第四届量子计算编程司南杯题目一

1 编程题一

1.1 证明下面的量子线路优化方案的正确性

在证明以下优化方案正确性之前，我们需要明确四个量子门的操作，从而证明矩阵乘法的正确性。

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix}0 & -i\\i & 0\end{bmatrix},\ Z = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}.$$

1.1.1 $HXH = Z$

$$HZ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}.$$

$$HZH = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = X.$$

1.1.2 HYH = -Y

$$HY = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -i\\i & 0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i & -i\\-i & -i\end{bmatrix}.$$

$$HYH = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i & -i\\-i & -i\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & i\\-i & 0\end{bmatrix} = -Y.$$

1.1.3 $HZH = X$

$$HZ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}.$$

$$HZH = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = X.$$

1.2 计算出下面两个量子线路对应的酉矩阵

1.2.1 *a*

从图a 的结构分析，电路在 $q_1 = 1$ 时，对 q_0 执行 H 门的变换。有以下四种情况：

- 当 $\mathrm{q}_1 = 0$, 执行 $I \otimes I$
  1. $|00\rangle \to |00\rangle$
  2. $|01\rangle \to |01\rangle$
- 当 $\mathrm{q}_1 = 1$, 执行 $I \otimes H$
  1. $|10\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle + |11\rangle\right)$
  2. $|11\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle - |11\rangle\right)$

可得出量子线路 a 对应的酉矩阵为

$$U_a = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

1.2.2 *b*

从图b 的结构分析，电路在 $q_0 = 1$ 时，对 q_1 执行 H 门的变换。有以下四种情况：

- 当 $q_0 = 0$, 执行 $I \otimes I$
  1. $|00\rangle \to |00\rangle$
  2. $|01\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$
- 当 $q_0 = 1$, 执行 $I \otimes H$
  1. $|10\rangle \to |10\rangle$
  2. $|11\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle)$

可得出量子线路 b 对应的酉矩阵

$$U_b = I \otimes |0\rangle\langle 0| + H \otimes |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

验证：两个酉矩阵均满足其逆矩阵等于其共轭转置矩阵的性质。即

$$U_a U_a^\dagger = U_a^\dagger U_a = I, U_b U_b^\dagger = U_b^\dagger U_b = I.$$

1.3 本问为代码部分，已上传至 cloudIDE 中

1.4 请根据第 (1.1) 问中的结论，使用 H 门和$\mathrm{CNOT}_{1,0}$，完成SWAP门的功能，并使用 pyqpanda 验证方案的正确性

1.4.1 数学模型

由第三问可得知，SWAP矩阵可以由$\mathrm{CNOT}_{0,1}$ 和$\mathrm{CNOT}_{1,0}$ 构成，具体表现为

$$\mathrm{SWAP} = \mathrm{CNOT}_{0,1} \cdot \mathrm{CNOT}_{1,0} \cdot \mathrm{CNOT}_{0,1}$$

由第一问可知，H 门可以实现泡利矩阵之间的相互转化，则本题需要需要将$\mathrm{CNOT}_{0,1}$ 转化为 H 门和$\mathrm{CNOT}_{1,0}$ 的组合，或者用不同的组合实现相同的线性变换。已知$\mathrm{CNOT}_{0,1}$ 是 4×4 的矩阵，所以需要通过 ⊗ 将 H 门变成 4×4 的矩阵 $H \otimes H$。

$$H \otimes H = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \cdot H & 1 \cdot H \\ 1 \cdot H & -1 \cdot H \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

由于酉矩阵的张量积依然是一个酉矩阵，即 $H \otimes H = I$，则最终得到一个初等矩阵SWAP一定需要偶数个张量积的乘积，中间可以加入$\mathrm{CNOT}_{1,0}$ 进行行变换或列变换。从最小的偶数考虑，用两个向量积和若干CNOT门组成的量子线路。
同样做最简单考虑，在每一个张量积前加一个CNOT门，即

$$\mathrm{CNOT}_{1,0} \cdot (H \otimes H) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

对以上结果进行平方，可得

$$(\mathrm{CNOT}_{1,0} \cdot (H \otimes H))^2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

不难发现，对这个计算结果进行一次交换 2，4 行或者交换 3，4 列即可得到SWAP门。CNOT门具有交换 3，4 列的变换作用，则

$$
(\mathrm{CNOT}_{1,0} \cdot (H \otimes H))^2 \cdot \mathrm{CNOT}_{1,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{SWAP}
$$

最终可以得到

$$
\mathrm{SWAP} = \mathrm{CNOT}_{1,0} \cdot (H \otimes H) \cdot \mathrm{CNOT}_{1,0} \cdot (H \otimes H) \cdot \mathrm{CNOT}_{1,0}
$$

总结过程：

1. 应用 $\mathrm{CNOT}_{1,0}$（控制位为 q_0，目标位为 q_1）
2. 双量子位同时应用 H 门, 转化计算基
3. 再次应用 $\mathrm{CNOT}_{1,0}$（控制位为 q_0，目标位为 q_1）
4. 双量子位同时应用 H 门, 恢复计算基
5. 最后一次应用 $\mathrm{CNOT}_{1,0}$（控制位为 q_0，目标位为 q_1）

1.4.2 量子电路模型

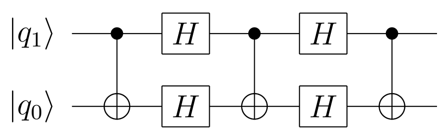

图 1: 问题 1.4 的量子线路图

1.4.3 代码部分已上传至 cloudIDE 中