動態規劃 (二)

sam571128

2022-07-06

目錄

DP 的概念

DP 的性質

這堂課，我們要來更加地了解 DP，以下為解決 DP 問題時會用到的一些性質

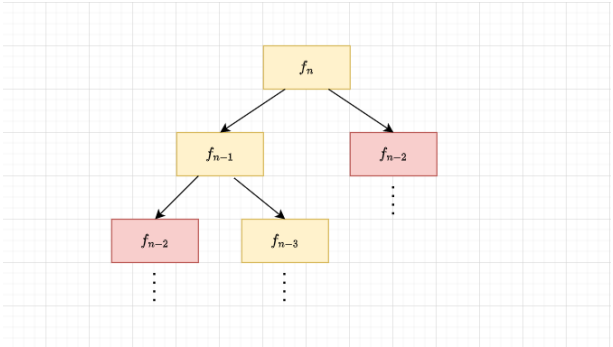
- **重複子問題** (overlapping subproblems)
- **最佳子結構** (optimal substructures)
- **狀態的轉移順序會是一張有向無環圖** (DAG)

重複子問題 (overlapping subproblems)

- 一個問題，可以被拆分成很多個小問題，而這些小問題在遞迴時，可能會被重複使用到很多次，而非每次皆會產生一個新的問題。

重複子問題 (overlapping subproblems)

- 一個問題，可以被拆分成很多個小問題，而這些小問題在遞迴時，可能會被重複使用到很多次，而非每次皆會產生一個新的問題。
- 例子: 費氏數列 ($f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$)



重複子問題 (overlapping subproblems)

- 一個問題，可以被拆分成很多個小問題，而這些小問題在遞迴時，可能會被重複使用到很多次，而非每次皆會產生一個新的問題。
- 例子: 費氏數列 ($f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$)
- 可以使用動態規劃紀錄狀態，記憶化 (memoization) 就是其中一種例子
- 左邊的 code 為 $O(f_n) \approx O(2^n)$，而右邊的 code 為 $O(n)$

```
int f(int x){
    if(x <= 1)
        return 1;
    else
        return f(x-1) + f(x-2);
}
```

```
int f(int x){
    if(dp[x]) return dp[x];
    if(x <= 1)
        return dp[x] = 1;
    return dp[x] = f(x-1) + f(x-2);
}
```

最佳子結構 (optimal substructures)

- 對於某個狀態的最佳解，可以從小狀態的最佳解轉移過來

最佳子結構 (optimal substructures)

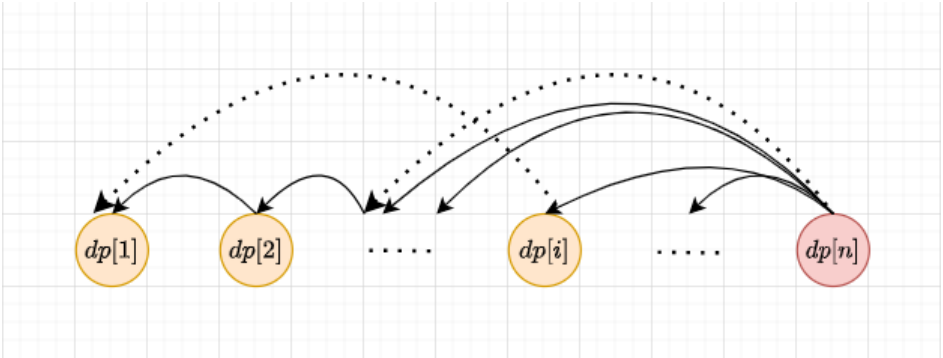
- 對於某個狀態的最佳解，可以從小狀態的最佳解轉移過來
- DP 的轉移式通常會有 $dp[i]$ 表示前 i 個 ... 的最佳解
- 而轉移式也通常以類似的方式去思考並且轉移而來

最佳子結構 (optimal substructures)

- 對於某個狀態的最佳解，可以從小狀態的最佳解轉移過來
- DP 的轉移式通常會有 $dp[i]$ 表示前 i 個 ... 的最佳解
- 而轉移式也通常以類似的方式去思考並且轉移而來
- 題外話: 貪心的題目通常也會滿足這個性質

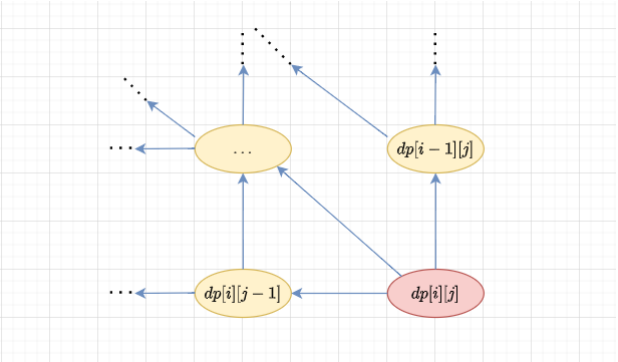
DP 的轉移順序

- 轉移順序必須是一張 DAG (有向無環圖)
- 不能夠發生 $f(b)$ 從 $f(a)$ 轉移，卻又讓 $f(a)$ 從 $f(b)$ 轉移的情形
- 下圖為一個線性 DP 可能的轉移順序



DP 的轉移順序

- 轉移順序必須是一張 DAG (有向無環圖)
- 不能夠發生 $f(b)$ 從 $f(a)$ 轉移，卻又讓 $f(a)$ 從 $f(b)$ 轉移的情形
- 下圖為一個二維 DP 可能的轉移順序



DP 的轉移順序

- 轉移順序必須是一張 DAG (有向無環圖)
- 不能夠發生 $f(b)$ 從 $f(a)$ 轉移，卻又讓 $f(a)$ 從 $f(b)$ 轉移的情形
- 這個概念等一下講到區間 DP (Range DP) 與位元 DP 時，會再次遇到

Longest Increasing Subsequnce (最長遞增子序列)

Longest Increasing Subsequnce (最長遞增子序列)

最長遞增子序列

你有一個 n 項的陣列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，請在這個陣列中找到最長遞增子序列的長度

最長遞增子序列: 找到一個集合 $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\},\ 1 \leq p_i \leq n$，使得 $a_{p_1} < a_{p_2} < \cdots < a_{p_k}$ 且 k 是最大的。

在上一堂課，想必大家都已經學會這題如何在 $O(n^2)$ 的時間解決了!

Longest Increasing Subsequnce (最長遞增子序列)

最長遞增子序列

你有一個 n 項的陣列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，請在這個陣列中找到最長遞增子序列的長度

最長遞增子序列: 找到一個集合 $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\},\ 1 \leq p_i \leq n$，使得 $a_{p_1} < a_{p_2} < \cdots < a_{p_k}$ 且 k 是最大的。

假設 $dp[i]$ 為停在第 i 個元素時，最長遞增子序列的長度

最長遞增子序列

你有一個 n 項的陣列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，請在這個陣列中找到最長遞增子序列的長度

最長遞增子序列: 找到一個集合 $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\},\ 1 \le p_i \le n$，使得 $a_{p_1} < a_{p_2} < \cdots < a_{p_k}$ 且 k 是最大的。

假設 $dp[i]$ 為停在第 i 個元素時，最長遞增子序列的長度
那麼我們可以枚舉每一個元素 i 以及所有 $j < i$，轉移式為

$$dp[i] = \max_{1 \le j < i,\ a_j < a_i} (dp[i], dp[j] + 1)$$

最長遞增子序列

你有一個 n 項的陣列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，請在這個陣列中找到最長遞增子序列的長度

最長遞增子序列: 找到一個集合 $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\},\ 1 \le p_i \le n$，使得 $a_{p_1} < a_{p_2} < \cdots < a_{p_k}$ 且 k 是最大的。

假設 $dp[i]$ 為停在第 i 個元素時，最長遞增子序列的長度
那麼我們可以枚舉每一個元素 i 以及所有 $j < i$，轉移式為

$$dp[i] = \max_{1 \le j < i,\ a_j < a_i} (dp[i], dp[j] + 1)$$

時間複雜度即為 $O(n^2)$

最長遞增子序列

你有一個 n 項的陣列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，請在這個陣列中找到最長遞增子序列的長度

最長遞增子序列: 找到一個集合 $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\},\ 1 \leq p_i \leq n$，使得 $a_{p_1} < a_{p_2} < \cdots < a_{p_k}$ 且 k 是最大的。

事實上，這個題目有 $O(n \log n)$ 的作法，而這兩種分別是

1. 二分搜
2. 使用資料結構 (BIT、線段樹)

而第二種做法，明天會由 Colten 來教各位，我們來談談第一種方式

Longest Increasing Subsequnce (最長遞增子序列)

以下為 DP 表格與原本的陣列

a_i	1	4	5	3	6	7	5	9
$dp[i]$	1	2	3	2	4	5	2	6

Longest Increasing Subsequnce (最長遞增子序列)

以下為 DP 表格與原本的陣列

a_i	1	4	5	3	6	7	5	9
$dp[i]$	1	2	3	2	4	5	2	6

設一個 v 陣列，而 $v[j]$ 表示著當 $dp[i]$ 為 j 時，a_i 的最小值

j	1	2	3	4	5	6
$v[j]$	1	3	5	6	7	9

Longest Increasing Subsequnce (最長遞增子序列)

以下為 DP 表格與原本的陣列

a_i	1	4	5	3	6	7	5	9
$dp[i]$	1	2	3	2	4	5	2	6

設一個 v 陣列，而 $v[j]$ 表示著當 $dp[i]$ 為 j 時，a_i 的最小值

j	1	2	3	4	5	6
$v[j]$	1	3	5	6	7	9

會發現 v 會是遞增的，我們可以一邊更新 v，一邊二分搜尋找 $dp[i]$ 的答案

Longest Increasing Subsequnce (最長遞增子序列)

程式碼如下，十分簡單: (**複雜度**: $O(n \log n)$)

```
int dp[MAXN], arr[MAXN];
vector<int> v;

for(int i = 1;i <= n;i++) {
    int idx = lower_bound(v.begin(), v.end(), arr[i]) - v.
       begin();
    dp[i] = idx + 1;
    if(idx == v.size()) v.push_back(arr[i]);
    else v[idx] = arr[i];
}

cout << v.size() << "\n";
```

例題

APCS 2021 一月場 p4 - 飛黃騰達

有一隻企鵝 Gino 一開始停在座標 $(0, 0)$ 的位置，在每一次移動，他只能往上或往右走，而第一象限中，一共有 n 個果實，每個果實的位置在 (x_i, y_i)，請問企鵝 Gino 最多可以吃到幾個果實?

例題

APCS 2021 一月場 p4 - 飛黃騰達

有一隻企鵝 Gino 一開始停在座標 $(0, 0)$ 的位置，在每一次移動，他只能往上或往右走，而第一象限中，一共有 n 個果實，每個果實的位置在 (x_i, y_i)，請問企鵝 Gino 最多可以吃到幾個果實?

我們將果實以 x 座標進行排序之後，只要對 y 座標找到 LIS 的長度，就是這題的答案了!

練習題

CSES - Increasing Subsequence

請找到給定陣列的最長遞增子序列。

TIOJ 1941 - 直升機抓寶 (Helicopter)

由於題目較難解釋，請至 TIOJ 查看

USACO Guide - LCS on Permutations

給你兩個 $1 \sim n$ 的排列，請找到這兩個排列的 LCS (最長共同子序列)

各種背包問題

背包問題種類

- $0/1$ 背包問題
- 無限背包問題
- 有限背包問題
- 混合背包問題 (同時出現很多種)
- 二維背包問題
- 分組背包問題
- 分數背包

0/1 背包問題

0/1 背包問題 (CSES - Book Shop)

你有一個容量為 C 的背包，有 n 個物品，每個物品的重量為 w_i，每個物品可以拿一個或者不拿，請問最多可以拿多少物品?

0/1 背包問題

0/1 背包問題 (CSES - Book Shop)

你有一個容量為 C 的背包，有 n 個物品，每個物品的重量為 w_i，每個物品可以拿一個或者不拿，請問最多可以拿多少物品?

0/1 背包問題的意思是指每個物品都可以拿 0 個或 1 個

0/1 背包問題

0/1 背包問題 (CSES - Book Shop)

你有一個容量為 C 的背包，有 n 個物品，每個物品的重量為 w_i，每個物品可以拿一個或者不拿，請問最多可以拿多少物品?

這個問題其實跟之前的硬幣問題很像，也就是我們說過貪心不一定成立的那個問題

0/1 背包問題

0/1 背包問題 (CSES - Book Shop)

你有一個容量為 C 的背包，有 n 個物品，每個物品的重量為 w_i，每個物品可以拿一個或者不拿，請問最多可以拿多少物品?

這個問題其實跟之前的硬幣問題很像，也就是我們說過貪心不一定成立的那個問題
那我們來講講這個問題的作法吧

0/1 背包問題

0/1 背包問題 (CSES - Book Shop)

你有一個容量為 C 的背包，有 n 個物品，每個物品的重量為 w_i，每個物品可以拿一個或者不拿，請問最多可以拿多少物品?

我們設 $dp[i][j]$ 表示對於前 i 個物品湊出總重量為 j 的時候，最多可以拿幾個物品。

0/1 背包問題

0/1 背包問題 (CSES - Book Shop)

你有一個容量為 C 的背包，有 n 個物品，每個物品的重量為 w_i，每個物品可以拿一個或者不拿，請問最多可以拿多少物品?

我們設 $dp[i][j]$ 表示對於前 i 個物品湊出總重量為 j 的時候，最多可以拿幾個物品。接著，我們分別枚舉那 n 個物品，則轉移式會是

$$dp[i][j] = \max(dp[i-1][j-w[i]] + 1)$$

0/1 背包問題

程式碼大概可以寫成以下的樣子

```
for(int i = 1;i <= n;i++){
    for(int j = 0;j <= C;j++){
        if(j-w[i] >= 0){
            dp[i][j] = max(dp[i][j], dp[i-1][j-w[i]] + 1);
        }
    }
}
```

0/1 背包問題

不過，我們可以使用滾動 DP 的技巧，把第一個維度壓掉，時間複雜度: $O(nC)$

```
for(int i = 1;i <= n;i++){
    for(int j = C;j >= 0;j--){
        if(j-w[i] >= 0){
            dp[j] = max(dp[j], dp[j-w[i]] + 1);
        }
    }
}
```

注意! 第二個迴圈必須由 C 開始枚舉到 0，否則一個物品可能會多拿!

0/1 背包問題

題外話: 在演算法中有很多個名稱含有 0/1 的算法，大家要搞清楚每個的分別!

演算法名稱	0/1 的意義
0/1 背包問題	每個物品只能拿 1 個或 0 個
0/1 枚舉 (位元枚舉)	用二進位的方式進行枚舉
0/1 二分搜 (?	我不知道，據說是 dreamoon 發明的，倍增法二分搜
0/1 BFS	圖的邊只有 0/1 時，用 BFS 在 $O(V+E)$ 找到最短路徑

無限背包問題

無限背包問題 (Coin Combinations II)

你有一個容量為 C 的背包，有 n 個物品，每個物品的重量為 w_i，每個物品可以拿任意數量個，請問最多可以拿多少物品?

無限背包問題

無限背包問題 (Coin Combinations II)

你有一個容量為 C 的背包，有 n 個物品，每個物品的重量為 w_i，每個物品可以拿任意數量個，請問最多可以拿多少物品?

無限背包問題的意思是指每個物品都可以拿任意數量個。

無限背包問題

無限背包問題 (Coin Combinations II)

你有一個容量為 C 的背包，有 n 個物品，每個物品的重量為 w_i，每個物品可以拿任意數量個，請問最多可以拿多少物品?

DP 狀態的假設與 $0/1$ 背包十分相似

無限背包問題

無限背包問題 (Coin Combinations II)

你有一個容量為 C 的背包，有 n 個物品，每個物品的重量為 w_i，每個物品可以拿任意數量個，請問最多可以拿多少物品?

DP 狀態的假設與 $0/1$ 背包十分相似

設 $dp[i][j]$ 表示對於前 i 個物品湊出總重量為 j 的時候，最多可以拿幾個物品。

無限背包問題

無限背包問題 (Coin Combinations II)

你有一個容量為 C 的背包，有 n 個物品，每個物品的重量為 w_i，每個物品可以拿任意數量個，請問最多可以拿多少物品?

DP 狀態的假設與 $0/1$ 背包十分相似
設 $dp[i][j]$ 表示對於前 i 個物品湊出總重量為 j 的時候，最多可以拿幾個物品。
接著，我們分別枚舉那 n 個物品，則轉移式會是

$$dp[i][j] = \max(dp[i-1][j-w[i]] + 1)$$

無限背包問題

無限背包問題 (Coin Combinations II)

你有一個容量為 C 的背包，有 n 個物品，每個物品的重量為 w_i，每個物品可以拿任意數量個，請問最多可以拿多少物品?

DP 狀態的假設與 $0/1$ 背包十分相似
設 $dp[i][j]$ 表示對於前 i 個物品湊出總重量為 j 的時候，最多可以拿幾個物品。
接著，我們分別枚舉那 n 個物品，則轉移式會是

$$dp[i][j] = \max(dp[i-1][j-w[i]] + 1)$$

欸? 不是一模一樣嗎?

無限背包問題

無限背包問題與 $0/1$ 背包問題的差別只在實作上! 以下是範例 code

```
for(int i = 1;i <= n;i++){
    for(int j = 0;j <= C;j++){
        dp[i][j] = dp[i-1][j];
        if(j-w[i] >= 0){
            dp[i][j] = max(dp[i][j], dp[i][j-w[i]] + 1);
        }
    }
}
```

無限背包問題

同樣可以使用滾動 DP 壓掉一個維度，時間複雜度: $O(nC)$

```
for(int i = 1;i <= n;i++){
    for(int j = 0;j <= C;j++){
        if(j-w[i] >= 0){
            dp[j] = max(dp[j], dp[j-w[i]] + 1);
        }
    }
}
```

有限背包問題

有限背包問題 (CSES - Book Shop II)

你有一個容量為 C 的背包，有 n 個物品，每個物品的重量為 w_i，每個物品的數量為 a_i 個，請問最多可以拿多少物品?

基本上轉移式跟前兩個也是一模一樣，不過追加了物品數量的限制，我們一樣直接看看實作

有限背包問題

有限背包的程式碼 (滾動)

```
for(int i = 1;i <= n;i++){
    for(int x = 1;x <= a[i];x++){
        for(int j = C;j >= 0;j--){
            if(j-w[i] >= 0){
                dp[j] = max(dp[j], dp[j-w[i]] + 1);
            }
        }
    }
}
```

有沒有發現什麼?

有限背包問題

有限背包的程式碼 (滾動)，時間複雜度 $O(\sum_{i=1}^{n} a_i C)$

```
for(int i = 1;i <= n;i++){
    for(int x = 1;x <= a[i];x++){
        for(int j = C;j >= 0;j--){
            if(j-w[i] >= 0){
                dp[j] = max(dp[j], dp[j-w[i]] + 1);
            }
        }
    }
}
```

其實這份 code **就只是我們把** a_i **個物品想成是** a_i **個不同物品，做** $0/1$ **背包**

有限背包問題

有限背包的程式碼 (滾動)，時間複雜度 $O(\sum_{i=1}^{n} a_i C)$

```
for(int i = 1;i <= n;i++){
    for(int x = 1;x <= a[i];x++){
        for(int j = C;j >= 0;j--){
            if(j-w[i] >= 0){
                dp[j] = max(dp[j], dp[j-w[i]] + 1);
            }
        }
    }
}
```

其實這份 code 就只是我們把 a_i 個物品想成是 a_i 個不同物品，做 $0/1$ 背包 但是... 我們真的需要將他拆成那麼多物品嗎?

有限背包問題 - 物品拆分

- 想想看一個概念，組出 $0 \sim n$ 的數字，我們最少需要多少數字呢?

有限背包問題 - 物品拆分

- 想想看一個概念，組出 $0 \sim n$ 的數字，我們最少需要多少數字呢?
- 真的需要 n 個 1 嗎?

有限背包問題 - 物品拆分

- 想想看一個概念，組出 $0 \sim n$ 的數字，我們最少需要多少數字呢?
- 真的需要 n 個 1 嗎?
- 二進位!

有限背包問題 - 物品拆分

我們可以將 a_i 拆成 1、2、4、$\cdots$、2^k 個、$a_i - (2^{k+1} - 1)$ 個

而物品的數量就被我們從原本的 $\sum_{i=1}^{n} a_i$，變成了 $\sum_{i=1}^{n} \lg(a_i)$ 了!
時間複雜度: $O(n \lg(\max(a_i))\, C)$

有限背包問題 - 還能更快嗎?

事實上，有限背包問題還有更快的方式，可以把 $\log$ 給壓掉，不過那個要使用到這堂課後面會教的單調隊列優化。有興趣的可以自己查查看做法。

混合背包問題

現在，物品可能有無限多個，一個，或者 a_i 個

- 剛剛有提到無限背包和 $0/1$ 背包的差別在迴圈的順序
- 同時，我們也講到，我們可以藉由物品拆分，將有限背包問題轉成 $0/1$ 背包問題。
- 那們我們就在分不同的方式處理，無限背包自己處理，$0/1$ 背包自己處理即可

混合背包問題

無限背包用這個

```
for(int j = 0;j <= C;j++){
    if(j-w[i] >= 0){
        dp[j] = max(dp[j], dp[j-w[i]] + 1);
    }
}
```

有限背包和 $0/1$ 用這個

```
for(int j = C;j >= 0;j--){
    if(j-w[i] >= 0){
        dp[j] = max(dp[j], dp[j-w[i]] + 1);
    }
}
```

二維背包問題

二維背包問題

你有一個可以載重 M 且容量為 C 的背包，有 n 個物品，每個物品的重量為 w_i，體積為 v_i，每個物品可拿可不拿，請問最多可以拿多少物品?

除了重量以外，多了體積! 要怎麼處理呢?

二維背包問題

二維背包問題

你有一個可以載重 M 且容量為 C 的背包，有 n 個物品，每個物品的重量為 w_i，體積為 v_i，每個物品可拿可不拿，請問最多可以拿多少物品?

除了重量以外，多了體積! 要怎麼處理呢?
狀態多開一維!

二維背包問題

二維背包問題

你有一個可以載重 M 且容量為 C 的背包，有 n 個物品，每個物品的重量為 w_i，體積為 v_i，每個物品可拿可不拿，請問最多可以拿多少物品?

設 $dp[i][j][k]$ 表示總重量為 j 且容量為 k 時，最多可以裝幾個物品。

轉移式為:

$$dp[i][j][k] = \max(dp[i-1][j-w[i]][k-v[i]] + 1)$$

二維背包問題

時間複雜度: $O(nMC)$**，實作程式碼如下**:

```
for(int i = 1;i <= n;i++){
    for(int j = M;j >= 0;j--){
        if(j-w[i] >= 0){
            for(int k = C; k >= 0; k--){
                dp[i][j][k] = max(dp[i][j][k], dp[i-1][j-w[i
                    ]][k-v[i]] + 1);
            }
        }
    }
}
```

分組背包問題

分組背包問題

你有一個容量為 C 的背包，一共有 t 組，每一組有 a_i 個物品，同一組最多只能選一個，請問最多可以拿多少物品?

有沒有人有什麼想法呢?

分組背包問題

時間複雜度: $O(nC\sum_{i=1}^{t} a_i)$，**實作程式碼如下**:

```
for(int i = 1;i <= t;i++){
    for(int j = M;j >= 0;j--){
        if(j-w[i] >= 0){
            for(int k = 0; k <= v[t].size(); k++){
                dp[j] = max(dp[j], dp[j-w[i][k]] + 1);
            }
        }
    }
}
```

分數背包問題

二維背包問題

你有一個可以容量為 C 的背包，有 n 個物品，每個物品的重量為 w_i，價值為 v_i，每個物品你可以拿 $0 \sim 1$ 個 (可以拿一部分)，最大可以拿到多少價值?

分數背包問題

二維背包問題

你有一個可以容量為 C 的背包，有 n 個物品，每個物品的重量為 w_i，價值為 v_i，每個物品你可以拿 $0 \sim 1$ 個 (可以拿一部分)，最大可以拿到多少價值?

這個其實不是 DP，直接 Greedy 拿取 CP 值 $(\frac{v_i}{w_i})$ 最大的即可

區間 DP (Range DP)

區間 DP (Range DP)

AtCoder DP Contest pN - Slimes

有 n 隻史萊姆排成一列，而每一次，你可以選擇相鄰的史萊姆，若兩隻史萊姆的大小為 a, b，則他們會合併成一個小為 $a + b$ 的史萊姆，並消耗 $a + b$ 的能量。請找到讓這 n 隻史萊姆合併成一隻大史萊姆所需花費的最小能量。

區間 DP (Range DP)

AtCoder DP Contest pN - Slimes

有 n 隻史萊姆排成一列，而每一次，你可以選擇相鄰的史萊姆，若兩隻史萊姆的大小為 a, b，則他們會合併成一個小為 $a + b$ 的史萊姆，並消耗 $a + b$ 的能量。請找到讓這 n 隻史萊姆合併成一隻大史萊姆所需花費的最小能量。

這題的想法與之前大家所寫過的不太一樣，他的狀態設計不再只是像以前的 $dp[i]$ 表示前 i 個合併後的最小能量了

區間 DP (Range DP)

AtCoder DP Contest pN - Slimes

有 n 隻史萊姆排成一列，而每一次，你可以選擇相鄰的史萊姆，若兩隻史萊姆的大小為 a, b，則他們會合併成一個小為 $a + b$ 的史萊姆，並消耗 $a + b$ 的能量。請找到讓這 n 隻史萊姆合併成一隻大史萊姆所需花費的最小能量。

我們假設 $dp[l][r]$ 表示將整個區間 $[l, r]$ 的史萊姆合併之後，所需花費的最小能量。

區間 DP (Range DP)

AtCoder DP Contest pN - Slimes

有 n 隻史萊姆排成一列，而每一次，你可以選擇相鄰的史萊姆，若兩隻史萊姆的大小為 a, b，則他們會合併成一個小為 $a+b$ 的史萊姆，並消耗 $a+b$ 的能量。請找到讓這 n 隻史萊姆合併成一隻大史萊姆所需花費的最小能量。

我們假設 $dp[l][r]$ 表示將整個區間 $[l, r]$ 的史萊姆合併之後，所需花費的最小能量。
而轉移式會是

$$dp[l][r] = \max_{l \le k < r} (dp[l][k] + dp[k+1][r] + \sum_{i=l}^{r} a_i)$$

邊界狀態為

$$dp[i][i] = 0$$

區間 DP (Range DP)

AtCoder DP Contest pN - Slimes

有 n 隻史萊姆排成一列，而每一次，你可以選擇相鄰的史萊姆，若兩隻史萊姆的大小為 a, b，則他們會合併成一個小為 $a + b$ 的史萊姆，並消耗 $a + b$ 的能量。請找到讓這 n 隻史萊姆合併成一隻大史萊姆所需花費的最小能量。

不過這時，有個很重要的問題出現了! 轉移的順序該是如何呢?

區間 DP (Range DP)

以下有兩種不同的轉移順序，我們來看看何者會是正確的

第一種:

```
for (int l = 1; l <= n; l++) {
    for (int r = 1; r <= n; r++) {
        for (int k = l; k <= r; k++) {
            dp[l][r] = max(dp[l][r], dp[l][k] + dp[k+1][r] +
                sum(l,r));
        }
    }
}
```

區間 DP (Range DP)

以下有兩種不同的轉移順序，我們來看看何者會是正確的

第二種:

```
for (int l = n; l >= 1; l--) {
    for (int r = l; r <= n; r++) {
        for (int k = l; k < r; k++) {
            dp[l][r] = max(dp[l][r], dp[l][k] + dp[k+1][r] +
                sum(l,r));
        }
    }
}
```

答案是第二種!

```
for (int l = n; l >= 1; l--) {
    for (int r = l; r <= n; r++) {
        for (int k = l; k < r; k++) {
            dp[l][r] = max(dp[l][r], dp[l][k] + dp[k+1][r] +
                sum(l,r));
        }
    }
}
```

區間 DP (Range DP)

- 第一種方式在轉移的時候會有很大的問題
- 我們可能還沒處理好小狀態，就直接去用小狀態計算大狀態的答案了
- 而這是我們不想要看到的

區間 DP (Range DP)

AtCoder DP Contest pN - Slimes

有 n 隻史萊姆排成一列，而每一次，你可以選擇相鄰的史萊姆，若兩隻史萊姆的大小為 a, b，則他們會合併成一個小為 $a + b$ 的史萊姆，並消耗 $a + b$ 的能量。請找到讓這 n 隻史萊姆合併成一隻大史萊姆所需花費的最小能量。

而這題的時間複雜度為 $O(n^3)$ (使用前綴和計算區間和)

區間 DP (Range DP)

AtCoder DP Contest pL - Deque

Koying 和 Colten 在玩遊戲，他們在地上擺了 n 個石頭排成一列，並在上面用奇異筆寫上了數字。由 Koying 先手，他們每一次可以拿取最前面或最後面的石頭，並得到那顆石頭上面寫下的數字加入各自的分數中。兩個人都以最佳策略進行遊戲，請問最後兩人的分數分別會是多少?

區間 DP (Range DP)

AtCoder DP Contest pL - Deque

Koying 和 Colten 在玩遊戲，他們在地上擺了 n 個石頭排成一列，並在上面用奇異筆寫上了數字。由 Koying 先手，他們每一次可以拿取最前面或最後面的石頭，並得到那顆石頭上面寫下的數字加入各自的分數中。兩個人都以最佳策略進行遊戲，請問最後兩人的分數分別會是多少?

有了剛剛那題的經驗之後，這題我們留給大家一點時間進行思考

區間 DP (Range DP)

AtCoder DP Contest pL - Deque

Koying 和 Colten 在玩遊戲，他們在地上擺了 n 個石頭排成一列，並在上面用奇異筆寫上了數字。由 Koying 先手，他們每一次可以拿取最前面或最後面的石頭，並得到那顆石頭上面寫下的數字加入各自的分數中。兩個人都以最佳策略進行遊戲，請問最後兩人的分數分別會是多少?

假設 $dp[l][r]$ 為先手在區間 $[l, r]$ 時，能夠獲得的最大分數

區間 DP (Range DP)

AtCoder DP Contest pL - Deque

Koying 和 Colten 在玩遊戲，他們在地上擺了 n 個石頭排成一列，並在上面用奇異筆寫上了數字。由 Koying 先手，他們每一次可以拿取最前面或最後面的石頭，並得到那顆石頭上面寫下的數字加入各自的分數中。兩個人都以最佳策略進行遊戲，請問最後兩人的分數分別會是多少?

假設 $dp[l][r]$ 為先手在區間 $[l, r]$ 時，能夠獲得的最大分數
轉移式為

$$dp[l][r] = \max(a_l + sum(l, r) - dp[l + 1][r], sum(l, r) - dp[l][r - 1] + a_r)$$

區間 DP (Range DP)

AtCoder DP Contest pL - Deque

Koying 和 Colten 在玩遊戲，他們在地上擺了 n 個石頭排成一列，並在上面用奇異筆寫上了數字。由 Koying 先手，他們每一次可以拿取最前面或最後面的石頭，並得到那顆石頭上面寫下的數字加入各自的分數中。兩個人都以最佳策略進行遊戲，請問最後兩人的分數分別會是多少?

假設 $dp[l][r]$ 為先手在區間 $[l, r]$ 時，能夠獲得的最大分數
轉移式為

$$dp[l][r] = \max(a_l + sum(l, r) - dp[l + 1][r], sum(l, r) - dp[l][r - 1] + a_r)$$

邊界狀態為

$$dp[i][i] = a_i$$

區間 DP (Range DP)

Codeforces 607B - Zuma

給你一個 n 項的陣列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，你每次可以刪除一個回文子陣列，請問最少要刪除幾次，才能將整個陣列消除。

區間 DP (Range DP)

Codeforces 607B - Zuma

給你一個 n 項的陣列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，你每次可以刪除一個回文子陣列，請問最少要刪除幾次，才能將整個陣列消除。

同樣留給大家一點時間想想看

區間 DP (Range DP)

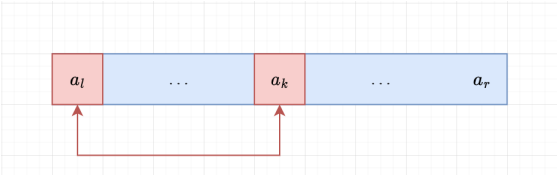
Codeforces 607B - Zuma

給你一個 n 項的陣列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，你每次可以刪除一個回文子陣列，請問最少要刪除幾次，才能將整個陣列消除。

這題的想法與前兩題差不多，假設 $dp[l][r]$ 為將 $[l, r]$ 消完所需的最少次數。
不過轉移式有兩種 case

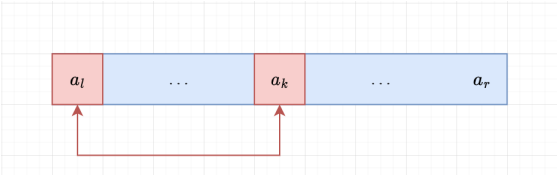
區間 DP (Range DP)

Case 1: $a_l = a_k$，**轉移** $dp[l+1][k-1] + dp[k+1][r]$



區間 DP (Range DP)

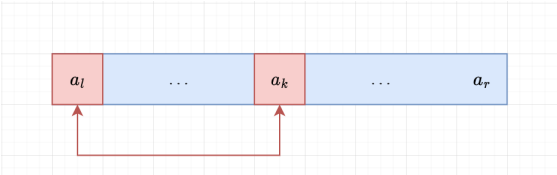
Case 1: $a_l = a_k$，**轉移** $dp[l+1][k-1] + dp[k+1][r]$



Case 2: **消除** a_l，**轉移** $1 + dp[l+1][r]$

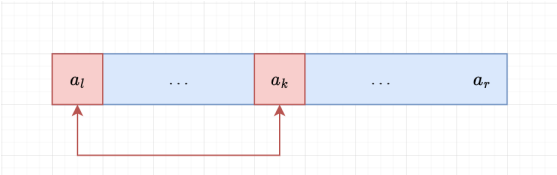
練習

Case 1: $a_l = a_k$，**轉移** $dp[l+1][k-1] + dp[k+1][r]$



練習

Case 1: $a_l = a_k$，**轉移** $dp[l+1][k-1] + dp[k+1][r]$



Case 2: **消除** a_l，**轉移** $1 + dp[l+1][r]$

位元 DP (Bitmask DP)

位元 DP (Bitmask DP)

在我們看位元 DP 之前，先幫大家複習一下位元運算

名稱	符號
and	&
or	|
xor	
left shift	<<
right shift	>>

旅行推銷員問題 (Travelling Salesman Problem)

在某個國家，一共有 n 個城市，以及兩個城市之間的距離，現在有一個旅行推銷員，他希望從城市 1 開始出發，恰好經過所有城市一次之後，再回到城市 1。請問他最少要走過多少距離?

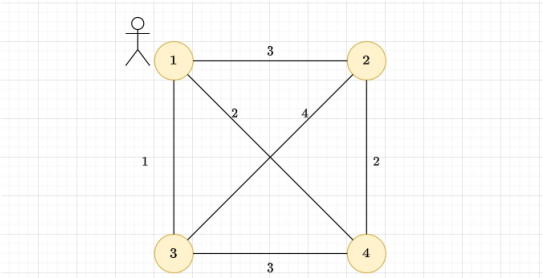
測資範圍: $1 \leq n \leq 20$

位元 DP (Bitmask DP)

旅行推銷員問題 (Travelling Salesman Problem)

在某個國家，一共有 n 個城市，以及兩個城市之間的距離，現在有一個旅行推銷員，他希望從城市 1 開始出發，恰好經過所有城市一次之後，再回到城市 1。請問他最少要走過多少距離?

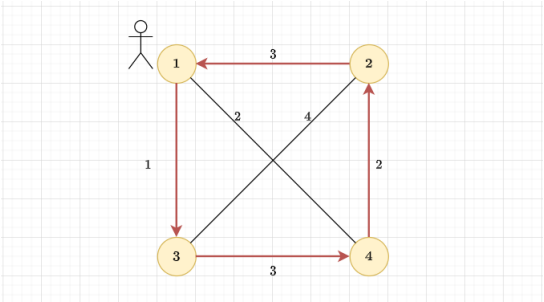
測資範圍: $1 \leq n \leq 20$



旅行推銷員問題 (Travelling Salesman Problem)

在某個國家，一共有 n 個城市，以及兩個城市之間的距離，現在有一個旅行推銷員，他希望從城市 1 開始出發，恰好經過所有城市一次之後，再回到城市 1。請問他最少要走過多少距離?

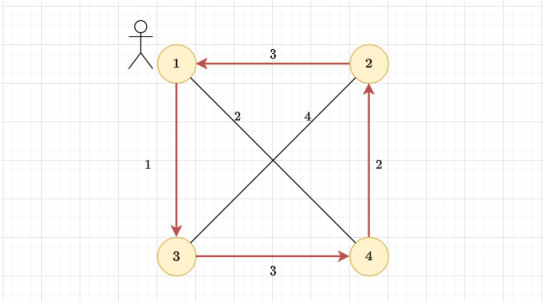
測資範圍: $1 \leq n \leq 20$



旅行推銷員問題 (Travelling Salesman Problem)

在某個國家，一共有 n 個城市，以及兩個城市之間的距離，現在有一個旅行推銷員，他希望從城市 1 開始出發，恰好經過所有城市一次之後，再回到城市 1。請問他最少要走過多少距離?

測資範圍: $1 \leq n \leq 20$



位元 DP (Bitmask DP)

旅行推銷員問題 (Travelling Salesman Problem)

在某個國家，一共有 n 個城市，以及兩個城市之間的距離，現在有一個旅行推銷員，他希望從城市 1 開始出發，恰好經過所有城市一次之後，再回到城市 1。請問他最少要走過多少距離?

測資範圍: $1 \leq n \leq 20$

這題的 DP 狀態的設計與大家之前看過的應該都不太一樣，因此我們直接來看看作法吧!

位元 DP (Bitmask DP)

旅行推銷員問題 (Travelling Salesman Problem)

在某個國家，一共有 n 個城市，以及兩個城市之間的距離，現在有一個旅行推銷員，他希望從城市 1 開始出發，恰好經過所有城市一次之後，再回到城市 1。請問他最少要走過多少距離?

測資範圍: $1 \leq n \leq 20$

我們假設 $dp[i][mask]$ 為停在第 i 個城市，$mask$ 表示已經經過了幾個城市的最短距離。

位元 DP (Bitmask DP)

旅行推銷員問題 (Travelling Salesman Problem)

在某個國家，一共有 n 個城市，以及兩個城市之間的距離，現在有一個旅行推銷員，他希望從城市 1 開始出發，恰好經過所有城市一次之後，再回到城市 1。請問他最少要走過多少距離?

測資範圍: $1 \leq n \leq 20$

我們假設 $dp[i][mask]$ 為停在第 i 個城市，$mask$ 表示已經經過了幾個城市的最短距離。
範例: $dp[1][0011]$ 表示停在第 1 個城市，已經走過了第 0 和 1 個城市

旅行推銷員問題 (Travelling Salesman Problem)

在某個國家，一共有 n 個城市，以及兩個城市之間的距離，現在有一個旅行推銷員，他希望從城市 1 開始出發，恰好經過所有城市一次之後，再回到城市 1。請問他最少要走過多少距離?

測資範圍: $1 \leq n \leq 20$

轉移式的話:

$$dp[i][mask] = \max_{j \in adj[i]} (dp[j][mask2^i] + dis[j][i])$$

旅行推銷員問題 (Travelling Salesman Problem)

在某個國家，一共有 n 個城市，以及兩個城市之間的距離，現在有一個旅行推銷員，他希望從城市 1 開始出發，恰好經過所有城市一次之後，再回到城市 1。請問他最少要走過多少距離?

測資範圍: $1 \leq n \leq 20$

轉移式的話:

$$dp[i][mask] = \max_{j \in adj[i]} (dp[j][mask2^i] + dis[j][i])$$

時間複雜度: $O(n2^n)$

位元 DP (Bitmask DP)

旅行推銷員問題 (Travelling Salesman Problem)

在某個國家，一共有 n 個城市，以及兩個城市之間的距離，現在有一個旅行推銷員，他希望從城市 1 開始出發，恰好經過所有城市一次之後，再回到城市 1。請問他最少要走過多少距離?

測資範圍: $1 \leq n \leq 20$

寫法如下: Code

CSES - Elevator Rides

有 n 個人要搭電梯，第 i 個人的重量為 w_i，而一班電梯只能載重 m kg 的重量，請問他們至少要搭幾次電梯才能載完所有人?

測資範圍: $1 \leq n \leq 20$

根據上一題的想法，有沒有人有狀態設計的想法呢?

位元 DP (Bitmask DP)

CSES - Elevator Rides

有 n 個人要搭電梯，第 i 個人的重量為 w_i，而一班電梯只能載重 m kg 的重量，請問他們至少要搭幾次電梯才能載完所有人?

測資範圍: $1 \leq n \leq 20$

設 $dp[mask]$ 為已經搭了那些人時，搭的電梯數量與最後一個電梯的總重量。
舉例: $dp[101]$ 表示已經搭了第 0 和第 2 個人時的狀態。

CSES - Elevator Rides

有 n 個人要搭電梯，第 i 個人的重量為 w_i，而一班電梯只能載重 m kg 的重量，請問他們至少要搭幾次電梯才能載完所有人?

測資範圍: $1 \leq n \leq 20$

這題的轉移式由於比較難解釋，我們直接來看看程式碼:

Code

單調隊列優化 (Monotonic Queue Optimization)

單調隊列?

- 單調隊列是一個使用 Deque 或 Stack 維護的一種結構
- 最前面的元素會是最大或最小的元素
- 如果是最大的，整個隊列會是遞增的
- 反之，整個隊列會是遞減的
- 通常與 Sliding Window 一起使用

單調隊列

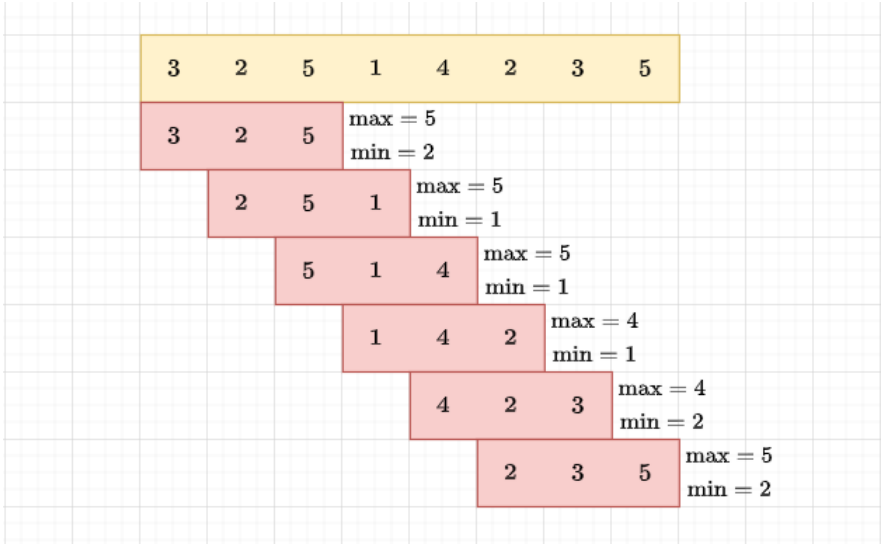
Sliding Maximum/Minimum (Zerojudge a146)

你有一個長度為 n 的陣列 $a_1, \ldots, a_n$，請找出所有長度為 k 的子陣列的最大和最小值。

測資範圍: $n \leq 10^6$

可能大家看這個不是很能理解，因此我們來看一下圖

單調隊列


3 2 5 1 4 2 3 5
3 2 5
max = 5
min = 2
2 5 1
max = 5
min = 1
5 1 4
max = 5
min = 1
1 4 2
max = 4
min = 1
4 2 3
max = 4
min = 2
2 3 5
max = 5
min = 2

單調隊列

Sliding Maximum/Minimum (Zerojudge a146)

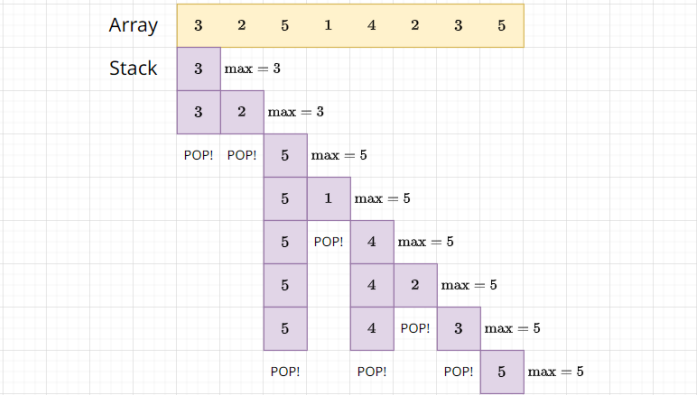
你有一個長度為 n 的陣列 $a_1, \ldots, a_n$，請找出所有長度為 k 的子陣列的最大和最小值。

測資範圍: $n \leq 10^6$

我們要怎麼做到這一點呢? 此時，單調隊列可以幫助我們做到這一點!

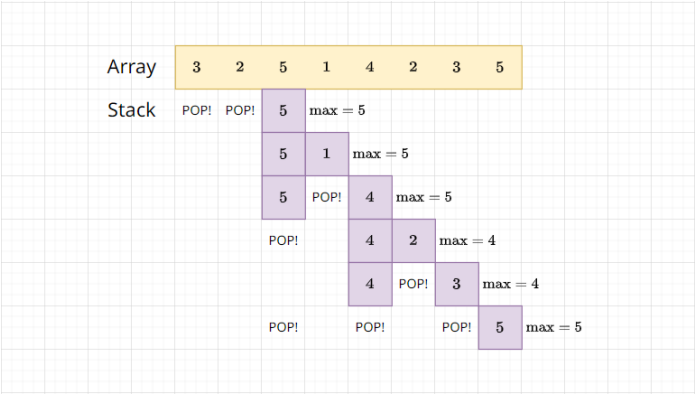
單調隊列

現在，我們想一個簡單一點的問題，我們對前綴找出維護最大值的單調隊列試試



單調隊列

用一樣的做法，不過長度超過 k 的也跟著 POP 掉!



單調隊列

只要對最大最小值都做一樣的事情，就可以得到固定長度的區間为。
時間複雜度: $O(n)$，比直接用 set 等資料結構還要快!

單調隊列優化

Zerojudge c528. 相隔小於一定距離最小總和子序列

給定一個長度為 N 的整數序列 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ 及一個正整數 K ，請蓋掉任意個數字使得原序列中任意的連續 K 個數字都至少有一個數字被蓋掉了，請問蓋掉的數字的總和最小為多少？

單調隊列優化

Zerojudge c528. 相隔小於一定距離最小總和子序列

給定一個長度為 N 的整數序列 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ 及一個正整數 K ，請蓋掉任意個數字使得原序列中任意的連續 K 個數字都至少有一個數字被蓋掉了，請問蓋掉的數字的總和最小為多少？

這題的 DP 式大家可以想一下，有想法的都可以提出來。

單調隊列優化

Zerojudge c528. 相隔小於一定距離最小總和子序列

給定一個長度為 N 的整數序列 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ 及一個正整數 K ，請蓋掉任意個數字使得原序列中任意的連續 K 個數字都至少有一個數字被蓋掉了，請問蓋掉的數字的總和最小為多少？

設 $dp[i]$ 為遮掉第 i 個元素且前 i 個數字滿足題目條件時的最小總和。
則轉移式為

$$dp[i] = \min_{j=\max(0,i-k)}^{i-1} (dp[j] + a[i])$$

這個轉移式，我們可以很輕易地使用兩個迴圈，在 $O(NK)$ 的時間做完

單調隊列優化

Zerojudge c528. 相隔小於一定距離最小總和子序列

給定一個長度為 N 的整數序列 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ 及一個正整數 K ，請蓋掉任意個數字使得原序列中任意的連續 K 個數字都至少有一個數字被蓋掉了，請問蓋掉的數字的總和最小為多少？

$$dp[i] = \min_{j=\max(0,i-k)}^{i-1} (dp[j]) + a[i]$$

不過，觀察到，其實我們只是想要找一段固定長度的區間的最小值!
單調隊列! 時間複雜度: $O(n)$

矩陣快速冪

矩陣乘法!

在上禮拜的數學課，不知道大家有沒有把矩陣乘法這個東西學起來呢?

$$A_{n\times m}B_{m\times p}=\sum_{k=1}^{}a_{ik}b_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

矩陣乘法!

我們可以將矩陣寫成 struct，會像是以下這樣。乘法時間複雜度為 $O(nmp)$

```cpp
const int MOD = 998244353;

struct matrix{
    int n,m;
    vector<vector<int>> arr;

    matrix(int n_, int m_){
        n = n_;
        m = m_;
        arr.resize(n,vector<int>(m,0));
    }

    matrix operator * (matrix b){
        matrix c;
        c.resize(n,b.m);
        for(int i = 0;i < n;i++){
            for(int j = 0;j < b.m;j++){
                for(int k = 0;k < m;k++){
                    c.arr[i][j] = (c.arr[i][j] + arr[i][k] * b.arr[k][j]) % MOD;
                }
            }
        }
        return c;
    }
}
```

跟 DP 有什麼關係?

費氏數列第 n 項! (CSES - Fibonacci Numbers)

費氏數列，是一個定義為以下的數列

- $f_0 = 1$
- $f_1 = 1$
- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

現在，請找到費氏數列第 n 項 ($n \leq 10^{18}$)，請輸出 $\mod 10^9 + 7$ 後的結果

n 超級大欸? 該怎麼辦呢?

跟 DP 有什麼關係?

費氏數列第 n 項! (CSES - Fibonacci Numbers)

費氏數列，是一個定義為以下的數列

- $f_0 = 1$
- $f_1 = 1$
- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

現在，請找到費氏數列第 n 項 ($n \leq 10^{18}$)，請輸出 $\mod 10^9 + 7$ 後的結果

我們將轉移式寫成矩陣!

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{bmatrix}$$

跟 DP 有什麼關係?

費氏數列第 n 項! (CSES - Fibonacci Numbers)

費氏數列，是一個定義為以下的數列

- $f_0 = 1$
- $f_1 = 1$
- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

現在，請找到費氏數列第 n 項 ($n \leq 10^{18}$)，請輸出 $\mod 10^9 + 7$ 後的結果

轉換一下!

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 \end{bmatrix}$$

跟 DP 有什麼關係?

費氏數列第 n 項! (CSES - Fibonacci Numbers)

費氏數列，是一個定義為以下的數列

- $f_0 = 1$
- $f_1 = 1$
- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

現在，請找到費氏數列第 n 項 ($n \leq 10^{18}$)，請輸出 $\mod 10^9 + 7$ 後的結果

出現了次方，有什麼東西可以幫我們做次方的動作呢?

跟 DP 有什麼關係?

費氏數列第 n 項! (CSES - Fibonacci Numbers)

費氏數列，是一個定義為以下的數列

- $f_0 = 1$
- $f_1 = 1$
- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

現在，請找到費氏數列第 n 項 ($n \leq 10^{18}$)，請輸出 $\mod 10^9 + 7$ 後的結果

出現了次方，有什麼東西可以幫我們做次方的動作呢? 快速冪!

矩陣快速冪

因此，我們將快速冪寫成矩陣的版本

```
matrix fastpow(matrix a, int p){
    matrix res(a.n,a.n);
    res.arr = {{1,0},{0,1}}; //Identity Matrix
    while(p){
        if(p&1) res = res * a;
        a = a * a;
        p >>= 1;
    }
    return res;
}
```

費氏數列第 n 項! (CSES - Fibonacci Numbers)

費氏數列，是一個定義為以下的數列

- $f_0 = 1$
- $f_1 = 1$
- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

現在，請找到費氏數列第 n 項 ($n \leq 10^{18}$)，請輸出 $\mod 10^9 + 7$ 後的結果

我們就可以在 $O(2^3 \log n)$ 的時間找到費氏數列第 n 項了!

矩陣快速冪可以使用的地方?

一定有人很好奇，既然費氏數列可以用這樣的方式計算，那還有哪些 DP 也能這樣做呢?

矩陣快速冪可以使用的地方?

一定有人很好奇，既然費氏數列可以用這樣的方式計算，那還有哪些 DP 也能這樣做呢?
可以使用矩陣快速冪的 DP，通常會出現一種「線性遞迴」的形式

線性遞迴

每一項與前幾項的關係都是線性的!

$$dp_i = a_1\, dp_{i-1} + a_2\, dp_{i-2} + \cdots$$

例題

骰骰子問題 EX (CSES - Throwing Dice)

你有一顆六面的骰子，每個骰子可以骰出 $1 \sim 6$ 點。請問你總共有幾種方式經由骰很多次骰子湊出 x 點。$(x \leq 10^{18})$

例題

骰骰子問題 EX (CSES - Throwing Dice)

你有一顆六面的骰子，每個骰子可以骰出 $1 \sim 6$ 點。請問你總共有幾種方式經由骰很多次骰子湊出 x 點。($x \leq 10^{18}$)

這題上週 Colten 在 DP I 的課講過了一模一樣的例題，不過，範圍變大了?

例題

骰骰子問題 EX (CSES - Throwing Dice)

你有一顆六面的骰子，每個骰子可以骰出 $1 \sim 6$ 點。請問你總共有幾種方式經由骰很多次骰子湊出 x 點。$(x \leq 10^{18})$

這題上週 Colten 在 DP I 的課講過了一模一樣的例題，不過，範圍變大了? 原本的轉移式是

$$dp_i = dp_{i-1} + dp_{i-2} + \cdots + dp_{i-6}$$

例題

骰骰子問題 EX (CSES - Throwing Dice)

你有一顆六面的骰子，每個骰子可以骰出 $1 \sim 6$ 點。請問你總共有幾種方式經由骰很多次骰子湊出 x 點。($x \leq 10^{18}$)

這題上週 Colten 在 DP I 的課講過了一模一樣的例題，不過，範圍變大了? 原本的轉移式是

$$dp_i = dp_{i-1} + dp_{i-2} + \cdots + dp_{i-6}$$

事實上，這個就是一個線性遞迴的例子!

例題

我們可以將其寫成矩陣!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp_{i-1} \\ dp_{i-2} \\ dp_{i-3} \\ dp_{i-4} \\ dp_{i-5} \\ dp_{i-6} \end{bmatrix}$$

例題

骰骰子問題 EX (CSES - Throwing Dice)

你有一顆六面的骰子，每個骰子可以骰出 $1 \sim 6$ 點。請問你總共有幾種方式經由骰很多次骰子湊出 x 點。$(x \leq 10^{18})$

因此，這題就可以在 $O(6^3 \log x)$ 的時間完成了!

有向圖的矩陣快速冪!

在上週，Koying 有教過大家不同的存圖方式，而其中一種，就是「鄰接矩陣」
由於需要佔據 $n \times n$ 的空間，存取也不會很快，因此我們比較少用
但是，他其實有個很好的性質!

有向圖的矩陣快速冪!

Atcoder DP Contest R - Walk

你有一個 n 個節點的有向圖，以及他的鄰接矩陣。請找到這張圖共有幾個長度為 k 的有向路徑。

測資範圍: $n \leq 2000, k \leq 10^{18}$

這個問題，同樣的，我們可以列出他的 DP 狀態與轉移式

有向圖的矩陣快速冪!

Atcoder DP Contest R - Walk

你有一個 n 個節點的有向圖，以及他的鄰接矩陣。請找到這張圖共有幾個長度為 k 的有向路徑。

測資範圍: $n \leq 2000, k \leq 10^{18}$

這個問題，同樣的，我們可以列出他的 DP 狀態與轉移式 設 $dp[i][j][k]$ 表示總共有幾個長度為 k 的路徑，可以從 i 走到 j
轉移式則是

$$dp[i][j][k] = \sum_{i \to l \to j} (dp[i][l][k-1] \times dp[l][j][1])$$

有向圖的矩陣快速冪!

Atcoder DP Contest R - Walk

你有一個 n 個節點的有向圖，以及他的鄰接矩陣。請找到這張圖共有幾個長度為 k 的有向路徑。

測資範圍: $n \leq 2000, k \leq 10^{18}$

我們將轉移式進行滾動! 會得到

$$dp_k[i][j] = \sum_{j=1}^{n}(dp_k - 1[i][l] \times A[l][j])$$

他其實是一個線性遞迴!

有向圖的矩陣快速冪!

Atcoder DP Contest R - Walk

你有一個 n 個節點的有向圖，以及他的鄰接矩陣。請找到這張圖共有幾個長度為 k 的有向路徑。

測資範圍: $n \leq 2000, k \leq 10^{18}$

而事實上，如果一個陣列的鄰接矩陣是 A，則 A_{ij}^k 表示從 i 走到 j 有幾個長度為 k 的有向路徑，因此直接做矩陣快速冪即可!

更多例題

例題

AtCoder Beginner Contest 237 F - $|\text{LIS}| = 3$

給你兩個正整數 n, m，請找到有幾個陣列滿足 (LIS 是嚴格遞增的)

- 陣列長度為 n
- 所有數字介於 1 到 m
- 陣列的 LIS 為 3

測資範圍: $3 \leq n \leq 1000, 1 \leq m \leq 10$

例題

AtCoder Beginner Contest 237 F - $|\text{LIS}| = 3$

給你兩個正整數 n, m，請找到有幾個陣列滿足 (LIS 是嚴格遞增的)

- 陣列長度為 n
- 所有數字介於 1 到 m
- 陣列的 LIS 為 3

測資範圍: $3 \leq n \leq 1000, 1 \leq m \leq 10$

這題給大家一點時間思考看看，看看有沒有人有什麼想法。

例題

AtCoder Beginner Contest 237 F - $|\text{LIS}| = 3$

給你兩個正整數 n, m，請找到有幾個陣列滿足 (LIS 是嚴格遞增的)

- 陣列長度為 n
- 所有數字介於 1 到 m
- 陣列的 LIS 為 3

測資範圍: $3 \leq n \leq 1000, 1 \leq m \leq 10$

設 $dp[i][a][b][c]$ 表示有幾個陣列長度為 i，且 LIS 的 v 陣列為 $\{a, b, c\}$

例題

實作如下

```
dp[1][m+1][m+1][m+1] = 1;

for(int pos = 1;pos <= n;pos++){
    for(int i = 1;i <= m+1;i++) for(int j = 1;j <= m+1;j++) for(int k = 1;k <= m+1;k++){
        for(int x = 1;x <= m;x++){
            if(x <= i)      dp[pos+1][x][j][k] = (dp[pos+1][x][j][k]+dp[pos][i][j][k]) % MOD;
            else if(x <= j) dp[pos+1][i][x][k] = (dp[pos+1][i][x][k]+dp[pos][i][j][k]) % MOD;
            else if(x <= k) dp[pos+1][i][j][x] = (dp[pos+1][i][j][x]+dp[pos][i][j][k]) % MOD;
        }
    }
}
```

例題

Codeforces 895C - Square Subsets

現在，你有長度為 n 的陣列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，請找到陣列中有幾個相異的非空子集，其中的元素的乘積為完全平方數

測資範圍: $3 \leq 10^5, 1 \leq a_i \leq 70$

例題

Codeforces 895C - Square Subsets

現在，你有長度為 n 的陣列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，請找到陣列中有幾個相異的非空子集，其中的元素的乘積為完全平方數

測資範圍: $3 \leq 10^5, 1 \leq a_i \leq 70$

這題同樣給大家一點時間想想看

例題

Codeforces 895C - Square Subsets

現在，你有長度為 n 的陣列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，請找到陣列中有幾個相異的非空子集，其中的元素的乘積為完全平方數

測資範圍: $3 \leq 10^5, 1 \leq a_i \leq 70$

首先，觀察到數字最大只有到 70，小於 70 的質數一共只有 18 個!
另外一點是，如果要是完全平方數，所有質因數的次方必須是 2 的倍數!
我們用 bitmask 中第 i 位的 $0/1$ 表示質因數的次方是偶數還是奇數。

例題

Codeforces 895C - Square Subsets

現在，你有長度為 n 的陣列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，請找到陣列中有幾個相異的非空子集，其中的元素的乘積為完全平方數

測資範圍: $3 \leq 10^5, 1 \leq a_i \leq 70$

設 $dp[mask]$ 表示有幾種集合的數字乘積為 $mask$，答案就會是 $dp[0] - 1$ 了
分別枚舉 $1 \sim 70$ 每個數字要不要拿，進行轉移即可

例題

實作如下:

```
dp[0][0] = 1;
for(int i = 1;i <= 70;i++){
    for(int j = 0;j < (1<<18);j++){
        if(!cnt[i]) dp[i][j] = dp[i-1][j];
    else dp[i][j] = (dp[i][j] + dp[i-1][j] + dp[i-1][j^num[i
       ]])%MOD * fastpow(2,cnt[i]-1)%MOD;
    }
}
```

補充

輪廓線 DP