作业

1. 已知两个一维模式类别的类概率密度函数为，

$$p(x|\omega_1)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 2-x & 1\le x<2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases},p(x|\omega_2)=\begin{cases} x-1 & 1\le x<2 \\ 3-x & 2\le x\le 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

先验概率$p(\omega_1)=0.6, p(\omega_2)=0.4$

（1）求Bayes最小错误率判决函数；

（2）求总错误概率p；

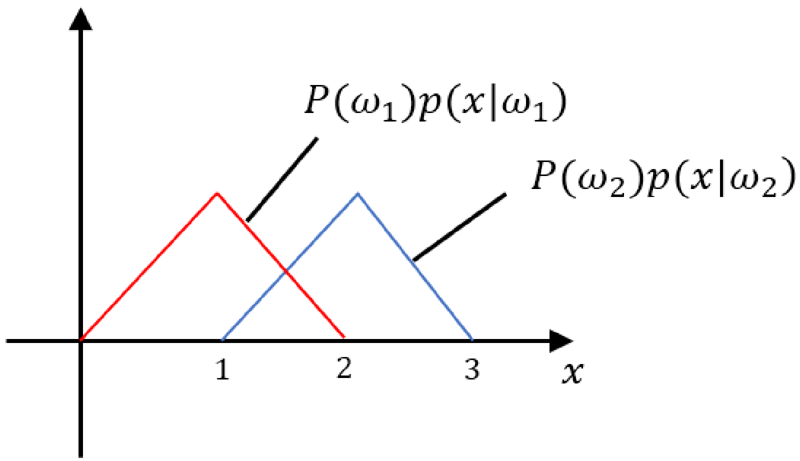
（3）判断样本$\{x_1=1.35$，$x_2=1.45$，$x_3=1.55$，$x_4=1.65\}$各属于哪一类？

解：（1）基于0-1代价Bayes判决函数为：（问题1：没有给出最终的判决形式）

$$\text{当}\frac{p(x|\omega_1)}{p(x|\omega_2)}\ge\frac{p(\omega_2)}{p(\omega_1)}=\frac{0.4}{0.6}\approx 0.67\text{时，}\quad x\epsilon w_1\text{，否则，}x\epsilon w_2$$

作业

（2）总的误判概率$P(e)$为:



由 $\frac{2-x}{x-1}=\frac{2}{3}$，得$x = 1.6$ 问题2：误判概率计算错误

$$P(e) = P(\omega_1) * \int D_2\, p(x|\omega)dx + P(\omega_2) * \int D_1\, p(x|\omega_2)dx$$

$$= 0.6 * \int_{1.6}^{2} (2-x)dx + 0.4 * \int_{1}^{1.6} (x-1)dx$$

$$= 0.12$$

作业

（3）$x_1 = 1.35, p(x|\omega)/p(x|\omega_2) = 0.65/0.35 \approx 1.86 > 0.67$，所以$x_1 \in \omega_1$

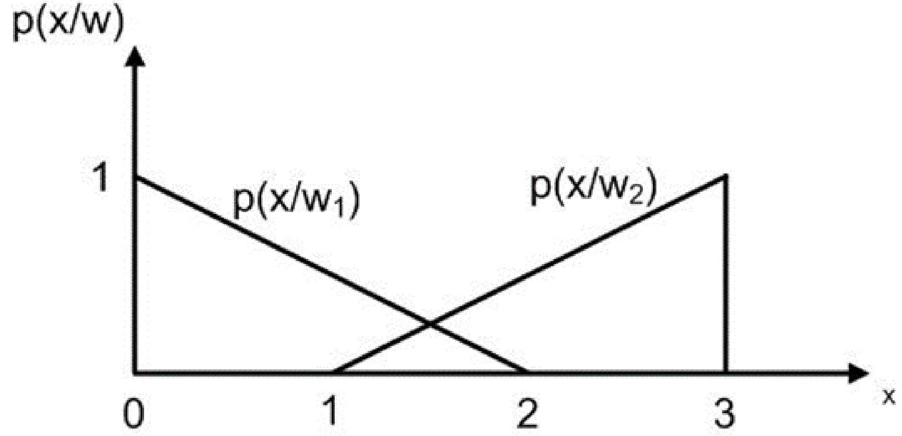
$x_2 = 1.45, p(x|\omega_1)/p(x|\omega_2) = 0.55/0.45 \approx 1.22 > 0.67$ ，所以$x_2 \in \omega_1$

$x_3 = 1.55, p(x|\text{ a })/p(x|\omega_2) = 0.45/0.55 \approx 0.82 > 0.67$ ，所以$x_3 \in \omega_1$

$x_4 = 1.65, p(x|\text{ a })/p(x|\omega_2) = 0.35/0.65 \approx 0.54 < 0.67$ ，所以$x_4 \in \omega_2$

作业

2. 两个一维模式类别，其概率密度函数如下图所示。



(a) 其先验概率相等，试导出其贝叶斯最小错误率判别函数。

(b) 求出判别界面的位置。

问题：有些同学用似然比来解题，没有讨论区间导致计算错误。先验概率相等时，直接比较类条件概率密度函数，计算更加方便。

解：$P(x|\omega_1)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+1, & 0\le x\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}$ $\quad P(x|\omega_2)=\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}, & 1\le x\le 3\\ 0, & 其它\end{cases}$

作业

因为$P(\omega_1) = P(\omega_2)$，可得判别函数为：

$-\frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$，即$x = \frac{3}{2}$。

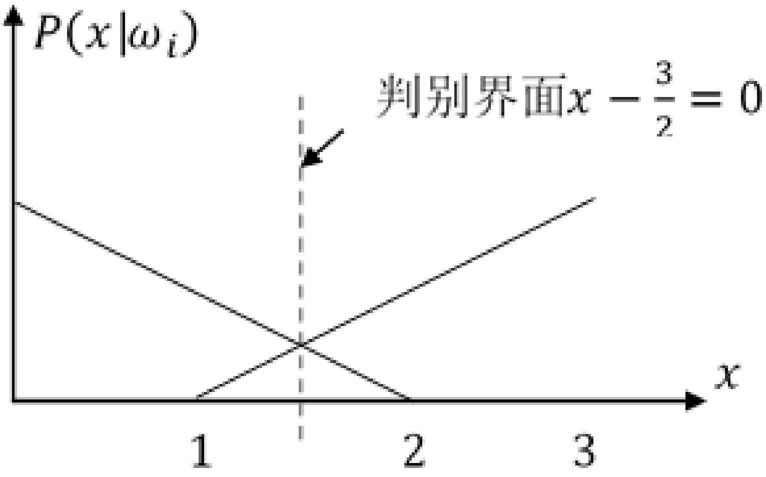
当$0 \le x < 1.5$时，$P(\omega_1)P(x|\omega_1) > P(\omega_2)P(x|\omega_2)$

当$1.5 < x \le 3$时，$P(\omega_1)P(x|\omega_1) < P(\omega_2)P(x|\omega_2)$

即判别函数为

$$\begin{cases} x \in w, & ,0 \le x < 1.5 \\ x \in w_2, & 1.5 < x \le 3 \end{cases}$$

判别界面如下图所示：



3. 假设在某个地区细胞识别中正常(ω_1)和异常(ω_2)两类先验概率分别为$p(\omega_1)=0.8$，$p(\omega_2)=0.2$，现有一待识别的细胞，其观察值为x，从类条件概率密度分布曲线上查得$p(x|\omega_1)=0.25$，$p(x|\omega_2)=0.6$，并且已知$\lambda_{11}=0$，$\lambda_{12}=0.5$，$\lambda_{21}=2$，$\lambda_{22}=0$试对该细胞x用基于最小风险的贝叶斯决策。

解：计算似然比与门限：

$$\left.\begin{array}{l} l_{12}=\dfrac{p(x|\omega_1)}{p(x|\omega_2)}=0.417 \\ \theta=\dfrac{P(\omega_2)(\lambda_{21}-\lambda_{22})}{P(\omega_1)(\lambda_{12}-\lambda_{11})}=1 \end{array}\right\} < \theta$$

$l_{12}<\theta$，故$x\in\omega_2$。

问题：计算门限的时候出现计算错误

4. 在字符检测中，假定类型ω_1为字符，类型ω_2为非字符，已知先验概率$P(\omega_1)=0.6$和$P(\omega_2)=0.4$。现在有两个待识样本x_1和x_2，其类概率密度分别为：

$$p(x|\omega_1):\quad 0.8,\quad 0.1$$
$$p(x|\omega_2):\quad 0.2,\quad 0.9$$

1）试用贝叶斯最小误判概率准则判决两个样本各属于哪一个类型；

2）如果λ_{12}表示属于ω_1类判决ω_2所造成的损失，正确判断的损失λ_{11}=λ_{22}=0，如果λ_{12}=4，试用贝叶斯最小风险准则判决两个样本均属于第一类，误判损失λ_{21}应该如何设计？请分析两种分类结果的异同及原因。

解：1）由题目知：

$$x_1:\frac{\mathrm{P}(x|\omega_1)}{\mathrm{P}(x|\omega_2)}=\frac{0.8}{0.2}=4,\qquad x_2:\frac{\mathrm{P}(x|\omega_1)}{\mathrm{P}(x|\omega_2)}=\frac{0.1}{0.9}=\frac{1}{9}$$

$$\theta=\frac{\mathrm{P}(\omega_2)}{\mathrm{P}(\omega_1)}=\frac{0.4}{0.6}=\frac{2}{3}$$

作业

由于

$$4 > \frac{2}{3}, \frac{1}{9} < \frac{2}{3}$$

所以$x_1 \in \omega_1$，$x_2 \in \omega_2$

2）当考虑损失时：

$$\theta = \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)} \cdot \frac{\lambda_{21} - \lambda_{22}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\lambda_{21}}{4} = \frac{\lambda_{21}}{6}$$

若两类样本均判为第一类，则：

$$\frac{1}{9} > \frac{\lambda_{21}}{6}$$

即$\lambda_{21} < 2/3$。两种结果不同，原因是将第一类判为第二类的损失较大，导致分类为第一类。

作业

5、　随机变量x服从$Erlang$概率密度函数：

$$p(x,\theta)=\theta^2 x exp(-\theta x)u(x)$$

其中$u(x)$是单位阶跃函数，$u(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$，给定$N$个测量值$x_1,\ldots,x_n$，计算$\theta$最大似然估计。

解：

$$P(x,\theta)=\prod_{i=1}^{N}\ \theta^2 x_i \exp(-\theta x_i)u(x_i)$$

$$\ln P(x,\theta)=\sum_{i=1}^{N}(2\ln\theta+\ln x_i-\theta x_i+\ln u(x_i))$$

$$\frac{\partial \ln P(x,\theta)}{\partial\theta}=\sum_{i=1}^{N}(2\frac{1}{\theta}-x_i)$$

$$=2\frac{N}{\theta}-\sum_{i=1}^{N}\ X_i=0$$

$$\therefore\ \theta=\frac{2N}{\sum_{i=1}^{N}\ x_i}$$

作业

6. 给定数据样本 X $=\{3,4,5,5,6,12,14,14,15,16,17,18\}$，，采用 $Parzen$ 窗估计在5和14处的密度函数p(x)，窗宽 $\mathrm{h_N}=4$。试分别计算出采用方窗和正态窗（ $\mu=0,\sigma=1$）估计结果

解：已知样本数量 $N=12, n_N=4$，则

$$P_{KDE}(y)=\frac{1}{Nh_N^1}\sum_{n=1}^{N}k\left(\frac{y-x_n}{h_N}\right)$$

1）当 $y=5$ 时

$$P_{KDE}(y=5)$$

$$=\frac{1}{12\times 4}[k\left(\frac{3-5}{4}\right)+k\left(\frac{4-5}{4}\right)+k\left(\frac{5-5}{4}\right)+k\left(\frac{5-5}{4}\right)+k\left(\frac{6-5}{4}\right)$$

$$+k\left(\frac{12-5}{4}\right)+\cdots]$$

作业

当考虑方窗时:

$$P_{KDE}(y=5)=\frac{1}{12\times 4}[1+1+1+1+1+0+\cdots]=\frac{5}{12\times 4}=0.104$$

当考虑正态窗时:$\mu=0,\sigma=1,h=4$

$$p(x)=\frac{1}{N\times h}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-x_i}{h})^2)$$

$P_{KDE}(y=5)$

$$=\frac{1}{12\times 4}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}0^2\right)\right.$$

$$\left.+\cdots\right]=0.0439$$

作业

2)当$y = 14$时

$$P_{KDE}(y=14)=\frac{1}{12\times 4}[k\left(\frac{3-14}{4}\right)+\cdots+k\left(\frac{17-14}{4}\right)+k\left(\frac{18-14}{4}\right)]$$

当考虑方窗时:

$$P_{KDE}(y=14)=\frac{5}{48}=0.104$$

当考虑正态窗时:

$$P_{KDE}(y=14)=\frac{1}{12\times 4}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{11}{4}\right)^2\right)+\cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{4}\right)^2\right)\right]$$
$$=0.0537$$

可以看出相同带宽下，不同窗口的结果不同。

7. 给定两类数据样本 $\omega_1 = \{-3,-2,-1,-1,0,1,1,2,2,3\}$， $\omega_1 = \{1,2,3,3,4,5,5,6,6,7\}$，试用最小错误率贝叶斯决策判别观测样本 $x = 2$属于哪一类？此处两类出现的概率$p(w_1)$和$p(w_2)$相等，采用方窗函数$\phi(u) = \begin{cases} 1 \text{ 如果} |\mathrm{u}| \leq 1/2 \\ 0 \text{ 其他} \end{cases}$的$Parzen$ 窗估计密度方法，窗宽$h_N = 5$估计类条件概率 。

解：基于$Parzen$窗估计法，$N = 5$

$$p(x=2|\omega_1) = \frac{1}{10 \times 5}[k(\frac{-3-2}{5}) + k(\frac{-2-2}{5}) + \cdots] = \frac{6}{10 \times 5} = \frac{6}{50}$$

$$p(x=2|\omega_2) = \frac{1}{10 \times 5}[k(\frac{1-2}{5}) + k(\frac{2-2}{5}) + \cdots] = \frac{5}{10 \times 5} = \frac{5}{50}$$

$$\frac{p(x=2|\omega_1)}{p(x=2|\omega_2)} = \frac{6}{5} > \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)} = 1$$

故$x \in \omega_1$，第1类