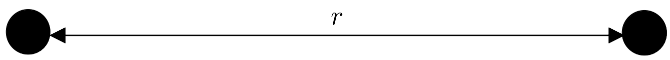
2024년 2학기 물리학 1 (GEK10055) 기말시험 풀이

2024년 12월 9일

아래의 물음에 답할 때, 특별한 언급이 없으면 공기의 저항과 용수철과 끈의 질량은 무시하시오. 기호로 구하는 답은 문제에서 주어진 기호와, 필요한 경우 중력가속도 g를 사용하여 나타내시오. 답을 구하는 과정을 함께 서술하시오.

1. 거리 r만큼 떨어져 있는 두 행성이 두 행성계의 질량 중심에 대하여 회전한다. 두 행성의 질량이 모두 m이고, 이 계에 작용하는 외력은 없다. 다음 물음에 답하시오. 단, 행성의 크기는 두 행성 간의 거리에 비하여 무시할 수 있을 만큼 작다. 그리고 두 행성 간의 거리 r이 무한대일 때, 퍼텐셜 에너지 $U=0$이다. (시험 시간에 기준에 대하여 말함.) (각 문항 5점씩 총 20점)



a. 한 행성에 작용하는 힘의 크기 F를 구하시오. 중력이 작용하므로, $F=\dfrac{Gm^2}{r^2}$

b. 행성 운동의 주기 T를 구하시오. 중력이 구심력으로 작용하므로, $F=\dfrac{Gm^2}{r^2}=\dfrac{mv^2}{r/2}=\dfrac{2mv^2}{r}=F_C$.

$v=\sqrt{\dfrac{Gm}{2r}}$ 에서 $T=\dfrac{2\pi(r/2)}{v}=\dfrac{\pi r}{v}=\sqrt{\dfrac{2\pi^2 r^3}{Gm}}$

c. 이 계의 역학적 에너지의 최솟값을 구하시오. 역학적 에너지는 운동에너지와 퍼텐셜에너지의 합. 입자 계의 운동에너지는 질량중심의 운동에너지와 내부 운동에너지의 합이므로, 최솟값을 가지려면, 질량중심계에서 본 역학적 에너지를 구하면 됨. $E_{mech}=K+U=\dfrac{1}{2}m\dfrac{Gm}{2r}\times 2-\dfrac{Gm^2}{r}=-\dfrac{Gm^2}{2r}$,

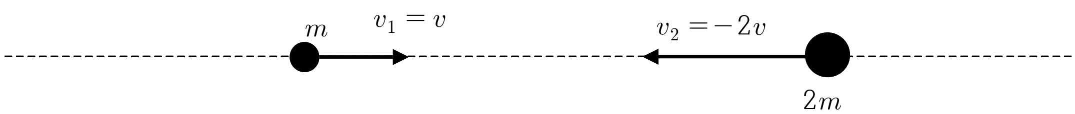
또는 $E_{mech}=K_{rot}+U=\dfrac{1}{2}I\omega^2-\dfrac{Gm^2}{r}$에서 $I=m\left(\dfrac{r}{2}\right)^2\times 2=\dfrac{mr^2}{2}$, $\omega=\dfrac{v}{r/2}=\dfrac{2v}{r}=\sqrt{\dfrac{2Gm}{r^3}}$ 이므로, $E_{mech}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{mr^2}{2}\right)\left(\dfrac{2Gm}{r^3}\right)-\dfrac{Gm^2}{r}=-\dfrac{Gm^2}{2r}$

d. 질량중심에 대한 이 계의 각운동량의 크기 L을 구하시오. $L=I\omega=\dfrac{mr^2}{2}\times\sqrt{\dfrac{2Gm}{r^3}}=\sqrt{\dfrac{Gm^3 r}{2}}$

또는 $L=rp\sin\vartheta$로부터 $L=2\left(\dfrac{r}{2}\right)m\sqrt{\dfrac{Gm}{2r}}=\sqrt{\dfrac{Gm^3 r}{2}}$. 단위를 확인하면,

$(\mathrm{Nm^2/kg^2\cdot kg^3\cdot m})^{1/2}=(\mathrm{kgm/s^2\cdot m^3\cdot kg})^{1/2}=\mathrm{kg\cdot m/s\cdot m}$로 각운동량 단위임을 알 수 있다.

2. 질량이 각각 m, $2m$인 두 물체가 마찰이 없는 수평면 위에서 각각 속도 v와 $-2v$로 운동하다가 완전 비탄성 충돌했다. 다음 물음에 답하시오.



a. 충돌 후 두 물체의 속도, v' (5점) 운동량이 보존되므로, $mv-4mv=3mv'$에서 $v'=-v$

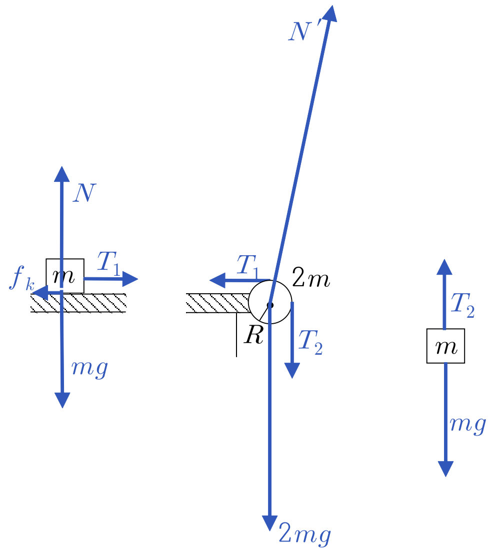
b. 질량이 $2m$인 물체가 질량이 m인 물체에 작용한 충격량, I (5점) 충격량 운동량 정리를 이용하여, $I=\Delta p_1=-mv-mv=-2mv$

c. 충돌 전, 이 계의 질량중심 운동에너지에 대한 내부 운동에너지의 비, $K_{cm} : K_{내부}$ (6점) 충돌 과정에서 외력이 작용하지 않는다고 가정하므로, 충돌 중 운동에너지는 보존된다. 즉, 충돌 전 운동에너지와 충돌 후 운동에너지는 같다. 충돌 전, 계의 운동에너지는

$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}2m(-2v)^2 = \frac{9}{2}mv^2 = K_{cm} + K_{내부} = \frac{1}{2}(3m)(-v)^2 + K_{내부}$에서 $K_{내부} = 3mv^2$,

$K_{cm} = \frac{3}{2}mv^2$이므로, $K_{cm} : K_{내부} = 1 : 2$.

3. 아래 그림과 같이 질량이 m인 두 물체가 질량이 $2m$이고 반지름이 R인 도르래로 연결되어 한 물체는 마찰이 있는 수평면 위에 있고, 다른 한 물체는 도르래 아래에 매달려 있다. 도르래가 자유롭게 회전한다고 할 때, 다음 물음에 답하시오. 단, 회전축에 대한 도르래의 회전관성 $I = mR^2$이고, 수평면과 물체 사이의 운동마찰계수는 μ_k이다. 그리고 끈은 도르래 위에서 미끄러지지 않는다.



a. 질량이 m인 두 물체와 도르래의 자유물체도를 각각 그리시오. (5점) 왼쪽 그림.

b. 두 물체 가속도의 크기가 $a = \frac{1}{6}g$일 때, 운동마찰계수 μ_k를 구하시오. (6점) 각 물체의 운동 방정식을 세운다. 이 때, 도르래의 중심축에 작용하는 중력 $2mg$와 N'은 토크에 영향이 없음에 주의한다.

$\begin{cases} \sum F_x = T_1 - f_k = ma \\ \sum F_y = N - mg = 0 \end{cases}$, $\sum \tau = RT_2 - RT_1 = mR^2\alpha$,

$\sum F = mg - T_2 = ma$. 여기에서 $f_k = \mu_k N = \mu_k mg$,

$\alpha = \frac{a}{R}$임을 이용하여 식을 정리하면, $\begin{cases} T_1 - \mu_k mg = ma \\ T_2 - T_1 = ma \\ mg - T_2 = ma \end{cases}$

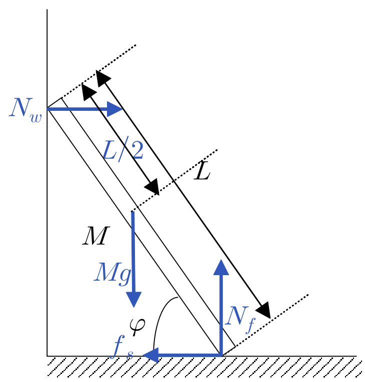
를 얻고, 세 식을 더하여 $(1-\mu_k)g = 3a = \frac{1}{2}g$를 얻는다. 따라서 $\mu_k = 0.5$ 또는 $\frac{1}{2}$.

c. 오른쪽에 매달린 물체가 정지 상태에서 운동하기 시작해서 h만큼 내려왔을 때, 도르래의 각속도 ω를 구하시오. (5점) 넓은 의미의 에너지 보존을 이용한다. 작용하는 힘 중에 0이 아닌 일을 하는 비보존력은 마찰력만 있으므로, $\Delta U + \Delta K = W_{비보존력} = W_{마찰력}$이다.

$-mgh + \frac{1}{2}mv^2 \times 2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = -\mu_k mgh = -\frac{1}{2}mgh$. 그런데 $v = R\omega$이므로, 식을 다시 쓰면

$mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2 = \frac{1}{2}mgh$이고 이 식을 정리하면, $\omega = \frac{\sqrt{3gh}}{3R}$.

4. 질량이 M, 이고 길이가 L인 사다리가 그림처럼 수평면과 φ의 각도를 이루고 벽에 기대있다. 벽에는 마찰이 없고, 사다리와 바닥 사이의 정지 마찰계수는 μ이다. 다음을 구하시오.



a. 바닥에서 사다리에 작용하는 힘, $\vec{F}$ (6점) 먼저 자유물체도를 그린다. 평형 조건으로부터, 식

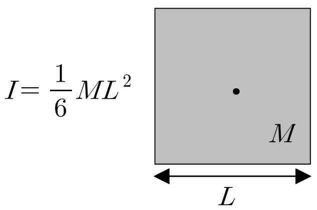
$\begin{cases} N_w - f_s = 0 \\ N_f - Mg = 0 \\ N_w L\sin\varphi - Mg\frac{L}{2}\cos\varphi = 0 \end{cases}$ 을 얻는다. 오른쪽을 양의 x

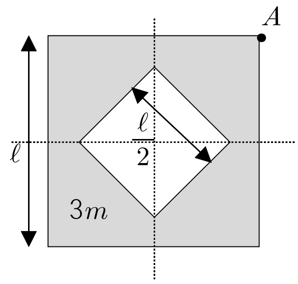
방향, 위를 양의 y 방향이라고 할 때, $\vec{F}=-f_s\hat{i}+N_f\hat{j}=-N_w\hat{i}+Mg\hat{j}$이고, 토크 합이 0이라는 조건에서 $N_w=\frac{Mg}{2\tan\varphi}$를 얻으므로, $\vec{F}=Mg\left(-\frac{1}{2\tan\varphi}\hat{i}+\hat{j}\right)$

b. 사다리가 미끄러지지 않고 벽에 기대 있을 수 있는 정지 마찰계수의 최솟값, $\mu_{\min}$ (6점)

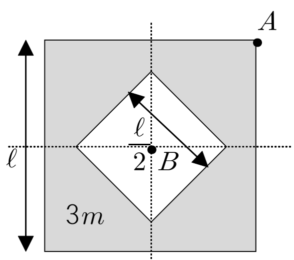
$f_s=\frac{Mg}{2\tan\varphi}\le f_{s,\max}=\mu N_f=\mu Mg$에서 $\mu\ge\frac{1}{2\tan\varphi}$이므로, $\mu_{\min}=\frac{1}{2\tan\varphi}$.

5. 아래 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 ℓ인 정사각형의 중앙에 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}\ell$인 정사각형 모양의 구멍이 있다. 이 물체의 질량이 $3m$일 때, 다음 물음에 답하시오. 단, 질량이 M이고 한 변의 길이가 L인 정사각형의 회전관성은 정사각형 면에 수직이고, 질량 중심을 지나는 축에 대하여 $\frac{1}{6}ML^2$이다. (각 문항 5점씩 총 20점)





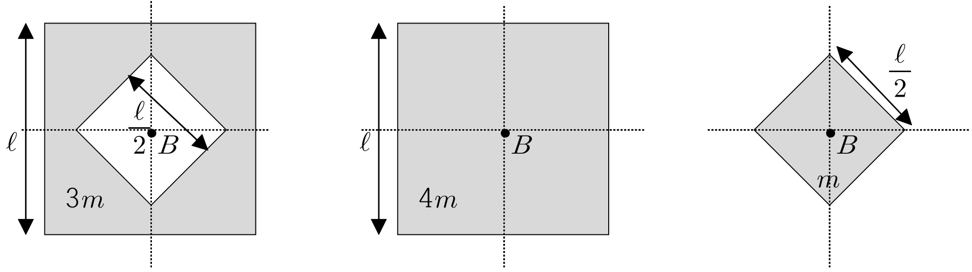
a. A점을 지나고 이 물체의 면에 수직인 축에 대한 이 물체의 회전관성, I를 구하시오. 다음의 순서를 따라 구한다.



$$I_A=I_B+3m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)^2=I_B+\frac{3}{2}m\ell^2$$

$$I_B=I_{\square B}-I_{\diamond B}=\frac{1}{6}4m\ell^2-\frac{1}{6}m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2=\frac{5}{8}m\ell^2$$

$$I_A=\frac{5}{8}m\ell^2+\frac{3}{2}m\ell^2=\frac{17}{8}m\ell^2$$



b. 이 물체가 A점을 중심으로 자유롭게 회전할 수 있을 때, 위 그림과 같은 상태에서 운동을 시작하면, 이 물체는 단순조화 진동하겠는가? 그렇게 생각하는 이유는 무엇인가? 실제 진자가 단순 조화 운동할 조건은 회전 각이 충분히 작아야 하는데 이 경우는 수직 축과 이루는 각이 $45^\circ=\frac{\pi}{4}$rad으로 단순 조화 진동할 만큼 작지 않다. 따라서 처음에는 단순 조화 진동하지 않는다. 또 단순 조화 진동하기 위해서는 탄성력 이외의 힘이 작용하지 않아야 하는데, 공기가 운동을 방해하는 힘을 작용할 것이므로, 단순 조화진동하지 않는다.

c. 이 물체가 단순조화 진동할 때, 진동 주기 T를 구하시오. 문항 a.를 풀지 못했어도 회전관성이 필요한 경우, “I”를 사용하여 답을 표시할 수 있습니다. 공기 저항을 무시할 수 있고, 수직 축과 이루는 각도가 충분히 작아서 단순조화진동 할 때는 $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr_{cm}}}$ 이므로, 이 경우의 값을 대입하면, $T = 2\pi\sqrt{\frac{17\sqrt{2}m\ell^2}{8mg\ell}} = \left(\frac{17\sqrt{2}\pi^2\ell}{2g}\right)^{1/2}$ 또는 $T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}I}{mg\ell}}$

d. 이 물체가 단순조화 진동할 때 다음의 세 물리량; 역학적 에너지 E_{mech}, 운동에너지 K, 각운동량 L 중 보존되는 물리량은 무엇인가? 왜 그렇게 생각하는지 (보존되는 것은 왜 보존되고, 그렇지 않은 것은 왜 보존되지 않는지) 간단하게 서술하시오. 단순조화 진동하므로 당연히 역학적 에너지 E_{mech}는 보존되고, 운동에너지 K는 중력이 작용하며 일하므로 변한다. 각속도도 변하므로 각운동량 L도 보존되지 않는다.

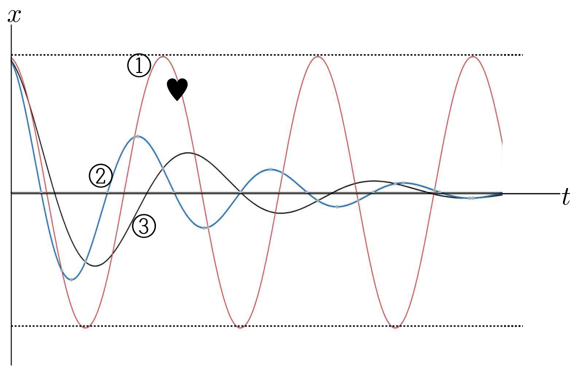
6. 용수철 상수가 k인 용수철과 질량이 m인 물체로 이루어진 역학적 진동자에 관한 문제이다. 다음 조건에 맞는 $x(t)$ 그래프를 고르시오. 단, 아래에서 ♥표시가 된 것은 탄성력만 작용할 때의 $x(t)$ 그래프이고, 🌲표시가 된 것은 $\omega_d = \omega_0$인 $F = F_0\cos(\omega_d t)$가 작용한 후 충분한 시간이 지난 때의 $x(t)$ 그래프이다. 외력의 각진동수는 변해도, 감쇠력 상수 b는 변하지 않는다. (각 문항 2점씩 총 8점)

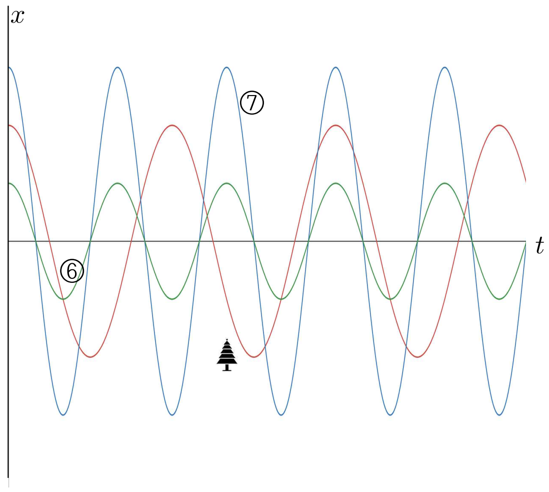
a. $\frac{b}{2m} < \omega_0$인 감쇠력이 작용할 때. 저감쇠운동하므로, 진폭이 감소하고, 고유 각진동수보다 각진동수가 작은, 즉 주기가 긴 그래프인 ③이 답이다.

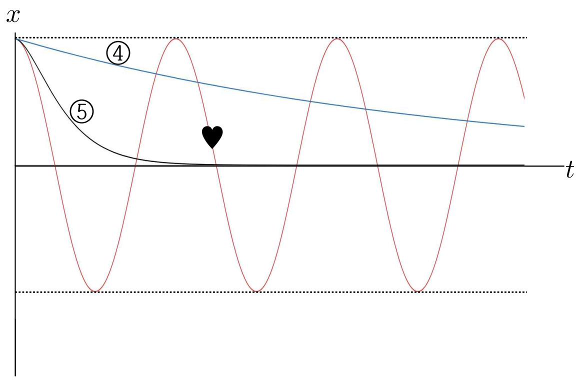
b. $\frac{b}{2m} = \omega_0$인 감쇠력이 작용할 때. ⑤

c. $\frac{b}{2m} > \omega_0$인 감쇠력이 작용할 때. ④

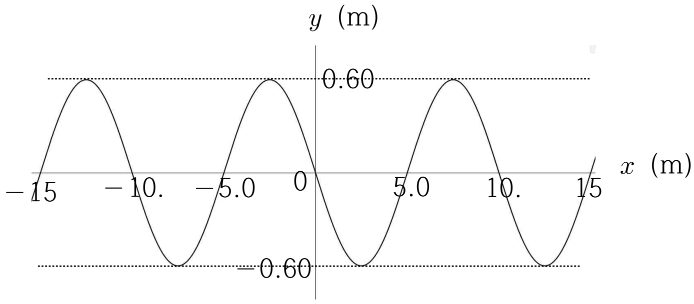
d. $\omega_d = \frac{3}{2}\omega_0$인 $F = F_0\cos(\omega_d t)$가 작용한 후 충분한 시간이 지난 때. ⑥







7. 아래는 어떤 파동을 $t=0$ 일 때 찍은 사진이다. 이 파동이 음의 $x-$방향으로 3.0 m/s로 진행할 때, 이 파동의 파동식을 쓰시오. (8점) (가장 단순한 조화 파동식으로 표현하라고 시험 시간에 공지함.)



일반식은 $y=f(x-vt)$이고, $v=-3.0$ m 이므로, $y=(x+3.0\ t)$. 가장 단순한 조화 파동식은 $y=-A\sin(kx+\omega t)$. 그림에서 $\lambda=10.$ m, $A=0.60$ m이므로 $k=\frac{2\pi}{\lambda}=0.20\pi$, $\omega=kv=0.60\pi$를 얻어서,

$y=\mathbf{0.60\sin(0.20\pi x+0.60\pi t)}$.

한 학기 동안 수고 많았습니다.
여러분 모두
건강하고 즐겁게 겨울 방학을 지내길 바랍니다.