四川省精品课程

随机信号分析

第4章 各态历经性与随机实验

第4章 各态历经性与随机实验

本章内容：

- **4.1** 各态历经性
- **4.2** 参数的估计与测量方法
- **4.3** 随机模拟方法与实验
- **4.4** 简单随机数的产生方法

习题

- 4.1, 4.2, 4.4, 4.6

第4章 各态历经性与随机实验

- 4.1 随机信号的各态历经性
- 4.2 参数的估计与测量方法*
- 4.3 随机模拟方法与实验*
- 4.4 简单随机数的产生方法*

各态历经性：在观察时间足够长的条件下，随机信号的各类时间平均值依概率1收敛于它相应的统计平均值的特性。

名称	分类依据	基本特征
均值各态历经性	信号均值	统计平均 = 样本时间平均
相关函数各态历经性	相关函数	统计相关函数 = 样本时间相关函数
一阶分布各态历经性	一阶概率分布	一阶概率分布 = 一阶分布时间平均

严格/狭义各态历经性：随机信号的所有参量都具有各态历经性。

广义各态历经性：随机信号的均值和相关函数同时具有各态历经性。

又称为：遍历性 或 埃尔歌德（ Ergodicity ）性

4.1.1 均值各态历经性：

时间平均算子：

$$A[\cdot] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[\cdot]dt$$

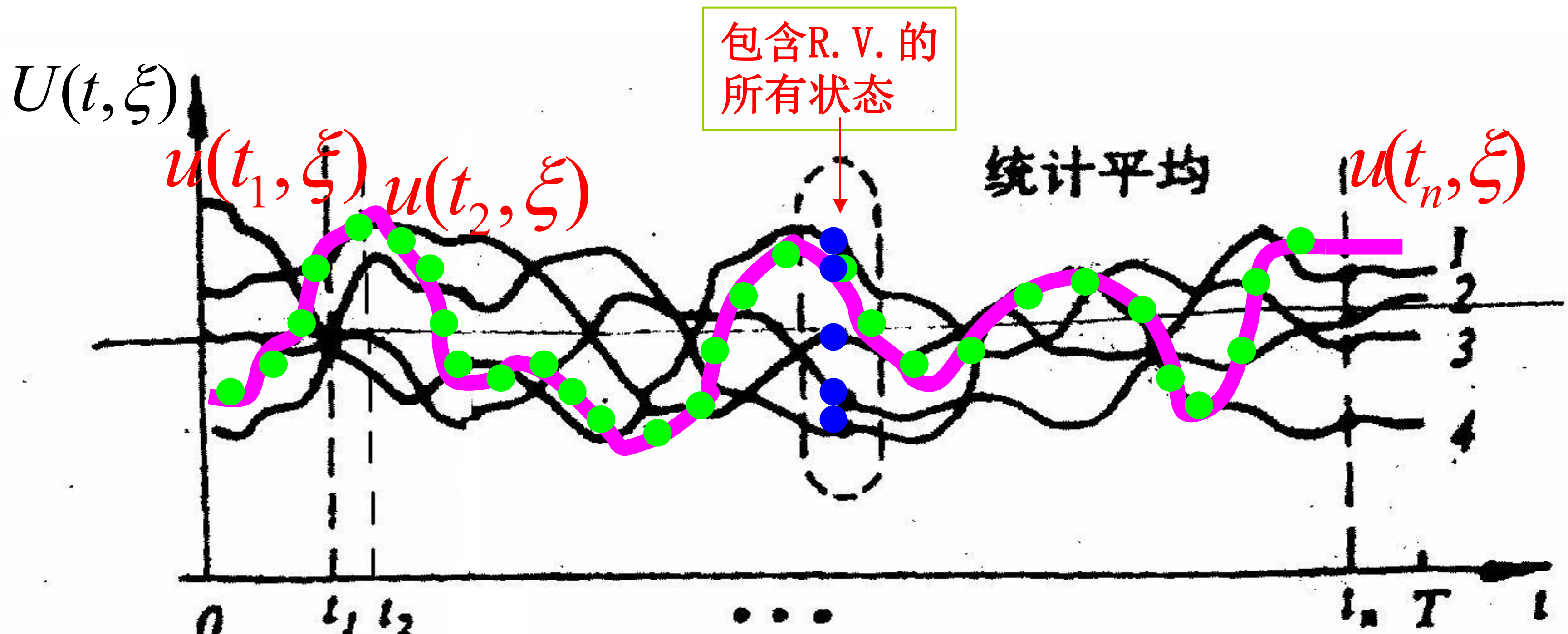
（1）、定义：

$$E[x(t)] \xlongequal[\text{等于}]{\text{以概率1}} A[x(t)]$$

或

$$P\{E[X(t)] = A[X(t,\xi)]\} = 1$$

则称X(t)为均值各态历经R.S.。



E[x(t)]：任一时刻的**R.V.**的概率平均。

A[x(t)]: $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt \quad or \quad \lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}X(n)$

信号的时间平均。

对随机信号的每一条样本函数分别求时间平均。

4.1.1 均值各态历经性：

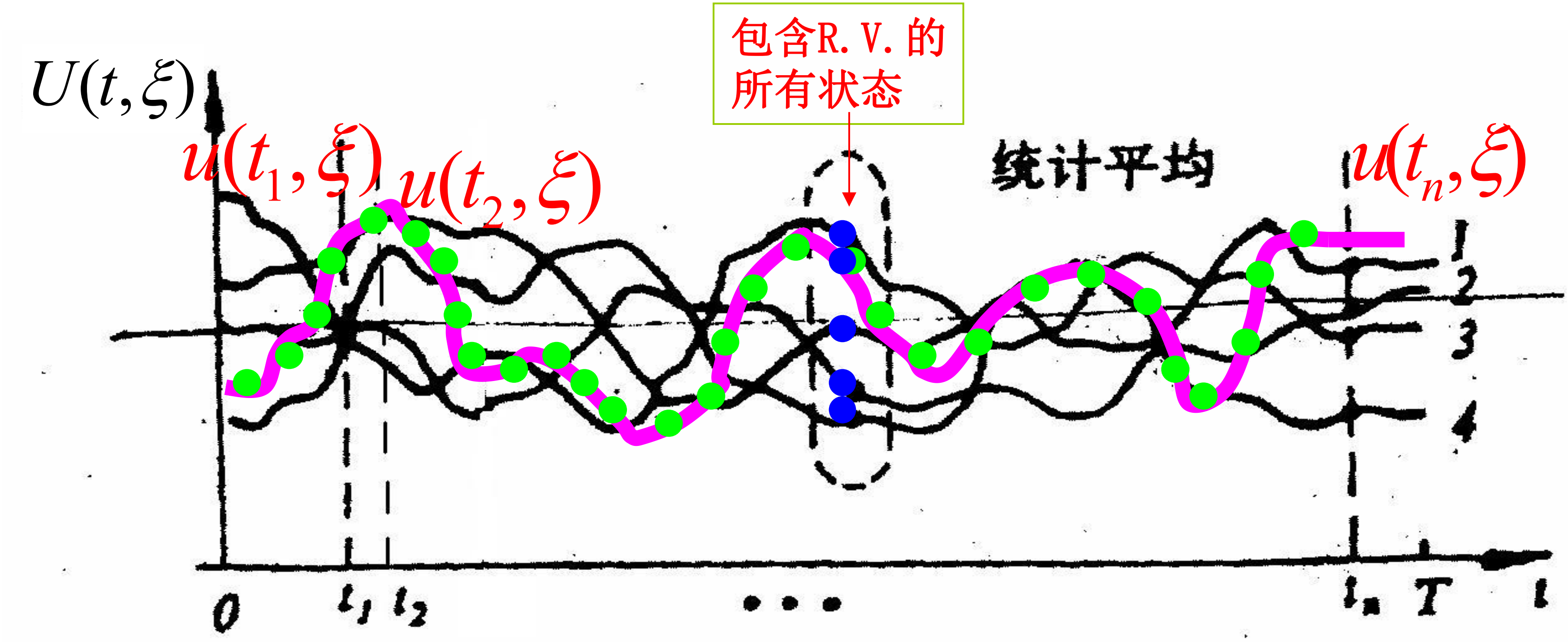
（1）、定义：

$$E[x(t)] \xlongequal[\text{等于}]{\text{以概率1}} A[x(t)]$$

则称X(t)为均值各态历经R.S.

E[X(t)]是 t的函数，与样本无关。

A[X(t)]与时间无关，与取哪条样本函数有关，R.V.(s)。



E[x(t)]：不是t的函数。

A[x(t)]:不是随机变量。

（2）、条件：

a. x(t) --- 均值平稳， 即 E[x(t)]=m (const)

b. A[x(t)]不为样本s的函数，即不是R.V., 而是取一个固定值，即 D[A[x(t)]]=0

即 $$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}c(t_1,t_2)dt_1dt_2=0$$

证明：$$D[A[X(t,s)]] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} c(t_1,t_2)dt_1dt_2 = 0$$

D[A[x(t)]]=E[(A[x(t)]-E[A[x(t)]])²]

$$D[A[x(t)]]=E[(A[x(t)]-E[A[x(t)]])^2]$$

$$=E[(A[x(t)]-m_x)^2]=E[(A[x(t)])^2]-m_X^2$$

$$E\{A[X(t,\xi)]\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E[X(t,\xi)]dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}mdt = m$$

一般情况下有 $E[\overline{X(t)}] = \overline{E[X(t)]}$

证明： $\boxed{D[A[X(t,s)]] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} c(t_1,t_2)dt_1dt_2 = 0}$

$$D[A[x(t)]]=E[(A[x(t)]-E[A[x(t)]])^2]$$

$$=E[(A[x(t)]-m_x)^2]=E[(A[x(t)])^2]-m_X^2$$

$$= E\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t_1)dt_1 \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t_2)dt_2\right]-m_X^{\ 2}$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} E[X(t_1)X(t_2)]dt_1dt_2 - m_X^{\ 2}$$

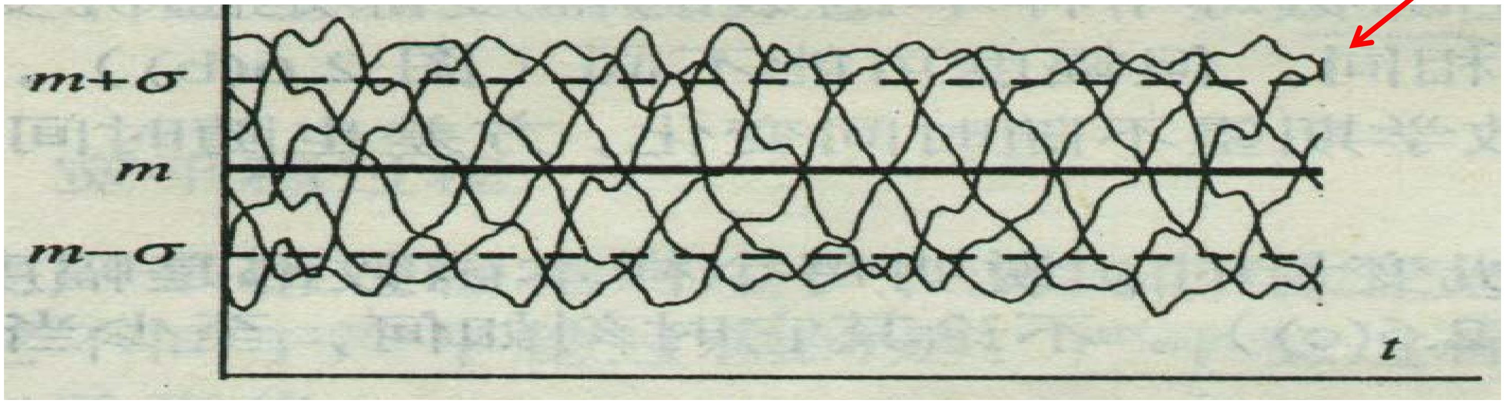
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}[\,c(t_1,t_2)\,]dt_1dt_2$$

- 物理含义为：只要观测的时间足够长，每个样本函数都将经历信号的所有状态，因此，从任一样本函数就可以计算出其均值、相关函数等统计特性。　　因为任一样本函数的各种时间平均值在观察时间充分长的条件下，以概率 1 收敛于它的统计平均值。

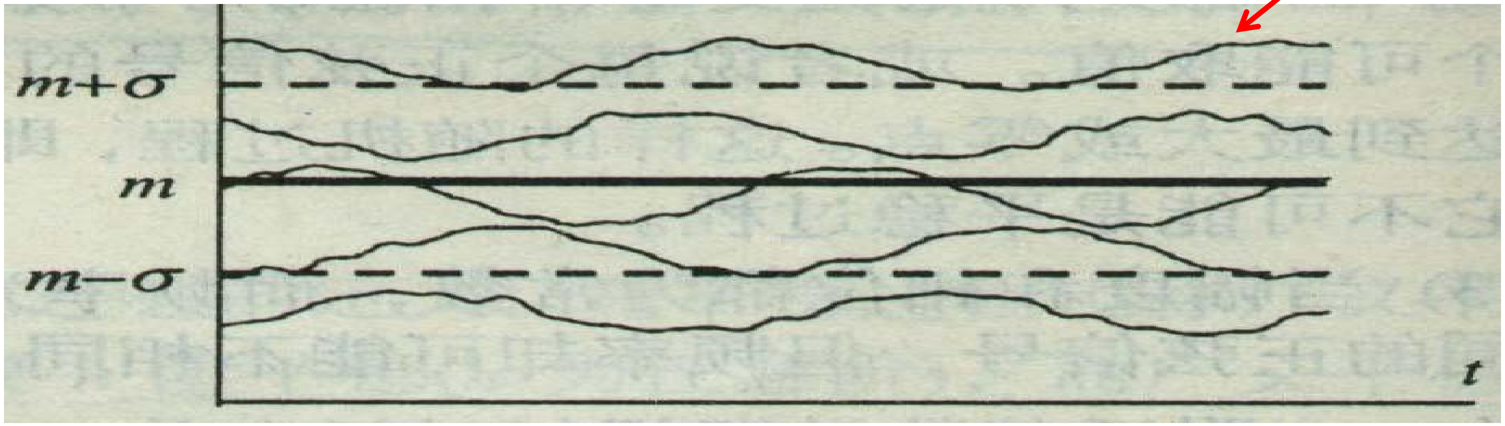
- 于是，实验只需要在其任一样本函数上进行就可以了，问题得到极大的简化。
- 随机信号的各态历经性是由实际样本数据探测信号统计特性的理论基础。从而解决了实际应用中的问题：如何获得随机信号的统计特性？

例：

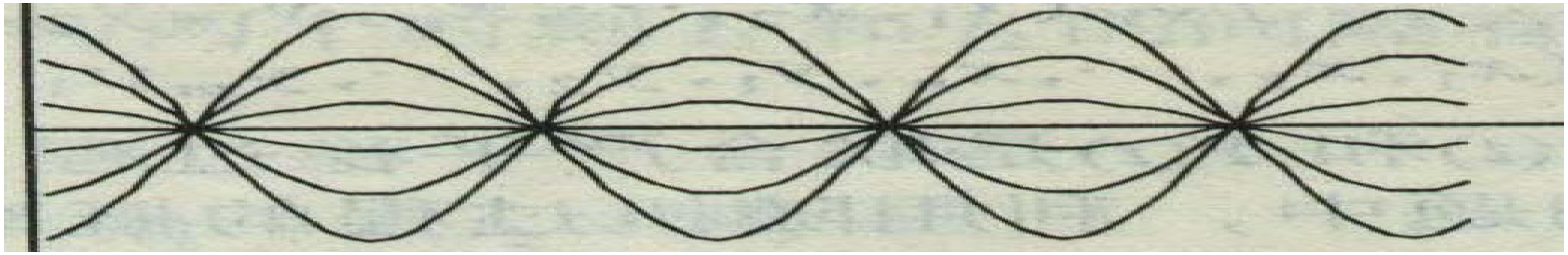
可能均值各态历经



非均值各态历经



例外：虽然 $A[X(t)]=E[X(t)]=0$，但每条样本函数没有经历信号的所有状态。



（3）、定理：

$\delta(\tau)$ 不符合(a)，但符合(b)。

- 定理4.1：（均值各态历经性判断条件）若信号广义平稳，则

（a）充分条件：$\lim\limits_{\tau\to\infty} C(\tau)=0$ 且 $C(0)<\infty$

很多随机信号都可以视为均值各态历经的

（b）充分条件：$\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|C(\tau)\right|d\tau=0$

（c）充要条件：$\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)C(\tau)d\tau=0$

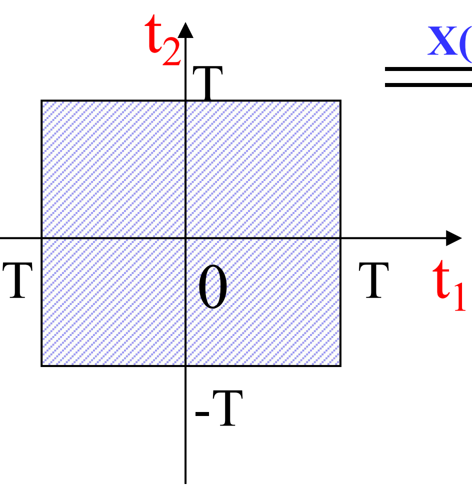
$$D\left[A[X(t,s)]\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}c(t_1,t_2)dt_1dt_2$$

■ 证明：WSS R.S.均值各态历经的充要条件(c)：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)C(\tau)d\tau=0$$

证明：

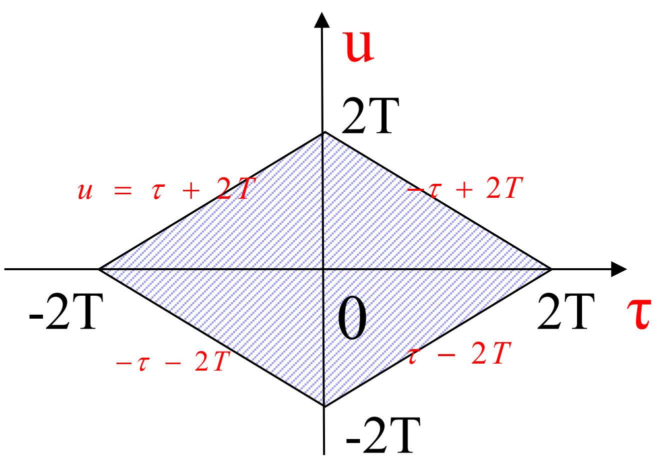
$$D[A[X(t,s)]]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}c(t_1,t_2)dt_1dt_2$$



$$\xlongequal{X(t)\ \text{WSS}}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}c(t_1-t_2)dt_1dt_2$$

令 $t_1+t_2=u$， $t_1-t_2=\tau$

即 $u=-\tau+2t_1$, $u=\tau+2t_2$



证明：

$$\therefore \quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}c(t_1-t_2)dt_1dt_2$$

$$t_1=\frac{1}{2}(u+\tau)$$

$$t_2=\frac{1}{2}(u-\tau)$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_u\int_\tau |J|(R(\tau)-m_X{}^2)du\,d\tau$$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial t_1}{\partial u} & \frac{\partial t_1}{\partial \tau}\\ \frac{\partial t_2}{\partial u} & \frac{\partial t_2}{\partial \tau}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

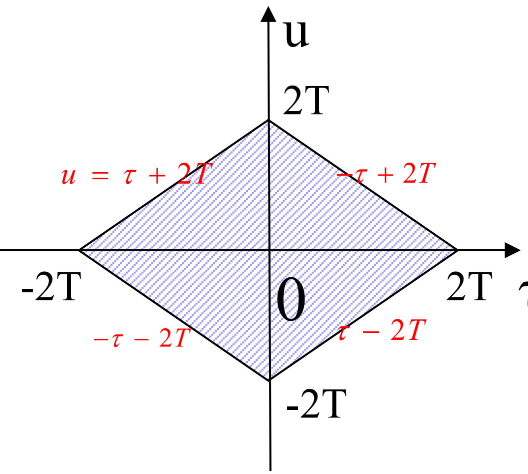
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_u\int_\tau \frac{1}{2}(R(\tau)-m_X{}^2)du\,d\tau$$

证明：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_u\int_\tau \frac{1}{2}(R(\tau)-m_X{}^2)dud\tau$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-2T}^{0}\int_{-2T-\tau}^{2T+\tau}\frac{1}{2}\left[R_X(\tau)-m_X{}^2\right]dud\tau$$

$$+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{0}^{2T}\int_{-2T+\tau}^{2T-\tau}\frac{1}{2}\left[R_X(\tau)-m_X{}^2\right]dud\tau$$



$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-2T}^{2T}\int_{-2T+|\tau|}^{2T-|\tau|}\frac{1}{2}\left[R_X(\tau)-m_X{}^2\right]dud\tau$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-2T}^{2T}(2T-|\tau|)\left[R_X(\tau)-m_X{}^2\right]d\tau$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}(1-\frac{|\tau|}{2T})c(\tau)d\tau\ \boxed{=0}$$

（3）、定理：

- 定理4.1：（均值各态历经性判断条件）若信号广义平稳，则

（a）充分条件： $\lim\limits_{\tau\to\infty} C(\tau)=0$ 且 $C(0)<\infty$

（b）充分条件： $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|C(\tau)\right|d\tau=0$

（c）充要条件： $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)C(\tau)d\tau=0$

$$D[A[X(t,s)]]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}c(t_1,t_2)dt_1dt_2$$

$$D\left[\overline{X(t)}\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)C(\tau)d\tau=0$$

证明：（b） $$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|C(\tau)|d\tau=0$$

$$\because\ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|C(\tau)|d\tau=0\qquad\therefore\ \int_{-\infty}^{\infty}|C(\tau)|d\tau<\infty$$

$$\because\ \int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)C(\tau)d\tau\le\int_0^{2T}|C(\tau)|d\tau\le\int_{-\infty}^{\infty}|C(\tau)|d\tau<\infty$$

$$\therefore\ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)C(\tau)d\tau=0$$

$$D\left[\overline{X(t)}\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)C(\tau)d\tau=0$$

证明：

(a) $\lim_{\tau\to\infty}C(\tau)=0,\quad$ 且$C(0)<\infty$

由极限定义， $\forall\varepsilon>0,\quad \exists T_1>0,\quad$ 当$\tau>T_1$时， $\left|C(\tau)\right|<\varepsilon$。

$$\therefore\quad \left|\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)C(\tau)d\tau\right|\le\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\left|C(\tau)\right|d\tau\le\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left|C(\tau)\right|d\tau$$

$$\le\frac{1}{T}\int_0^{T_1}\left|C(0)\right|d\tau+\frac{1}{T}\int_{T_1}^{2T}\varepsilon d\tau=\frac{T_1C(0)}{T}+\frac{\left(2T-T_1\right)\varepsilon}{T}$$

$$=\frac{T_1\left[C(0)-\varepsilon\right]}{T}+2\varepsilon$$

取 $T>\dfrac{T_1C(0)}{\varepsilon}\ge\dfrac{T_1\left[C(0)-\varepsilon\right]}{\varepsilon}$， 则 $\left|\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)C(\tau)d\tau\right|<3\varepsilon$

因此，

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)C(\tau)d\tau=0$$

$$\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)=0 \text{ 且 } C(0)<\infty$$

- 注：对于离散随机序列

$$A[X(n,\xi)]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}X(n,\xi)$$

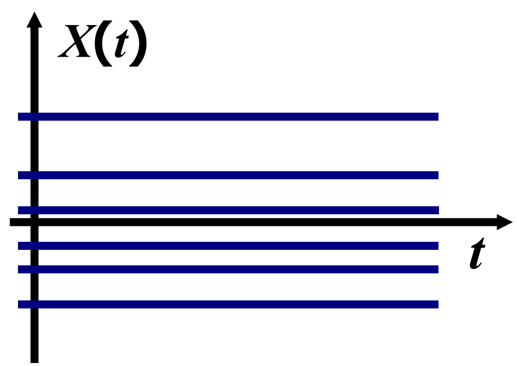
- 判断条件与连续随机信号相仿，例如充分条件：

$$\lim_{m\to\infty} C(m)=0 \quad and \quad C(0)<\infty$$

例4.1 随机信号X(t)=C，其中C为某方差不为零的随机常数变量，讨论其均值各态历经性。

解： $E[X(t)] = E[C] = m_c = \text{constant}$

$$R(t+\tau,\tau) = E[C^2] = \sigma_c^2 + m_c^2 = \text{constant}$$



X(t)是广义平稳信号

$$A[X(t)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} C dt = C \quad \Rightarrow Var\{A[X(t)]\} = Var[C] \neq 0$$

X(t)不是均值各态历经的

例4.2 设随机信号 $X(t)=A+n(t)$，其中 A 为常量，$n(t)$ 是白噪声。讨论其均值各态历经性。

解： $E\left[X(t)\right]=E\left[\left(A+n(t)\right)\right]=A$

$$R_X(t+\tau,t)=E\left\{\left[A+n(t+\tau)\right]\left[A+n(t)\right]\right\}$$

$$=A^2+R_n(\tau)=A^2+q\delta(\tau)$$ 广义平稳

$C_X(\tau)=R_X(\tau)-A^2=q\delta(\tau)$ ，利用定理4.1的（2）：

$$\boxed{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|C(\tau)\right|d\tau}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}q\delta(\tau)d\tau=0$$

故 $X(t)$ 是均值各态历经的

例 设平稳随机信号X(t)=Acos(ω$_0$t+Φ)，其中A和ω$_0$为常数，Φ在[-π，π)均匀分布。讨论其均值各态历经性。

解：按定义讨论

$$E[X(t)]=E[A\cos(\omega_0 t+\varphi)]=\frac{A}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\omega_0 t+\varphi)d\varphi=0$$

$$A[X(t)]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A\cos(\omega_0 t+\varphi)dt$$

取值有界

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{A}{2T\omega_0}\sin(\omega_0 t+\varphi)\Big|_{-T}^{T}=\lim_{T\to\infty}\frac{A}{2T\omega_0}\boxed{[\sin(\omega_0 T+\varphi)-\sin(-\omega_0 T+\varphi)]}$$

$$<\lim_{T\to\infty}\frac{A}{T\omega_0}=0$$

$$\because\quad A[X(t)]=E[X(t)]=0$$ ⇨ X(t)是均值各态历经的

例 已知平稳随机信号{X(t),-∞<t<∞}的均值函数m(t)=1，相关函数R(τ)=2cos²τ。讨论其均值各态历经性。

解：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|C(\tau)|\,d\tau=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|R(\tau)-1|\,d\tau$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|2\cos^2\tau-1|\,d\tau=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\cos 2\tau|\,d\tau$$

$$\neq 0$$

可见，由这充分条件无法判断信号的均值各态历经性。需用充要条件来判断。

X(t)是均值各态历经的

例 已知平稳随机信号{X(t), −∞<t<∞}的均值函数m(t)=1，相关函数R(τ)=2cos²τ。讨论其均值各态历经性。

解：$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)C(\tau)d\tau=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)\left(R(\tau)-1\right)d\tau$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)\left(2\cos^2\tau-1\right)d\tau=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\cos 2\tau d\tau$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\frac{\sin 2\tau}{2}\bigg|_0^{2T}+\frac{1}{2T}\int_0^{2T}\frac{\sin 2\tau}{2}d\tau\right]$$

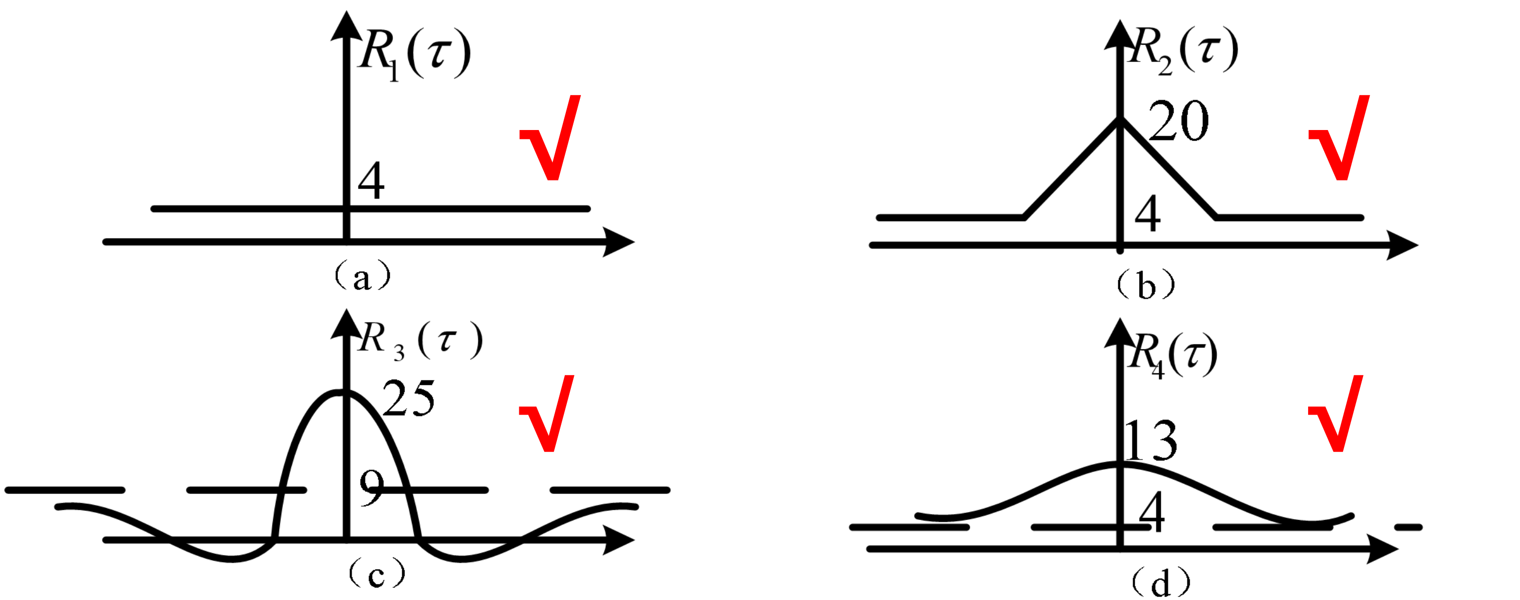
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\frac{\sin 2\tau}{2}\bigg|_0^{2T}-\frac{\cos 2\tau}{2T\times 4}\bigg|_0^{2T}\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{1-\cos 4T}{2T^2\times 4}=0$$

满足充要条件，故X(t)是均值各态历经的。

例 若广义平稳随机信号X(t)的均值m=2(图（(a)、(b)和(d))和3(图(c))，其相关函数R(τ)如下图所示。试判断图中4种情况下随机信号均值各态历经性。

解：

$$C(\tau)=R(\tau)-m^2 \xrightarrow{\text{充分条件}} \lim_{\tau\to\infty} C(\tau)=0\,,\ C(0)<\infty$$



4.1.2 相关各态历经性：

- （1）、定义：

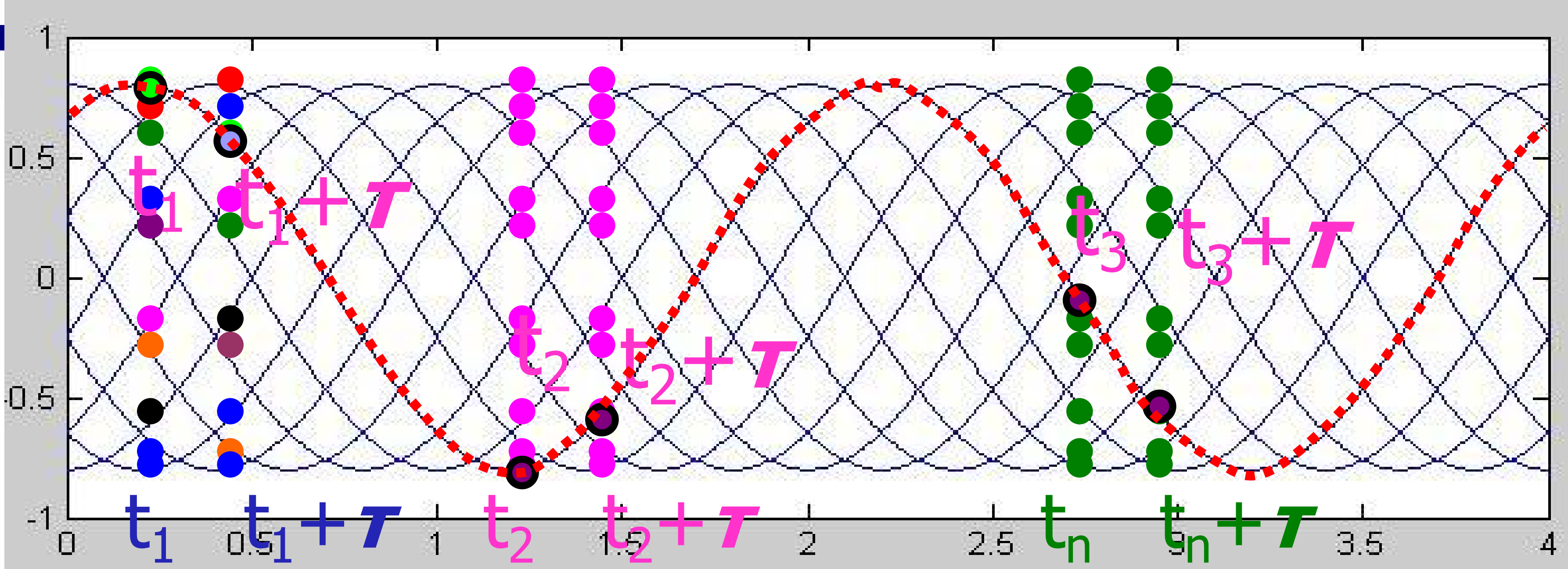
$$E[X(t_1)X(t_2)] \overset{\text{以概率1}}{=} A[X(t_1)X(t_2)]$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{R_X(t_1,t_2)} \qquad\qquad \boxed{\Re_X(\tau,s)}$$

$$\Re_X(\tau,s) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t+\tau)X(t)dt$$

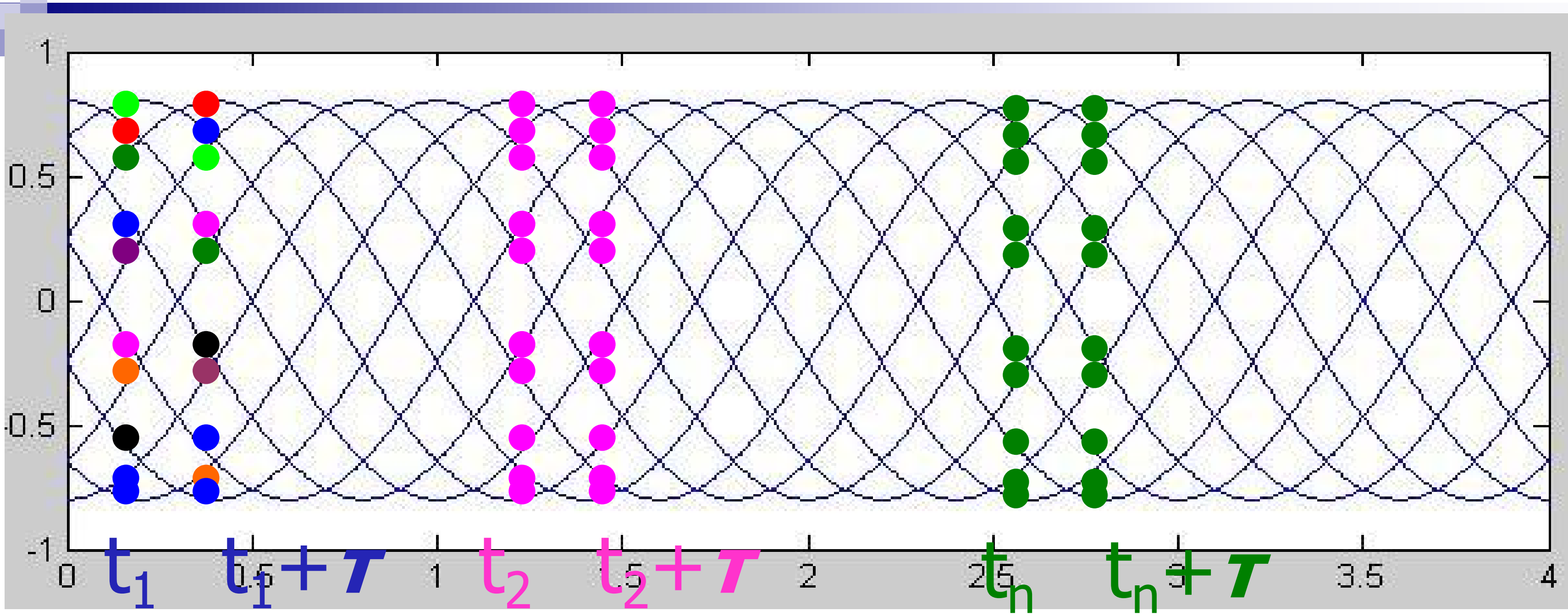
时间自相关函数，是**R.S.**



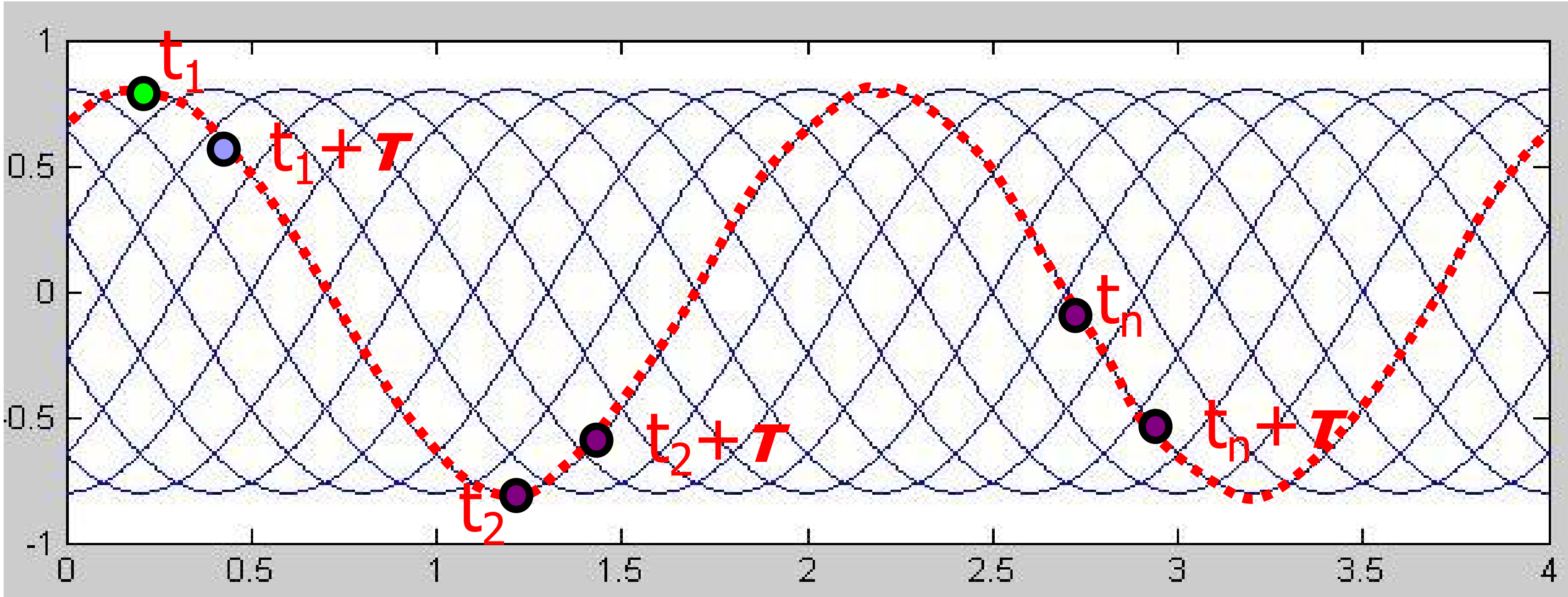
$$E[X(t+\tau)X(t)] = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} p_i X(t+\tau,\xi_i)X(t,\xi_i)$$

$$A\left[X(t+\tau,\xi)X(t,\xi)\right] = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} X(t_k+\tau,\xi)X(t_k,\xi)$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t+\tau,\xi)X(t,\xi)dt$$



1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
t_1
$t_1+\tau$
t_2
$t_2+\tau$
t_n
$t_n+\tau$



1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
t_1
$t_1+\tau$
t_2
$t_2+\tau$
t_n
$t_n+\tau$

（2）、条件：

- ① $R_X(t_1,t_2)$不是t_1,t_2的函数，要求x(t)相关平稳，即 $R_X(t_1,t_2)=R_X(\tau)$ ；

- ② $\Re_X(\tau,s)$与样本S无关，即 $X(t+\tau)X(t)$ 的可能状态在每一条样本函数中以相同概率出现,即

$$D\left\{A\left[X(t+\tau,\xi)X(t,\xi)\right]\right\}=0$$

（3）、定理：

定理4.2　广义平稳信号具有相关各态历经性的充要条件为

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{u}{2T}\right)\left[R_{Z_\tau}(u)-R_X^2(\tau)\right]du=0$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)\left[R_Z(\tau)-m_Z{}^2\right]d\tau=0$$

$$Z_\tau(t)=X(t+\tau)X(t) \qquad E\left[Z_\tau(t)\right]=A\left[Z_\tau(t)\right]=R_X(\tau)$$

Note：定理4.2要求随机信号 $Z_\tau(t)=X(t+\tau)X(t)$ 是平稳信号，但仅从X(t)是广义平稳信号无法确保随机信号 $Z_\tau(t)$ 的平稳性。

（3）、定理：

若 $X(t)$ 是零均值高斯信号，则充要条件为：

$$\int_0^{\infty} \left| R_X(\tau) \right| d\tau < \infty$$

相关函数绝对可积即可！

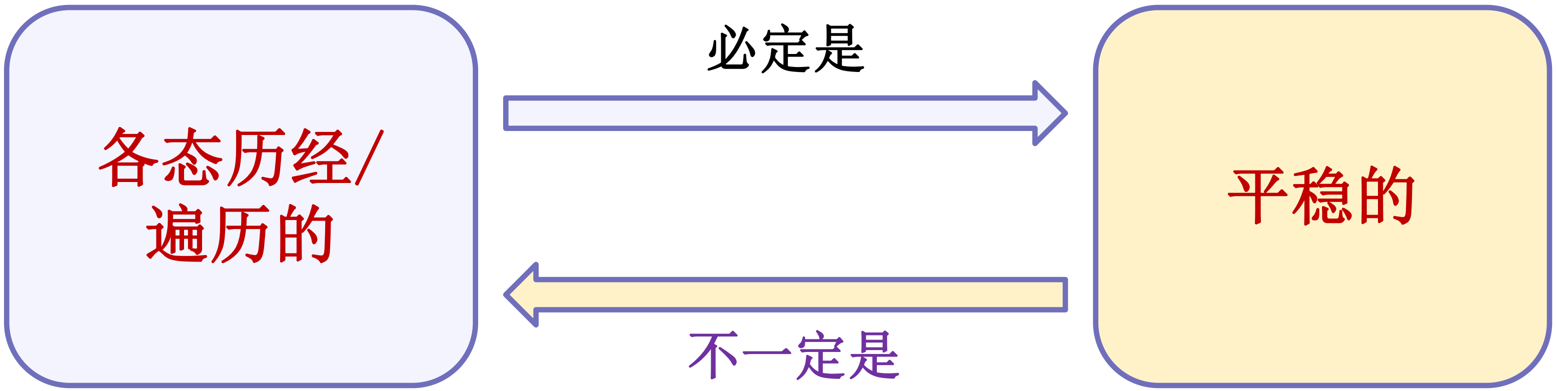
4.1.3 广义各态历经性（遍历性）
默认为“各态历经性”：

（1）、定义：同时满足均值各态历经，相关各态历经，则称X(t)为广义各态历经。

（2）、条件：

① $X(t)$广义平稳；

② $\mathrm{D}[A(X(t))]=0$, $\mathrm{D}[\Re_X(\tau,\mathrm{s})]=0$


各态历经/
遍历的
必定是
平稳的
不一定是

例：随机相位正弦信号$X(t) = a\cos(\omega t+\Theta)$，其中 $R.V.\Theta \sim U[0, 2\pi]$，讨论$X(t)$的各态历经性。

解： $E[X(t)] = 0$

$$R_X(t+\tau, t) = \frac{a^2}{2}\cos\omega\tau = R_X(\tau)$$

所以$X(t)$ WSS.

将Φ看作常数，各样本函数的时间平均。

$$A[X(t)] = A[a\cos(\omega_0 t+\phi)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a\cos(\omega_0 t+\phi)dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{a}{2T\omega_0}\sin(\omega_0 t+\phi)\Big|_{-T}^{T} = \lim_{T\to\infty}\frac{a}{2T\omega_0}\underbrace{\left[\sin(\omega_0 T+\phi)-\sin(-\omega_0 T+\phi)\right]}_{\text{有界}}$$

$$< \lim_{T\to\infty}\frac{a}{T\omega_0} = 0$$

$\because \quad A[X(t)] = E[X(t)] = 0 \quad \therefore$ **X(t)均值各态历经**

$$A\left[X(t+\tau)X(t)\right]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{a^2}{2T}\int_{-T}^{T}\cos(\omega t+\omega\tau+\Theta)\cos(\omega t+\Theta)dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{a^2}{2T}\cdot\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\left[\cos(2\omega t+\omega\tau+2\Theta)+\cos(\omega\tau)\right]dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\cos(\omega\tau)=R_X(\tau)$$

所以，$X(t)$ 相关各态历经，广义各态历经

例4.3：s(t)是一个周期为T的函数，随机变量Φ~U[0,T)。基于S(t)构造随机周期函数X(t)=s(t+Φ)，例如Acos(ω$_0$t+Φ)。讨论X(t)的平稳性及各态历经性。

解：(1) 平稳性

$$E\left[X(t)\right]=\int_0^T s(t+\phi)\frac{1}{T}d\phi=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}s(\theta)d\theta=\frac{1}{T}\int_0^T s(\theta)d\theta=\text{constant}$$

$$R_X(t+\tau,t)=\frac{1}{T}\int_0^T s(t+\tau+\phi)s(t+\phi)d\phi$$

$$=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}s(\theta+\tau)s(\theta)d\theta=R_X(\tau)$$

X(t)是广义平稳随机信号

例4.3：s(t)是一个周期为T的函数，随机变量Φ~U[0,T)。基于S(t)构造随机周期函数X(t)=s(t+Φ)，例如Acos(ω_0t+Φ)。讨论X(t)的平稳性及各态历经性。

解：(2) 各态历经性（用L替代公式中的T）

X(t)是
广义各态历经信号

$$A\left[X(t,\xi)\right]=\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}s(t+\phi)dt=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}s(t+\phi)dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{\phi}^{\phi+T}s(\theta)d\theta=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}s(\theta)d\theta=E\left[X(t)\right]$$

均值各态历经

$$A\left[X(t+\tau,\xi)X(t,\xi)\right]$$

$$=\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}s(t+\tau+\Phi)s(t+\Phi)dt=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}s(t+\tau+\Phi)s(t+\Phi)dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{\Phi}^{\Phi+T}s(\theta+\tau)s(\theta)d\theta=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}s(\theta+\tau)s(\theta)d\theta=R_X(\tau)$$

相关各态历经

小结：

1、随机信号的均值各态历经性：

- **定义：** $E[x(t)] \xlongequal[\text{等于}]{\text{以概率1}} A[x(t)]$
- **条件：**
  a. x(t) --- 均值平稳；
  b. D[A[x(t)]]=0
- **判断定理：**
  a. 充分条件：$\lim\limits_{\tau\to\infty} C(\tau)=0$ 且 $C(0)<\infty$
  b. 充分条件：$\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} C(\tau)d\tau=0$
  c. 充要条件：$\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)C(\tau)d\tau=0$

2、随机信号的相关各态历经性：

- 定义：

以概率1

$$E[X(t_1)X(t_2)] == A[X(t_1)X(t_2)]$$

- 条件：

a. x(t) --- 相关平稳；

b. D{A[X(t)X(t+τ)]}=0

- 判断定理：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{u}{2T}\right)\left[R_{Z_\tau}(u)-R_X^2(\tau)\right]du=0$$

3、随机信号的广义各态历经性：

- 定义：

  同时满足均值各态历经，相关各态历经。

- 条件：

  a. X(t) 广义平稳;

  b. D[A(X(t)]=0, $D[\Re_X(\tau,s)]=0$

4.1.4 联合各态历经过程：

定义：若两个随机过程X(t)和Y(t) 都是各态历经过程，且它们的时间互相关函数等于统计互相关函数，即

$$A\left[X(t+\tau)Y(t)\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t+\tau)Y(t)\,dt$$
$$=R_{XY}(\tau)=E\left[X(t+\tau)Y(t)\right]$$

则称它们是联合各态历经过程。

各态历经随机信号的数字特征有更加明确的物理意义：

① 信号的均值等于它的直流分量

$$m_X = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)\, dt = \text{direct current component}$$

② 信号的方差等于它的交流平均功率

$$\sigma_X^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[X(t) - m_X \right]^2 dt = \text{AC average power}$$

电路理论中的直流、交流与总功率都是时间平均的概念，其理论基础是各态历经性。

③ 信号的均方值等于它的总平均功率

$$E[X^2(t)] = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X^2(t)\, dt = \text{total average power}$$

例：某个噪声电压X(t)是一个广义各态历经信号，其一个样本函数为X(t)=2cos(t+π/4)，求该噪声信号的均值、方差和平均功率。

解：由X(t)的各态历经性，有

$$E\left[X(t)\right]=A\left[X(t)\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[2\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right]dt=0$$

$$R_X(\tau)=A\left[X(t+\tau)X(t)\right]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t+\tau)X(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[2\cos\left(t+\tau+\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right]dt$$

$$=2\cos\tau$$

因此，该噪声信号的平均功率和方差分别为

$$E[X^2(t)]=R(0)=2 \qquad \sigma_X^2=E[X^2(t)]=2$$

End of Chapter 4