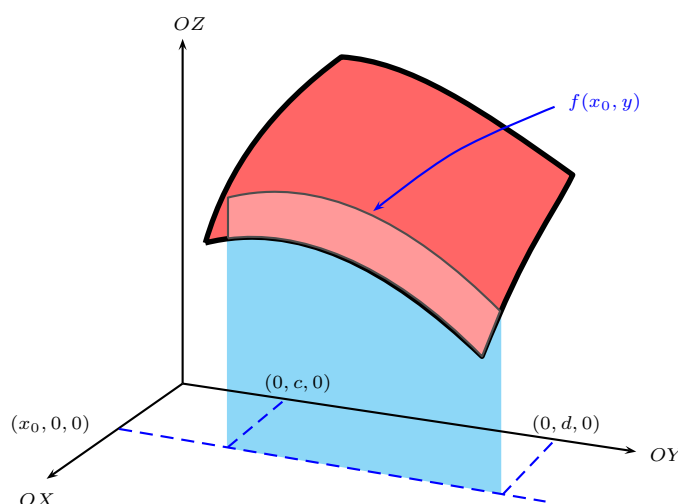


Figura 6.5: Sección bajo una gráfica

La expresión $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$ será adoptada como definición de integral doble de una función conti-

nua, incluso cuando la función no tome siempre valores positivos.

El desarrollo seguido en los párrafos anteriores es también válido si intercambiamos el orden de las variables x e y . Así, la integral $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ también se puede definir como $\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy$.

Desde el punto de vista práctico, para calcular $\int f(x, y) \, dy$ hay que integrar una función escalar dependiente de dos variables, con respecto a una de ellas. Se verifica:

$$\int f(x, y) \, dy = g(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = f(x, y).$$

En el caso particular en que $f(x, y) = \alpha(x) \cdot \beta(y)$ se cumple

$$\int f(x, y) \, dy = \int \alpha(x) \cdot \beta(y) \, dy = \alpha(x) \int \beta(y) \, dy.$$

Ejemplo 6.1.6 Calcular $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$ siendo $D = [-1, 1] \times [0, 1]$.

Solución:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left[\int_{-1}^1 (x^2 + y^2) \, dx \right] dy \\ \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) \, dx &= \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=-1}^{x=1} = \left[\frac{1}{3} + y^2 \right] - \left[-\frac{1}{3} - y^2 \right] = \frac{2}{3} + 2y^2; \\ \int_0^1 \left(\frac{2}{3} + 2y^2 \right) dy &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 6.1.7 Calcular $\iint_D \cos(x) \sin(y) \, dx \, dy$ siendo $D = [0, \frac{\pi}{4}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

Solución:

$$\begin{aligned} \iint_D \cos(x) \sin(y) \, dx \, dy &= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\pi/4} \cos(x) \sin(y) \, dx \right] dy \\ \int_0^{\pi/4} \cos(x) \sin(y) \, dx &= \sin(y) \int_0^{\pi/4} \cos(x) \, dx = \sin(y) 0.7071 \\ \int_0^{\pi/2} 0.7071 \sin(y) \, dy &= 0.7071 \end{aligned}$$

□

6.1.2. Integración en regiones más generales

Se extenderá ahora el concepto de integral doble a funciones definidas en conjuntos que no sean rectángulos. En concreto, se hará con regiones de los siguientes tipos:

región y -simple, $S = \{(x, y); a \leq x \leq b; \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$,

región x -simple, $T = \{(x, y); c \leq y \leq d; \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$.

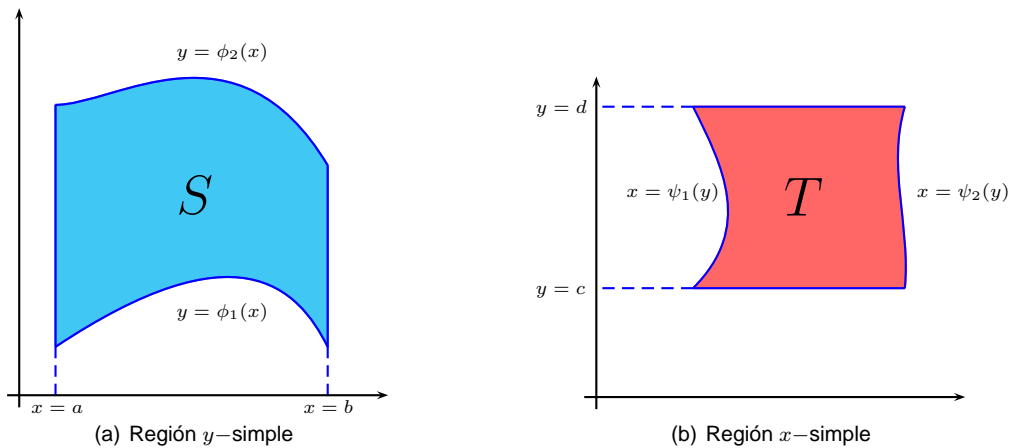


Figura 6.6: Regiones simples.

La integral doble en regiones S del tipo y -simple se define como
$$\iint_S f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) \, dy \right] dx,$$
 y en las regiones T del tipo x -simple como
$$\iint_T f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \right] dy.$$

Existen regiones que pueden ser consideradas x -simple o y -simple, por ejemplo, regiones limitadas por elipses o circunferencias. En estos casos, la integral puede ser calculada de ambas maneras.

Al igual que sucedía en el caso de rectángulos, si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ verifica $f(x, y) \geq 0$ para $D \subset \mathbb{R}^2$, la integral $\iint_D f$ proporciona el volumen de la región limitada inferiormente por el plano XY , superiormente por la gráfica de f y lateralmente por $\{(x, y, z); (x, y) \in \mathcal{F}_r(D), z \in [0, f(x, y)]\}$. En caso de que $f(x, y) \leq 0$ para $D \subset \mathbb{R}^2$, la integral proporciona el opuesto del volumen.

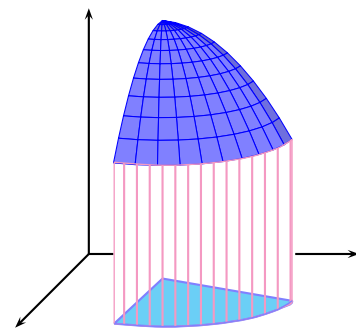


Figura 6.7: Volumen en \mathbb{R}^3

Ejemplo 6.1.8 Sea D la región de \mathbb{R}^2 acotada por el eje OY y la parábola $x = -y^2 + 3$. Calcular el valor de
$$\iint_D (2xy + 1) \, dx \, dy.$$

Solución 1: El punto más bajo de la región es $(0, -\sqrt{3})$, y el más alto $(0, \sqrt{3})$. Además el segmento $\{(0, y); y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]\}$ está contenido en D , por lo que la variación de y se produce en el intervalo $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Ahora, para cualquier $y_0 \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, el segmento de recta $y = y_0$ contenido en D comienza en el eje OY y termina en la parábola $x = -y^2 + 3$, por lo que la variación de x , una vez fijado y_0 se produce en el intervalo $[0, -y_0^2 + 3]$. Por eso una parametrización de D es

$$\{(x, y); y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]; x \in [0, -y^2 + 3]\}.$$

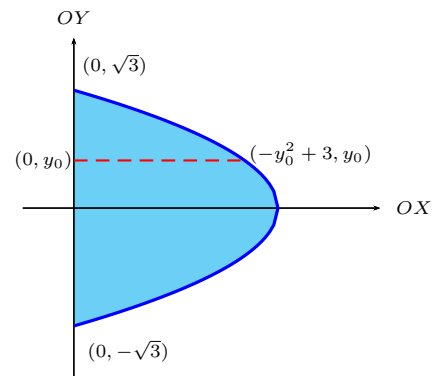


Figura 6.8: Región simple

$$\iint_D (2xy + 1) \, dx \, dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[\int_0^{-y^2+3} (2xy + 1) \, dx \right] dy$$

$$\int_0^{-y^2+3} (2xy + 1) \, dx = [x^2y + x]_{x=0}^{x=-y^2+3} = (-y^2 + 3)^2y + (-y^2 + 3) = y^5 - 6y^3 + 9y - y^2 + 3$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} [y^5 - 6y^3 + 9y - y^2 + 3] \, dy = 6.9282$$

Solución 2: En los puntos de D situados más a la izquierda el valor de x es 0, en el punto situado más a la derecha es $(0, 3)$, y el segmento $\{(x, 0); x \in [0, 3]\}$ está contenido en D , por lo que la variación de x se produce en el intervalo $[0, 3]$. Ahora, para cualquier $x_0 \in [0, 3]$, el segmento de recta $x = x_0$ contenido en D comienza en la rama inferior de la parábola $y^2 = 3 - x$ y termina en la rama superior, por lo que la variación de y , una vez fijado x_0 se produce en el intervalo $[-\sqrt{3-x_0}, \sqrt{3-x_0}]$. Por eso una parametrización de D es

$$\{(x, y); x \in [0, 3]; y \in [-\sqrt{3-x}, \sqrt{3-x}]\}.$$

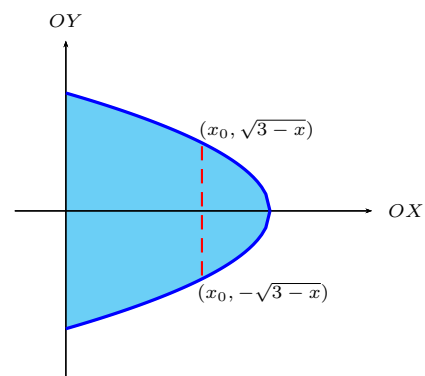


Figura 6.9: Región simple

$$\iint_D (2xy + 1) \, dx \, dy = \int_0^3 \left[\int_{-\sqrt{3-x}}^{\sqrt{3-x}} (2xy + 1) \, dy \right] dx$$

$$\int_{-\sqrt{3-x}}^{\sqrt{3-x}} (2xy + 1) \, dy = [xy^2 + y]_{y=-\sqrt{3-x}}^{y=\sqrt{3-x}} = x(3-x) + \sqrt{3-x} - x(3-x) - (-\sqrt{3-x}) = 2\sqrt{3-x}$$

$$\int_0^3 2\sqrt{3-x} \, dx = \int_0^3 2(3-x)^{1/2} \, dx = \left[-\frac{4}{3}(3-x)^{3/2} \right]_0^3 = 6.9282$$

□

Ejemplo 6.1.9 Calcular $\iint_D (x^3y + 1) \, dx \, dy$ siendo D el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.

Solución 1: En el punto situado más a la izquierda el valor de x es 0, en los situados más a la derecha es 1, e el segmento $\{(x, 0); x \in [0, 1]\}$ está contenido en D , por lo que la variación de x se produce en el intervalo $[0, 1]$. Una vez fijado $x_0 \in [0, 1]$, el segmento de recta $x = x_0$ contenido en D comienza en el eje OX y termina en la recta $y = x$, por lo que la variación de y se produce en el intervalo $[0, x_0]$. Así, una parametrización de D es $\{(x, y); x \in [0, 1], y \in [0, x]\}$

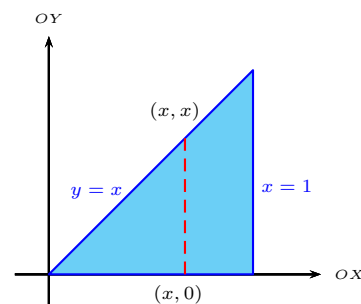


Figura 6.10: Región simple

El valor de la integral es: $\iint_D (x^3y + 1) \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\int_0^x (x^3y + 1) \, dy \right] dx.$

$$\int_0^x (x^3y + 1) \, dy = \left[\frac{x^3y^2}{2} + y \right]_{y=0}^{y=x} = \frac{x^5}{2} + x$$

$$\int_0^1 \left(\frac{x^5}{2} + x \right) dx = \frac{7}{12}$$

Solución 2: En los puntos situados más abajo el valor de y es 0, en el situado más arriba es 1, y el segmento $\{(1, y); y \in [0, 1]\}$ está contenido en D , por lo que la variación de y se produce en el intervalo $[0, 1]$. Una vez fijado $y_0 \in [0, 1]$, el segmento de recta $y = y_0$ contenido en D comienza en la recta $x = y$ y termina en la recta $x = 1$, por lo que la variación de x se produce en el intervalo $[y_0, 1]$. Así, una parametrización de D es $\{(x, y); y \in [0, 1], x \in [y, 1]\}$

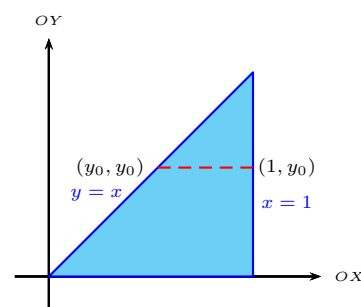


Figura 6.11: Región simple

El valor de la integral es: $\iint_D (x^3y + 1) \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\int_y^1 (x^3y + 1) \, dx \right] dy$

$$\int_y^1 (x^3y + 1) \, dx = \left[\frac{x^4}{4}y + x \right]_{x=y}^{x=1} = \frac{1}{4}y + 1 - \left(\frac{y^4}{4}y + y \right) = -\frac{y^5}{4} - \frac{3}{4}y + 1$$

$$\int_0^1 \left(-\frac{y^5}{4} - \frac{3}{4}y + 1 \right) dy = \frac{7}{12}$$

□

Proposición 6.1.10 Propiedades de las integrales dobles.

1. Linealidad: Si $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas en $D \subset \mathbb{R}^2$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\iint_D (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_D f + \mu \iint_D g.$$

2. Aditividad respecto a la región de integración: si $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$, con $\text{área}(D_1 \cap D_2) = 0$, entonces

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f.$$

Ejercicio 6.1.11 Calcular $\iint_T xy \, dx \, dy$ siendo T la región acotada por el rombo de vértices $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ y $(3, 3)$.

Solución: Para parametrizar T es necesario dividirlo en tres trozos, a saber:

$$T_1 = \left\{ (x, y); x \in [0, 1], y \in \left[\frac{x}{2}, 2x \right] \right\}$$

$$T_2 = \left\{ (x, y); x \in [1, 2], y \in \left[\frac{x}{2}, \frac{x+3}{2} \right] \right\}$$

$$T_3 = \left\{ (x, y); x \in [2, 3], y \in \left[2x-3, \frac{x+3}{2} \right] \right\}$$

$$\text{Así, } \iint_T xy \, dx \, dy = \iint_{T_1} xy \, dx \, dy + \iint_{T_2} xy \, dx \, dy + \iint_{T_3} xy \, dx \, dy$$

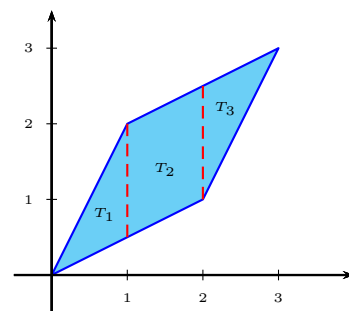


Figura 6.12: Suma de regiones

$$\iint_{T_1} xy \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\int_{x/2}^{2x} xy \, dy \right] dx$$

$$\int_{x/2}^{2x} xy \, dy = \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=x/2}^{y=2x} = \frac{1}{2} x (2x)^2 - \frac{1}{2} x \left(\frac{x}{2} \right)^2 = \frac{15}{8} x^3, \quad \int_0^1 \frac{15}{8} x^3 \, dx = \frac{15}{32}$$

$$\iint_{T_2} xy \, dx \, dy = \int_1^2 \left[\int_{x/2}^{(x+3)/2} xy \, dy \right] dx$$

$$\int_{x/2}^{(x+3)/2} xy \, dy = \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=x/2}^{y=(x+3)/2} = \frac{1}{2} x \left(\frac{x+3}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} x \left(\frac{x}{2} \right)^2 = \frac{3}{8} (2x^2 + 3x),$$

$$\int_1^2 \frac{3}{8} (2x^2 + 3x) \, dx = \frac{55}{16}$$

$$\iint_{T_3} xy \, dx \, dy = \int_2^3 \left[\int_{2x-3}^{(x+3)/2} xy \, dy \right] dx$$

$$\int_{2x-3}^{(x+3)/2} xy \, dy = \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=2x-3}^{y=(x+3)/2} = \frac{1}{2} x \left(\frac{x+3}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} x (2x-3)^2 = -\frac{3}{8} (5x^3 - 18x^2 + 9x)$$

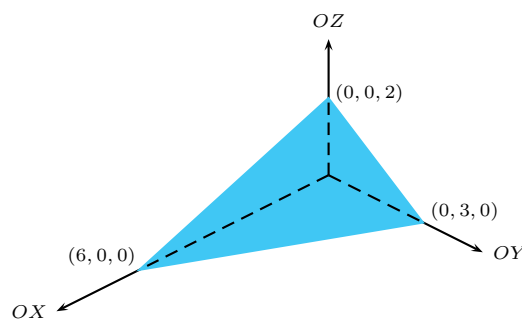
$$\int_2^3 -\frac{3}{8} (5x^3 - 18x^2 + 9x) \, dx = \frac{123}{32}$$

Por tanto $\iint_T xy \, dx \, dy = \frac{15}{32} + \frac{55}{16} + \frac{123}{32} = \frac{248}{32} = \frac{31}{4}$.

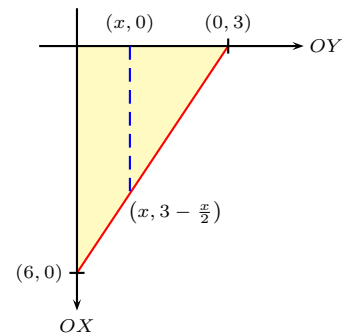
□

Ejercicio 6.1.12 Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano $x+2y+3z=6$. Calcular su volumen por doble integración.

Solución: la relación entre las variables x e y está dada por la ecuación de la recta situada en el plano XY que pasa por los puntos $(6, 0)$ y $(0, 3)$. Esta recta es la intersección de los planos $x+2y+3z=6$ y $z=0$, por lo que su ecuación es $y = 3 - \frac{x}{2}$. Además $z = f(x, y) = \frac{6-x-2y}{3}$



(a) Pirámide

(b) Proyección sobre el plano XY **Figura 6.13:** Volumen en \mathbb{R}^3

Si $x \in [0, 6]$ entonces $y \in [0, \frac{6-x}{2}]$, así $V = \int_0^6 \left[\int_0^{\frac{6-x}{2}} \frac{6-x-2y}{3} \, dy \right] dx$

$$\int_0^{\frac{6-x}{2}} \frac{6-x-2y}{3} \, dy = \left[2y - \frac{xy}{3} - \frac{y^2}{3} \right]_{y=0}^{y=\frac{6-x}{2}} = 3 - x + \frac{x^2}{12}, \int_0^6 \left(3 - x + \frac{x^2}{12} \right) dx = 6$$

□

6.2 Integrales triples

Introducimos las integrales triples a través de sumas de Riemann, como en los casos anteriores.

Un paralelepípedo en \mathbb{R}^3 es el producto de tres intervalos cerrados y acotados de \mathbb{R} , es decir:

$$M = [a, b] \times [c, d] \times [u, v] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, u \leq z \leq v\}.$$

El volumen de M es el producto de las longitudes de los intervalos que lo definen: $\text{Volumen}(M) = (b - a) \cdot (d - c) \cdot (v - u)$.

Definición 6.2.1 Dado $M = [a, b] \times [c, d] \times [u, v] \subset \mathbb{R}^3$, llamaremos partición de M al producto cartesiano de una partición de $[a, b]$, por otra de $[c, d]$ y por otra de $[u, v]$. Es decir, si $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $Q = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ y $R = \{z_0, z_1, \dots, z_q\}$, entonces

$$P \times Q \times R = \{(x_i, y_j, z_k); 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq q\}.$$

La partición $P \times Q \times R$ divide M en $n \cdot m \cdot q$ paralelepípedos pequeños $R_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$.

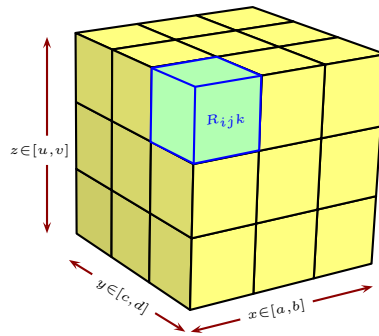


Figura 6.14: Partición de un paralelepípedo

Definición 6.2.2 Dada $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y $P \times Q \times R = \{(x_i, y_j, z_k); 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq q\}$, una partición del paralelepípedo $M = [a, b] \times [c, d] \times [u, v] \subset \mathbb{R}^3$, llamaremos suma de Riemann asociada a f y a $P \times Q \times R$ al valor:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(f, P \times Q \times R) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^q f(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k) \text{Volumen}(R_{ijk}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^q f(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^q f(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \end{aligned}$$

con $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\beta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $\gamma_k \in [z_{k-1}, z_k]$.

Si $f : M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $M = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$, se define la integral triple de f sobre M como:

$$\lim_{\substack{\|P\| \rightarrow 0 \\ \|Q\| \rightarrow 0 \\ \|R\| \rightarrow 0}} \mathcal{S}(f, P \times Q \times R) = \lim_{\substack{\|P\| \rightarrow 0 \\ \|Q\| \rightarrow 0 \\ \|R\| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^q f(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = \iiint_M f \, dx \, dy \, dz$$

Desde el punto de vista práctico, esta definición no ayuda a calcular integrales triples. El cálculo lo haremos siguiendo el esquema de las integrales dobles.

Dada una función continua $f : M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $M = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$, la integral triple de f sobre M se calcula de la siguiente forma:

$$\iiint_M f = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_u^v f(x, y, z) \, dz \right] dy \right] dx.$$

Observemos que no importa el orden de las variables respecto de las que se integre.

Ejemplo 6.2.3 Calcular $\iiint_W (2x + 3y + z) \, dx \, dy \, dz$ siendo $W = [1, 2] \times [-1, 1] \times [0, 1]$

Solución:

$$\begin{aligned} \iiint_W (2x + 3y + z) \, dx \, dy \, dz &= \int_1^2 \left[\int_{-1}^1 \left(\int_0^1 (2x + 3y + z) \, dz \right) dy \right] dx \\ \int_0^1 (2x + 3y + z) \, dz &= \left[2xz + 3yz + \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1} = 2x + 3y + \frac{1}{2} \\ \int_{-1}^1 (2x + 3y + \frac{1}{2}) \, dy &= \left[2xy + \frac{3}{2}y^2 + \frac{y}{2} \right]_{y=-1}^{y=1} = (2x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}) - (-2x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}) = 4x + 1 \\ \int_1^2 (4x + 1) \, dx &= 7 \end{aligned}$$

□

Al igual que en el caso de dos variables, se extenderá la integración de paralelepípedos a otros tipos de conjuntos. En concreto, a regiones $B = \{(x, y, z); a \leq x \leq b; \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x); \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y)\}$ o similares. En estos casos se define la integral como:

$$\iiint_B f(x, y, z) = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left[\int_{\gamma_1(x, y)}^{\gamma_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] dy \right] dx.$$

Con el fin de que la parametrización de un sólido en \mathbb{R}^3 sea lo más sencilla posible, se recomienda proyectar el sólido sobre el plano XY . En esta proyección se medirá la variación de x y de y en función de x (o viceversa). Por último se mide la variación de z .

Ejemplo 6.2.4 Sea W la región limitada por los planos de ecuaciones $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Calcular $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$

Solución: la región W está representada en la Figura (6.15(a)), y su proyección sobre el plano XY en (6.15(b)).

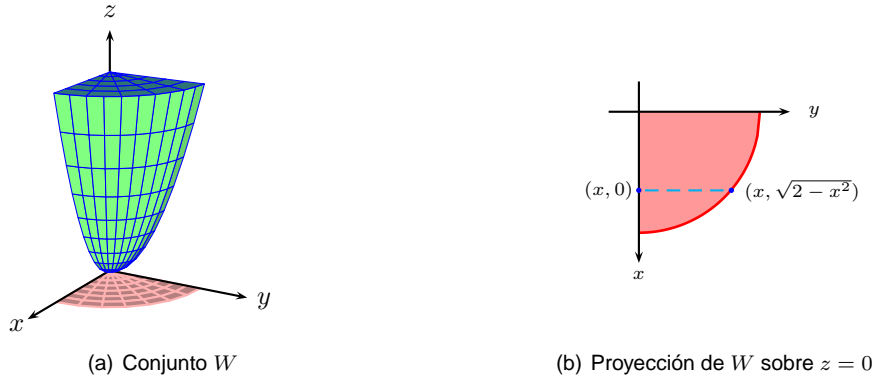


Figura 6.15: Integral triple

La proyección de W sobre el plano $z = 0$ está limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$, y los ejes. El valor mínimo de x en dicha proyección es 0, el máximo es $\sqrt{2}$ y el segmento $\{(x, 0); x \in [0, \sqrt{2}]\}$ está contenido en la proyección, por lo que x varía en el intervalo $[0, \sqrt{2}]$. Fijado un valor $x_0 \in [0, \sqrt{2}]$ la variable y toma valores en $[0, \sqrt{2-x_0^2}]$. Finalmente, fijados los valores $x_0 \in [0, \sqrt{2}]$ e $y_0 \in [0, \sqrt{2-x_0^2}]$, z varía en $[x_0^2 + y_0^2, 2]$. Así, una parametrización de W es: $\{(x, y, z); x \in [0, \sqrt{2}], y \in [0, \sqrt{2-x^2}], z \in [x^2 + y^2, 2]\}$, por lo que el valor de

la integral es: $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^2 x \, dz \, dy \, dx$.

$$\int_{x^2+y^2}^2 x \, dz = [xz]_{z=x^2+y^2}^{z=2} = 2x - x(x^2 + y^2) = 2x - x^3 - xy^2$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (2x - x^3 - xy^2) \, dy &= \left[(2x - x^3)y - x \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{2-x^2}} = (2x - x^3)\sqrt{2-x^2} - \frac{x}{2}(2-x^2)\sqrt{2-x^2} \\ &= \frac{2x}{2}(2-x^2)\sqrt{2-x^2} = \frac{2x}{2}(2-x^2)^{3/2}; \end{aligned}$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x}{2}(2-x^2)^{3/2} \, dx = 0.7542.$$

□

6.3 Aplicaciones al cálculo de áreas y volúmenes

Sea $S = \{(x, y); a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$. El área de S se puede calcular mediante la integral

$$\iint_S 1 = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} 1 \, dy \right] dx.$$

Análogamente para la región $T = \{(x, y); c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$. El área de T se puede calcular mediante la integral

$$\iint_T 1 = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} 1 \, dx \right] dy.$$

Ejercicio 6.3.1 Calcular, por doble integración, el valor del área de la región S limitada superiormente por la recta $2x - 4y + 9 = 0$ e inferiormente por $y = \frac{x^2}{4}$.

Solución: Para calcular los límites de integración se buscan los puntos de intersección de la parábola y la recta:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{x^2}{4} \\ 2x - 4y + 9 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 4\frac{x^2}{4} + 9 = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{-2} = 1 \pm \sqrt{10}$$

El valor más pequeño de x es $1 - \sqrt{10}$, el más grande es $1 + \sqrt{10}$ y se toman todos los valores intermedios a lo largo de la recta $2x - 4y + 9 = 0$. Fijado un valor $x \in [1 - \sqrt{10}, 1 + \sqrt{10}]$ la variable y oscila entre la parábola $y = \frac{x^2}{4}$ y la recta $2x - 4y + 9 = 0$, por lo que una parametrización de S es:

$$S = \{(x, y); x \in [1 - \sqrt{10}, 1 + \sqrt{10}], y \in [\frac{x^2}{4}, \frac{x}{2} + \frac{9}{4}]\}.$$

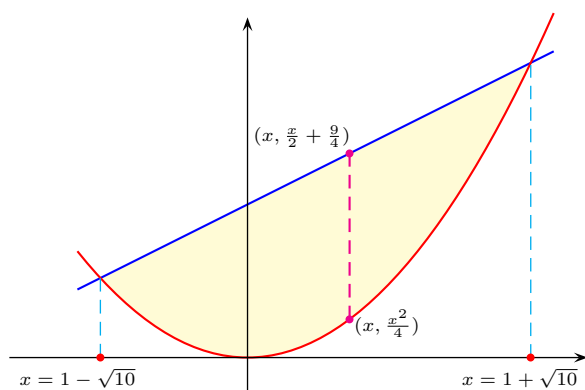


Figura 6.16: Región en \mathbb{R}^2

El valor de la integral es:

$$\iint_S dx \, dy = \int_{1-\sqrt{10}}^{1+\sqrt{10}} \left[\int_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{x}{2} + \frac{9}{4}} dy \right] dx$$

$$\int_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{x}{2} + \frac{9}{4}} dy = [y]_{y=\frac{x^2}{4}}^{y=\frac{x}{2} + \frac{9}{4}} = \frac{x}{2} + \frac{9}{4} - \frac{x^2}{4}$$

$$\int_{1-\sqrt{10}}^{1+\sqrt{10}} \left(\frac{x}{2} + \frac{9}{4} - \frac{x^2}{4} \right) dx = 10.5409$$

□

Ejercicio 6.3.2 Hallar el valor del área situada por encima del eje OX y limitada por este eje, la parábola $y^2 = 4x$, y la recta $x + y = 3$.

Solución: Comenzamos calculando los valores máximo y mínimo de la variable y en la región de integración. Para eso se calcula la intersección de la parábola y la recta.

$$\left. \begin{array}{l} y^2 = 4x \\ x + y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow y^2 = 12 - 4y \Rightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -6 \end{cases}$$

Los puntos de intersección son: $(9, -6)$ y $(1, 2)$.

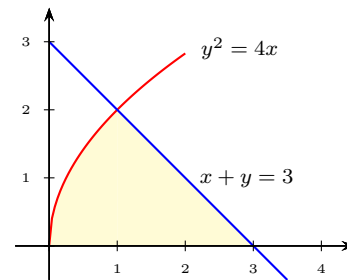


Figura 6.17: Región en \mathbb{R}^2

La variación de y en la región de integración es el intervalo $[0, 2]$, ya que el segmento $\{(1, y); y \in [0, 2]\}$ está contenido en dicha región. Además, fijado un valor $y \in [0, 2]$ la x va desde la parábola $y^2 = 4x$ a la recta $x + y = 3$, por lo que $x \in [\frac{y^2}{4}, 3 - y]$. Por tanto el valor del área es:

$$A = \int_0^2 \left[\int_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} 1 \, dx \right] dy$$

$$\int_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} 1 \, dx = [x]_{x=\frac{y^2}{4}}^{x=3-y} = 3 - y - \frac{y^2}{4}, \quad \int_0^2 \left(3 - y - \frac{y^2}{4} \right) dy = \frac{10}{3}$$

□

Ejercicio 6.3.3 Calcular el volumen del cuerpo limitado superiormente por $z = x^2 + y^2$, inferiormente por el plano $z = 0$ y lateralmente por $y = x^2$, $y = 1$.

Solución: El volumen se puede calcular como la integral sobre el sólido de la función constante 1, por lo que comenzamos calculando una parametrización de dicho sólido.

En la proyección del sólido sobre el plano XY se observa que $y \in [0, 1]$. Fijado un valor de y , el segmento que mide la variación de x comienza en la rama de la parábola $x = -\sqrt{y}$ y acaba en la rama $x = \sqrt{y}$, tomando todos los valores intermedios. Por último $z \in [0, x^2 + y^2]$.

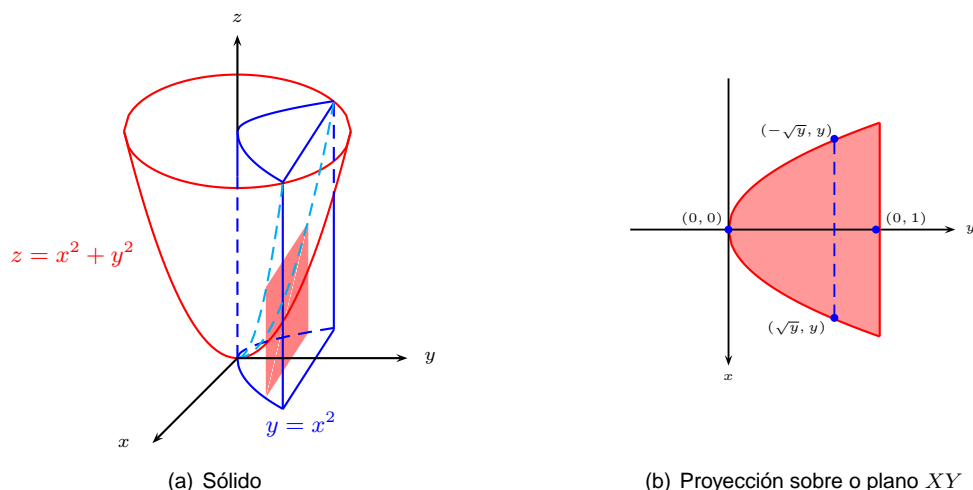


Figura 6.18: Volumen en \mathbb{R}^3

$$V = \left[\int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_0^{x^2+y^2} dz \right] dx \right] dy .$$

$$\int_0^{x^2+y^2} dz = [z]_{z=0}^{z=x^2+y^2} = x^2 + y^2 - 0 = x^2 + y^2$$

$$\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) dx = \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} = \frac{2}{3} y^{3/2} + 2y^{5/2}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{2}{3} y^{3/2} + 2y^{5/2} \right) dy = 0.8381$$

□

Ejercicio 6.3.4 Hallar el volumen del sólido contenido en el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ que está limitado superiormente por el plano $x + z = 4$ e inferiormente por $z = 0$.

Solución: El sólido S y su proyección sobre el plano XY se representan en la Figura (6.19). Se observa que el punto que se encuentra más a la izquierda en la proyección es $(-3, 0)$ y el que está más a la derecha es $(3, 0)$. Además, la variable x toma todos los valores entre -3 y 3 . Fijado un valor $x \in [-3, 3]$, el segmento vertical que proporciona la variación de y va desde la semicircunferencia $y = -\sqrt{9-x^2}$ hasta la semicircunferencia $y = \sqrt{9-x^2}$. Por último, fijado un punto (x, y) de la proyección de S sobre el plano XY , los valores de z oscilan entre $z = 0$ (plano XY) y $z = 4 - x$. Entonces una parametrización del sólido es:

$$\{(x, y); x \in [-3, 3], y \in [-\sqrt{9-x^2}, \sqrt{9-x^2}], [0, 4-x]\}$$

y el valor del volumen, $\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{4-x} 1 dz dy dx$.

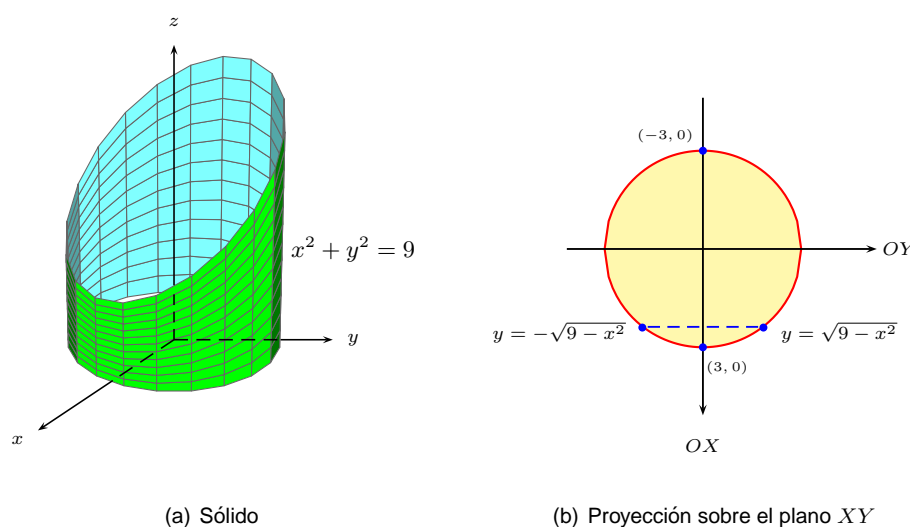


Figura 6.19: Volumen en \mathbb{R}^3

$$\int_0^{4-x} 1 dz = [z]_{z=0}^{z=4-x} = 4 - x.$$

$$\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (4-x) dy = [(4-x)y]_{y=-\sqrt{9-x^2}}^{y=\sqrt{9-x^2}} = 2(4-x)\sqrt{9-x^2}$$

$$V = \int_{-3}^3 2 \cdot (4-x)\sqrt{9-x^2} dx = 113.0973 = 36\pi$$

□

6.4 Integración en otras variables

La integración en coordenadas rectangulares ocasiona, en algunos casos, operaciones muy complicadas. Esto suele estar ocasionado por la parametrización de la región de integración en dichas coordenadas. Por ello, vamos a trabajar con otras coordenadas: polares en \mathbb{R}^2 , cilíndricas y esféricas en \mathbb{R}^3 .

6.4.1. Coordenadas polares

Para definir la integral doble de una función sobre una región D en el plano XY , iniciamos dividiendo D en rectángulos cuyos lados fueran paralelos a los ejes coordenados. Ésta era la forma natural para usarlos porque sus lados tenían valores constantes, ya sea de y o de x .

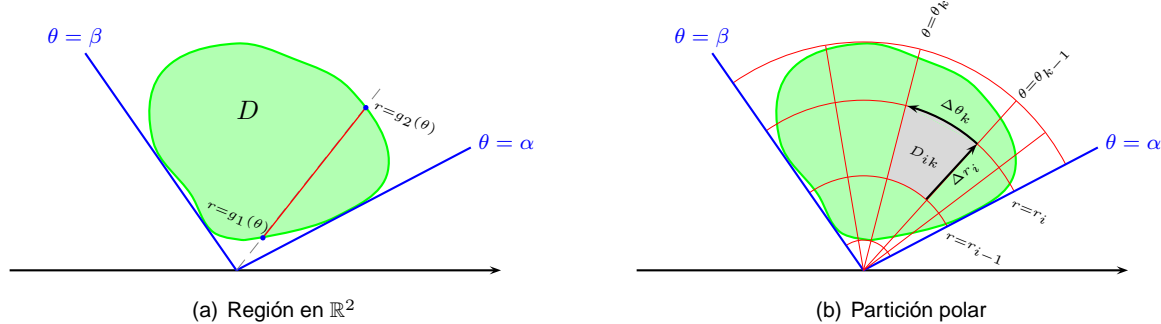


Figura 6.20: Parametrización polar

En coordenadas polares, la forma natural es trabajar con figuras cuyos lados tengan valores constantes de r o de θ . Supongamos que D es una región de \mathbb{R}^2 parametrizada en coordenadas polares por:

$$D = \{(r, \theta); \alpha \leq \theta \leq \beta, g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)\}.$$

Dados $a, b \in \mathbb{R}^2$ tales que $a \leq g_1(\theta) \leq g_2(\theta) \leq b$, para todo θ , se consideran $P = \{\theta_0, \dots, \theta_n\}$ una partición de $[\alpha, \beta]$ y $Q = \{r_0, \dots, r_m\}$ una partición de $[a, b]$. El área de cada “rectángulo polar” D_{ik} se aproxima multiplicando el incremento del arco (ángulo \times radio) por el incremento del radio. Es decir:

$$\text{área}(D_{ik}) \approx r_i \cdot (\theta_k - \theta_{k-1}) \cdot (r_i - r_{i-1}) \cdot \Delta r_i \cdot \Delta \theta_k.$$

Si $f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ es una función que toma valores positivos en D y se desea calcular el volumen com-

prendido entre la gráfica de f y el plano $z = 0$, una aproximación de este valor es:

$$\sum_{i,k} f(r_i \cos(\theta_k), r_i \sin(\theta_k)) r_i \cdot \Delta r_i \cdot \Delta \theta_k,$$

considerando aquellos índices para los que $D_{ik} \subset D$.

Esta es una suma de Riemann de la función $f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cdot r$, y si hacemos tender la norma de las particiones a cero, se tiene:

$$\lim_{\substack{\|P\| \rightarrow 0 \\ \|Q\| \rightarrow 0}} \sum_{i,k} f(r_i \cos(\theta_k), r_i \sin(\theta_k)) r_i \cdot \Delta r_i \cdot \Delta \theta_k = \iint_D f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r \, dr \, d\theta$$

La expresión que usaremos para relacionar las integrales en coordenadas rectangulares y polares es:

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_D f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r \, dr \, d\theta,$$

para cualquier función f .

Ejemplo 6.4.1 Calcular $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$ siendo D la corona circular limitada por $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$.

Solución: A continuación figuran a representación gráfica de D y su caracterización en coordenadas polares, que se denota por D^* .

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2,$$

$$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3,$$

$$D^* = \{(r, \theta); r \in [2, 3], \theta \in [0, 2\pi)\}.$$

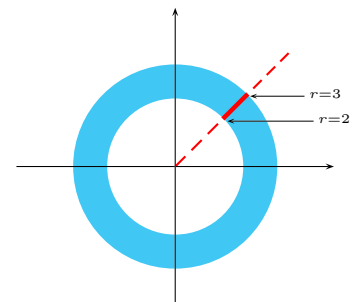


Figura 6.21: Corona circular

$$\begin{aligned} \text{Entonces } \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy &= \iint_{D^*} r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_2^3 r^2 \, dr \right] d\theta. \\ \int_2^3 r^2 \, dr &= \frac{19}{3}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{19}{3} \, d\theta = \frac{38}{3} \pi. \end{aligned}$$

□

Ejercicio 6.4.2 Calcular el volumen del sólido interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y al cilindro $x^2 + y^2 = 7$.

Solución: Vamos a trabajar solo con la mitad del sólido y multiplicar después el resultado por dos.

Solución: En la Figura (6.22) se puede apreciar que la proyección del sólido sobre el plano XY es $D = \bar{B}((0,0),\sqrt{7}) = \{(x,y); y \in [-\sqrt{7},\sqrt{7}], x \in [-\sqrt{7-y^2},\sqrt{7-y^2}]\}$ y fijado un (x,y) en esta bola, la variable z oscila entre 0 y $\sqrt{16-x^2-y^2}$. Por tanto, en coordenadas rectangulares, el volumen de la figura completa viene dado por:

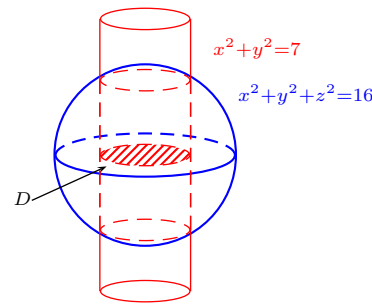


Figura 6.22: Esfera y cilindro.

$$V = 2 \iint_D \sqrt{16 - (x^2 + y^2)} \, dx \, dy = 2 \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \left[\int_{-\sqrt{7-y^2}}^{\sqrt{7-y^2}} \sqrt{16 - x^2 - y^2} \, dx \right] dy.$$

En coordenadas polares la función a integrar es $\sqrt{16 - r^2}$, y la región de integración D descrita en dichas coordenadas es $\{(r, \theta); 0 \leq r \leq \sqrt{7}; 0 \leq \theta < 2\pi\}$. Entonces el volumen es:

$$V = 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{16 - r^2} \, r \, dr \right) d\theta$$

$$\int_0^{\sqrt{7}} 2 \sqrt{16 - r^2} \, r \, dr = \frac{74}{3}, \int_0^{2\pi} \frac{74}{3} \, d\theta = \frac{148}{3} \pi$$

□

6.4.2. Coordenadas cilíndricas

Para calcular integrales triples de funciones $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sobre una región D parametrizada en coordenadas cilíndricas, se parte la región en cuñas cilíndricas, determinadas por particiones $P = \{r_i; i = 1, \dots, n\}$, $Q = \{\theta_j; j = 1, \dots, m\}$ y $R = \{z_k; k = 1, \dots, q\}$.

El volumen de la cuña C_{ijk} se aproxima multiplicando el área de la base de cada rectángulo polar por la altura, es decir,

$$\text{volumen}(C_{ijk}) \approx \Delta r_i \cdot r_i \cdot \Delta \theta_j \Delta z_k.$$

Con ellas se calcula

$$\sum_{i,j,k} f(r_i \cos(\theta_j), r_i \sin(\theta_j), z_k) r_i \cdot \Delta r_i \cdot \Delta \theta_j \cdot \Delta z_k,$$

que es una suma de Riemann de la función $f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \cdot r$.

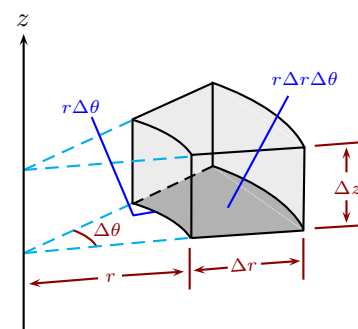


Figura 6.23: Cuña cilíndrica

Si hacemos tender la norma de la particiones a cero, se tiene

$$\lim_{\substack{\|P\| \rightarrow 0 \\ \|Q\| \rightarrow 0 \\ \|R\| \rightarrow 0}} \sum_{i,j,k} f(r_i \cos(\theta_j), r_i \sin(\theta_j), z_k) r_i \cdot \Delta r_i \cdot \Delta \theta_j \cdot \Delta z_k = \iiint_D f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) r \, dr \, d\theta \, dz$$

La expresión que relaciona las integrales en coordenadas rectangulares y cilíndricas es:

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_D f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) r \, dr \, d\theta \, dz,$$

para cualquier función f .

Ejemplo 6.4.3 Calcular $\iiint_S (x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$ siendo S el sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$.

Solución: La proyección de S sobre el plano XY está determinada por la intersección del plano y el paraboloide.

$$\left. \begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

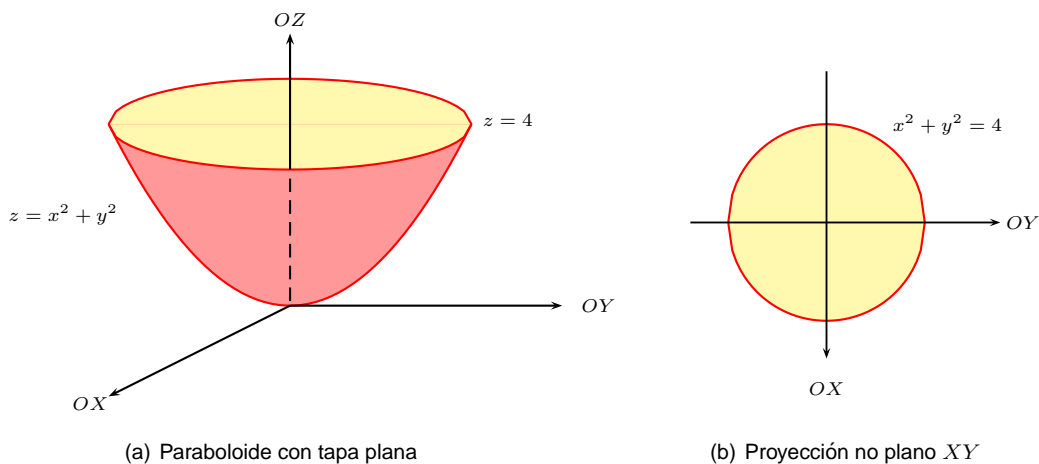


Figura 6.24: Volume en \mathbb{R}^3

La intersección buscada es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, $z = 4$, por lo que la proyección de S sobre el plano XY es $\bar{B}((0, 0), 2)$, que en coordenadas polares se describe como $\{(r, \theta); r \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi]\}$. Como z varía desde el paraboloide $z = x^2 + y^2$ hasta el plano $z = 4$, la parametrización de S en coordenadas cilíndricas es $S = \{(r, \theta, z); r \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi], z \in [r^2, 4]\}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \iiint_S (x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^4 r^2 r \, dz \, d\theta \, dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^4 r^4 \, dz \, d\theta \, dr \\ \int_{r^2}^4 r^4 \, dz &= r^4 [z]_{z=r^2}^{z=4} = r^4 (4 - r^2) \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} r^4 (4 - r^2) d\theta = r^4 (4 - r^2) \int_0^{2\pi} 1 d\theta = r^4 (4 - r^2) 2\pi$$

$$\int_0^2 r^4 (4 - r^2) 2\pi dr = \frac{512}{35} \pi$$

□

Ejemplo 6.4.4 Calcular el volumen de la región limitada superiormente por el paraboloide $z = 2 - (x^2 + y^2)$ e inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

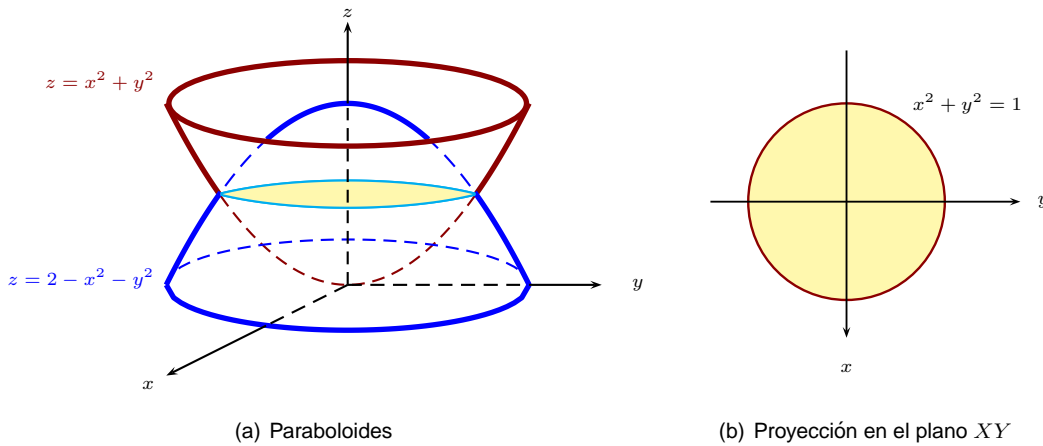


Figura 6.25: Volumen en \mathbb{R}^3

Solución: Denotemos por D la región limitada por los dos paraboloides. Su proyección sobre el plano XY está determinada por su intersección.

$$\left. \begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ z = 2 - x^2 - y^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ 2 = 2x^2 + 2y^2 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1, z = 1$$

La intersección buscada es a circunferencia $x^2 + y^2 = 1, z = 1$, por lo que la proyección de D sobre el plano XY es $\bar{B}((0, 0), 1)$, que en coordenadas polares se describe como $\{(r, \theta); r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi)\}$. Como z varía desde $z = x^2 + y^2 = r^2$ (paraboloide inferior) a $z = 2 - x^2 - y^2 = 2 - r^2$ (paraboloide superior), la parametrización de D en coordenadas cilíndricas es $D = \{(r, \theta, z); r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi), z \in [r^2, 2 - r^2]\}$.

El volumen de D se obtiene con la integral:
$$\iiint_D r dr d\theta dz = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_{r^2}^{2-r^2} r dz \right) d\theta \right] dr.$$

$$\int_{r^2}^{2-r^2} r dz = r \int_{r^2}^{2-r^2} 1 dz = r (2 - r^2 - r^2) = 2(r - r^2)$$

$$\int_0^{2\pi} 2(r - r^3) d\theta = 2(r - r^3) [\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 4(r - r^3)\pi, \int_0^1 4(r - r^3)\pi dr = \pi$$

□

6.4.3. Coordenadas esféricas

Para calcular integrales triples de funciones $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sobre una región D parametrizada en coordenadas esféricas, se parte la región en cuñas esféricas, determinadas por particiones $P = \{\rho_i; i = 1, \dots, n\}$, $Q = \{\theta_j; j = 1, \dots, m\}$ y $R = \{\phi_k; k = 1, \dots, q\}$.

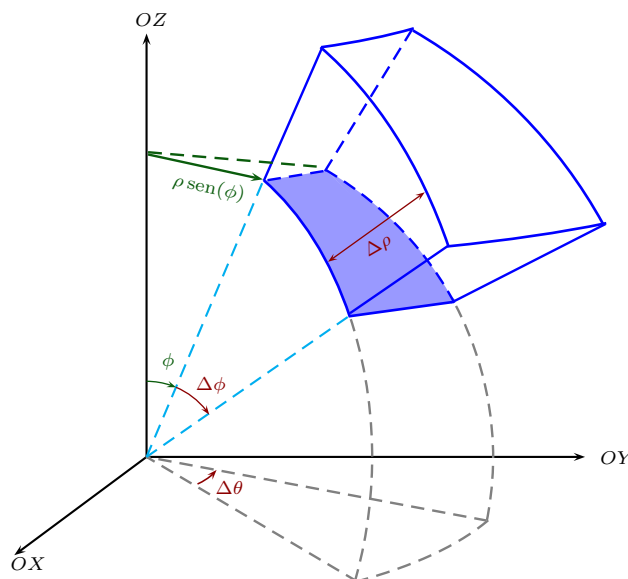


Figura 6.26: Cuña esférica

El volumen de cada cuña C_{ijk} se aproxima multiplicando las longitudes de sus lados. Estas longitudes se observan mejor si proyectamos la cuña sobre el plano $z = 0$ y sobre un semiplano $\theta = \text{cte}$

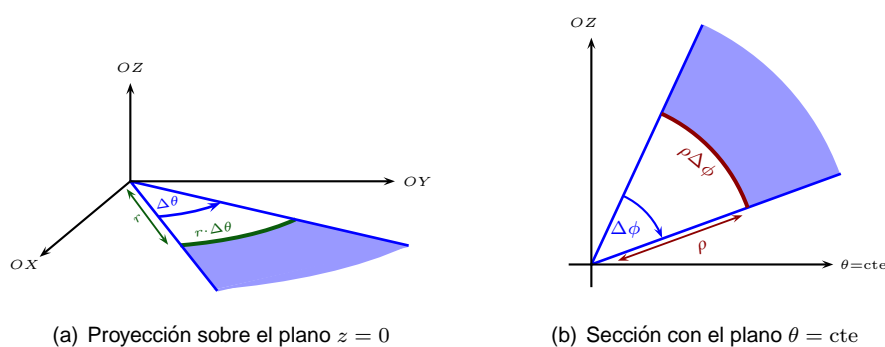


Figura 6.27: Proyecciones de una cuña esférica

$$\text{volumen}(C_{ijk}) \approx r \Delta \theta \cdot \rho \Delta \phi \cdot \Delta \rho = \rho \sin(\phi) \Delta \theta \cdot \rho \Delta \phi \cdot \Delta \rho = \rho^2 \sin(\phi) \Delta \theta \Delta \phi \Delta \rho.$$

Con ellas se calcula

$$\sum_{i,j,k} f(\rho \sin(\phi) \cos(\theta), \rho \sin(\phi) \sin(\theta), \rho \cos(\phi)) \rho^2 \sin(\phi) \Delta \rho \Delta \theta \Delta \phi,$$

que es una suma de Riemann de la función $f(\rho \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta), \rho \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta), \rho \cos(\phi)) \rho^2 \operatorname{sen}(\phi)$. La relación entre integrar en coordenadas rectangulares y esféricas es:

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{D^*} f(\rho \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta), \rho \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta), \rho \cos(\phi)) \rho^2 \operatorname{sen}(\phi) \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

Ejemplo 6.4.5 Evaluar $\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dx \, dy \, dz$, donde D es la bola cerrada de centro $(0, 0, 0)$ y radio 1.

Solución: Si usamos coordenadas esféricas se verifica:

$$\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dx \, dy \, dz = \iiint_{D^*} e^{(\rho^2)^{3/2}} \rho^2 \operatorname{sen}(\phi) \, d\theta \, d\rho \, d\phi = \iiint_{D^*} e^{\rho^3} \rho^2 \operatorname{sen}(\phi) \, d\theta \, d\rho \, d\phi$$

siendo $D = \{(\rho, \theta, \phi); 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$.

$$\begin{aligned} \iiint_D e^{\rho^3} \rho^2 \operatorname{sen}(\phi) \, d\rho \, d\theta \, d\phi &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^\pi e^{\rho^3} \rho^2 \operatorname{sen}(\phi) \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi e^{\rho^3} \rho^2 \operatorname{sen}(\phi) \, d\phi \, d\rho = 2\pi \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 [-\cos(\phi)]_{\phi=0}^{\phi=\pi} \, d\rho \\ &= 4\pi \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \, d\rho = \frac{4\pi}{3} [e^{\rho^3}]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{4\pi}{3} (e - 1). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 6.4.6 Calcular $\iiint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \, dx \, dy \, dz$ siendo S el sólido contenido en el primer octante, limitado superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ e inferiormente por el cono $x^2 + y^2 = z^2$.

Solución: La ecuación de la circunferencia en coordenadas esféricas es $\rho = \sqrt{6}$. Para el cono se verifica:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho^2 \operatorname{sen}^2(\phi) \\ z^2 &= \rho^2 \cos^2(\phi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho^2 \operatorname{sen}^2(\phi) = \rho^2 \cos^2(\phi) \Rightarrow \tan^2(\phi) = 1 \Rightarrow \tan(\phi) = \pm 1$$

Los ángulos cuya tangente vale ± 1 son $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$. Como $\phi \in [0, \pi]$ y los valores de z deben ser positivos se elige $\phi = \frac{\pi}{4}$.

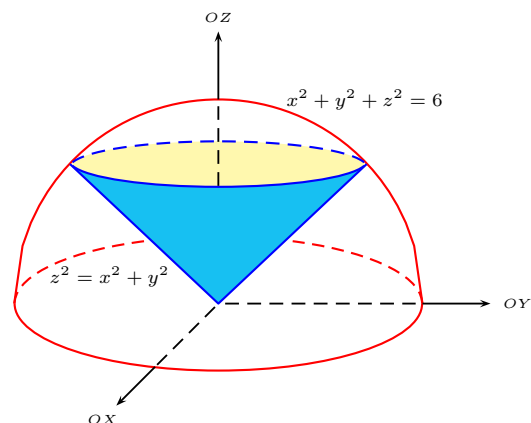


Figura 6.28: Cono contenido en esfera

$$\text{Entonces } \iiint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \, dx \, dy \, dz = \iiint_S \frac{1}{\rho} \rho^2 \operatorname{sen}(\phi) \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{6}} \rho \operatorname{sen}(\phi) \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

$$\int_0^{\sqrt{6}} \rho \operatorname{sen}(\phi) \, d\rho = \operatorname{sen}(\phi) \int_0^{\sqrt{6}} \rho \, d\rho = 3 \operatorname{sen}(\phi).$$

$$3 \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(\phi) \, d\phi = 3 \cdot 0.2929 = 0.8787, \int_0^{\pi/2} 0.8787 \, d\theta = 1.3803.$$

□

6.5 Superficies en \mathbb{R}^3

Se presentan a continuación algunas de las superficies más interesantes en \mathbb{R}^3 .

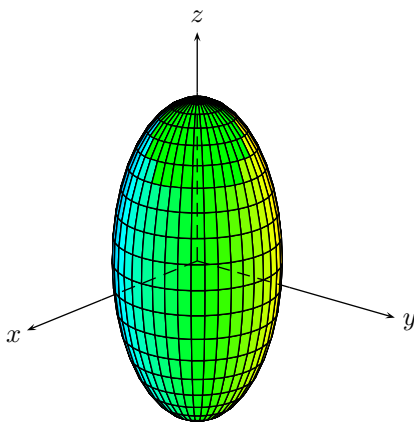


Figura 6.29: Elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

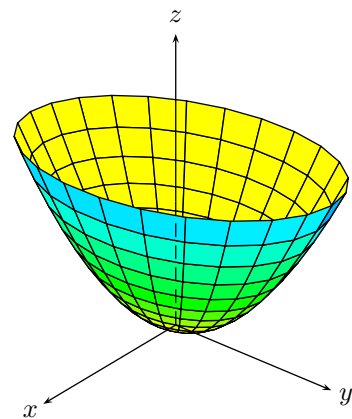


Figura 6.30: Paraboloide elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$

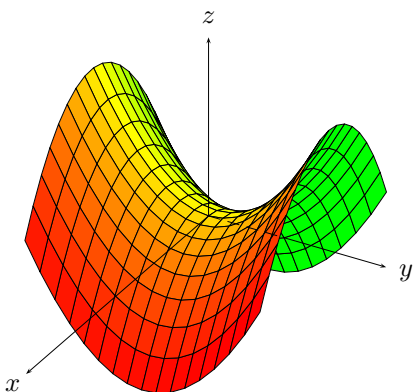


Figura 6.31: Paraboloide hiperbólico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$

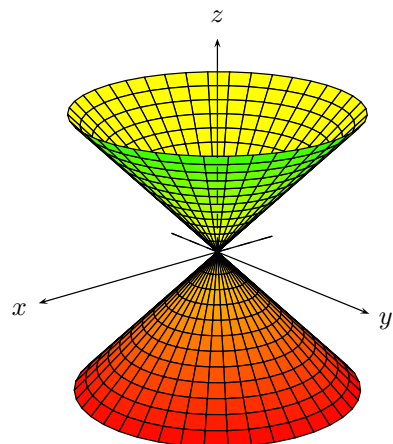


Figura 6.32: Cono elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$

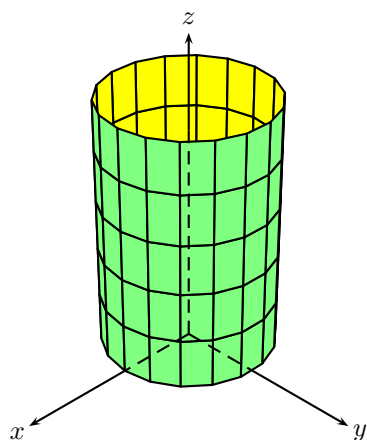


Figura 6.33: Cilindro elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

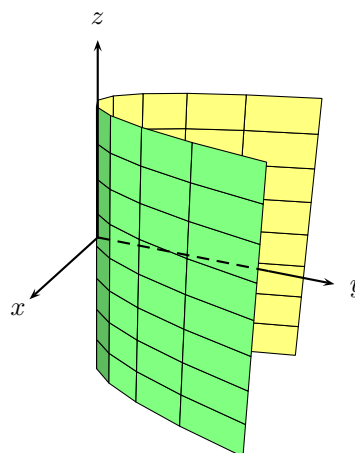


Figura 6.34: Cilindro parabólico $y = ax^2$, $a > 0$