Real analysis Ch.1

Dawei Wang

2020 年 3 月 8 日

1 皮亚诺公理

1.1 定义：自然数（非正式）

自然数是集合

$$N := 0, 1, 2, 3, 4...$$

的元素。其中，N 是从零开始无休止地往前计数所得到的所有元素构成的集合，我们称 N 为自然数集。

为了定义自然数，我们将使用如下两个基本概念数 0 和增量运算。用 n++ 来表示 n 的增量或紧跟在 n 之后的数。

1.2 公理 1.1

0 是一个自然数。

1.3 公理 1.2

如果 n 是一个自然数，那么 n++ 也是一个自然数。

1.4 定义

定义 1 为数 $0++$，2 为数 $(0++)++$，3 为数 $((0++)++)++$，等等。

1.5　公理 1.3

0 不紧跟在任何自然数后。换言之，对任意一个自然数 n，$n++\neq 0$ 均成立。

1.6　公理 1.4

对不不同的自然数而言，紧跟在它们之后的数字也一定是不同的，也就是说，如果 n 和 m 都是自然数，并且 $n\neq m$，那么 $n++\neq m++$。逆否命题为，若 $n++=m++$，则一定有 $n=m$

1.7　公理：数学归纳法原理 1.5

令 $P(n)$ 表示自然数 n 得任意一个性质，如果 $P(0)$ 为真且 $p(n)$ 为真时一定有 $P(n++)$ 为真，那么对于任意自然数 n，$P(n)$ 一定为真。

1.8　假设（非正式）

存在一个数系 N，我们称 N 中的元素为自然数，而且公理 1.1 1.5 对 N 均成立。

1.9　注：

尽管每一个自然数都是有穷的，但是由自然数所构成的集合却是无穷大的；也就是说虽然 N 是无穷大的，但是 N 由各个有穷的元素构成。不存在无穷大的自然数，无穷大不是自然数。(0 是有穷的，假若 n 是有穷的，那么 n++ 也是有穷的，因此根据公理 1.5，所有自然数都是有穷的。)

2　加法

2.1　定义：自然数的加法

令 m 为一个自然数，我们定义 m 加上 0 为：$0+m\ =m$。现在归纳的假设我们已经定义了如何把 m 加上 n，那么我们把 m 加上 $n++$ 定义为 $(n++)+m:=(n+m)++$

2.2 引理

对任意自然数 n，$n + 0 = n$ 恒成立

2.3 引理

对任意自然数 n 和 m，有 $n + (m++) = (n + m)++$ 成立。

2.4 命题：加法是可交换的

对任意自然数 n 和 m，有 $n + m = m + n$ 成立。

2.5 命题：加法是可结合的

对任意三个自然数 a, b, c，有 $(a + b) + c = a + (b + c)$ 成立。

2.6 命题：消去律

令 a, b, c 为三个任意自然数并满足 $a + b = a + c$，那么 $b = c$ 成立。

2.7 定义：正自然数

称一个自然数 n 是正的，当且仅当它不等于 0.

2.8 引理

令 a 表示一个正自然数，那么卡存在一个自然数 b 使得 $b++ = a$。

2.9 定义：自然数的序

令 n 和 m 表示任意两个自然数。我们称 n 大于等于 m，并记作 $n \geq m$，当且仅当存在自然数 a 使得 $n = m + a$。我们称 n 严格大于 m，并记作 $n > m$，当且仅当 $n \geq m$ 且 $n \neq m$。

由于对任意 n，有 $n++ > n$，故不存在最大的自然数 n，因为下一个数 n++ 总是更大。

2.10 命题: 自然数的序的基本性质

令 a, b, c 为任意自然数，那么：

(a) （序是自反的）$a \geq a$。

(b) （序是可传递的）如果 $a \geq b$ 并且 $b \geq c$，那么 $a \geq c$。

(c) （序是反对称的）$a \geq b$ 并且 $b \geq a$，那么 $a = b$。

(d) （加法保持序不变）$a \geq b$，当且仅当 $a + c \geq b + c$。

(e) $a < b$，当今仅当存在 $a + + < b$。

(f) $a < b$，当接仅当存在正自然数 $\mathrm{d}b = a + d$。

2.11 命题：自然数的序的三岐性

令 a 和 b 表示任意两个自然数，那么下面三种表述恰有一种表述为真：$a < b, a = b, a > b$。

3 乘法