第一章 绪论

第二章 函数

第一节 函数概念

1.证明下列不等式：

(1)$|x-y|\ge ||x|-|y||$;

证明：对于$\forall x,y\in\mathbb{R}$,总有$|x||y|\ge xy$; 于是$-|x||y|\le -xy$.

又由于$|x|^2=x^2,|y|^2=y^2$,那么$|x|^2-2|x||y|+|y|^2\le x^2-2xy+y^2$, 即$(|x|-|y|)^2\le (x-y)^2$;

开方后即得$|x-y|\ge ||x|-|y||$.

(2).$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\le |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$;

证明：使用数学归纳法；

i.对于$\forall x,y\in\mathbb{R}$,总有$|x||y|\ge xy$, 于是有$|x|^2+2|x||y|+|y|^2\ge x^2+2xy+y^2$;

整理后可得$|x|+|y|\ge |x+y|$，即当$n=2$时所证成立。

ii.假设当$n=k$时所证不等式也成立，即$|x_1+x_2+\cdots+x_k|\le |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|$

iii.当$n=k+1$时, 取$y=x_1+x_2+\cdots+x_k$, 于是有：

$$\begin{aligned}|x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}|&=|y+x_{k+1}|\\&\le |y|+|x_{k+1}|\\&=|x_1+x_2+\cdots+x_k|+|x_{k+1}|\\&\le |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|+|x_{k+1}|\end{aligned}$$

即当$n=k+1$时所证不等式也成立。

那么由数学归纳法可知题证成立。

(3).$|x_1+x_2+\cdots x_n+x|\ge |x|-(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)$.

证明：易知对于$\forall x,y\in\mathbb{R}$,总有$|x+y|\ge |x|-|y|$; 于是可得

$$|x_1+x_2+\cdots x_n+x|\ge |x|-|x_1+x_2+\cdots x_n|$$

又由于$|x_1+x_2+\cdots x_n|\le |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$,因此

$$|x_1+x_2+\cdots x_n+x|\ge |x|-(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|).$$

2.求证$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$.

证明：令$f(x)=\frac{x}{1+x}$,易知$f(x)$是一个增函数。

容易证得$|a+b|\le|a|+|b|+|ab|$, 那么$f(|a+b|)\le f(|a|+|b|+|ab|)$;即

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|+|b|+|ab|}{1+|a|+|b|+|ab|}$$

由于$\frac{|a|+|b|+2|ab|}{1+|a|+|b|+|ab|}=\frac{|a|(1+|b|)+|b|(1+|a|)}{(1+|b|)(1+|a|)}=\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$,因此

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|+|b|+|ab|}{1+|a|+|b|+|ab|}\le\frac{|a|+|b|+2|ab|}{1+|a|+|b|+|ab|}=\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

3.求证:$\max(a,b)=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2};\min(a,b)=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}$.

证明：$i.$当$a\ge b$时$\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=a=\max(a,b)$;

当$a\le b$时$\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}=b=\max(a,b)$.

$ii.$当$a\ge b$时$\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=b=\min(a,b)$;

当$a\le b$时$\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}=\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}=a=\min(a,b)$.

于是有$\max(a,b)=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}$,$\min(a,b)=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}$成立。

4.已知三角形的两条边分别为a和b，它们之间的夹角为θ，试求此三角形的面积$s(\theta)$, 并求其定义域。

解：由题意可知在三角形中以边a为底的高$h=b\sin\theta$,于是有

$$s(\theta)=\frac{ab\sin\theta}{2}.$$

显然在三角形中其中一角$\theta\in(0,180^\circ)$.

5.在半径为r得瑟球内嵌入一内接圆柱，试将圆柱的体积表示为其高的函数，并求此函数的定义域。

解：设其高为h,那么圆柱的底面半径为$R=\sqrt{r^2-\frac{h^2}{4}}$;于是圆柱体积

$$V=\pi R^2h$$
$$=\pi hr^2-\frac{\pi}{4}h^3$$

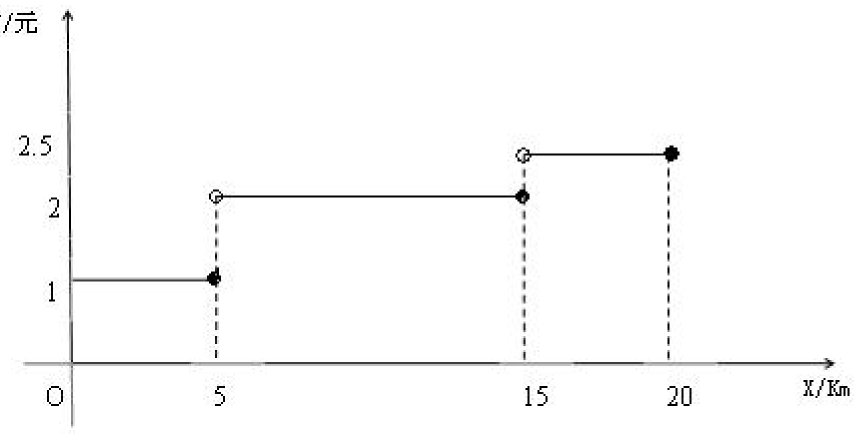
由于圆柱为球的内接圆柱，故有$h\in(0,2r)$.

6.某公交车路线全长为$20\,Km$, 票价规定如下：乘坐$5\,Km$以下(包含$5\,Km$)者收费1元；超过$5Km$但在$15Km$以下(包含$15Km$)者收费2元；其余收费2元5角。试将票价表示成路线的函数，并作出函数的图像。

解：设y为票价, x为路程, 则有

$$y(x)=\begin{cases}1 & x\in(0,5]\\ 2 & x\in(5,15]\\ 2.5 & x\in(15,20]\end{cases}.$$

它的函数图像如下：



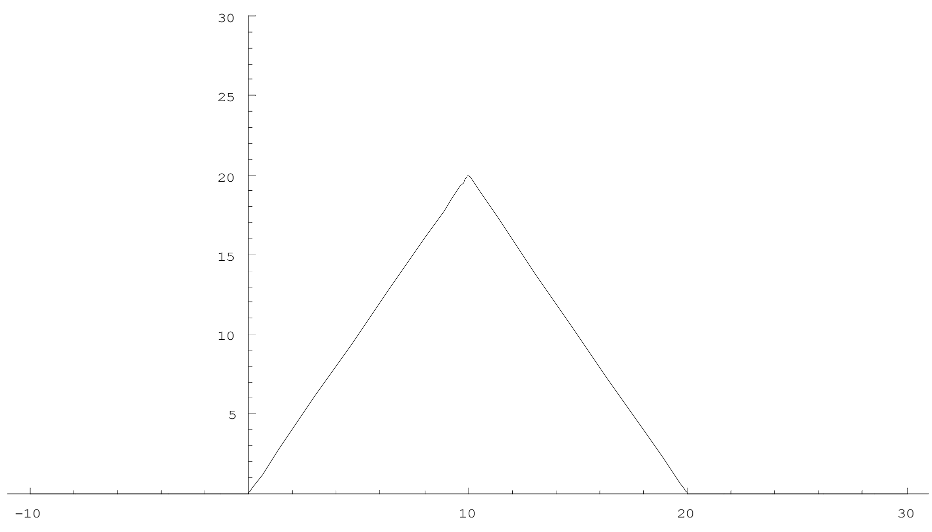
画图板作图

7.一脉冲发生器产生一个三角波，若记它随时间t的变化规律为$f(t)$, 且三个角分别对应关系$f(0)=0, f(10)=20, f(20)=0$, 求$f(t)(0\le t\le 20)$, 并作出函数的图形。

解：由题意可知所求函数为：

$$f(t)=\begin{cases}2t & t\in[0,10]\\ 40-2t & t\in(10,20]\end{cases}$$

其函数图像为：



Mathematica 作图

8.判断下列函数的奇偶性：

(1). $f(x)=\frac{x^4}{2}+x^2-1$　　偶函数；

(2) $f(x)=x+\sin x$　　奇函数；

(3) $f(x)=x^2e^{-x^2}$　　偶函数；

(4) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$　　非奇非偶函数。

9.判断下列函数是否是周期函数，若是，试求其周期：

(1). $f(x)=\cos x^2$;

解：设t是$f(x)$的最小正周期，则应有$f(x+t)=f(x)$, 即$\cos x^2=\cos(x+t)^2$, 可得

$$x^2+2k\pi=(x+t)^2=x^2+2tx+t^2.$$

即求方程$2k\pi=2tx+t^2$的解，显然没有一个非零常数满足方程。故原函数没有周期。

(2) $f(x)=\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{3}$;

解：由于$\cos\frac{x}{2}$的最小正周期为4π,$\sin\frac{x}{3}$的最小正周期为6π，取它们的最小公倍数。即原函数的最小正周期为12π.

(3). $f(x)=\cos\frac{\pi}{4}x$;

解：由三角函数的性质可以知道此函数的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8.$

(4). $f(x)=\sqrt{\tan x}$.

解：由于函数$\tan x$的最小正周期为π，故此函数的最小正周期也是π.

10.证明：$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$在$(-\infty,+\infty)$有界。

证明：取$M=6$,现证明对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，都有$f(x)\le M=6$.

即要证明$\frac{x}{x^2+1}\le 6$恒成立，这等价于不等式$6x^2-x+6\ge 0$恒成立；而此一元二项式的判别式$\Delta=(-1)^2-144=-143<0$, 于是不等式恒成立。

因此对于$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，都有$f(x)\le M=6$；即$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$在$(-\infty,+\infty)$有界。

11.用肯定语气叙述函数$f(x)$在(a,b)无界，并证明$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$在$(0,1)$内无界。

解：对于$\forall M>0,$总$\exists x\in(a,b),$使得$|f(x)|>M,$则$f(x)$在区间(a,b)内无界。

对任意$M>0,$取$x_0=\dfrac{1}{\sqrt{1+M}}\in(0,1),$显然有

$$f(x_0)=1+M>M.$$

故$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$在$(0,1)$上无界。

12.试证明两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是奇函数，一个奇函数和一个偶函数的乘积是奇函数。

证明：$i.$设$f(x)$与$g(x)$是两个偶函数，即有$f(x)=f(-x),g(x)=g(-x).$那么必有

$$F(x)=f(x)g(x)=f(-x)g(-x)=F(-x).$$

于是两个偶函数的乘积是偶函数。

$ii.$设$f(x)$与$g(x)$是两个奇函数，即有$f(x)=-f(-x),g(x)=-g(-x).$那么必有

$$G(x)=f(x)g(x)=-f(-x)[-g(-x)]=G(-x).$$

于是两个偶函数的乘积是偶函数。

$iii.$设$f(x)$是一个偶函数，而$g(x)$是一个奇函数，即有$f(x)=f(-x),g(x)=-g(-x).$那么必有

$$H(x)=f(x)g(x)=f(-x)[-g(-x)]=-H(-x).$$

因此一个偶函数与一个奇函数的乘积是奇函数。

13.设$f(x)$为定义在$(-\infty,+\infty)$上的任意函数，证明$f(x)$可以分解为奇函数与偶函数的和。

证明：对任意的$f(x),$可以证明$G(x)=f(x)+f(-x)$是偶函数，而$F(x)=f(x)-f(-x)$是奇函数；于是有

$$f(x)=\frac{G(x)+F(x)}{2}.$$

显然$\dfrac{G(x)}{2}$还是偶函数,$\dfrac{F(x)}{2}$还是奇函数，即得所证。

14.用肯定语气叙述：在$(-\infty,+\infty)$上

(1)$f(x)$不是奇函数；

(2)$f(x)$不是单调上升函数；

(3)$f(x)$无零点；

(4)$f(x)$无上界。

解:(1)存在$x_0\in(-\infty,+\infty)$，使得$f(x_0)\neq-f(x_0)$;

(2)存在$x_1<x_2\in(-\infty,+\infty)$，使得$f(x_1)>f(x_2)$;

(3)对任意$x_0\in(-\infty,+\infty)$，总有$f(x_0)\neq 0$;

(4)对任意的$M>0,$总有$x_0\in(-\infty,+\infty),$使得$f(x_0)>M.$

第二节 复合函数与反函数

1.设$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$,求证$f(f(x))=x$.

证明：$f(f(x))=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}=\frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}=\frac{\frac{1+x-1+x}{1+x}}{\frac{1+x+1-x}{1+x}}=\frac{2x}{2}=x$.得证。

2.求下列的函数的反函数及其定义域：

(1)$y=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x}),1<x<+\infty$;

解：函数$y=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})$，当$1<x<+\infty$时，有$y\in(1,+\infty)$.

由$y=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})$可以反解出

$$x=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2-4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2-1};$$

因为$x\in(1,+\infty)$,故$x=y+\sqrt{y^2-1}$.

于是原函数的反函数为$f(x)=x+\sqrt{x^2-1},x\in(1,+\infty)$.

(2)$y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),-\infty<x<+\infty$;

解：当$x\in(-\infty,+\infty)$时，可以解出$y\in(-\infty,+\infty)$;由$y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$可以整理出

$$e^{2x}-2ye^x-1=0;$$

于是可得解得$e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$,由于$e^x>0$恒成立，于是有$e^x=y+\sqrt{y^2+1}$，即

$$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1}).$$

因此原函数的反函数为$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),x\in(-\infty,+\infty)$.

(3)$y=\begin{cases}x & -\infty<x<1\\ x^2 & 1\le x\le 4\\ 2^x & 4<x<+\infty\end{cases}$.

解：依次可以解得$x=\begin{cases}y & -\infty<x<1, & -\infty<y<1\\ \sqrt{y} & 1\le x\le 4, & 1\le y\le 16\\ \log_2 y & 4<x<+\infty, & 16<y<+\infty\end{cases}$，于是所求反函数为

$$y=\begin{cases}x & -\infty<x<1\\ \sqrt{x} & 1\le x\le 16\\ \log_2 x & 16<x<+\infty\end{cases}.$$

3.设$f(x),g(x)$为实轴上单调函数，求证$f(g(x))$也是实轴上的单调函数。

证明：不妨设$f(x),g(x)$的单调上升函数;即对$\forall x_1<x_2\in\mathbb{R}$,总有$f(x_1)<f(x_2),g(x_1)<g(x_2)$.

设$y=g(x)$,于是对任意$x_1<x_2\in\mathbb{R}$,总有$y_1=g(x_1)<g(x_2)=y_2$,于是有

$$f(g(x_1))<f(g(x_2)).$$

因此$f(g(x))$也是单调函数。

4.设$f(x)=\begin{cases}-x-1 & x\le 0\\ x & x>0\end{cases},g(x)=\begin{cases}x & x\le 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}$,求复合函数$f(g(x)),g(f(x))$.

解：$i.$由于对任意的$x\in\mathbb{R}$,总有$g(x)\le 0$成立，于是有

$$f(g(x))=-g(x)-1=\begin{cases}-x-1 & x\le 0\\ x^2-1 & x>0\end{cases}.$$

$ii.$当$x>0$时，$f(x)=x>0$,此时$g(f(x))=-f^{\,2}(x)=-x^{\,2}$;

当$x<-1$时，$f(x)=-x-1>0$,此时$g(f(x))=-f^{\,2}(x)=-(x+1)^{\,2}$;

当$-1\le x<0$时，$f(x)=-x-1\le 0$,此时$g(f(x))=f(x)=-x-1$.

综上所述，可得

$$g(f(x))=\begin{cases}-x^2 & x>0\\ -(x+1)^2 & x<-1\\ -x-1 & -1\le x<0\end{cases}.$$

5.设$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求$\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{n次}(x)$.

解：利用归纳法：

$i.$当$n=1$时,$\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{1次}(x)=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

$ii.$设当$n=k$时,$\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{k次}(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$;

$iii.$当$n=k+1$时,$\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{k+1次}(x)=f(\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{k次}(x))=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+(\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}})^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$.

综上可得$\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{n次}(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

6.设$f(x)=|1+x|-|1-x|$, 试求$(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n次})(x)$.

解：利用归纳法：

$i.$当$n=1$时，$(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{1次})(x)=f(x)=|1+x|-|1-x|=\begin{cases}2 & x\geq 1\\ 2x & -1<x<1\\ -2 & x\leq -1\end{cases}$；

$ii.$设当$n=k$时，$(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{k次})(x)=\begin{cases}2 & x\geq \dfrac{1}{2^{k-1}}\\ 2x & -\dfrac{1}{2^{k-1}}<x<\dfrac{1}{2^{k-1}}\\ -2 & x\leq -\dfrac{1}{2^{k-1}}\end{cases}$；

$iii.$当$n=k+1$时，$(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{k+1次})(x)=(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{k次})(f(x))=\begin{cases}2 & x\geq \dfrac{1}{2^{k}}\\ 2x & -\dfrac{1}{2^{k}}<x<\dfrac{1}{2^{k}}\\ -2 & x\leq -\dfrac{1}{2^{k}}\end{cases}$.

综上可得$(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n次})(x)=\begin{cases}2 & x\geq \dfrac{1}{2^{n-1}}\\ 2x & -\dfrac{1}{2^{n-1}}<x<\dfrac{1}{2^{n-1}}\\ -2 & x\leq -\dfrac{1}{2^{n-1}}\end{cases}$.

7.设$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, 求$f(f(x)),f(f(f(x))),f(\dfrac{1}{f(x)})$.

解：$f(f(x))=\dfrac{1}{1-f(x)}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{1}{\dfrac{1-x-1}{1-x}}=\dfrac{1-x}{-x}=\dfrac{x-1}{x},x\neq 0;$

$f(f(f(x)))=\dfrac{1}{1-f(f(x))}=\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=\dfrac{1}{\dfrac{x-x+1}{x}}=\dfrac{x}{1}=x,x\in\mathbb{R}$

$\dfrac{1}{f(x)}=1-x$, 于是$f(\dfrac{1}{f(x)})=\dfrac{1}{1-(1-x)}=\dfrac{1}{x},x\neq 0$.

[由于$f(x)$的定义域为$x\neq 1$, 那么这三个函数的定义域是应该满足$x\neq 1$？值得商榷！]

第三节 初等函数

1. 对下列函数分别讨论函数的定义域和值域，奇偶性，周期性，有界性，并作出函数的图形：

(1)$y=|x|$;　　(2)$y=x-[x]$;　　(3)$y=\tan x$;

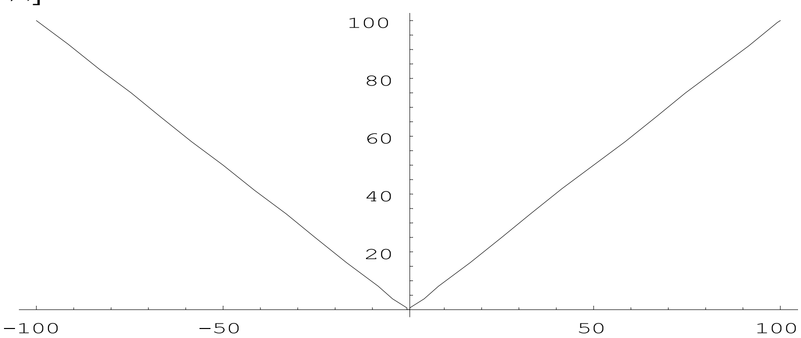
(4)$y=\sqrt{x(2-x)}$;　　(5)$y=\sin^2 x$;　　(6)$y=|\sin x|+|\cos x|$.

解：各个函数的性质如下表：

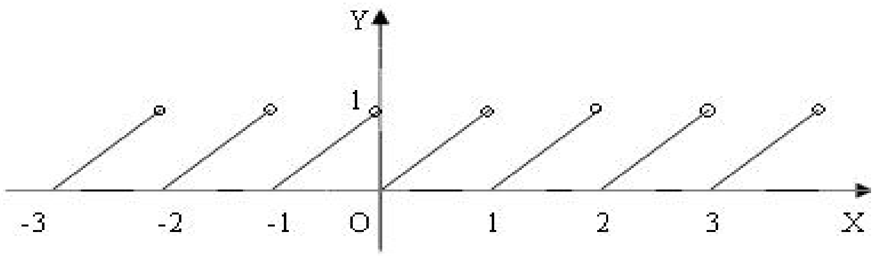
题号	定义域	值域	奇偶性	周期性	有界性
(1)	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	偶函数	无周期	无界
(2)	$(-\infty,+\infty)$	$[0,1)$	非奇非偶	$T=1$	有界
(3)	$x\neq k\pi, k=0,1,2,\cdots$	$(-\infty,+\infty)$	奇函数	$T=\pi$	无界
(4)	$[0,2]$	$[0,1]$	非奇非偶	无周期	有界
(5)	$(-\infty,+\infty)$	$[0,1]$	偶函数	$T=\pi$	有界
(6)	$(-\infty,+\infty)$	$[0,\sqrt{2}]$	偶函数	$T=\pi/2$	有界

各函数图像如下：

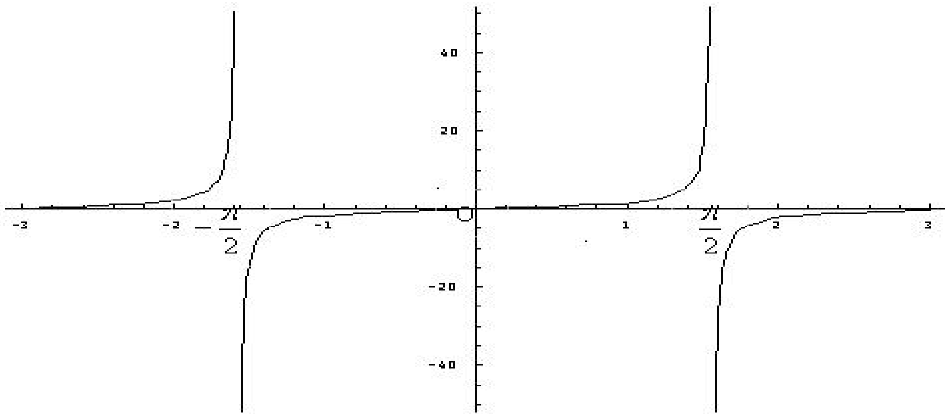
(1) [Mathematica 作图].



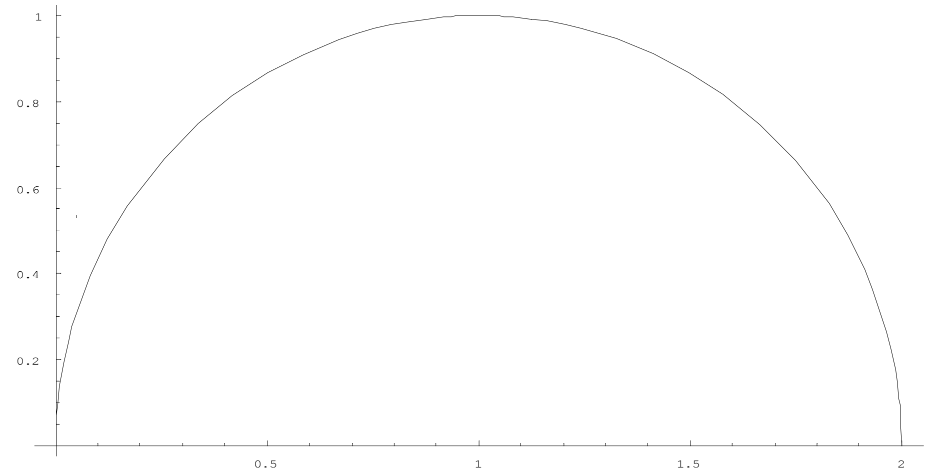
(2)[Word、画作图板作图].



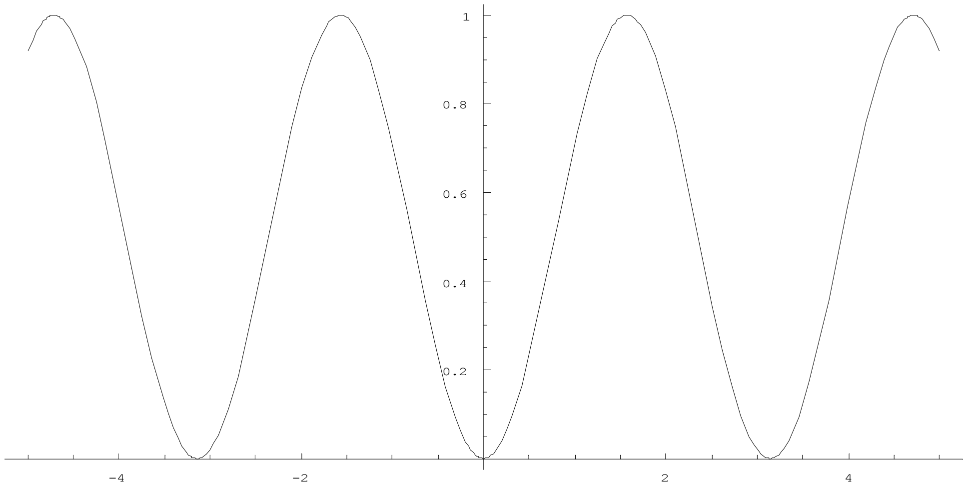
(3)[Mathematica、Word、画图板作图]



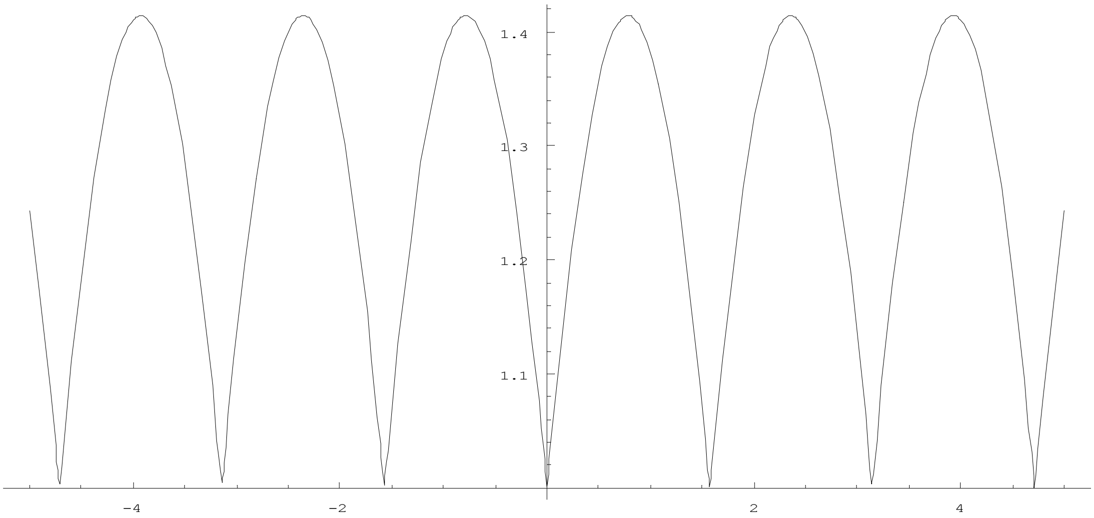
(4). [Mathematica 作图]



(5). [Mathematica 作图]



(6). [Mathematica 作图]

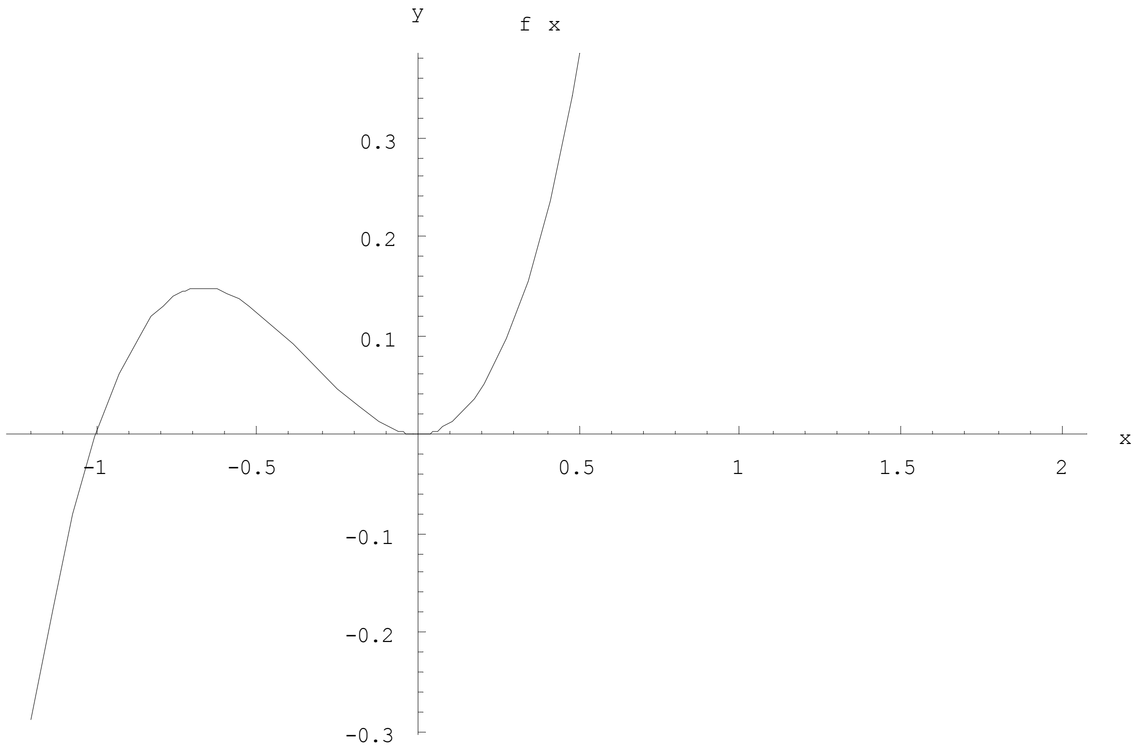


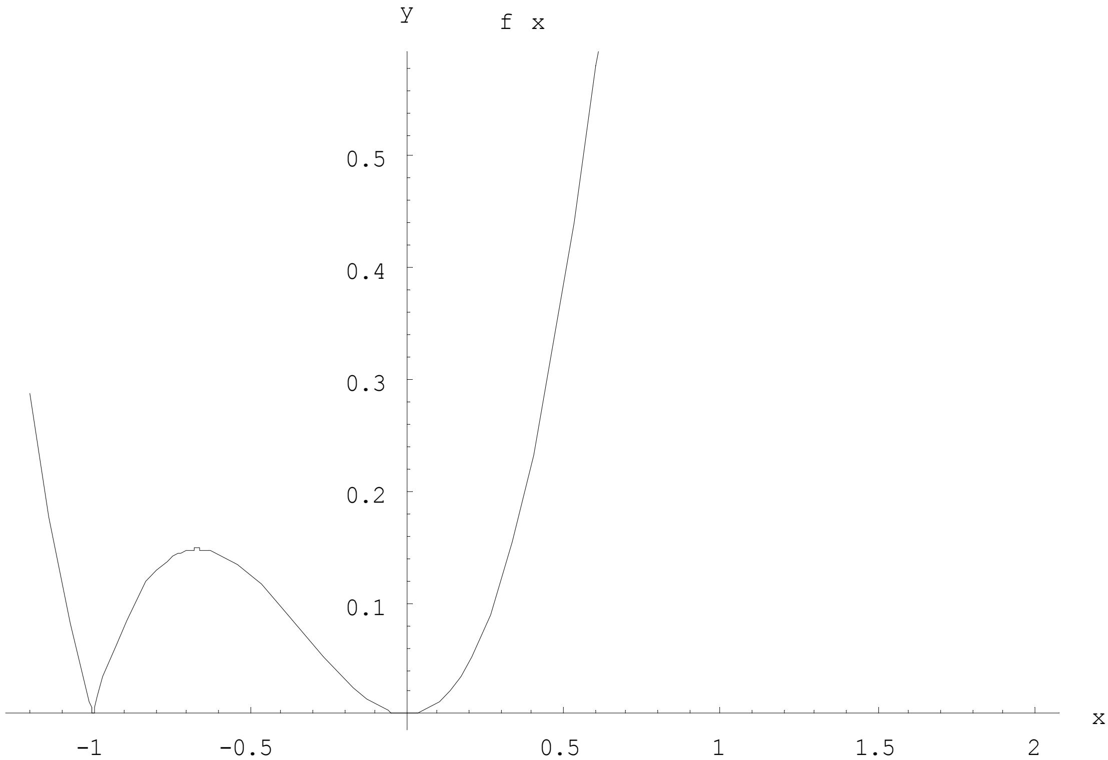
2.若已知函数$f(x)$的图形，作函数

$$y_1 = |f(x)|, y_2 = f(-x), y_3 = -f(-x)$$

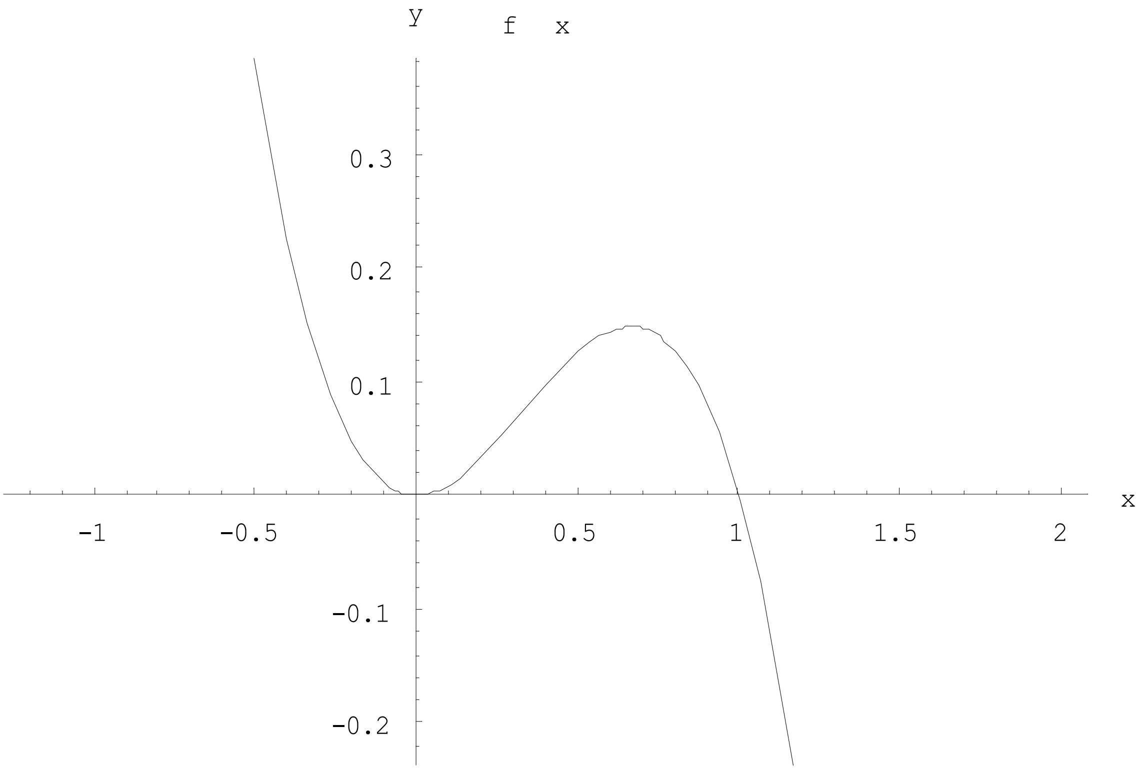
的图形，并说明y_1, y_2, y_3的图形与y的图形的关系。

解：设$f(x) = x^3 + x^2$,四者作图如下：

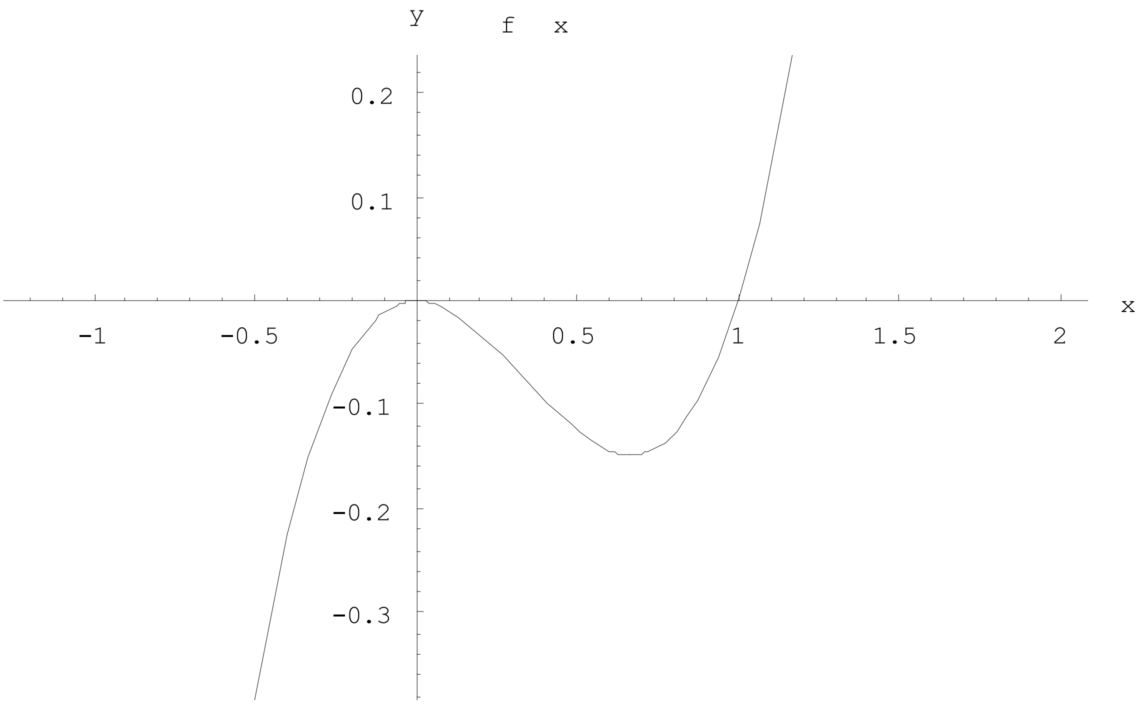




显然$\left|f(x)\right|$的图像是将$f(x)$的图像中位于x轴下面的部分，对称于x轴翻转到x轴上面得到。



$f(-x)$的图像与$f(x)$的图像是关于y轴轴对称的。



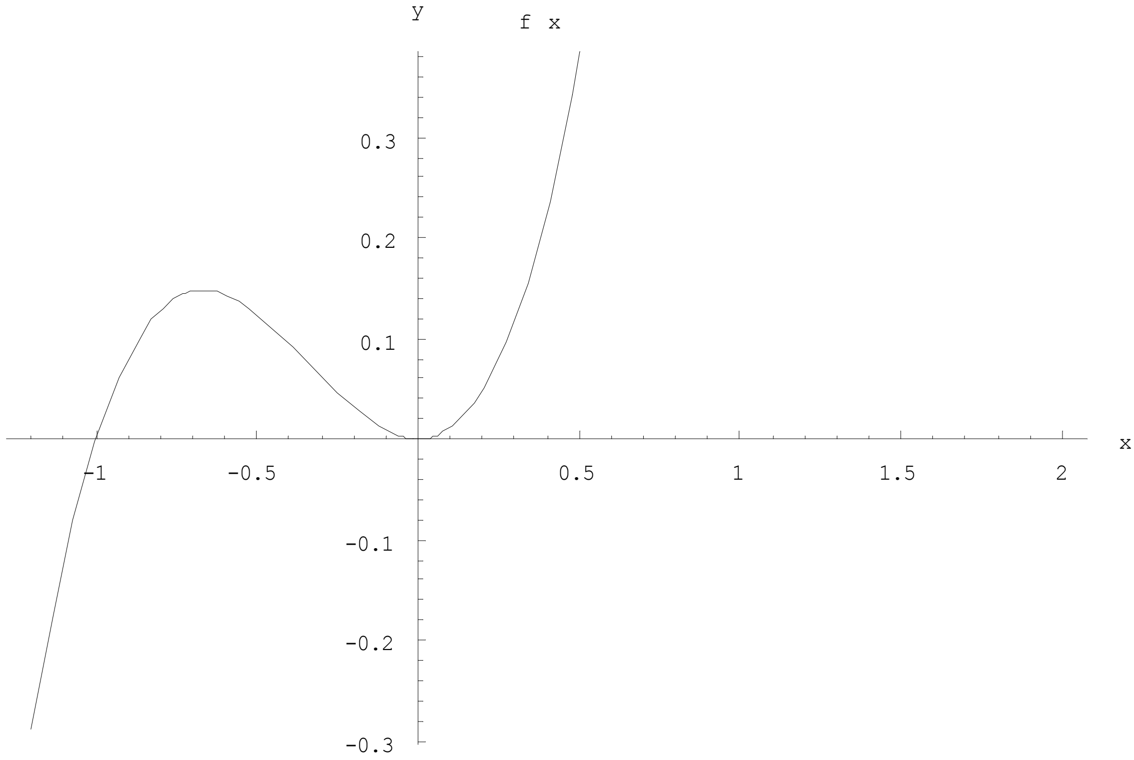
$-f(-x)$的图像与$f(x)$的图像是关于原点中心对称的。

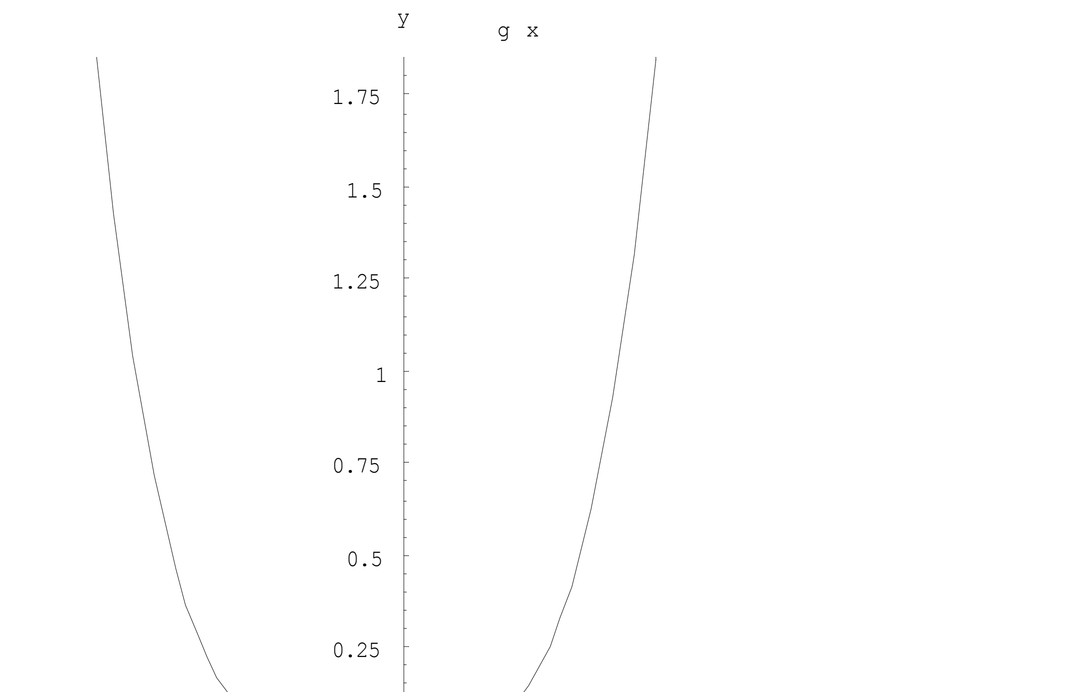
3.若已知函数$f(x), g(x)$的图像，试做出函数

$$y=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)\pm|f(x)-g(x)|]$$

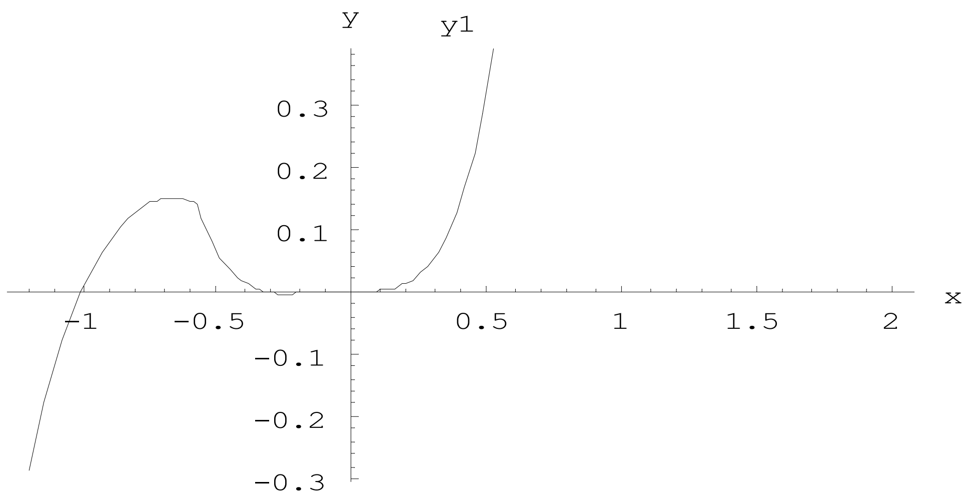
的图像，并说明y的图像与$f(x), g(x)$的图像的关系。

解：设$f(x)=x^3+x^2, g(x)=3x^4+x^3$, 它们的图像如下：



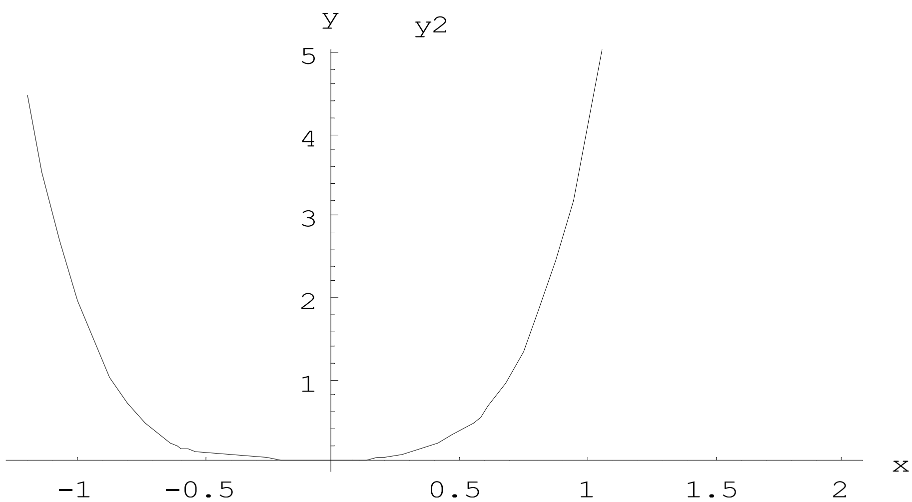


函数$y_1=\dfrac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]$的图像如下：



函数$y_1=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]$的图像是函数$\min(f(x),g(x))$的图像；也就是说$y_1$的图像是将$f(x)$与$g(x)$的图像画在同一个坐标系中时，更靠近$y$轴负方向的那一部分。

函数$y_2=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$的图像如下：

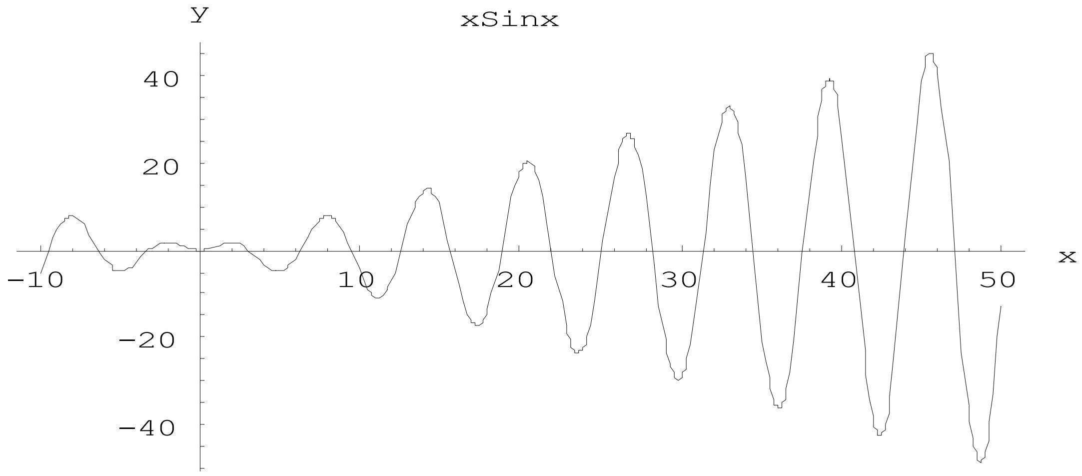


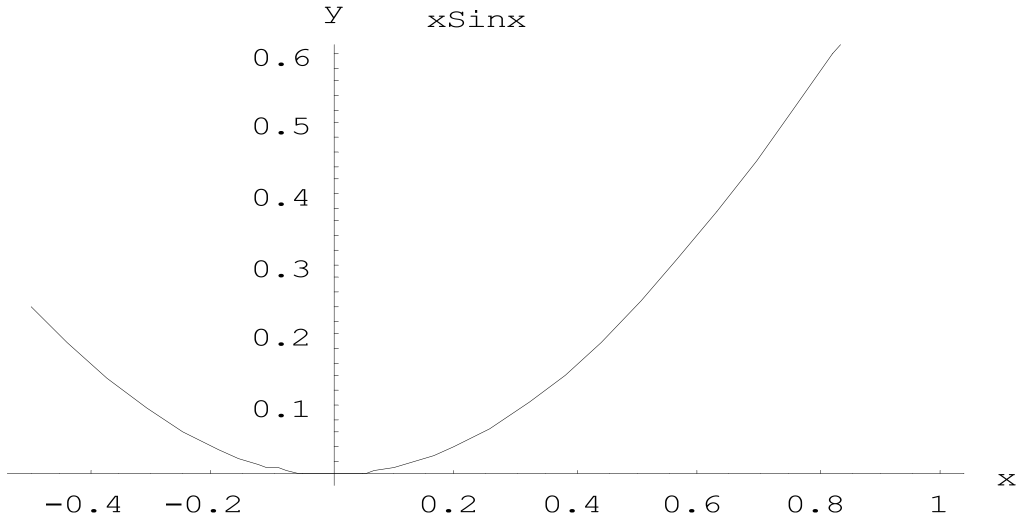
函数$y_1=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$的图像是函数$\max(f(x),g(x))$的图像；也就是说$y_1$的图像是将$f(x)$与$g(x)$的图像画在同一个坐标系中时，更靠近$y$轴正方向的那一部分。

4.做出夏利函数的图像：

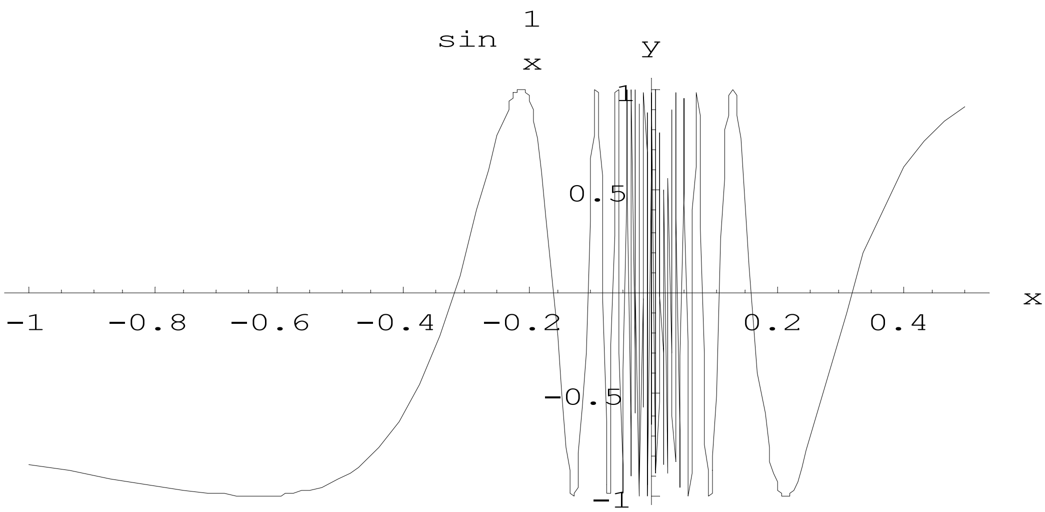
(1) $y=x\sin x$;　　　　　(2) $y=\sin\frac{1}{x}$.

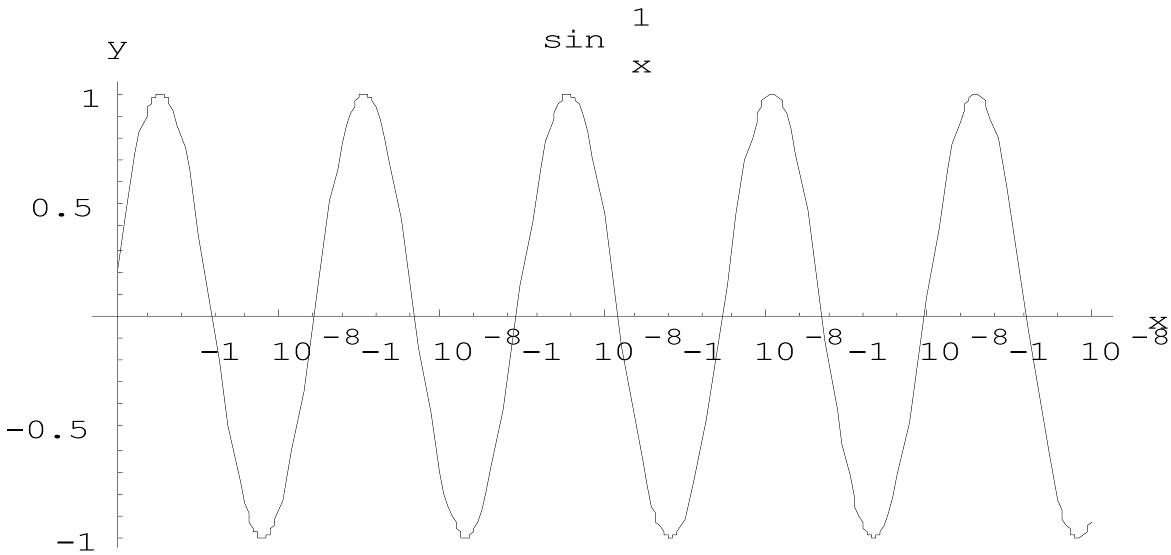
解：二者图像如下：





这是分别在区间$[-10,50]$和区间$[-0.5,1]$上，利用Mathematica画出的$y = x\sin x$的图像。从图像上可以直观的看出$y = x\sin x$在$x = 0$点是连续的。而函数$y = \sin\dfrac{1}{x}$在$x = 0$附近急剧震荡，并且在$x = 0$处不连续；我们利用Mathematica软件分别画出$y = \sin\dfrac{1}{x}$在区间$[-1, 0.5]$与$[-0.00000001, -0.000000010000003]$,上的图像，以便我们有一个直观的理解。



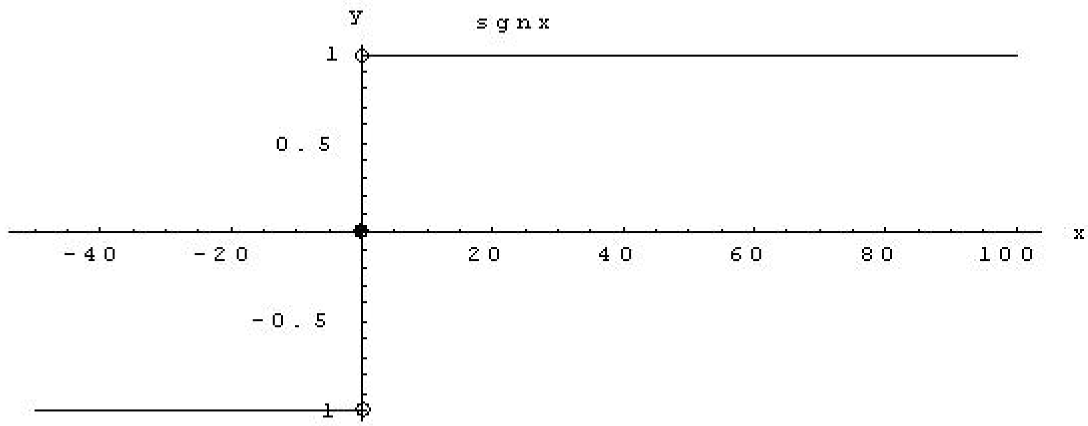


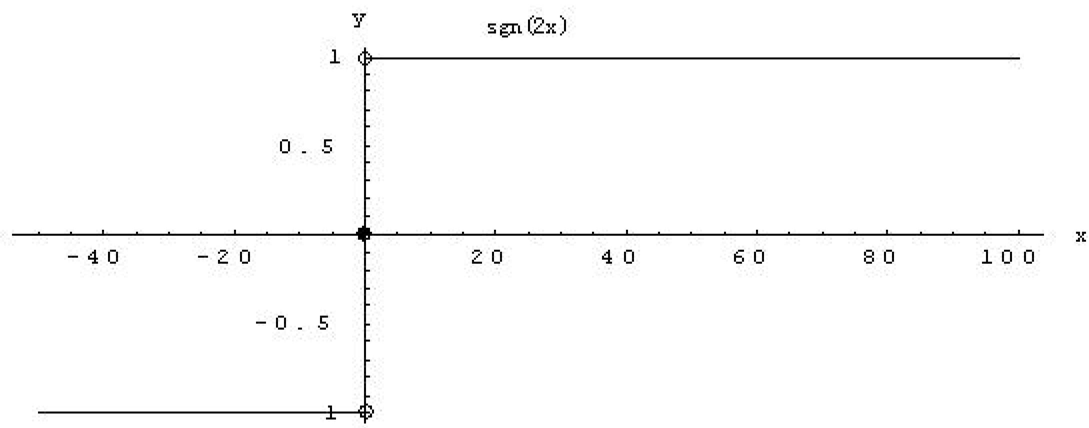
5.符号函数的定义是

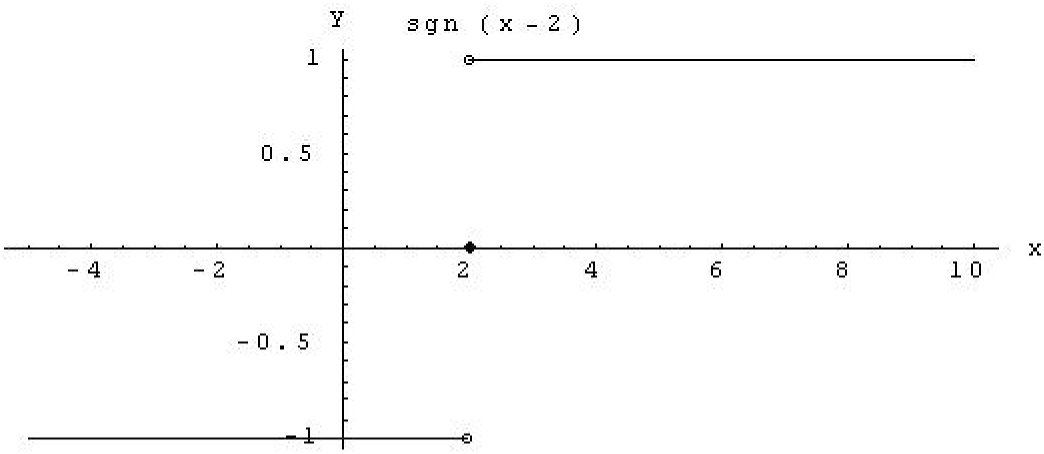
$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

试分别作出$\operatorname{sgn} x, \operatorname{sgn}(2x), \operatorname{sgn}(x-2)$的图像。

解：



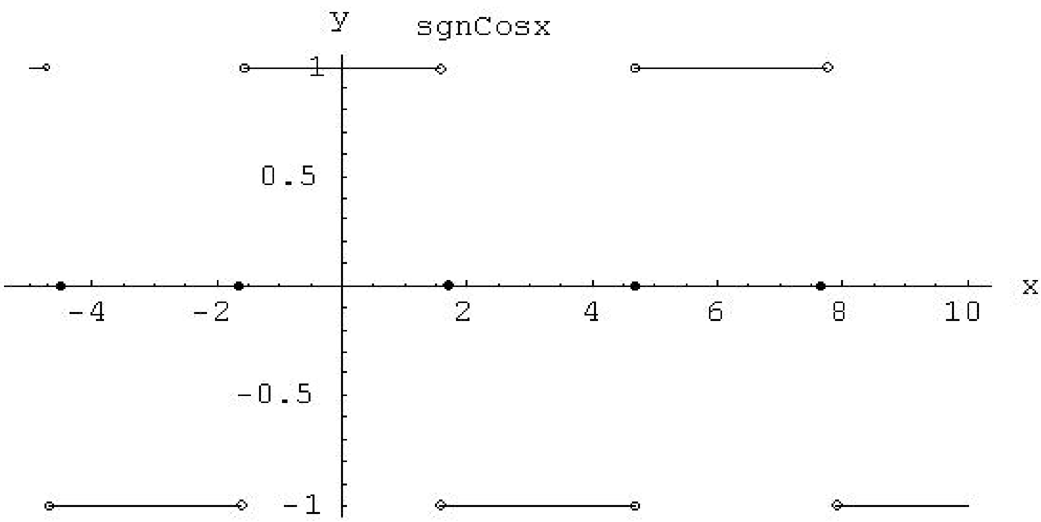


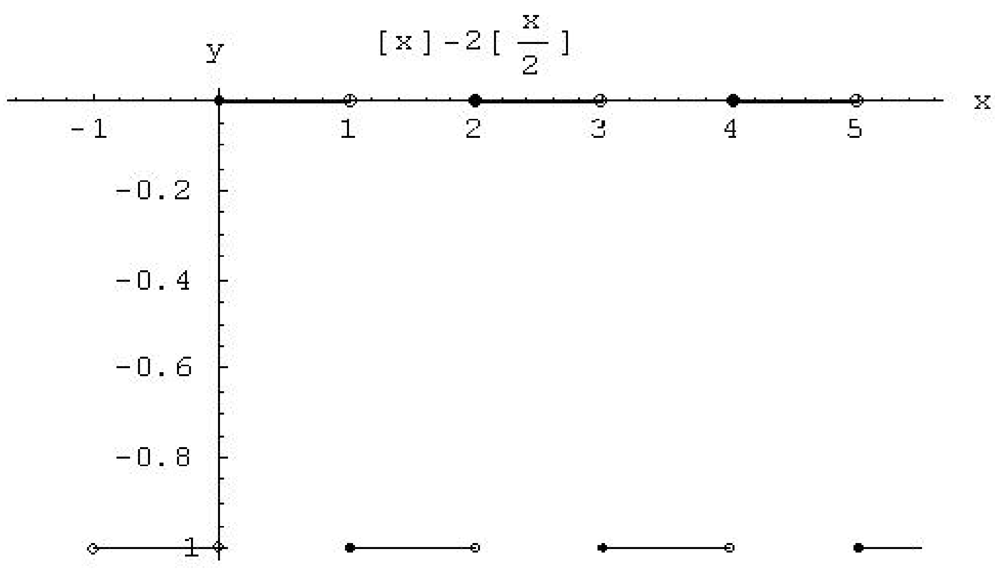


6.作出下列函数的图形：

(1) $y=\operatorname{sgn}\cos x$;　　　　(2) $y=[x]-2[\frac{x}{2}]$.

解：





第三章 极限与函数的连续性

第一节 极限问题的提出

第二节 数列的极限

1.用定义证明下列极限为零：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2+1}$

证明：对于$\forall\varepsilon>0,$取$N=[\dfrac{2}{\varepsilon}]+1,$则对于$\forall n>N,$总有

$$\left|\frac{n+1}{n^2+1}\right|\le\frac{2n}{n^2}=\frac{2}{n}<\frac{2}{N}<\frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}}=\varepsilon.$$

因此有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2+1}=0.$

(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n};$

证明：对于$\forall\varepsilon>0,$取$N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]+1,$则对于$\forall n>N,$总有

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right|\le\left|\frac{1}{n}\right|<\frac{1}{N}<\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon.$$

于是可知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0.$

(3). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!};$

证明：对于$\forall\varepsilon>0,$取$N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]+1,$则对于$\forall n>N,$总有$\left|\dfrac{1}{n!}\right|\le\left|\dfrac{1}{n}\right|<\dfrac{1}{N}<\dfrac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon.$

于是可知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!}=0.$

(4). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^2}{n^2-1};$

证明：对于$\forall\varepsilon>0,$取$N=[\dfrac{2}{\varepsilon}]+2,$则对于$\forall n>N,$总有

$$\left|\frac{n+(-1)^2}{n^2-1}\right|\le\left|\frac{2n}{n^2-n}\right|=\frac{2}{n-1}<\frac{2}{[\frac{2}{\varepsilon}]+1}<\varepsilon.$$

于是可知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^2}{n^2-1}=0.$

(5). $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, 对于$\forall\ \varepsilon>0$, 取$N=[\dfrac{1}{\varepsilon^2}]+1$, 则对于$\forall n>N$, 总有

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right|\le\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right|<\frac{1}{\sqrt{N}}<\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}}}=\varepsilon.$$

于是可知$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$

(6). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^n}{n!}$;

证明：取$M=\dfrac{10^{10}}{10!}$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}M\bullet\dfrac{10}{11}\bullet\dfrac{10}{12}\bullet\dfrac{10}{13}\bullet\cdots\bullet\dfrac{10}{n}$. 那么对于$\forall\ \varepsilon>0$, 取$N=[\dfrac{10\ M}{\varepsilon}]+1$,

则对于$\forall n>N$, 总有$\left|\dfrac{10^n}{n!}\right|=\left|M\bullet\dfrac{10}{11}\bullet\dfrac{10}{12}\bullet\dfrac{10}{13}\bullet\cdots\bullet\dfrac{10}{n}\right|<\left|M\ \dfrac{10}{n}\right|<\left|M\ \dfrac{10}{\frac{10M}{\varepsilon}}\right|=\varepsilon$ 因此$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^n}{n!}=0.$

(7). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}(a>1)$;

证明：令$a=1+\lambda(\lambda>0)$, 则$a^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\dfrac{1}{2}n(n-1)\lambda^2+\cdots+\lambda^n>\dfrac{1}{2}n(n-1)\lambda^2$; 那么对于$\forall\varepsilon>0$, 取$N=[\dfrac{2}{\varepsilon\lambda^2}]+2$, 则对于$\forall n>N$, 总有

$$\left|\frac{n}{a^n}\right|=\frac{n}{a^n}<\frac{n}{\frac{1}{2}n(n-1)\lambda^2}<\frac{2}{(n-1)\lambda^2}<\frac{2}{\frac{2}{\varepsilon\lambda^2}\lambda^2}=\varepsilon.$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0.$

(8). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$;

证明：对于$\forall n$, 总有$\left|\dfrac{n!}{n^n}\right|=\left|\dfrac{1}{n}\right|\bullet\left|\dfrac{2}{n}\right|\bullet\left|\dfrac{3}{n}\right|\bullet\cdots\bullet\left|\dfrac{n-1}{n}\right|\bullet\left|\dfrac{n}{n}\right|\le\left|\dfrac{1}{n}\right|$; 因此对于$\forall\ \varepsilon>0$, 取$N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]+1$, 则对于$\forall n>N$, 总有

$$\left|\frac{n!}{n^n}\right|\le\left|\frac{1}{n}\right|<\frac{1}{N}<\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon.$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0.$

(9). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}$;

证明：对于$\forall n$,总有$\left|\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}\right|=\dfrac{\frac{n+1}{2}n}{n^3}=\dfrac{n+1}{2n^2}\le\dfrac{2n}{2n^2}=\dfrac{1}{n}$;因此对$\forall\ \varepsilon>0$, 取$N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]+1$, 则对于$\forall n>N$,总有

$$\left|\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}\right|\le\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon.$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}=0$.

(10). $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n}+a^{-n}), a>1$.

证明：由(7)可知对于$\varepsilon=1$，$\exists N_1$, 当$n>N_1$时，有$\dfrac{n}{a^n}<1$，即$\dfrac{1}{a^n}<\dfrac{1}{n}$；因此对$\forall\varepsilon>0$, 取$N_2=[\dfrac{2}{\varepsilon}]+2, N=\max(N_1,N_2)$则对于$\forall n>N$, 总有

$$\left|\frac{1}{n}+a^{-n}\right|\le\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2}{n}<\frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}}=\varepsilon.$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n}+a^{-n})=0$.

2.用定义证明：

(1). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}=\dfrac{3}{2}$;

证明：对于$\forall n$都有$\left|\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}-\dfrac{3}{2}\right|=\left|\dfrac{3n^2+n-3n^2+\frac{3}{2}}{2n^2-1}\right|=\left|\dfrac{n+\frac{3}{2}}{2n^2-1}\right|\le\left|\dfrac{n+2n}{2n^2-n^2}\right|=\dfrac{3}{n}$,

那么对于$\forall\varepsilon$,取$N=[\dfrac{3}{\varepsilon}]+1$,对于$\forall n>N$,总有$\left|\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}-\dfrac{3}{2}\right|\le\dfrac{3}{n}<\dfrac{3}{\frac{3}{\varepsilon}}=\varepsilon$.

因此可知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}=\dfrac{3}{2}$.

(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}=1$;

证明：对于$\forall n$都有$\left|\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}-1\right|=\left|\dfrac{\sqrt{n^2+n}-n}{n}\right|=\dfrac{n}{(\sqrt{n^2+n}+n)n}=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}<\dfrac{1}{n}$,

那么对于$\forall\varepsilon$,取$N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]+1$,对于$\forall n>N$,总有$\left|\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}-1\right|<\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon$.

因此可知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}=1$.

(3). $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$,其中$x_n=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n} & n\text{为偶数}\\ \dfrac{n+1}{n} & n\text{为奇数}\end{cases}$.

证明：对于$\forall n$,都有$|x_n-1|=\left|\dfrac{n\pm1}{n}-1\right|=\left|\dfrac{\pm1}{n}\right|=\dfrac{1}{n}$.则对于$\forall\ \varepsilon>0$, 取$N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]+1$, 当$n>N$时总有$|x_n-1|=\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{N}<\dfrac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon$.于是有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

(4). $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$,其中$x_n=\begin{cases}3 & n=3k\\ \dfrac{3n+1}{n} & n=3k+1\\ 2+\dfrac{1+n}{3-\sqrt{n}+n} & n=3k+2\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots)$.

证明：当$n=3k$时,$|x_n-3|=|3-3|=0$;

当$n=3k+1$时,$|x_n-3|=\left|\dfrac{3n+1}{n}-3\right|=\left|\dfrac{1}{n}\right|=\dfrac{1}{n}$;

当$n=3k+2$时,$|x_n-3|=\left|2+\dfrac{1+n}{3-\sqrt{n}+n}-3\right|=\left|\dfrac{1+n-3+\sqrt{n}-n}{3-\sqrt{n}+n}\right|=\left|\dfrac{-2+\sqrt{n}}{3-\sqrt{n}+n}\right|$

$$=\left|\frac{n-4}{(3-\sqrt{n}+n)(2+\sqrt{n})}\right|=\left|\frac{n-4}{6+\sqrt{n}+n+n\sqrt{n}}\right|<\frac{n}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

那么对于$\forall\varepsilon>0$,分别取$N_2=[\dfrac{1}{\varepsilon}]+1, N_3=[\dfrac{1}{\varepsilon^2}]+1, N=\max(N_2,N_3)$, 于是当$n>N$时有

i.当$n=3k$时,$|x_n-3|=|3-3|=0<\varepsilon$;$ii$.当$n=3k+1$时,$|x_n-3|=\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{N}<\varepsilon$;$iii$.当$n=3k+2$时，有$|x_n-3|=\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\dfrac{1}{\sqrt{N}}<\varepsilon$.即对任意$n>N$, 都有$|x_n-3|<\varepsilon$; 故有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

3.用定义证明:

(1).若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,则对任一个正整数$k$,总有$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$;

证明：由于$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,那么由定义可以知道：对$\forall\varepsilon>0,\exists N_1$,当$n>N_1$时有$|a_n - a|<\varepsilon$.

那么取$N = N_1 + k$,则对$\forall\varepsilon>0,\exists N$,当$n+k>N=N_1+k$时有$|a_{n+k}-a|<\varepsilon$.

因此$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

(2).若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$;反之是否成立?;

证明：由于$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,那么由定义可以知道：对$\forall\varepsilon>0,\exists N$,当$n>N$时有$|a_n - a|<\varepsilon$.

由于$||a_n|-|a||\le|a_n-a|$(第二章第二节习题1),那么可以知道对$\forall\varepsilon>0,\exists N$,当$n>N$时有

$$||a_n|-|a||\le|a_n-a|<\varepsilon$$

于是有$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

反之不成立，例如$a_n=(-1)^n$,有$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|1|$,而$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ne1$(极限不存在).

(3).若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,且$a>b$,则存在$N$,当$n>N$时,有$a_n>b$;

证明：由于$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,那么由极限的定义可以知道:对于$\forall\varepsilon>0,\exists N$,当$n>N$时有$|a_n-a|<\varepsilon$.

我们取$\varepsilon_1=a-b$,可知存在N_1,当$n>N_1$时有$|a_n-a|<a-b$,即$b<a_n<2a-b$.得证。

(4).若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,且$a_n>0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$.

证明：由于$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,那么由极限的定义可以知道:对于$\forall\varepsilon>0,\exists N$,当$n>N$时有$|a_n-a|<\varepsilon$.

那么对于$\forall\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{a}}>0,\exists N$,当$n>N$时有:$|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|\le\left|\dfrac{a_n-a}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\right|\overset{a_n>0}{<}\dfrac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{a}}=\varepsilon'$.

因此有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$成立.

4.极限的定义是否可以改成下面的形式?(其中“∃”是逻辑符号，表示“存在”)

(1)$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当$n\ge N$时,有$|x_n-a|<\varepsilon$;

(2)$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当$n>N$时,有$|x_n-a|\le\varepsilon$;

(3)$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当$n\ge N$时,有$|x_n-a|<M\varepsilon$($M$为常数).

答：这三种都是可以的，它们都是可以很容易的推导出课本中给的定义，也很容易用课本中的定义推导出这三者。不过第三个里面的“M为常数”，最好改为“M为正常数”。

5.若$\{x_ny_n\}$收敛，能否断定$\{x_n\},\{y_n\}$也收敛？

答：不能；

例如：$x_n=(-2)^n,y_n=(-1)^n$,显然$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-2)^n\cdot(-1)^n=2$，而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$与$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$不存在。

6.设$x_n \le a \le y_n (n=1,2,\cdots)$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n)=0$, 求证:$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

证明：由于$x_n \le a \le y_n$，因此有$a - x_n \ge 0, y_n - a \ge 0$;于是有

$$|y_n - a| = y_n - a \le y_n - a + a - x_n = y_n - x_n,$$

$$|x_n - a| = a - x_n \le a - x_n + y_n - a = y_n - x_n;$$

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n)=0$，即对于$\forall\varepsilon>0, \exists N$, 当$n>N$时, 有$y_n - x_n = |y_n - x_n| < \varepsilon$; 那么对于$\forall\varepsilon>0, \exists N$, 当$n>N$时, 有

$$|y_n - a| \le y_n - x_n = |y_n - x_n| < \varepsilon,$$

$$|x_n - a| \le y_n - x_n = |y_n - x_n| < \varepsilon;$$

于是得$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

7.利用极限的四则运算法则求极限：

$$(1)\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2-n+1}{2n^3-3n^2+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3}{2n^3-3n^2+2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{2n^3-3n^2+2}$$

$$+\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2n^3-3n^2+2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^3-3n^2+2}$$

$$=\frac{3}{2}+0+0+0=\frac{3}{2}$$

$$(2)\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{-2}{3})^n+(\frac{3}{3})^n}{3\bullet(\frac{-2}{3})^{n+1}+3\bullet(\frac{3}{3})^{n+1}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{-2}{3})^n+\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3}{3})^n}{\lim\limits_{n\to\infty}3\bullet(\frac{-2}{3})^{n+1}+\lim\limits_{n\to\infty}3\bullet(\frac{3}{3})^{n+1}}$$

$$=\frac{0+1}{0+3}=\frac{1}{3}.$$

$$(3)\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1\bullet(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}}{\frac{1\bullet(1-\frac{1}{4^n})}{1-\frac{1}{4}}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\bullet(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\bullet(1-\frac{1}{4^n})}{1-\frac{1}{4}}}$$

$$=\frac{2}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{2}.$$

$$(4)\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\cdots+\sqrt[n]{10})$$

$$=\sum_{i=1}^{10}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{i}=\sum_{i=1}^{10}1=10$$

8.求下列极限：

(1) $\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}]$

$=\lim_{n\to\infty}[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]$

$=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$

(2) $\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}]$

解：由于

$\underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}}_{n\text{个}}\geq\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\geq 0$;

而$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}}_{n\text{个}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

于是有$\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}]=0$

(3) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$

解：由于$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\geq\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\geq\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

容易证得$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$, 于是有$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})=1.$

(4). $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n})$

解：令$S=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$, 那么$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$；于是

$$\frac{1}{2}S=(S-\frac{1}{2}S)=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+2[\frac{\frac{1}{2^2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}]-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

因此$S=1+4[\frac{\frac{1}{2^2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}]-\frac{2n-1}{2^n}$, 故

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n})=\lim_{n\to\infty}S=\lim_{n\to\infty}\{1+4[\frac{\frac{1}{2^2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}]-\frac{2n-1}{2^n}\}=1+2=3$$

(5). $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}})\cos n$

解：由于$(1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}})(-1)\leq(1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}})\cos n\leq(1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}})$，而$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}})(-1)=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}})=0$

因此$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}})\cos n=0.$

(6). $\lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}=\sqrt{1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\sqrt{1-0}=1.$

(7). $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$

$$=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}}$$

$$=2^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}}=2^{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^n})}=2$$

(8). $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}],0<\alpha<1$

解：由$0<\alpha<1$可知$\alpha-1<0$, 于是有$(n+1)^{\alpha-1}<n^{\alpha-1}$; 则

$$(n+1)^{\alpha}<n^{\alpha-1}(n+1)=n^{\alpha}+n^{\alpha-1}$$

于是$0<(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}<n^{\alpha-1}$,由$\alpha-1<0$知$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha-1}=0$, 故

$$\lim_{n\to\infty}[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}]=0.$$

(9). $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\bullet\frac{3}{4}\bullet\cdots\bullet\frac{2n-1}{2n}$

解：由于$2n=\frac{2n-1+2n+1}{2}\geq\sqrt{(2n-1)(2n+1)}$, 于是

$$0<\frac{1}{2}\bullet\frac{3}{4}\bullet\cdots\bullet\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{1\bullet3}}\bullet\frac{3}{\sqrt{3\bullet5}}\bullet\frac{5}{\sqrt{5\bullet7}}\bullet\cdots\bullet\frac{2n-1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}=0$,由两边夹法则可知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\bullet\frac{3}{4}\bullet\cdots\bullet\frac{2n-1}{2n}=0.$

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}\bullet\frac{3}{4}\bullet\cdots\bullet\frac{2n-1}{2n}}$

解：由于$2n=\frac{2n-1+2n+1}{2}\geq\sqrt{(2n-1)(2n+1)}$, 于是

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}}=\sqrt[n]{\frac{1}{3}\bullet\frac{3}{5}\bullet\frac{5}{7}\bullet\cdots\bullet\frac{2n-1}{2n+1}}<\sqrt[n]{\frac{1}{2}\bullet\frac{3}{4}\bullet\frac{5}{6}\bullet\cdots\bullet\frac{2n-1}{2n}}$$

$$<\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{1\bullet3}}\bullet\frac{3}{\sqrt{3\bullet5}}\bullet\frac{5}{\sqrt{5\bullet7}}\bullet\cdots\bullet\frac{2n-1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}}=\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}}=\sqrt[2n]{\frac{1}{2n+1}}$$

我们已知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 于是可得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{1}{2n+1}}=1$,因此

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}\bullet\frac{3}{4}\bullet\cdots\bullet\frac{2n-1}{2n}}=1$$

(11). $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\ln(\frac{1}{n!})}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(\frac{1}{n!})}{n}}$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{1}{i}}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}(\ln\frac{1}{i}+\ln n)-n\ln n}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{\sum_{i=1}^{n}(\ln\frac{n}{i})}{n}-\ln n]}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}[-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln\frac{i}{n})-\ln n]}=e^{[-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln\frac{i}{n})-\lim\limits_{n\to\infty}\ln n]}=e^{-\int_0^1\ln xdx-\lim\limits_{n\to\infty}\ln n}$$

$$=\frac{1}{e^{\int_0^1\ln xdx+\lim\limits_{n\to\infty}\ln n}}=\frac{1}{e^{-1+\lim\limits_{n\to\infty}\ln n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{n}=0$$

(12). $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln(\sqrt[n]{n\ln n})}$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln(n\ln n)}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n\ln n)}{n}}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n+\ln(\ln n)}{n}}=e^0=1$$

9.证明：若$\{a_n\},\{b_n\}$,中一个是收敛数列，另一个是发散数列，则$\{a_n \pm b_n\}$是发散数列；又问$\{a_nb_n\},\{\frac{a_n}{b_n}\}(b_n \neq 0)$是否也是发散数列？为什么？

证明：不妨设$\{a_n\}$是收敛于a的数列，即$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \{b_n\}$发散；使用反证法。

若$\{a_n \pm b_n\}$收敛于b，即$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = b$；则由极限的四则运算可知：

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \pm[(a_n \pm b_n) - a_n] = \pm[\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) - \lim_{n\to\infty} a_n] = \pm(b-a)$$

这与$\{b_n\}$发散矛盾，故可知$\{a_n \pm b_n\}$是发散数列。

此时$\{a_nb_n\},\{\frac{a_n}{b_n}\}(b_n \neq 0)$不一定是发散数列：例如取$a_n = \frac{1}{n}, b_n = n, \{a_nb_n\},\{\frac{a_n}{b_n}\}(b_n \neq 0)$都是收敛于零的数列；若取$a_n = \frac{1}{n}, b_n = \begin{cases} n^2 & n = 2k \\ \frac{1}{n^2} & n = 2k+1 \end{cases} (k = 0,1,2,\cdots)$，此时$\{a_nb_n\},\{\frac{a_n}{b_n}\}(b_n \neq 0)$都是发散数列。

10.设$x_n = (-1)^n$，证明$\{x_n\}$发散。

证明：我们使用定理9.4(柯西收敛原理)利用反证法证明。

如果$x_n = (-1)^n$收敛，则对于$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当$n > N, m > N$时有$|x_n - x_m| < \varepsilon$.

我们取$\varepsilon_0 = 1$，对于$\forall N$，取$n = N+1 > N, m = N+2 > N$(可以知道n, m中必是一个为偶数，另一个为奇数；那么x_n与x_m一个为1，另一个为-1)，则$|x_n - x_m| = 2 > \varepsilon_0$矛盾。

故$x_n = (-1)^n$发散。

11.若$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m$为$m$个整数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + a_3^n + \cdots + a_m^n} = \max(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m)$.

证明：不妨设$a_1 = \max(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m)$，于是$\frac{a_i}{a_1} \leq 1 (i = 1, 2, \cdots, m)$.则

$$a_1 = \sqrt[n]{a_1^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + a_3^n + \cdots + a_m^n} = a_1 \sqrt[n]{(\frac{a_1}{a_1})^n + (\frac{a_2}{a_1})^n + (\frac{a_3}{a_1})^n + \cdots + (\frac{a_m}{a_1})^n} \leq a_1 \sqrt[n]{m}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty} a_1 \sqrt[n]{m} = a_1$，故可得$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + a_3^n + \cdots + a_m^n} = a_1 = \max(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m)$.

12.设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，证明：

(1).$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[na_n]}{n} = a$;

(2).若$a > 0, a_n > 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

证明：(1).已知$a_n - \frac{1}{n} = \frac{na_n - 1}{n} \leq \frac{[na_n]}{n} \leq \frac{na_n + 1}{n} = a_n + \frac{1}{n}$，容易知道$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - \frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + \frac{1}{n}) = a$.

于是有夹迫性可以知道$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[na_n]}{n} = a$.

(2).$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln \sqrt[n]{a_n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n}} = e^0 = 1$.

13.利用单调有界原理证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求出它。

(1).$x_1=\sqrt{2}, x_n=\sqrt{2x_{n-1}}$;

证明：$i.x_1=\sqrt{2}<\sqrt{2\sqrt{2}}=\sqrt{2x_1}=x_2<2;$

$ii.$设$x_{k-1}<x_k<2;$

$iii.$则$x_k<\sqrt{2x_k}=x_{k+1}<2.$

由数学归纳法可以知道，数列$\{x_n\}$单调上升且以2为一个上界；因此数列$\{x_n\}$有界限。我们设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A,$那么$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2x_{n-1}}\Rightarrow A=\sqrt{2A},$于是可以解得$A=2$或$A=0.$由题意容易知道$x_n>\sqrt{2},$故必有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2.$

(2).$x_1=\sqrt{c}, x_n=\sqrt{c+x_{n-1}}$;

证明：使用数学归纳法证明$\{x_n\}$递增且有界。

$i.x_1=\sqrt{c}<\sqrt{c+x_1}=x_2;$

$ii.$设$x_{k-1}<x_k$

$iii.$由于$x_{k-1}+c<x_k+c,$则$\sqrt{x_{k-1}+c}<\sqrt{x_k+c},$即$x_k<x_{k+1}.$

于是我们知道$\{x_n\}$递增。

$i.x_1=\sqrt{c}<1+c;$

$ii.$设$x_{k-1}<1+c;$

$iii.$由于$x_k=\sqrt{x_{k-1}+c}<\sqrt{1+c+c}<\sqrt{1+2c+c^2}=1+c.$

因此我们知道$\{x_n\}$有一个上界$1+c.$于是我们知道$\{x_n\}$收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a;$ 在$x_n=\sqrt{c+x_{n-1}}$两边取极限可得$a=\sqrt{c+a}$，解得$a=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4c}}{2}.$由于$\{x_n\}$是一个正项数列，故

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}.$$

(3)$x_n=\dfrac{c^n}{n!},(c>0)$

证明：用数学归纳法证明当$n>N=[c]+1$时，数列开始单调递减。

$i.x_N=\dfrac{c^N}{N!}>\dfrac{c^{N+1}}{N!([c]+2)}=\dfrac{c^{N+1}}{(N+1)!}=x_{N+1};$

$ii.$设$x_k>x_{k+1};$

$iii.x_{k+1}=\dfrac{c^{k+1}}{(k+1)!}>\dfrac{c^{k+1}\bullet c}{(k+1)!\bullet(k+2)}=\dfrac{c^{k+2}}{(k+2)!}=x_{k+2}.$

显然0是数列的一个下界，因此可以知道数列收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a,$那么在等式

$$x_n=\frac{c^n}{n!}=\frac{c}{n}\frac{c^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{c}{n}x_{n-1}$$

两边取极限可以得到$a=0\bullet a=0,$于是$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0.$

(4). $x_0=1, x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$.

证明：$i. x_1=1+\dfrac{x_0}{1+x_0}>1=x_0$；

$ii.$ 设 $x_k>x_{k-1}$；

$iii.$ 由于 $x_k>x_{k-1}$，于是 $2-\dfrac{1}{1+x_k}>2-\dfrac{1}{1+x_{k+1}}$，即 $1+\dfrac{x_k}{1+x_k}>1+\dfrac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}}$，因此 $x_{k+1}>x_k$.

显然对于 $\forall n$ 有 $x_n<2$，那么数列 $\{x_n\}$ 单调上升且有界，故有极限存在；设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，我们在等式 $x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ 取极限可以得到 $a=1+\dfrac{a}{1+a}$，可以解得 $a=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 又因为数列 $\{x_n\}$ 是一个正项数列，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

14. 若 $x_1=a>0, y_1=b>0(a<b). x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}, y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

证明：有不等式 $\sqrt{xy}\le\dfrac{x+y}{2}(x,y\ge0)$ 可以知道，正项数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足 $x_n\le y_n$，于是有

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\ge\sqrt{x_nx_n}=x_n, y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\le\frac{y_n+y_n}{2}=y_n$$

因此数列 $\{x_n\}$ 单调递增且以 y_n 为一组上界，$\{y_n\}$ 单调递减以 x_n 为一组下界；那么这两个数列有极限。设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x, \lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$，在等式 $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}, y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$ 取极限可得到

$$\begin{cases}x=\sqrt{xy}\\ y=\dfrac{x+y}{2}\end{cases};$$

推导可得 $x=y$，于是有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

15. 证明：若 $a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证明：由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$ 可以知道 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1)=l-1>0$，那么由保号性可以知道 $\exists N$，当 $n>N$ 时 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1>\dfrac{l-1}{2}>0$. 即当当 $n>N$ 时，$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}>1+\dfrac{l-1}{2}$，于是

$$a_N>a_{N+1}(1+\frac{l-1}{2})>a_{N+2}(1+\frac{l-1}{2})^2>\cdots>a_{N+n}(1+\frac{l-1}{2})^n$$

那么 $0<\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{N+n}<\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_N}{(1+\dfrac{l-1}{2})^n}=0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

16.设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,证明:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$,它的逆命题是否成立?

(2)若$a_n>0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\bullet a_2\bullet\cdots\bullet a_n}=a$.

证明:(1)由题意可知：对于$\forall\varepsilon_1>0,\exists N_1$,当$n>N_1$时$\left|a_n-a\right|<\varepsilon_1$.那么

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|=\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)+(a_{N_1+1}-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|$$

$$\le\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)}{n}\right|+\left|\frac{(a_{N_1+1}-a)}{n}\right|+\left|\frac{(a_{N_1+2}-a)}{n}\right|+\cdots+\left|\frac{(a_n-a)}{n}\right|$$

$$<\frac{\left|(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)\right|}{n}+\frac{n-N_1}{n}\varepsilon_1$$

$$<\frac{\left|(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)\right|}{n}+\varepsilon_1$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)\right|}{n}=0$，于是对于$\forall\varepsilon_1>0,\exists N_2$,当$n>N_2$时，

$$\frac{\left|(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)\right|}{n}<\varepsilon_1;$$

取$N=\max(N_1,N_2)$,则对于$\forall\varepsilon=2\varepsilon_1>0,\exists N$,当$n>N$时，

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\frac{\left|(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)\right|}{n}+\varepsilon_1<\varepsilon_1+\varepsilon_1=\varepsilon.$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$

它的逆命题不成立，例如取$a_n=(-1)^n.\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$,而$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不存在。

(2).对于任意正整数$n, a_n > 0$, 于是必有$a \ge 0$.当$a > 0$时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$, 由均值不等式可知：

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

由(1)可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}} = \frac{1}{\frac{1}{a}} = a,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a.$$

于是可以知道$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = a.$

当$a = 0$时，对于$\forall\varepsilon$，$\exists N$, 当$n > N_1$时有$0 < a_n < \varepsilon$; 于是当$n > N_1$时有

$$0 < \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{N_1}} \bullet \sqrt[n]{a_{N_1+1}a_{N_1+2}\cdots a_n} < \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{N_1}}\,\varepsilon^{\frac{n-N_1}{n}} = \varepsilon\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{N_1}\varepsilon^{-N_1}}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{N_1}\varepsilon^{-N_1}} = 1$，于是可知对于$\forall\varepsilon$，$\exists N_2$, 当$n > N_2$时有$\varepsilon\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{N_1}\varepsilon^{-N_1}} < \varepsilon$.取$N = \max(N_1, N_2)$, 对于$\forall\varepsilon > 0$, 当$n > N$时, $0 < \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} < \varepsilon$；于是$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = 0 = a$.

17.用上题结果证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n} = 0$;

证明：取$a_n = \frac{1}{n}$, 则$a_n > 0$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$，则由上题(1)得证。

(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$;

证明：取数列$\{a_n\}$满足$a_1 = a, a_n = 1(n > 1)$.那么由上题(2)可知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

(3). $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$;

证明：构造数列$a_n = \frac{n}{n-1}$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 1$, 于是$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = 1$.

(4). $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$;

证明：构造数列$a_n = \frac{1}{n}$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$, 于是$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = 0$.

(5). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$;

证明：构造数列$a_n=\sqrt[n]{n}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$,于是$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=1.$

(6).若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=a(b_n>0)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=a.$

证明：已知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_1}=1$.则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{b_n}}{\sqrt[n]{b_1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{b_n}{b_1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{b_n}{b_{n-1}}\dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\dfrac{b_{n-2}}{b_{n-3}}\cdots\dfrac{b_2}{b_1}}=a$

18.用定义证明下列数列为无穷大量：

(1) $\{\sqrt{n}\}$;

证明：对于$\forall G>0$,总$\exists N=[G^2]+1$,使得当$n>N$时有$\sqrt{n}>\sqrt{N}>\sqrt{G^2}=G$.
于是数列$\{\sqrt{n}\}$为无穷大量。

(2) $\{n!\}$;

证明：对于$\forall G>0$,总$\exists N=[G]+1$,使得当$n>N$时有$n!>N!>G!\geq G$.
于是数列$\{n!\}$为无穷大量。

(3) $\{\ln n\}$;

证明：对于$\forall G>0$,总$\exists N=[e^G]+1$,使得当$n>N$时有$\ln n>\ln N>\ln e^G>G$.
于是数列$\{\ln n\}$为无穷大量。

(4)$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$

证明：取

$$\begin{cases} a_0=1, \\ a_1=\frac{1}{2}, \\ a_2=\frac{1}{2^1+1}+\frac{1}{2^2}>\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}, \\ a_3=\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^2+2}\cdots+\frac{1}{2^3}>\frac{2^2}{2^3}=\frac{1}{2}, \\ a_4=\frac{1}{2^3+1}+\frac{1}{2^3+2}\cdots+\frac{1}{2^4}>\frac{2^3}{2^4}=\frac{1}{2}, \\ \vdots \\ a_n=\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}\cdots+\frac{1}{2^n}>\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}, \\ \vdots \end{cases}$$

那么对于$\forall G>0,$总有$N=2^{[2G]+1}$,当$n>N$时有

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{[2G]}>\frac{2G}{2}=G.$$

因此数列$\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\}$是无穷大量。

19.证明：若$\{x_n\}$为无穷大量，数列$\{y_n\}$为有界变量，则$\{x_n \pm y_n\}$为无穷大量。

证明：由题意可知$\exists M$,对于$\forall n$有$|y_n|<M$;而对于$\forall G_1>0,$总$\exists N_1,$当$n>N_1$时，有$|x_n|>G_1.$

那么对于$\forall G_1>M$,也存在N,当$n>N$时有$|x_n|>G_1$；于是对于$\forall G=G_1-M>0,$ 总$\exists N,$ 当$n>N$时,$|x_n \pm y_n|\geq|x_n|-|y_n|>G_1-M=G$.于是数列$\{x_n \pm y_n\}$为无穷大量。

20.(1)两个无穷大量的和的极限如何？试讨论各种可能情况。

答：两无穷大量的和可能还是无穷大量，也可能是有界数列，还有可能是收敛数列。

例如：$x_n=n, y_n=n^2,$它们的和是无穷大量；

$x_n=n, y_n=-n+(-1)^n,$它们的和是有界数列；

$x_n=n, y_n=-n+1,$它们的和是收敛数列(如果$y_n=-n+\frac{1}{n},$ 则它们的和为无穷小量).

(2).讨论无穷大量与无穷小量的和、差、商的极限情况。

答：无穷大量与无穷小量的和与差仍然是无穷大量，及极限不存在。它们的商满足

$$\frac{\text{无穷大量}}{\text{无穷小量}}=\text{无穷大量},\frac{\text{无穷小量}}{\text{无穷大量}}=\text{无穷小量}.$$

(3).讨论无穷大量与无穷小量的积的极限情况。

答：可能是无穷大量也可能是无穷小量, 也可能是收敛于非零数的收敛数列，例如

$x_n=\frac{1}{n},y_n=n,$它们的积为收敛于1的收敛数列；

$x_n=\frac{1}{n},y_n=\sqrt{n},$它们的积为无穷小量；

$x_n=\frac{1}{n},y_n=n^2,$它们的积为无穷大量。

这些取决于它们的关于n的阶数和。

21.利用$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{-n})^{-n}}$$

$$=\frac{1}{e}.$$

(2). $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n$

$$=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{(n+1)\frac{n}{n+1}}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}}$$

$$=e$$

第三节 函数的极限

1.用极限的定义证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{2};$

证明:$\left|\frac{x-3}{x^2-9}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{x+3}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x+1}{2(x+3)}\right|=\left|\frac{x+1}{2(x+1)+4}\right|.$

限制$0<|x+1|<1$, 于是$-1<x+1<1$; 那么$\left|\frac{x-3}{x^2-9}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x+1}{2(x+1)+4}\right|<\left|\frac{x+1}{2}\right|$, 对于$\forall\ \varepsilon>0$,

$\exists\delta=\min(1,2\varepsilon)$, 当$0<|x+1|<\delta$时有$\left|\frac{x-3}{x^2-9}-\frac{1}{2}\right|<\left|\frac{x+1}{2}\right|<\frac{2\varepsilon}{2}=\varepsilon.$

于是有$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{2}.$

(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$;

证明: $\left|\dfrac{x-3}{x^2-9}-\dfrac{1}{6}\right|=\left|\dfrac{x-3}{(x+3)(x-3)}-\dfrac{1}{6}\right|=\left|\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{6}\right|=\left|\dfrac{x-3}{6(x+3)}\right|=\left|\dfrac{x-3}{6(x-3)+36}\right|$.

限制 $0<|x-3|<1$, 于是 $-1<x-3<1$; 那么 $\left|\dfrac{x-3}{x^2-9}-\dfrac{1}{6}\right|=\left|\dfrac{x-3}{6(x-3)+36}\right|<\left|\dfrac{x-3}{30}\right|$, 对于 $\forall\ \varepsilon>0$,

$\exists\delta=\min(1,30\varepsilon)$, 当 $0<|x-3|<\delta$ 时有 $\left|\dfrac{x-3}{x^2-9}-\dfrac{1}{6}\right|<\left|\dfrac{x-3}{30}\right|<\dfrac{30\varepsilon}{30}=\varepsilon$.

于是有 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$;

证明：取 $u=\sqrt{x}$, 由于 $\lim\limits_{x\to 1}u=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}=1$ 且 $x\neq 1$ 时, $u\neq 1$; 则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{u^2-1}{u-1}=\lim\limits_{u\to 1}(u+1)$.

对于 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\varepsilon$, 当 $0<|u-1|<\delta$ 时有 $|u+1-2|<|u-1|<\delta=\varepsilon$.

于是有 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{u^2-1}{u-1}=\lim\limits_{u\to 1}(u+1)=2$.

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-3}=0$;

证明：限制 $0<|x-1|<2$, 于是 $-2<x-1<2$; 那么

$$\left|\frac{(x-2)(x-1)}{x-3}\right|=\left|\frac{x-2}{x-3}(x-1)\right|=\left|(1+\frac{1}{x-3})(x-1)\right|<2\,|x-1|;$$

对于 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\min(2,\dfrac{\varepsilon}{2})$, 当 $0<|x-1|<\delta$ 时有 $\left|\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-3}\right|<2\,|x-1|<2\,\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. 于是有

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{x-3}=0.$$

(5) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2+5}=3$;

证明: $\left|\sqrt{x^2+5}-3\right|=\left|\dfrac{x^2+5-9}{\sqrt{x^2+5}+3}\right|<\left|\dfrac{(x+2)(x-2)}{\sqrt{x^2}}\right|=\left|\dfrac{x+2}{x}(x-2)\right|$.

限制 $0<|x-2|<1$, 于是 $1<x<3$; 那么对于 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta=\min(1,\dfrac{\varepsilon}{3})$, 当 $0<|x-2|<\delta$ 时有

$$\left|\sqrt{x^2+5}-3\right|<\left|\frac{x+2}{x}(x-2)\right|<3\,|x-2|<\frac{3\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

于是有 $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2+5}=3$.

(6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$;

证明:$\left|\dfrac{x(x-1)}{x^2-1}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{x-1}{2(x+1)}\right|$.

限制$0<|x-1|<\dfrac{1}{2}$, 于是$\dfrac{3}{2}<x+1<\dfrac{5}{2}$; 那么对于$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta=\min(\dfrac{1}{2},3\,\varepsilon)$, 当$0<|x-2|<\delta$时有

$$\left|\frac{x(x-1)}{x^2-1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x-1}{2(x+1)}\right|<\left|\frac{x-1}{3}\right|<\frac{3\,\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

于是有$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$.

(7) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x^2-9}=\infty$;

证明:$\left|\dfrac{x}{x^2-9}\right|=\left|\dfrac{x}{x+3}\right|\left|\dfrac{1}{x-3}\right|=\left|1-\dfrac{3}{x+3}\right|\left|\dfrac{1}{x-3}\right|$.

限制$0<|x-3|<1$, 于是$5<x+3<7$; 那么对于$\forall\,G>0,\exists\,\delta=\min(1,\dfrac{2}{5G})$, 当$0<|x-3|<\delta$时有

$$\left|\frac{x}{x^2-9}\right|=\left|1-\frac{3}{x+3}\right|\left|\frac{1}{x-3}\right|>\frac{2}{5}\left|\frac{1}{x-3}\right|>\frac{2}{5}\frac{1}{\frac{2}{5G}}=G.$$

于是有$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x^2-9}=\infty$.

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x+2}=1$;

证明:对于$\forall\,\varepsilon>0,\exists G=\max(\left|\dfrac{3}{\varepsilon}-2\right|,\left|-2-\dfrac{3}{\varepsilon}\right|)$, 则当$|x|>G$时有$|x+2|>\dfrac{3}{\varepsilon}$, 那么

$$\left|\frac{x-1}{x+2}-1\right|=\left|\frac{3}{x+2}\right|<\frac{3}{\frac{3}{\varepsilon}}=\varepsilon$$

于是有$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x+2}=1$.

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x+1}=\infty$;

证明:对于$\forall\,G>0,\exists M=G$, 当$|x|>M$时有$\left|\dfrac{x^2+x}{x+1}\right|=|x|>M=G$.

于是有$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x^2-9}=\infty$.

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5}{x^2-1}=1.$

证明:$\left|\dfrac{x^2-5}{x^2-1}-1\right|=\left|\dfrac{4}{x^2-1}\right|=\left|\dfrac{4}{|x|^2-1}\right|=\left|\dfrac{4}{(|x|-1)(|x|+1)}\right|.$

限制$2<|x|$,那么对于$\forall\varepsilon>0,\exists M=\max(2,\dfrac{4}{\varepsilon})$,当$|x|>M$时有

$$\left|\frac{x^2-5}{x^2-1}-1\right|<\left|\frac{4}{|x|+1}\right|<\frac{4}{|x|}<\frac{4}{\frac{4}{\varepsilon}}=\varepsilon.$$

于是有$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5}{x^2-1}=1.$

2.用极限的四则运算法则求下列极限:

(1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)}=\dfrac{2}{3}.$

(3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)^3+(1-3x)}{x^2+2x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1+1-3x}{x^2+2x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-3x^2}{x^2+2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-3}{1+2x}$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)}=\dfrac{-3}{1}=-3.$

(4). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}^3-1)}{\sqrt{x}-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}^2+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}(\sqrt{x}^2+\sqrt{x}+1)=3.$

(5). $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(\sqrt{1+x}+2)(\sqrt{1+x}-2)}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1+x-4}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+2}=\dfrac{1}{4}.$

(6). $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-5)}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-2}{x-5}$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 3}(x-5)}=-\dfrac{1}{2}.$

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}$, ($n,m$为正整数).

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}+\cdots+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1}{x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}+\cdots+x+1}$$

$$=\frac{n}{m}.$$

(8). $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 4}2(\sqrt{x}+2)}{\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{1+2x}+3}$$

$$=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

3.设$f(x)>0$.证明：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, 则$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A}$.(其中正整数$n\ge 2$).

证明：由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$知对$\forall\varepsilon_1>0,\exists\delta_1>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta_1$时有$|f(x)-A|<\varepsilon_1$.

此时对于$\left|\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{A}\right|$有

$$\left|\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{A}\right|=\left|[f(x)]^{\frac{1}{n}}-(A)^{\frac{1}{n}}\right|$$

$$=\frac{|f(x)-A|}{\left|[f(x)]^{\frac{n-1}{n}}+[f(x)]^{\frac{n-2}{n}}(A)^{\frac{1}{n}}+[f(x)]^{\frac{n-3}{n}}(A)^{\frac{2}{n}}+\cdots+[f(x)]^{\frac{1}{n}}(A)^{\frac{n-2}{n}}+(A)^{\frac{n-1}{n}}\right|}$$

由于$f(x)>0$，故$A>0$, 于是有

$$\left|\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{A}\right|=\frac{|f(x)-A|}{\left|[f(x)]^{\frac{n-1}{n}}+[f(x)]^{\frac{n-2}{n}}(A)^{\frac{1}{n}}+[f(x)]^{\frac{n-3}{n}}(A)^{\frac{2}{n}}+\cdots+[f(x)]^{\frac{1}{n}}(A)^{\frac{n-2}{n}}+(A)^{\frac{n-1}{n}}\right|}$$

$$<\frac{|f(x)-A|}{\left|(A)^{\frac{n-1}{n}}\right|}=\frac{|f(x)-A|}{(A)^{\frac{n-1}{n}}}<\frac{\varepsilon_1}{(A)^{\frac{n-1}{n}}}.$$

于是可知对于$\forall\varepsilon=\dfrac{\varepsilon_1}{(A)^{\frac{n-1}{n}}}>0,\exists\delta=\delta_1>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$时有

$$\left|\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{A}\right|<\frac{\varepsilon_1}{(A)^{\frac{n-1}{n}}}=\varepsilon.$$

因此有$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A}$成立。

4.证明：若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$，但反之不真。

证明：由$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$知对于$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时有$|f(x)-A|<\varepsilon$；而此时必有$||f(x)|-|A||\le|f(x)-A|<\varepsilon$成立，故$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$成立。

反之不成立，例如$f(x)=(-1)^{[x]}$满足$\lim\limits_{x\to 1}|f(x)|=|1|=1$，而$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在。

5.求下列函数在所示点的左右极限：

(1). $f(x)=\begin{cases}0 & x>1\\ 1 & x=1\\ x^2+2 & x<1\end{cases}$，在$x=1$；

解：$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}0=0,$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+2)=3.$

(2). $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & x>0\\ x^2+1 & x<0\end{cases}$，在$x=0$；

解：$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x\sin\dfrac{1}{x}=0,$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=1.$

(3). $f(x)=\dfrac{|x|}{x}\dfrac{1}{1+x^2}$，在$x=0$；

解：$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}\dfrac{1}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}\dfrac{1}{1+x^2}=1,$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}\dfrac{1}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x}{x}\dfrac{1}{1+x^2}=-1.$

(4). $f(x)=\dfrac{1}{x}-[\dfrac{1}{x}]$，在$x=\dfrac{1}{n}$，$n$是正整数；

解：$\lim\limits_{x\to(\frac{1}{n})^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{1}{n})^+}(\dfrac{1}{x}-[\dfrac{1}{x}])=(n-(n-1))=1,$

$\lim\limits_{x\to(\frac{1}{n})^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{1}{n})^-}(\dfrac{1}{x}-[\dfrac{1}{x}])=(n-n)=0.$

(5). $f(x)=\begin{cases}2^x & x>0\\ 0 & x=0\\ 1+x^2 & x<0\end{cases}$，在$x=0$；

解：$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}2^x=1,$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=1.$

6.求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{1}{2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-7}{2x+\sqrt{x}}=\dfrac{5}{2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$;

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=(+\infty)+(+\infty)=+\infty$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x}{x^2}=1$;

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2-4}=0$(可以使用夹迫性原理)

(7) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\cos x}{x}=1$

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x+1}=0.$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos\sqrt{n+1}-\cos\sqrt{n})$

解：令$\begin{cases}\alpha+\beta=\sqrt{n+1}\\ \alpha-\beta=\sqrt{n}\end{cases}$，则$\begin{cases}\alpha=\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\\ \beta=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\end{cases}$；于是

$$\begin{aligned}\cos\sqrt{n+1}-\cos\sqrt{n}&=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\\&=-2\sin\alpha\sin\beta\\&=-2\sin\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\\&=-2\sin\frac{1}{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}\sin\frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\end{aligned}$$

显然数列$\{-2\sin\dfrac{1}{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}\}$是有界数列，而$\{\sin\dfrac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\}$是无穷小量；因此有

$$\lim_{n\to\infty}(\cos\sqrt{n+1}-\cos\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}(-2\sin\frac{1}{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}\sin\frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})})=0.$$

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+1}$($n$为整数).

解：当$n=2k$时：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+1}&=\lim_{k\to\infty}\sin\pi\sqrt{(2k)^2+1}\\&=\lim_{k\to\infty}\sin[\pi\sqrt{(2k)^2+1}-2k\pi]\\&=\lim_{k\to\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{(2k)^2+1}+2k}=0\end{aligned}$$

当$n=2k+1$时：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+1}&=\lim_{k\to\infty}\sin\pi\sqrt{(2k+1)^2+1}\\&=\lim_{k\to\infty}\{-\sin[\pi\sqrt{(2k+1)^2+1}-(2k+1)\pi]\}\\&=-\lim_{k\to\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{(2k+1)^2+1}+2k+1}=0\end{aligned}$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+1}=0$.

7.用变量替换求下列极限：

(1). $\lim\limits_{x\to0^+}x[\frac{1}{x}]$

解：对$\forall x\in\mathbb{R}$，必有常数δ使得$[\frac{1}{x}]=\frac{1}{x}+\delta$，于是有

$$\lim_{x\to0^+}x[\frac{1}{x}]=\lim_{x\to0^+}x(\frac{1}{x}+\delta)=1+\lim_{x\to0^+}x\bullet\delta)=1.$$

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\ln x(\alpha>0)$

解：令$\ln x=t$,则$x=e^t$,且$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=1$；于是$\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\ln x=\lim\limits_{t\to1^+}e^{\alpha t}t=e^\alpha$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}(\alpha>0)$

解：令$\ln x=t$,则$x=e^t$,且$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$；于是$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{\alpha t}}=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$

解:$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x}$, 令$\ln x=t$, 则$x=e^t$, 且$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$；于是

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0.$$

因此$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x}=e^0=1$.

8.设$f(x)$在$(a,+\infty)$上单调上升，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, 若$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$, 求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$($A$可为无穷).

证明：由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$知, 对于$\forall X>0,\exists N_1$, 当$n>N_1$时, $x_n>X$; 由$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$知, 对于$\forall\ \varepsilon_0>0$, $\exists N_2$, 当$n>N_2$时, $|f(x_n)-A|<\varepsilon_0$. 如果A是一个确定的实数：

我们假设存在$(a,+\infty)$上的数列$\{x_k\}$满足$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=+\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)\neq A$, 那么$\exists\varepsilon_0>0$, 对于$\forall K_1$, 总$\exists k>K_1$, 满足$|f(x_k)-A|>\varepsilon_0$, 即$f(x_k)>A+\varepsilon_0$或$f(x_k)<A-\varepsilon_0$. 对于数列$\{x_k\}$我们总可以找见$K_2$, 当$k>K_2$时, $x_k>x_{N_2+1}$, 而此时有$|f(x_{N_2+1})-A|<\varepsilon_0$, 即$A-\varepsilon_0<f(x_{N_2+1})<A+\varepsilon_0$.

取$K=\max(K_1,K_2)$如果此时有$f(x_{K+1})<A-\varepsilon_0$, 则与$f(x)$在$(a,+\infty)$上单调上升矛盾。如果此时$f(x_{K+1})>A+\varepsilon_0$, 那么对于数列$\{x_n\}$, 我们总可以找见$N_3$, 当$n>N_3$时$x_n>x_{K+1}$.

取$N=\max(N_3,N_2)$, 此时有$A-\varepsilon_0<f(x_{N+1})<A+\varepsilon_0$, $f(x_K)>A+\varepsilon_0$, 这与$f(x)$在$(a,+\infty)$上单调上升矛盾。故必有当数列$\{x_k\}$满足$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=+\infty$时$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)=A$.

当$A=+\infty$, 仍用反证法。设数列$\{x_k\}$满足$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=+\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)\neq+\infty$. 即$\exists G_0>0$, 对于$\forall K_1$, $\exists k>K$满足$f(x_k)<G_0$. 而对于数列$\{x_n\}$有对于$\forall G>0,\exists N$, 当$n>N$时有$f(x_n)>G$.
对于数x_{N+1}, 由于数列$\{x_k\}$满足$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=+\infty$, 总$\exists K_2$, 当$k>K_2$时, $x_k>x_{N+1}$.

取$G=G_0$, 取$K=\max(K_1,K_2)+1$, 则此时存在$k>K$满足：$x_k>x_{N+1}$, $f(x_k)<G_0$, 但此时有$f(x_{N+1})>G_0$；这与$f(x)$在$(a,+\infty)$上单调上升矛盾。

当$A=-\infty$时也可以使用反证法。

于是对于任意数列$\{x_k\}$, 如果满足$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=+\infty$, 则必有$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)=A$；那么由海涅定理可以知道所证成立。

9.设$f(x)$在集合X上定义，则$f(x)$在X无界的充要条件是：存在

$$x_n\in X, n=1,2,\cdots$$

使得$\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)|=+\infty$.

证明：充分性。假设数列$\{x_n\}$满足$x_n\in X, n=1,2,\cdots$且$\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)|=+\infty$，即对$\forall G>0,\exists N$, 当$n>N$时, $|f(x_n)|>G$; 那么对于$\forall G>0$, 总可以找见$x\in\{x_n\}\subset X$使得$|f(x_n)|>G$, 于是$f(x)$在X上无界。

必要性。若$f(x)$在X无界，即对于$\forall G>0,\exists x\in X$, 使得$|f(x_n)|\geq G$:

取$G_1=2$, 则有$x_1\in X$, 使得$|f(x_1)|\geq G_1=2$;

取$G_2=2^2$, 则有$x_2\in X$, 使得$|f(x_2)|\geq G_2=2^2$;

取$G_3=2^3$, 则有$x_3\in X$, 使得$|f(x_3)|\geq G_3=2^3$;

$\vdots$

取$G_n=2^n$, 则有$x_n\in X$, 使得$|f(x_n)|\geq G_n=2^n$;

$\vdots$

于是我们得到一个X上的数列$\{x_n\}$, 它满足$\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)|=+\infty$. 得证。

10.利用重要极限求下列极限：

$$(1)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\bullet 2$$
$$=2$$

$$(2)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{(\sin x)^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2\bullet(\frac{\sin x}{x^2})^2}$$
$$=1$$

$$(3)\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\cos 3x\sin 5x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{5}\frac{\sin 3x}{3x}\frac{5x}{\sin 5x}\frac{1}{\cos 3x}$$
$$=\frac{3}{5}$$

$$(4)\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-2\sin x\cos x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}2\bullet\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}2\bullet\frac{\sin x}{x}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}=\lim_{x\to 0}(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2=1$$

$$(5).\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}(-\frac{\sin 4x\sin x}{x^2})$$
$$=\lim_{x\to 0}(-4\frac{\sin 4x}{4x}\frac{\sin x}{x})$$
$$=-4$$

$$(6)\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\bullet\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\bullet\sin^2\frac{x}{2}}{4\bullet(\frac{x}{2})^2}=\frac{1}{2}$$

$$(7)\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$$
$$\overset{\arctan x=y}{=}\lim_{y\to 0}\frac{y}{\tan y}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{y\cos y}{\sin y}$$
$$=1$$

$$(8)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}(\sqrt{x+1}+1)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\bullet 4(\sqrt{x+1}+1)$$
$$=8$$

$$(9)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2\sin^2\frac{x^2}{2}}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sin\frac{x^2}{2}}{2\bullet\frac{x^2}{2}}(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}})^2\bullet 4$$
$$=\sqrt{2}$$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(n\arccos x)}{x}$, n为奇数；

解：令 $\arccos x = y$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(n\arccos x)}{x}$

$$=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(ny)}{\cos y}$$

令 $t = y-\dfrac{\pi}{2}$, 则 $\lim\limits_{y\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos(ny)}{\cos y}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(nt+n\frac{\pi}{2})}{\cos(t+\frac{\pi}{2})}$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin nt}{\sin t} & n=4k+1\\ -\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin nt}{\sin t} & n=4k+3\end{cases}$$

$$=\begin{cases}n & n=4k+1\\ -n & n=4k+3\end{cases}$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(n\arccos x)}{x}=\begin{cases}n & n=4k+1\\ -n & n=4k+3\end{cases}$.

(11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

解：令 $t = x-\dfrac{\pi}{4}$, 则:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\tan(t+\frac{\pi}{4})-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t+\frac{\pi}{4})-\cos(t+\frac{\pi}{4})}{t\bullet\cos(t+\frac{\pi}{4})}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(\cos t+\sin t)-(\cos t-\sin t)}{t\bullet(\cos t-\sin t)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin t}{(\cos t-\sin t)t}=2$$

(12) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m, n为整数)；

解：令 $x = t+\pi$, 于是

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(m\pi+mt)}{\sin(n\pi+nt)}=\begin{cases}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin mt}{\sin nt} & m,n\text{奇偶同性}\\ -\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin mt}{\sin nt} & m,n\text{同奇偶异性}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{m}{n} & m,n\text{奇偶同性}\\ -\dfrac{m}{n} & m,n\text{同奇偶异性}\end{cases}$$

(13) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

$$\overset{x=t+\frac{\pi}{2}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\cos(t+\frac{\pi}{2})}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

(14) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$

$$\overset{x=\frac{1}{t}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

(15) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2n})^{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^{2n\bullet\frac{1}{2}}$$

$$=e^{\frac{1}{2}}$$

(16) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n^2})^{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{n^2\bullet\frac{1}{n}}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=e^{0}=1$$

(17) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^{-x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{-\frac{x}{2}})^{-\frac{x}{2}\cdot 2}$

$=e^{2}$

(18) $\lim\limits_{x\to 0}(1+nx)^{\frac{1}{x}}$, n为整数；

$=\lim\limits_{x\to 0}(1+nx)^{\frac{1}{nx}\cdot n}=e^{n}$

(19) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}}$

$\overset{\tan x=t}{=}\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$

(20) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1+x}{1-x})^{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{(1-x)^{\frac{1}{x}}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}(1-x)^{\frac{1}{-x}}$

$=e^{2}$

(21) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{3x+2}{3x-1})^{2x-1}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{3}{3x-1})^{2x-1}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x-\frac{1}{3}})^{(x-\frac{1}{3})\cdot 2-\frac{1}{3}}$

$=e^{2}$

(22) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x^{2}-1}{x^{2}+1})^{x^{2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{2}{x^{2}+1})^{x^{2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{-\frac{x^{2}+1}{2}})^{-\frac{x^{2}+1}{2}\cdot(-2)-1}$

$=e^{-2}$

11.证明$\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$不存在。

证明:取$x_n^{(1)}=\dfrac{1}{2n\pi},x_n^{(2)}=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$.则有$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{x_n^{(1)}}=1,\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{x_n^{(2)}}=0,$

那么由海涅定理知$\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$不存在

12.证明:$\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$不存在，其中

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\text{是有理数}\\ 0 & x\text{是无理数}\end{cases}.$$

证明：如果x_0是有理数，则取$x_n^{(1)}=x_0,x_n^{(2)}=x_0+\dfrac{1}{ne}$.则有$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{x_n^{(1)}}=1,\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{x_n^{(2)}}=0,$

则由海涅定理知$\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$不存在；

如果x_0是无理数，则可设$x_0=a_0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$,我们取$x_n^{(1)}=a_0.a_1a_2a_3\cdots a_n,x_n^{(2)}=x_0$;
则有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(1)}=1,\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(2)}=0,$则由海涅定理知$\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$不存在。

13.求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$.

解：$\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{\frac{x}{2^{n-1}}}$

$\vdots$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\dfrac{\sin x}{x}$.

14.用定义证明：

(1)若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$, 则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=+\infty$;

证明：由题意可知, 对于 $\forall M=1+A+G>2>0,\exists\delta_1>0$, 当 $0<|x-a|<\delta_1$ 时有 $f(x)>M$; 对于 $\forall\varepsilon>0$(取 $\varepsilon_0=1$), $\exists\delta_2>0$, 当 $0<|x-a|<\delta_2$ 时有 $|g(x)-A|<\varepsilon$, 于是 $|g(x)|<1+A$.

那么对于 $\forall G>0$, 我们取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, 则当 $0<|x-a|<\delta$ 时有

$$f(x)+g(x)\ge f(x)-|g(x)|>M-1-A=G$$

因此有 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=+\infty$

(2)若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to a}g(x)=A>0$, 则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=+\infty$;

证明：由题意可知, 对于 $\forall M>0,\exists\delta_1>0$, 当 $0<|x-a|<\delta_1$ 时有 $f(x)>M$; 对于 $\forall\varepsilon>0$(取 $\varepsilon=\frac{A}{2}$), $\exists\delta_2>0$, 当 $0<|x-a|<\delta_2$ 时有 $|g(x)-A|<\varepsilon$, 于是 $\frac{A}{2}<g(x)<\frac{3A}{2}$.

那么对于 $\forall G=\frac{A}{2}M>0$, 我们取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, 则当 $0<|x-a|<\delta$ 时有

$$f(x)g(x)\ge\frac{A}{2}M=G$$

因此有 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=+\infty$

15.若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A, \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=B$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)g(x)]=AB$.

证明：对于$\forall\varepsilon_1>0, \exists M_1, M_2$, 分别当$x>M_1, x>M_2$时有

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon_1, \left|g(x)-B\right|<\varepsilon_1;$$

即$A-\varepsilon_1<f(x)<A+\varepsilon_1, B-\varepsilon_1<g(x)<B+\varepsilon_1$, 令

$$a=\max(-A-B+\varepsilon_1, A-B-\varepsilon_1, -A+B-\varepsilon_1, A+B+\varepsilon_1),$$

那么对于$\forall\varepsilon=a\varepsilon_1>0, \exists M, x>M$时有$AB+a\varepsilon_1>f(x)g(x)>AB-a\varepsilon_1$, 于是$\left|f(x)g(x)\right|<\varepsilon$; 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)g(x)]=AB$.

16.证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$的充要条件是：对于任意数列$x_n\to+\infty(n\to\infty)$, 有$f(x_n)\to A(n\to\infty)$.

证明：必要性；由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$知, 对于$\forall\varepsilon>0, \exists M>0$, 当$X>M$时, $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$; 对于上述$M$,由于$x_n\to+\infty(n\to\infty)$，故$\exists N$, 当$n>N$时, $x_n>M$; 那么有$\left|f(x_n)-A\right|<\varepsilon$

综上有：对于$\forall\varepsilon>0, \exists N$, 当$n>N$时, 有$\left|f(x_n)-A\right|<\varepsilon$; 故$f(x_n)\to A(n\to\infty)$.

充分性；反证法。设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq A$, 即$\exists\varepsilon_0>0$, 对于$\forall X>0, \exists x_0>X$ 使得$\left|f(x_0)\right|\geq\varepsilon_0$. 那么我们如下构造数列：

取$X=2>0, \exists x_1>X$ 使得$\left|f(x_1)\right|\geq\varepsilon_0$;

取$X=x_1+2>0, \exists x_2>X$ 使得$\left|f(x_2)\right|\geq\varepsilon_0$;

取$X=x_2+2>0, \exists x_3>X$ 使得$\left|f(x_3)\right|\geq\varepsilon_0$;

$\vdots$

取$X=x_{n-1}+2>0, \exists x_n>X$ 使得$\left|f(x_n)\right|\geq\varepsilon_0$;

$\vdots$

这样我们得到一个数列$\{x_n\}$满足$x_n\to+\infty(n\to\infty)$, 但是有$f(x_n)\not\to A(n\to\infty)$；矛盾，因此有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

17.证明：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$的充要条件是：对于任意数列$x_n\to x_0(n\to\infty)$且$x_n>x_0$，有$f(x_n)\to +\infty(n\to\infty)$.

证明：必要性；由$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$知，对于$\forall M>0,\exists\delta>0$，当$0<x-x_0<\delta$时，$f(x)>M$；对于上述$\delta$，由于$x_n\to x_0(n\to\infty)$，故$\exists N$，当$n>N$时，$0<x_n-x_0<\delta$；那么有$f(x_n)>M$.

综上有：对于$\forall M>0,\exists N$，当$n>N$时，那么有$f(x_n)>M$.即$f(x_n)\to+\infty(n\to\infty)$.

充分性；反证法。设$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq+\infty$，即$\exists M_0>0$，对于$\forall\delta>0,\exists x\in(x_0,x_0+\delta)$使得$|f(x_0)|\le M_0$.那么我们如下构造数列：

取$\delta_1=\dfrac{1}{2}>0,\exists x_1\in(x_0,x_0+\delta_1)$使得$|f(x_1)|\le M_0$；

取$\delta_2=\dfrac{1}{2^2}>0,\exists x_2\in(x_0,x_0+\delta_2)$使得$|f(x_2)|\le M_0$；

取$\delta_3=\dfrac{1}{2^3}>0,\exists x_3\in(x_0,x_0+\delta_3)$使得$|f(x_3)|\le M_0$；

$\vdots$

取$\delta_n=\dfrac{1}{2^n}>0,\exists x_n\in(x_0,x_0+\delta_n)$使得$|f(x_n)|\le M_0$；

$\vdots$

这样我们得到一个数列$\{x_n\}$满足$x_n\to x_0(n\to\infty)$，但是有$f(x_n)\not\to+\infty(n\to\infty)$；矛盾，因此有$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$.

18.设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上满足方程$f(2x)=f(x)$，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.证明：$f(x)\equiv A$.

证明：反证法。设存在x_0使得$f(x_0)\neq A$，那么

$f(x_1)=f(2x_0)=f(x_0)\neq A$;

$f(x_2)=f(2x_1)=f(x_0)\neq A$;

$f(x_3)=f(2x_2)=f(x_0)\neq A$;

$\vdots$

$f(x_n)=f(2x_{n-1})=f(x_0)\neq A$;

$\vdots$

于是有数列$\{x_n\}$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，但$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq A$；有15题可以知道$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq A$，这与题意矛盾。故有$f(x)\equiv A$.

第四节 函数的连续性

1.用定义证明下列函数在定义域内连续：

(1) $y=\sqrt{x}$;

证明：定义域为$D=\{x\mid x\ge 0\}$;

任取点$x_0\in D$, 可以知道$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}=f(x_0)$, 于是函数$f(x)$在点$x_0$处连续，由$x_0$的任意性可以知道函数在定义域上连续。

(2) $y=\dfrac{1}{x}$;

证明：定义域为$D=\{x\mid x\ne 0, x\in\mathbb{R}\}$;

任取点$x_0\in D$, 可以知道$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x_0}=f(x_0)$, 于是函数$f(x)$在点$x_0$处连续，由$x_0$的任意性可以知道函数在定义域上连续。

(3) $y=|x|$;

证明：定义域为$D=\{x\mid x\in\mathbb{R}\}$;

任取点$x_0\in D$, 可以知道$\lim\limits_{x\to x_0}|x|=|x_0|=f(x_0)$, 于是函数$f(x)$在点$x_0$处连续，由$x_0$的任意性可以知道函数在定义域上连续。

(4) $y=\sin\dfrac{1}{x}$.

证明：定义域为$D=\{x\mid x\ne 0, x\in\mathbb{R}\}$;

任取点$x_0\in D$, 可以知道$\lim\limits_{x\to x_0}\sin\dfrac{1}{x}=\sin\dfrac{1}{x_0}=f(x_0)$, 于是函数$f(x)$在点$x_0$处连续，由$x_0$的任意性可以知道函数在定义域上连续。

2.讨论下列函数的间断点并说明其类型：

(1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$;

答：$f(x)$在$x=0$无定义, 且$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty$, 于是$x=0$是函数的第二类间断点。

(2) $f(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}$;

答：$f(x)$在$x=-1$处无定义, 且$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=-\infty$, 于是$x=-1$是函数的第二类间断点。

(3) $f(x)=\cos^2\dfrac{1}{x}$;

答：$f(x)$在$x=0$处无定义, 且$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在(第二节T_{11}), 于是$x=0$是函数的第二类间断点。

(4) $f(x)=[x]+[-x]$;

解：当$x\in\mathbb{Z}$时是函数的间断点。由于$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-1\ne 0=f(x_0)$\{当$x_0$是$f(x)$的间断点时\}; 于是整数点是函数的可取间断点。

(5) $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$;

解：当$x=0$时是函数的间断点。由于$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1\neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$, 于是点$x=0$是函数的第一类间断点。

(6) $f(x)=\operatorname{sgn}|x|$;

解：当$x=0$时是函数的间断点。

由于$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1\neq f(0)=0$, 于是点$x=0$是函数的可去间断点。

(7) $f(x)=\operatorname{sgn}\cos x$;

解：由于$\cos x$在$\dfrac{\pi}{2}$的奇数倍处变号，于是$x_0=\dfrac{2n+1}{2}\pi$为函数的间断点。

由于$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=1\neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-1$, 于是$\dfrac{\pi}{2}$的奇数倍点是函数的第一类间断点。

(8) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$;

解：$x=1$为函数的间断点；由于$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$，于是点$x=1$为函数的第二类间断点。

(9) $f(x)=\begin{cases} x & |x|\le 1 \\ 1 & |x|>1 \end{cases}$;

解：$x=-1$为函数的第一类间断点。

(10) $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} & |x|\le 1 \\ |x-1| & |x|>1 \end{cases}$;

解：$x=-1$为函数的第一类间断点。

(11) $f(x)=\begin{cases} \sin \pi x & x\text{为有理数} \\ 0 & x\text{为无理数} \end{cases}$;

解：当x_0不是整数时，总可以找见有理数列$\{x_n'\}$与无理数列$\{x_n''\}$使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n'=\lim\limits_{n\to\infty} x_n''=x_0$；但是$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')=\sin \pi x_0\neq 0=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$; 于是由海涅定理知除过整数点, 其他点都是函数的第二类间断点。

(12) $f(x)=\begin{cases} x & x\text{为有理数} \\ -x & x\text{为无理数} \end{cases}$;

解：当$x_0\neq 0$时，总可以找见有理数列$\{x_n'\}$与无理数列$\{x_n''\}$使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n'=\lim\limits_{n\to\infty} x_n''=x_0$; 但是$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')=+x_0\neq -x_0=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$; 于是由海涅定理知除过$x_0=0$, 其他点都是函数的第二类间断点。

3.当$x=0$时下列函数无定义，试定义$f(0)$的值，使得$f(x)$在$x=0$处连续：

(1)$f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

解:$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}\overset{\sqrt[6]{1+x}=t}{=}\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^3-1}{t^2-1}=\dfrac{3}{2}$.故令$f(0)=\dfrac{3}{2}$即可使$f(x)$在$x=0$处连续。

(2)$f(x)=\dfrac{\tan 2x}{x}$;

解:$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}=2$.故令$f(0)=2$即可使$f(x)$在$x=0$处连续。

(3)$f(x)=\sin x\sin\dfrac{1}{x}$;

解:$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\bullet x\bullet\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\bullet\sin\dfrac{1}{x}=0$.

故令$f(0)=0$即可使$f(x)$在$x=0$处连续。

(4)$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解:$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.故令$f(0)=e$即可使$f(x)$在$x=0$处连续。

4.设函数$f(x)$是连续函数，证明对于任意$c>0$, 函数

$$g(x)=\begin{cases}-c & f(x)<-c\\ f(x) & |f(x)|\le c\\ c & f(x)>c\end{cases}$$

是连续的。

证明：由题意可知$g(x)$的间断点只可能是$g(x)=\pm c$的x值。

设$f(x_1)=c$,那么由$f(x)$是连续函数可知：

$$\lim_{x\to x_1^+}g(x)=\lim_{x\to x_1^+}f(x)=f(x_1)=c\text{或}\lim_{x\to x_1^+}g(x)=\lim_{x\to x_1^+}c=c$$

而与之对应的是：

$$\lim_{x\to x_1^-}g(x)=\lim_{x\to x_1^-}c=c\text{或}\lim_{x\to x_1^-}g(x)=\lim_{x\to x_1^-}f(x)=f(x_1)=c$$

于是$\lim\limits_{x\to x_1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to x_1^-}g(x)=g(x_1)=c$,即$g(x)$在$x_1$点连续。

设$f(x_2)=-c$,也可知函数$g(x)$在x_2点连续。因此函数$g(x)$是连续的。

5.若$f(x)$在x_0点连续，那么$|f(x)|$和$f^2(x)$是否也在x_0点连续?反之如何？

解：如果$f(x)$在x_0点连续,那么$|f(x)|$和$f^2(x)$也在x_0点连续,我们用定义证明：

由于$f(x)$在x_0点连续，那么对于$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0,$当$|x-x_0|<\delta_1$时,$|f(x)-f(x_1)|<\varepsilon,$而此时必有$||f(x)|-|f(x_1)||<|f(x)-f(x_1)|<\varepsilon,$因此$|f(x)|$在$x_0$点连续。

设$g(x)=f^2(x)=|f(x)|^2$,那么由$|f(x)|$在x_0点连续可以知道$|f(x)|^2$也在x_0点连续，于是$g(x)=f^2(x)$在x_0点连续(也可以用定义证明)。

反之不成立,例如$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x\le 0\end{cases}$.显然$|f(x)|$和$f^2(x)$在$x_0=0$点连续,而$f(x)$在$x_0=0$点不连续。

6.若函数$f(x)$在x_0点连续，而函数$g(x)$在x_0点不连续，问这两个函数的和、积在x_0点是否连续。又如果函数$f(x)$与$g(x)$在x_0点都不连续，问这两个函数的和、积在x_0点是否连续。

答：$i.f(x)$在x_0点连续，而函数$g(x)$在x_0点不连续,那么它们的和在x_0点必不连续(可用反证法)，它们的积需要具体分析，例如：

$$f(x)=1,g(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

这两个函数的积在$x_0=0$点不连续；

$$f(x)=0,g(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

这两个函数的积在$x_0=0$点连续。

$ii.$如果函数$f(x)$与$g(x)$在x_0点都不连续，那么它们的和与积都需要具体分析。例如：

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x\ge 0\\ 1 & x<0\end{cases},g(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

这两个函数在$x_0=0$点的和与积都连续；

$$f(x)=\begin{cases}-2 & x\ge 0\\ 1 & x<0\end{cases},g(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

这两个函数在$x_0=0$点的和与积都不连续；

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases},g(x)=\begin{cases}0 & x\ge 0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

这两个函数在$x_0=0$点的和不连续，积连续；

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ 2 & x<0\end{cases},g(x)=\begin{cases}5 & x\ge 0\\ 4 & x<0\end{cases}$$

这两个函数在$x_0=0$点的和连续，积不连续。

7.证明：若连续函数在有理点的函数值为0，则此函数恒为0.

证明：设函数$f(x)$在所有有理点的函数值都为零，但是存在一个无理点

$$x_0 = a_0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$$

使得函数$f(x)$的值不为零。我们取数列$x_n = x_0 = a_0.a_1a_2a_3\cdots a_n$, 显然$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, 但是$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq f(x_0)$, 那么由海涅定理知道这与函数在$x_0$点连续矛盾。因此对于任意一个无理数点函数值也为零，于是此函数恒为0.

8.若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，恒正，用$\varepsilon-\delta$语言证明$\dfrac{1}{f(x)}$在$[a,b]$上连续。

证明：任取$x_0 \in [a,b]$, 则$f(x)$在x_0点连续可以知道，对于$\forall\ \varepsilon_1 > 0, \exists\ \delta_1 > 0$, 当$|x - x_0| < \delta_1$时，有$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_1$成立；由于$f(x_0) > 0$, 由函数极限的局部保号性我们可以知道：$\exists \delta_2 > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta_1$时，有$f(x) > \dfrac{f(x_0)}{2}$成立。

那么对于$\forall \varepsilon = \left|\dfrac{2}{f^2(x_0)}\right|\varepsilon_1 > 0, \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 当$|x - x_0| < \delta$时，

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right| = \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x)f(x_0)}\right| < \left|\frac{1}{\frac{f^2(x_0)}{2}}\right| |f(x) - f(x_0)| < \left|\frac{1}{\frac{f^2(x_0)}{2}}\right|\varepsilon_1 = \varepsilon$$

因此$\dfrac{1}{f(x)}$在x_0处上连续，那么由x_0的任意性可以知道$\dfrac{1}{f(x)}$在$[a,b]$上连续。

9.若函数$f(x)$与$g(x)$在区间$[a,b]$上都连续，试证明$\max(f(x), g(x)), \min(f(x), g(x))$也在区间$[a,b]$上都连续。

证明：由第二章第二节习题三可以知道

$$\max(f(x), g(x)) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) + g(x)|]$$

$$\min(f(x), g(x)) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) + g(x)|]$$

若$f(x)$与$g(x)$在区间$[a,b]$上都连续，可以知道$f(x) + g(x)$在区间$[a,b]$上连续，那么由第五题可以知道此时$|f(x) + g(x)|$在区间$[a,b]$上也连续；于是函数

$$\frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) + g(x)|]$$

$$\frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) + g(x)|]$$

在区间$[a,b]$上也连续，即$\max(f(x), g(x)), \min(f(x), g(x))$在区间$[a,b]$上连续。

10.证明：设$f(x)$为区间(a,b)上的单调函数，若$x_0\in(a,b)$为$f(x)$的间断点，那么x_0必是函数的第一类间断点。

证明：不妨设$f(x)$为区间(a,b)上的单调递增函数，我们假设$x_0\in(a,b)$为$f(x)$的可去间断点；于是可以知道$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A,$我们构造数列

$$\{x_n^{(1)}\}=\{x_0-\frac{1}{2^n}\},\{x_n^{(2)}\}=\{x_0\},\{x_n^{(3)}\}=\{x_0+\frac{1}{2^n}\}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(1)}=\lim\limits_{n\to\infty}(x_0-\frac{1}{2^n})=x_0=\lim\limits_{n\to\infty}(x_0+\frac{1}{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(3)},$ 那么由海涅定理可以知道

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n^{(1)})=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n^{(3)})$$

那么由函数$f(x)$的单调性及数列收敛的夹迫性可以知道

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n^{(2)})=\lim_{n\to\infty}f(x_0)=f(x_0)=A.$$

那么有$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，于是函数在$x_0$连续，矛盾。

如果间断点x_0是函数$f(x)$的第二类间断点，那么函数$f(x)$必在点x_0的一侧的极限值不存在。如果是左极限不存在；但是函数$f(x)$在区间(a,x_0)单调上升且以$f(x_0)$为上界，于是必有极限$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$：矛盾，即函数不可能不存在左极限，同样函数必有右极限。

综上所证，可以知道函数$f(x)$的间断点必是它的第一类间断点。

11.若$f(x)$在$[a,b]$连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b,$ 则在$[x_1,x_n]$中必有ξ, 使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_n)].$$

证明：由于$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$[x_1,x_2]\subset[a,b],$ 于是函数$f(x)$在区间$[x_1,x_2]$上也连续；那么$f(x)$在区间$[x_1,x_2]$上有界，即存在实数$M,m,$ 使得对于$\forall x\in[x_1,x_2]$有$m<f(x)<M$;显然对于$\forall x_i(i=1,2,\cdots,n),$总有$x_i\in[x_1,x_2],$ 于是对于$\forall x_i(i=1,2,\cdots,n),$ 总有$m<f(x_i)<M,$ 因此

$$\frac{m}{n}<\frac{f(x_i)}{n}<\frac{M}{n},(i=1,2,\cdots,n),$$

那么有$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{m}{n}<\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)}{n}<\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{M}{n},$即

$$m<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)<M;$$

于是有介值定理我们可以知道必有$\xi\in[x_1,x_n],$使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_n)].$$

12.研究复合函数$f\circ g$与$g\circ f$的连续性，设：

(1) $f(x)=\operatorname{sgn} x, g(x)=1+x^2$;

(2) $f(x)=\operatorname{sgn} x, g(x)=(1-x^2)x$.

解:(1).由于$g(x)=1+x^2>0$恒成立，于是$f\circ g=\operatorname{sgn}(g(x))=1$, 因此函数$f\circ g$ 连续；

由于$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$, 于是函数$g\circ f=1+f^2(x)=\begin{cases}2 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$,即函数$g\circ f$在$x=0$点间断。

(2).由于

$$g(x)=\begin{cases}<0 & x\in(-1,0)\bigcup(1,+\infty)\\ =0 & x=-1,0,1\\ >0 & x\in(-\infty,-1)\bigcup(0,1)\end{cases},$$

于是

$$f\circ g=\operatorname{sgn}(g(x))=\begin{cases}-1 & x\in(-1,0)\bigcup(1,+\infty)\\ 0 & x=-1,0,1\\ 1 & x\in(-\infty,-1)\bigcup(0,1)\end{cases},$$

因此函数$f\circ g$在点$x=-1,0,1$间断，为第一类间断点；

由于$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$, 于是函数$g\circ f=(1-f^2(x))f(x)=0$, 即函数$g\circ f$ 连续。

13.证明: 若$f(x)$在$[a,b]$连续，且不存在$x\in[a,b]$, 使得$f(x)=0$, 求证$f(x)$ 在$[a,b]$ 上恒正或恒负。

证明：设存在点$x_1,x_2\in[a,b]$使得$f(x_1)>0, f(x_2)<0$; 由于$0\in[f(x_2),f(x_1)]$, 那么由介值定理可以知道存在$c\in[x_1,x_2]$, 或是$c\in[x_2,x_1]$使得$f(c)=0$.这与题意矛盾，于是可知$f(x)$ 在$[a,b]$上恒正或恒负。

14.设$f(x)$为$[a,b]$上的递增函数，值域为$[f(a),f(b)]$. 证明$f(x)$在$[a,b]$上连续。

证明：因为$f(x)$为$[a,b]$上的递增函数，因此对于$[a,b]$上的任意一点x_0，有单调有界原理可以知道$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$都存在，我们现在证明$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$.

反证法，假设$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\neq f(x_0)$.

由$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$可以知道，对于$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$\delta<x-x_0<0$时有$|f(x)-A|<\varepsilon;$ 即此时有$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$

如果$A>f(x_0)$, 取$\varepsilon_0=(A-f(x_0))$, 那么$\exists\delta_1>0,$当$\delta_1<x-x_0<0$时有$|f(x)-A|<\varepsilon;$ 即此时有$f(x_0)<f(x)<2A+f(x_0)$, 这与函数在区间$[a,b]$上递增矛盾。即有$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A<f(x_0)$.

如果存在$x_1\in[a,x_0)$, 使得$f(x_1)-A=\varpi>0$, 那么由函数的递增性知在区间(x_1,x_0)上必有$f(x)>A+\varpi$，于是$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\geq A+\varpi>A$.因此对于$\forall x\in[a,x_0)$, 必有$f(a)\leq f(x)\leq A$.

同样由函数的递增性可以知道在区间$[x_0,b]$上，$f(x_0)\leq f(x)\leq f(b)$; 那么函数的值域为$[f(a),A]\bigcup[f(x_0),f(b)]$, 即没有函数值取到$[A,f(x_0)]$上的值, 这与函数值域为$[f(a),f(b)]$矛盾。于是可知$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，同样可以证明$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，于是函数在$x_0$点连续, 那么由$x_0$点的任意性可以知道函数在区间$[a,b]$上连续。

15.设$f(x)$在$[0,+\infty]$上连续，且$0\leq f(x)\leq x(x\geq 0)$, 若$a_1\geq 0,a_{n+1}=f(a_n)(n=1,2,\cdots)$, 求证：

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在;

(2)设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$, 则$f(l)=l$;

(3)若将条件改为$0\leq f(x)<x(x>0)$, 则$l=0$.

证明:(1).由于$a_{n+1}=f(a_n)\leq a_n$，于是数列$\{a_n\}$递减，由题意易知$a_n\geq 0(n=0,1,2,\cdots)$，那么由单调有界原理可以知道$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在;

(2)设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$，那么在等式$a_{n+1}=f(a_n)$两端取极限，由函数的连续性可以知道$f(l)=l$.

(3)由于$a_n\geq 0$, 故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l\geq 0$，若$l>0$, 则$f(l)<l$, 这与(2)矛盾，故必有$l=0$.

16.求下列极限：

(1)
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}}=\lim_{x\to 1}e^{\ln[(\frac{1+x}{2+x})^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}}]}=\lim_{x\to 1}e^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}\ln(\frac{1+x}{2+x})}=e^{0\cdot\ln\frac{2}{3}}=1.$$

(2)
$$\lim_{x\to+\infty}(\arctan x)\cos\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}(\arctan x)\cdot\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\cdot 1=\frac{\pi}{2}$$

(3)
$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(1-2\sin^2\frac{x}{2})^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(1-2\sin^2\frac{x}{2})^{\frac{1}{4\cdot(\frac{x}{2})^2}}=\lim_{x\to 0}(1-2\sin^2\frac{x}{2})^{\frac{1}{2\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

$(4)\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x+5}{1+x^2+\ln(1-x)}=6$

$(5)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\ln[(\sin x)^{\tan x}]}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\tan x\cdot\ln(\sin x)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\frac{\tan x}{\frac{1}{\ln(\sin x)}}}\overset{洛比达法则}{=}e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\tan x}}}=e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\cos^2 x\cdot\tan^2 x}}}$

$=e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot\tan^2 x\frac{\cos x}{\sin x}}=e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x}=e^0=1.$

$(6)\lim_{n\to\infty}(\frac{n+x}{n-1})^n$

$=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1+x}{n-1})^{\frac{n-1}{1+x}(x+1)+1}$

$=e^{x+1}$

17.证明方程$x^3+px+q=0(p>0)$有且仅有一个实根。

证明：设$f(x)=x^3+px+q$,对于$\forall x_1>x_2$,有

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3+px_1+q-(x_2^3+px_2+q)$$
$$=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^3)+p(x_1-x_2)>0,$$

即对于$\forall x_1>x_2$,有$f(x_1)>f(x_2)$;于是函数$f(x)$是$\mathbb{R}$上的单调递增函数。

那么如果$f(x_0)=0$，则对于$\forall x>x_0$,有$f(x)>f(x_0)=0$; 对于$\forall x<x_0$, 有$f(x)<f(x_0)=0$;即函数的实数根个数不可能多余1. 我们现在证明函数有实根：

容易证明$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$; 又由于$f(x)$是连续函数，那么必有$c\in\mathbb{R}$ 使得$f(c)=0$,得证。

第五节 无穷小量与无穷大量的比较

1.当$x\to 0$时，以x为标准求下列无穷小量的阶：

$(1)\sin 2x-2\sin x$

解:$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x(\cos x-1)}{x^3}$

$=-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x(2\sin^2\frac{x}{2})}{x^3}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}=-1$

因此以x为标准$\sin 2x-2\sin x$时3阶的无穷小量。

$(2)\frac{1}{1+x}-(1-x)$

解:$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-(1-x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x)(1-x)}{x^2(1+x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1$

于是以x为标准$\frac{1}{1+x}-(1-x)$是2阶的无穷小量。

(3) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x+\sin x}{x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1+\dfrac{1}{\cos x}}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}}=1$

于是以x为标准$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$是1阶的无穷小量。

(4) $\ln(1+x)$

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\ln e=1.$

于是以x为标准$\ln(1+x)$时1阶的无穷小量。

(6). e^x-1

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}\overset{\text{洛比达法则}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1}=1$

于是以x为标准e^x-1是1阶的。

(5) $\sqrt[n]{1+x}-1$

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)-1}{x[(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x)^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+(1+x)^{\frac{1}{n}}+1]}=\dfrac{1}{n}.$

于是以x为标准$\ln(1+x)$时1阶的无穷小量。

2.当$x\to\pm\infty$时，以x为标准求下列无穷大量的阶：

(1) x^2+x^6

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x^6}{x^6}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^4}+1}{1}=1$

于是以x为标准x^2+x^6是6阶的无穷大量。

(2) $4x^2+6x^4-x^5$

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+6x^4-x^5}{x^5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{6}{x}-1}{1}=-1$

于是以x为标准$4x^2+6x^4-x^5$是5阶的无穷大量。

(3) $\sqrt[3]{x^2\sin\dfrac{1}{x}}$

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2\sin\dfrac{1}{x}}}{x^{\frac{1}{3}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x^2\dfrac{1}{x}}}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to 0}\sqrt[3]{\dfrac{\sin t}{t}}=1$

于是以x为标准$\sqrt[3]{x^2\sin\dfrac{1}{x}}$是1阶的无穷大量。

(4) $\dfrac{x^3+1}{x^2+2x-3}$

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^3+1}{x^2+2x-3}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^3+2x^2-3x}=1$

于是以x为标准原式是1阶的去穷大量。

(5) $x^2\arctan\dfrac{1}{x}$

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\arctan\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\overset{y=\arctan\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\tan y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\cos y}{\dfrac{\sin y}{y}}=1.$

于是以x为标准$x^2\arctan\dfrac{1}{x}$是1阶的去穷大量。

3.当$x\to 0$时，下列各等式成立吗？

(1)$o(x^2)=o(x)$ 不成立；

(2)$O(x^2)=o(x)$ 不成立；

(3)$x\bullet o(x^2)=o(x^3)$ 成立；

(4)$\dfrac{o(x^2)}{x}=o(x)$ 成立；

(5)$\dfrac{o(x^2)}{o(x)}=o(x)$ 不成立；

(6)$o(x)=O(x^2)$ 不成立.

4.试证下列各题：

(1)$x\sin\sqrt{x}=O(x^{\frac{3}{2}})\quad (x\to 0^+)$

证明：$\lim\limits_{x\to 0^+}=\dfrac{x\sin\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}=\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$

因此有$x\sin\sqrt{x}=O(x^{\frac{3}{2}})\quad (x\to 0^+)$

(2)$2x^3+2x^2=O(x^3)\quad (x\to\infty)$

证明：$\lim\limits_{x\to\infty}=\dfrac{2x^3+2x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0^+}=\dfrac{2+\frac{2}{x}}{1}=2$

因此有$2x^3+2x^2=O(x^3)\quad (x\to\infty)$

(3)$o(g(x))\pm o(g(x))=o(g(x))\quad (x\to x_0)$

证明：任取$f_1(x)=o(g(x))(x\to x_0),f_2(x)=o(g(x))(x\to x_0)$; 即$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g(x)}=0,\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_2(x)}{g(x)}=0.$

于是有$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)\pm f_2(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g(x)}\pm\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_2(x)}{g(x)}=0,$ 因此可知$f_1(x)\pm f_2(x)=o(g(x))(x\to x_0).$

那么由$f_1(x),f_2(x)$的任意性可以知道$o(g(x))\pm o(g(x))=o(g(x))\quad (x\to x_0).$

(4)$o(x^m)+o(x^n)=o(x^n)\quad (x\to 0,m>n>0)$

证明：任取$f_1(x)=o(x^m)(x\to x_0),f_2(x)=o(x^n)(x\to x_0)$; 即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_1(x)}{x^m}=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_2(x)}{x^n}=0.$

于是有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_1(x)\pm f_2(x)}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_1(x)}{x^m}\dfrac{1}{x^{n-m}}\pm\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_2(x)}{x^n}=0,$ 因此可知

$$f_1(x)\pm f_2(x)=o(x^n)(x\to 0).$$

那么由$f_1(x),f_2(x)$的任意性可以知道$o(x^m)+o(x^n)=o(x^n)\quad (x\to 0,m>n>0).$

(5)$o(x^m)o(x^n)=o(x^{m+n})\quad (x\to 0,m,n>0)$

证明：任取$f_1(x)=o(x^m)(x\to x_0),f_2(x)=o(x^n)(x\to x_0)$; 即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_1(x)}{x^m}=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_2(x)}{x^n}=0.$

于是有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_1(x)f_2(x)}{x^{n+m}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_1(x)}{x^m}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_2(x)}{x^n}=0,$ 因此可知

$$f_1(x)f_2(x)=o(x^n)(x\to 0).$$

那么由$f_1(x),f_2(x)$的任意性可以知道$o(x^m)o(x^n)=o(x^{m+n})\quad (x\to 0,m,n>0).$

5.证明下列各式：

(1) $\tan x\sim x\ \ (x\to 0)$

证明：由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=1.$

因此$\tan x\sim x\ \ (x\to 0)$成立。

(2) $\arcsin x\sim x\quad (x\to 0)$

证明：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}\overset{\arcsin x=y}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=1.$

因此有$\arcsin x\sim x\quad (x\to 0).$

$(3)\arctan x \sim x \quad (x \to 0)$

证明: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x} \overset{\arctan x=y}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y}{\tan y} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y}{\sin y}\cos y = 1$. 因此有 $\arctan x \sim x \quad (x\to 0)$.

$(4) 1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2 \quad (x \to 0)$

证明: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{1}{2}x)^2} = 1.$

因此有 $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2 \quad (x \to 0)$.

$(5) e^x - 1 \sim x \quad (x \to 0)$

证明: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} \overset{\text{洛比达法则}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1} = 1.$

因此有 $e^x - 1 \sim x \quad (x \to 0)$.

$(6)(1+x)^\alpha \sim \alpha x \quad (x \to 0)$

证明: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha}{\alpha x} \overset{\text{洛比达法则}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{\alpha} = 1$. 因此有 $(1+x)^\alpha \sim \alpha x \quad (x\to 0)$.

6.利用等价无穷小量求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\arctan\frac{1}{x}}{x-\cos x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\bullet\frac{1}{x}}{x-\cos x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2 - x\cos x} = 0; \qquad \arctan x \sim x \quad (x\to 0)$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 1; \qquad 1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2 \quad (x \to 0)$

$(1+x)^\alpha \sim \alpha x \quad (x \to 0)$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{\sin x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\bullet x}{x^2} = 1; \qquad \sin x \sim x \quad x\to 0$

$\ln(1+x) \sim x \quad x \to 0$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{xx} = 1 \qquad e^x - 1 \sim x \quad (x \to 0)$

$\sin x \sim x \quad x \to 0$

7.设 $f(x) \sim g(x)(x \to x_0)$, 证明：$f(x)-g(x) = o(f(x)), f(x)-g(x) = o(g(x))$.

证明：由 $f(x) \sim g(x)(x \to x_0)$ 可知 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, 那么有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}(\frac{f(x)}{g(x)}-1) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}-1 = 0$$

于是有 $f(x)-g(x) = o(g(x))$.

同理有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to x_0}(1-\frac{g(x)}{f(x)}) = 1-\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}} = 0$$

于是有 $f(x)-g(x) = o(f(x))$.得证。

8.设$x\to a$时，$f_1(x)$与$f_2(x)$是等价无穷小，$g_1(x)$与$g_2(x)$是等价无穷大，且$\lim\limits_{x\to a} f_2(x)g_2(x)$存在，求证:$\lim\limits_{x\to a} f_1(x)g_1(x)=\lim\limits_{x\to a} f_2(x)g_2(x).$

证明：由于$\lim\limits_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=1,\lim\limits_{x\to a}\frac{g_1(x)}{g_2(x)}=1,$因此有

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\frac{g_1(x)}{g_2(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\bullet\lim_{x\to a}\frac{g_1(x)}{g_2(x)}=1$$

设$\lim\limits_{x\to a} f_2(x)g_2(x)=A,$若$A\neq 0,$则

$$\lim_{x\to a} f_1(x)g_1(x)=\lim_{x\to a}[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\bullet f_2(x)g_2(x)]$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\bullet\lim_{x\to a} f_2(x)g_2(x)=1\bullet A=A$$

于是有

$$\lim_{x\to a} f_1(x)g_1(x)=\lim_{x\to a} f_2(x)g_2(x)=A.$$

如果$\lim\limits_{x\to a} f_2(x)g_2(x)=A=0$，那么必有$\lim\limits_{x\to a} f_1(x)g_1(x)=0.$这是因为此时$\frac{1}{f_2(x)g_2(x)}$为无穷大量$(x\to a)$，若$f_1(x)g_1(x)$为有界函数或是无穷大量$(x\to a)$, 那么$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$必也是无穷大量$(x\to a)$，即$\lim\limits_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\neq 1.$

综上可知$\lim\limits_{x\to a} f_1(x)g_1(x)=\lim\limits_{x\to a} f_2(x)g_2(x).$

第四章 微商与微分

第一节 微商的概念及其计算

1.求抛物线$y=x^2$在$A(1,1)$点和$B(-2,4)$点的切线方程和法线方程。

解：函数$y=x^2$的导函数为$y'=2x,$则它在$A(1,1),B(-2,4)$的切线斜率分别为

$$y'(1)=2,y'(-2)=-4;$$

于是由点斜式可以求得在这两点的切线方程分别为$y=2x-1,y=-4x-4.$

由于法线斜率与切线斜率的乘积为$-1,$故可以求得在这两点的法线斜率分别为

$$k_1=-\frac{1}{2},k_2=\frac{1}{4};$$

那么由点斜式可以求得在这两点的法线方程分别为$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2},y=\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}.$

2.若$S=vt-\frac{1}{2}gt^2$, 求

(1)在$t=1, t=1+\Delta t$之间的平均速度(设$\Delta t=1, 0.1, 0.01$);

(2)在$t=1$的瞬时速度。

解:(1)可以求得

$$\begin{cases} S(1)=v-\frac{1}{2}g \\ S(1+1)=2v-2g \\ S(1+0.1)=1.1v-\frac{1.21}{2}g \\ S(1+0.01)=1.01v-\frac{1.0201}{2}g \end{cases};$$

于是有

$$\begin{cases} \overline{v_1}=\frac{S(1+1)-S(1)}{1}=v-1.5g \\ \overline{v_2}=\frac{S(1+0.1)-S(1)}{0.1}=v-1.05g \\ \overline{v_3}=\frac{S(1+0.01)-S(1)}{0.01}=v-1.005g \end{cases};$$

(2)由于$S'=\frac{dS}{dt}=y-gt$, 于是$S'(1)=v-g$, 在$t=1$的瞬时速度为$v-g$.

3.试确定曲线$y=\ln x$在哪些点的切线平行于下列直线:(1)$y=x-1$, (2)$y=2x-3$

解：函数$y=\ln x$的导函数为$y'=\frac{1}{x}$;

(1)令$y'=\frac{1}{x}=1$, 可得$x=1$; $y(1)=\ln 1=0$, 故曲线在点$(1,0)$的切线平行于直线$y=x-1$；

(1)令$y'=\frac{1}{x}=2$, 可得$x=\frac{1}{2}$; $y(1)=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$, 故曲线在点$(2,-\ln 2)$的切线平行于$y=2x-3$.

4.设$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\ge 3 \\ ax+b & x<3 \end{cases}$, 试确定$a,b$的值，使$f(x)$在$x=3$处可导。

解：可以求得$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{(3+\Delta x)^2-3^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{6\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=6$；

令

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{a(3+\Delta x)+b-3^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{3a+a\cdot\Delta x+b-9}{\Delta x}=6,$$

那么必有

$$\begin{cases} 3a+b-9=0 \\ a=6 \end{cases}$$

解得：$a=6, b=-9$.

5.求下列曲线在指定点P的切线方程和法线方程。

(1) $y=\frac{x^2}{4}$,　　$P(2,1)$;　　　　(2) $y=\cos x$,　　$P(0,1)$.

解:(1)函数$y=\frac{x^2}{4}$的导函数为$y'=\frac{x}{2}$, 则在P点的切线斜率为$k=y'(2)=1$; 由于同一点的切线与法线相垂直，于是法线斜率为$k_1=\frac{-1}{k}=-1$.因此由点斜式可以求得在P点的切线与法线分别为$y=x-1, y=-x+3$.

(2)函数$y=\cos x$的导函数为$y'=-\sin x$, 则在P点的切线斜率为$k=y'(0)=0$; 因此由点斜式可以求得在P点的切线为$y=1$.

由于在同一点的法线与切线相垂直, 于是在此点的法线为$x=0$.

6.求下列函数的导函数：

(1) $f(x)=|x|^3$

解：$f(x)=|x|^3=\begin{cases} x^3 & x\ge 0 \\ -x^3 & x<0 \end{cases}$，那么对于$\forall x_0\in \mathrm{R}^+$有

$$\begin{aligned} f'(x_0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x} \\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0{}^3+3x_0{}^2\Delta x+3\Delta x^2x_0+\Delta x^3-x_0{}^3}{\Delta x} \\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x_0{}^2\Delta x+3\Delta x^2x_0+\Delta x^3}{\Delta x}=3x_0{}^2; \end{aligned}$$

对于$\forall x_0\in \mathrm{R}^-$有

$$\begin{aligned} f'(x_0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(x_0+\Delta x)^3-(-x_0{}^3)}{\Delta x} \\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-x_0{}^3-3x_0{}^2\Delta x-3\Delta x^2x_0-\Delta x^3+x_0{}^3}{\Delta x} \\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-3x_0{}^2\Delta x-3\Delta x^2x_0-\Delta x^3}{\Delta x}=-3x_0{}^2; \end{aligned}$$

当$x=0$时有

$$f'(0+0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x^3-0}{\Delta x}=0,$$

$$f'(0-0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x^3-0}{\Delta x}=0,$$

因此$f'(0)=0$.

综上可得

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & x\ge 0 \\ -3x^2 & x<0 \end{cases}.$$

(2) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\ge 0 \\ 1 & x<0 \end{cases}$

解：对于$\forall x_0\in \mathrm{R}^+$有

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)+1-(x_0+1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1;$$

对于$\forall x_0\in \mathrm{R}^-$有

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0;$$

当$x=0$时有

$$f'(0+0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x+1-1}{\Delta x}=1,$$
$$f'(0-0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{1-1}{\Delta x}=0,$$

因此$f'(0)$不存在.

综上可得

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}.$$

7.设函数$f(x)=\begin{cases} x^m\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$,($m$为正整数).

试问:(1)m等于何值时,$f(x)$在$x=0$点连续;

(2)m等于何值时,$f(x)$在$x=0$点可导;

(3)m等于何值时,$f'(x)$在$x=0$点连续.

解:(1)由于$\sin\dfrac{1}{x}$有界, 故当$m\geq 1$时, 有$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^m\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$. 于是当$m\geq 1$时$f(x)$在$x=0$点连续。

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x^m\sin\dfrac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x^{m-1}\sin\dfrac{1}{\Delta x}$, 显然当$m-1\geq 1$时有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x^{m-1}\sin\frac{1}{\Delta x}=0;$$

即当$m\geq 2$时$f(x)$在$x=0$点可导。

(3)设$m\geq 2$, 当$x\neq 0$时, $f'(x)=mx^{m-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{m-2}\cos\dfrac{1}{x}$.当$m=2$时

$$\lim_{x\to 0}(mx^{m-1}\sin\frac{1}{x})=0, \lim_{x\to 0}(x^{m-2}\cos\frac{1}{x})\text{ 不存在;}$$

当$m>2$时$\lim\limits_{x\to 0}(mx^{m-1}\sin\dfrac{1}{x})=0, \lim\limits_{x\to 0}(x^{m-2}\cos\dfrac{1}{x})=0$，故此时有$\lim\limits_{x\to 0}f'(0)=0=f'(0)$, 即当$m\geq 3$时$f'(x)$在$x=0$点连续。

8.设$g(0)=g'(0)=0$,

$$f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases};$$

求$f'(0)$.

解：由于$g'(0)=0$，可知$\dfrac{g(\Delta x)-g(0)}{\Delta x}(\Delta x\to 0)$是无穷小量，而$\sin\dfrac{1}{\Delta x}(\Delta x\to 0)$是有界函数；又因为$g(0)=0$，于是有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(\Delta x)\sin\dfrac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[\frac{g(\Delta x)-g(0)}{\Delta x}\sin\frac{1}{\Delta x}]=0$$

即$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=0$.

9.证明：若$f'(x_0)$存在，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0).$$

证明：由于$f'(x_0)$存在，那么$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=f'(x_0).$

于是有

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}[\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}]\\
&=\frac{1}{2}[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}]\\
&=\frac{1}{2}[f'(x_0)+f'(x_0)]=f'(x_0).
\end{aligned}$$

因此有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0).$

10.设$f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数，且对任意$x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2),$$

若$f'(0)=1,$证明对任意$x\in(-\infty,+\infty)$, 有$f'(x)=f(x).$

证明：若$f(x)\equiv 0,$那么显然有$f'(x)=f(x)=0$成立。

若存在$x_0\in(-\infty,+\infty)$, 使得$f(x_0)\neq 0,$ 那么$f(x_0)=f(x_0+0)=f(x_0)f(0),$ 于是有$f(0)=1.$
那么对于任意$x\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f(x)\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}.$$

于是对于任意$x\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}\\
&=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\\
&=f(x)f'(0)=f(x).
\end{aligned}$$

11.设$f(x)$是偶函数，且$f'(x)$存在，证明：$f'(0)=0.$

证明：由第9题可以知道

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0-\Delta x)}{2\Delta x};$$

由于函数$f(x)$是偶函数，因此有$f(\Delta x)=f(-\Delta x)$, 即$f(0+\Delta x)=f(0-\Delta x)$, 那么

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0-\Delta x)}{2\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{2\Delta x}=0.$$

即得证。

12.设$f(x)$是奇函数，且$f'(x_0)=3$, 求$f'(-x_0)$.

解：由$f'(x_0)=3$知

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=3.$$

由函数$f(x)$是奇函数可以知道

$$\begin{aligned}f'(-x_0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x_0+\Delta x)-f(-x_0)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-f(x_0-\Delta x)-[-f(x_0)]}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=3\end{aligned}$$

13.用定义证明：可导的偶函数的导数是奇函数，

可导的奇函数的导数是偶函数。

证明：设$f(x)$是可导的偶函数，那么有

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x)-f(-x+\Delta x)}{\Delta x}\\&=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}\\&=-f'(-x)\end{aligned}$$

即可导的偶函数$f(x)$的导数是奇函数。

设$g(x)$是可导的奇函数，那么有

$$\begin{aligned}g'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)-g(x-\Delta x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-g(-x)-[-g(-x+\Delta x)]}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(-x+\Delta x)-g(-x)}{\Delta x}\\&=g'(-x)\end{aligned}$$

即可导的奇函数$g(x)$的导数是偶函数。

14.求下列函数的导数：

(1) $y=x^2\sin x$　　解：$y'=2x\sin x+x^2\cos x.$

(2) $y=x\cos x+3x^2$　　解：$y'=\cos x-x\sin x+6x$

(3)$y=x\tan x-7x+6$　　解：$y'=\tan x+\dfrac{x}{\cos^2 x}-7$

(4)$y=e^x\sin x-7\cos x+5x^2$

解：$y'=(e^x\sin x)'-(7\cos x)'+(5x^2)=e^x\sin x+e^x\cos x+7\sin x+10x$

$$=e^x(\sin x+\cos x)+7\sin x+10x.$$

(5)$y=4\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}-2x^3$　　解：$y'=\dfrac{4}{2}x^{-\frac{1}{2}}-x^{-2}-6x^2=\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}-6x^2$

(6)$y=3x+5\sqrt{x}+\dfrac{7}{x^3}$　　解：$y'=3+\dfrac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}}-21x^{-4}=3+\dfrac{5}{2\sqrt{x}}-\dfrac{21}{x^4}.$

(7).$y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$　　解：$y'=\dfrac{2x(1-x^2)-(-2x)(1+x^2)}{(1-x^2)^2}=\dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$

(8)$y=\dfrac{1}{1+x+x^2}$　　解：$y'=\dfrac{-2x-1}{(1+x+x^2)^2}=-\dfrac{2x+1}{(1+x+x^2)^2}$

(9)$y=\dfrac{x}{(1-x)(2-x)}$

解：$y=\dfrac{x}{(1-x)(2-x)}=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{2-x}$，于是$y'=\dfrac{1}{(1-x)^2}-\dfrac{2}{(2-x)^2}.$

(10)$y=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}-\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$

解：$y=\dfrac{1-\sqrt{x}-(1+\sqrt{x})}{1-x}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-1}$，于是$y'=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}(x-1)-2\sqrt{x}}{(x-1)^2}=-\dfrac{x+1}{\sqrt{x}(x-1)^2}$

(11)$y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$　　解：$y'=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})+\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})^2}=\dfrac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$

(12)$y=\dfrac{1}{3\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}$　　解：$y'=\dfrac{1}{3}(-\dfrac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=-\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}+\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

(13)$y=x^3\ln x-\dfrac{1}{n}x^n$　　解：$y'=3x^2\ln x+\dfrac{x^3}{x}-\dfrac{n}{n}x^{n-1}=3x^2\ln x+x^2-x^{n-1}$

(14)$y=\dfrac{\cos x}{x^4}\ln\dfrac{1}{x}$

解：$y'=\dfrac{-\sin x\cdot x^4-4x^3\cos x}{x^8}\cdot\ln\dfrac{1}{x}+\dfrac{\cos x}{x^4}\cdot x\cdot\dfrac{-1}{x^2}=-\dfrac{x\sin x+4\cos x}{x^5}\cdot\ln\dfrac{1}{x}-\dfrac{\cos x}{x^5}$

(15) $y=(x+\frac{1}{x})\ln x$　　解：$y'=(1-\frac{1}{x^2})\ln x+\frac{x+\frac{1}{x}}{x}=(1-\frac{1}{x^2})\ln x+1+\frac{1}{x^2}$

(16) $y=\frac{x\cos x-\ln x}{x+1}$

解：$y'=\frac{(\cos x-x\sin x-\frac{1}{x})(x+1)}{(x+1)^2}-\frac{x\cos x-\ln x}{(x+1)^2}$

$=\frac{-x^2\sin x-1+\cos x-x\sin x-\frac{1}{x}+\ln x}{(x+1)^2}=\frac{-x^2\sin x-x\sin x+\cos x+\ln x-1-\frac{1}{x}}{(x+1)^2}$

(17) $y=\frac{1}{x+\cos x}$　　解：$y'=\frac{-1+\sin x}{(x+\cos x)^2}$.

(18) $y=\frac{x\sin x+\cos x}{x\sin x-\cos x}$

解：$y=1+\frac{2\cos x}{x\sin x-\cos x}$，于是$y'=\frac{-2\sin x(x\sin x-\cos x)-2\cos x(\sin x+x\cos x+\sin x)}{(x\sin x-\cos x)^2}$

$=-\frac{2x+2\sin x\cos x}{(x\sin x-\cos x)^2}=-\frac{2x+\sin 2x}{(x\sin x-\cos x)^2}$

(19) $y=\frac{xe^x-1}{\sin x}$　　解：$y'=\frac{(e^x+xe^x)\sin x-(xe^x-1)\cos x}{\sin^2 x}=\frac{e^x(\sin x+x\sin x-x\cos x)+\cos x}{\sin^2 x}$.

(20) $y=x\sin x\ln x$　　解：$y'=\sin x\ln x+x\cos x\ln x+\sin x$

15.求下列复合函数的导数：

(1) $y=(x^3-4)^3$　　解：$y'=3(x^3-4)^2(x^3-4)'=3(x^3-4)^2 3x^2=9x^2(x^3-4)^2$

(2) $y=x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}$

解：$y'=(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}+x(2x)\sqrt{a^2-x^2}-x(a^2+x^2)\frac{2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}$

$=(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}+2x^2\sqrt{a^2-x^2}-\frac{(a^2+x^2)x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$=\frac{(a^2+x^2)(a^2-x^2)+2x^2(a^2-x^2)-(a^2+x^2)x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$=\frac{a^4-x^4+2x^2a^2-2x^4-a^2x^2-x^4}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a^4+a^2x^2-4x^4}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(3) $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 　解：$y'=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}-x\dfrac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}=\dfrac{a^2-x^2+x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

(4) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$

解：$y'=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1+x^3}{1-x^3})^{-\frac{2}{3}}(\dfrac{1+x^3}{1-x^3})'=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1+x^3}{1-x^3})^{-\frac{2}{3}}\dfrac{3x^2(1-x^3)+3x^2(1+x^3)}{(1-x^3)^2}$

$=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1+x^3}{1-x^3})^{-\frac{2}{3}}\dfrac{6x^2}{(1-x^3)^2}=\dfrac{2x^2}{(1+x^3)^{\frac{2}{3}}(1-x^3)^{\frac{4}{3}}}$

(5) $y=\ln(\ln x)$ 　解：$y'=\dfrac{1}{\ln x}(\ln x)'=\dfrac{1}{\ln x}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x\ln x}$

(6) $y=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|$ 　解：$y'=\dfrac{1}{2}\dfrac{a-x}{a+x}(\dfrac{a+x}{a-x})'=\dfrac{1}{2}\dfrac{a-x}{a+x}\dfrac{a-x+(a+x)}{(a-x)^2}=\dfrac{a}{a^2-x^2}$

(7) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$

解：$y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}(x+\sqrt{a^2+x^2})'=\dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}})$

$=\dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}(\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{\sqrt{a^2+x^2}})=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$

(8) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$ 　解：$y'=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{2}}(\tan\dfrac{x}{2})'=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{2}}\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}=\dfrac{1}{\sin x}.$

(9) $y=\cos(\cos\sqrt{x})$

解：$y'=-\sin(\cos\sqrt{x})(\cos\sqrt{x})'=-\sin(\cos\sqrt{x})(-\sin\sqrt{x})(\sqrt{x})'=\dfrac{\sin(\cos\sqrt{x})\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

(10) $y=\cos^3x-\cos 3x$ 　解：$y'=3\cos^2x(\cos x)'+3\sin 3x=3\sin 3x-3\cos^2x\sin x.$

(11) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-3x^2}$ 　解：$y'=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-3x^2}(-3x^2)'=-6x\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-3x^2}$

(12) $y=\arcsin(\sin x\bullet\cos x)$

解：$y=\arcsin(\dfrac{1}{2}\sin 2x), y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4}\sin^2 2x}}(\dfrac{1}{2}\sin 2x)=\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4}\sin^2 2x}}$

$(13)\, y=\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$

解：$y'=\dfrac{1}{1+(\dfrac{2x}{1-x^2})^2}(\dfrac{2x}{1-x^2})'=\dfrac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2+4x^2}\dfrac{2(1-x^2)+2x2x}{(1-x^2)^2}=\dfrac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}\dfrac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}=\dfrac{2}{1+x^2}.$

$(14)\, y=e^{-x^2+2x}$ 解：$y'=e^{-x^2+2x}(-x^2+2x)'=e^{-x^2+2x}(-2x+2)=-2e^{-x^2+2x}(x-1).$

$(15)\, y=\ln\sqrt{\dfrac{(x+2)(x+3)}{x+1}}$

解：$y=\dfrac{1}{2}[\ln(x+2)+\ln(x+3)-\ln(x+1)],\, y'=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+1})$

$(16)\, y=e^{2x}\sin 3x+\dfrac{x^2}{2}$ 解：$y'=2e^{2x}\sin 3x+3e^{2x}\cos 3x+x=e^{2x}(2\sin 3x+3\cos 3x)+x$

$(17)\, y=\dfrac{e^{-kx}\sin wx}{1+x}(k,w\text{为常数})$

解：$y'=\dfrac{(-ke^{-kx}\sin wx+e^{-kx}w\cos wx)-e^{-kx}\sin wx}{(1+x)^2}$

$=e^{-kx}\bullet\dfrac{-k\sin wx+w\cos wx-\sin wx}{(1+x)^2}=e^{-kx}\bullet\dfrac{-(k+1)\sin wx+w\cos wx}{(1+x)^2}$

$(18)\, y=x\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

解：$y'=\sqrt{a^2-x^2}+x\dfrac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}+\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}-x\dfrac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}$

$=\sqrt{a^2-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\dfrac{(a^2-x^2)+x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$=\dfrac{(a^2-x^2)^2-x^2(a^2-x^2)+a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2x^4-3a^2x^2+a^4+a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$(19)\, y=\sin^n x\cos nx$

解：$y'=(\sin^n x)'\cos nx+\sin^n x(\cos nx)'=(n\sin^{n-1}x\cos x)\cos nx-n\sin^n x\sin nx$

$=n\sin^{n-1}x(\cos x\cos nx-\sin x\sin nx)=n\bullet\sin^{n-1}x\bullet\cos[(n+1)x]$

(20) $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

解：$y=\ln\dfrac{(1+x)-(1-x)}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}=\ln\dfrac{2x}{2+2\sqrt{1-x^2}}=\ln\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}=\ln x-\ln(1+\sqrt{1-x^2})$,

于是有$y'=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}(1+\sqrt{1-x^2})'$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}+1-\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

16.用对数的求导法则求下列函数的导数：

(1) $y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

解：由于$\ln y=\ln\left(x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)=\ln x+\dfrac{1}{2}\ln(1-x)-\dfrac{1}{2}(1+x)$, 在此式两边关于$x$求导可得：

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}$$

于是可得$y'=y\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2(1-x)}-\dfrac{1}{2(1+x)}\right]$, 即

$$y'=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2(1-x)}-\frac{1}{2(1+x)}\right]$$

(2) $y=\dfrac{x^2}{1-x}\sqrt{\dfrac{1+x}{1+x+x^2}}$;

解：由于

$$\ln y=\ln\left(\frac{x^2}{1-x}\sqrt{\frac{1+x}{1+x+x^2}}\right)=2\ln x-\ln(1-x)+\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\ln(1+x+x^2),$$

在此式两边关于x求导可得：

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x}-\frac{-1}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\frac{1+2x}{1+x+x^2};$$

于是可得$y'=y\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{2(1+x)}-\dfrac{1+2x}{2(1+x+x^2)}\right)$, 即

$$y'=\frac{x^2}{1-x}\sqrt{\frac{1+x}{1+x+x^2}}\left[\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1+2x}{2(1+x+x^2)}\right].$$

(3) $y=(x+\sqrt{1+x^2})^n$

解：由于

$$\ln y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})^n=n\ln(x+\sqrt{1+x^2}),$$

在上式两边关于x求导可得

$$\frac{y'}{y}=n\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})'=n\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=n\frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{n}{\sqrt{1+x^2}};$$

于是可得$y'=y\dfrac{n}{\sqrt{1+x^2}}$,即

$$y'=(x+\sqrt{1+x^2})^n\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(4) $y=x^x, x>0;$

解：由于$\ln y=\ln x^x=x\ln x$, 那么在此式两边求导可得

$$\frac{y'}{y}=\ln x+\frac{x}{x}=\ln x+1;$$

于是有$y'=y(\ln x+1)$,即

$$y'=x^x(\ln x+1).$$

(5) $y=x^{\ln x}, x>0;$

解：由于$\ln y=\ln x^{\ln x}=\ln x\ln x$, 那么在此式两边求导可得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}\ln x+\frac{1}{x}\ln x=\frac{2}{x}\ln x;$$

于是有$y'=y(\dfrac{2}{x}\ln x)$,即

$$y'=x^{\ln x}(\frac{2}{x}\ln x)=2x^{\ln x-1}\ln x.$$

(6) $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}, x>0;$

解：由于$\ln y=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$, 那么在此式两边求导可得

$$\frac{y'}{y}=-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x}\frac{1}{1+x},$$

于是可得$y'=y[-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x)+\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+x}]$,即

$$y'=(1+x)^{\frac{1}{x}}[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}].$$

$(7) y=x^{\tan x}, x>0;$

解：由于$\ln y = x^{\tan x}=\tan x\ln x,$ 那么在此式两边求导可得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{\cos^2 x}\ln x+\tan x\frac{1}{x},$$

于是可得$y'=y[\frac{1}{\cos^2 x}\ln x+\tan x\frac{1}{x}],$ 即

$$y'=x^{\tan x}[\frac{\ln x}{\cos^2 x}+\frac{\tan x}{x}].$$

$(7) y=a^{\sin x}, x>0;$

解：由于$\ln y = a^{\sin x}=\sin x\ln a,$ 那么在此式两边求导可得

$$\frac{y'}{y}=\cos x\ln a,$$

于是可得$y'=y(\cos x\ln a),$ 即

$$y'=a^{\sin x}\cos x\ln a.$$

17.设$f(x)$是对x可导的函数, 求$\frac{dy}{dx}$：

$(1) y=f(x^2);$　　解：$y'=f'(x^2)(x^2)'=2xf'(x^2).$

$(2) y=f(e^x)e^{f(x)};$

解：$y'=[f(e^x)]'e^{f(x)}+f(e^x)[e^{f(x)}]'$

$$=[f'(e^x)e^x]e^{f(x)}+f(e^x)[e^{f(x)}f'(x)]=e^{f(x)}[f'(e^x)e^x+f(e^x)f'(x)].$$

$(3) y=f(f(f(x))).$　　解：$y'=f'(f(f(x)))(f(f(x)))'=f'(f(f(x)))f'(f(x))f'(x)$

18.设$\varphi(x)$和$\psi(x)$是对x可导的函数, 求$\frac{dy}{dx}$：

$(1) y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$

解：由于$\ln y=\frac{1}{2}\ln[\varphi^2(x)+\psi^2(x)],$ 于是有

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\frac{[\varphi^2(x)+\psi^2(x)]'}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}=\frac{2\varphi(x)\varphi'(x)+2\psi(x)\psi'(x)}{2[\varphi^2(x)+\psi^2(x)]}$$

因此$y'=y\frac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)},$ 即

$$y'=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}\frac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}=\frac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}.$$

$(2) y=\arctan\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, (\psi(x)\neq 0);$

解：$y'=\frac{1}{1+[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}]^2}[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}]'$

$$=\frac{\psi^2(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\psi'(x)\varphi(x)}{\psi^2(x)}=\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\psi'(x)\varphi(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}.$$

(3) $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)},(\varphi(x)\neq 0,\psi(x)>0)$.

解: $\ln y=\ln\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}=\dfrac{1}{\varphi(x)}\ln\psi(x)$, 于是有

$$\frac{y'}{y}=\frac{-\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\ln\psi(x)+\frac{1}{\varphi(x)\psi(x)}\psi'(x)$$

$$=\frac{-\varphi'(x)\ln\psi(x)}{\varphi^2(x)}+\frac{\psi'(x)}{\varphi(x)\psi(x)}$$

因此有

$$y'=y[\frac{-\varphi'(x)\ln\psi(x)}{\varphi^2(x)}+\frac{\psi'(x)}{\varphi(x)\psi(x)}]$$

$$=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}[\frac{\psi'(x)}{\varphi(x)\psi(x)}-\frac{\varphi'(x)\ln\psi(x)}{\varphi^2(x)}].$$

(4) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x),(\varphi(x)>0,\psi(x)>0,\varphi(x)\neq 1)$.

解：$y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)=\dfrac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)}$, 于是有

$$y'=\frac{\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}\ln\varphi(x)-\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}$$

$$=\frac{\psi'(x)\ln\varphi(x)-\varphi'(x)\ln\psi(x)}{\psi(x)\varphi(x)\ln^2\varphi(x)}.$$

19.求下列函数的导数：

(1) $y=e^{ax}(\cos bx+\sin bx)$;　　解：$y'=ae^{ax}(\cos bx+\sin bx)+be^{ax}(\cos bx-\sin bx)$

(2) $y=x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$;　　解：$y'=\arctan x+\dfrac{x}{1+x^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+x^2}(1+x^2)'=\arctan x.$

(3) $y=\arctan\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}+\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$;

解：$y'=\dfrac{1}{1+(\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x})^2}(\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x})'+\dfrac{1}{1+(\dfrac{2x}{1-x^2})^2}(\dfrac{2x}{1-x^2})'$

$$=\frac{x^2}{x^2+(\sqrt{1-x^2}-1)^2}\frac{\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}x-(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2}+\frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2+4x^2}\frac{2(1-x^2)-(-2x)2x}{(1-x^2)^2}$$

$$=\frac{2(1-x^2)-(-2x)2x}{(1-x^2)^2+4x^2}-\frac{\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}+(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2+(\sqrt{1-x^2}-1)^2}$$

$$=\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2+4x^2}-\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}(2-2\sqrt{1-x^2})}$$

$$=\frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2}-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{4-\sqrt{1-x^2}}{2(1+x^2)}\{???\}$$

(4) $y=\arctan(\tan^2 x)$　　解：$y'=\dfrac{(\tan^2 x)'}{1+\tan^4 x}=\dfrac{2\tan x\dfrac{1}{\cos^2 x}}{1+\tan^4 x}=\dfrac{2\tan x}{(1+\tan^4 x)\cos^2 x}$

(5) $y=(\frac{a}{b})^x(\frac{b}{x})^a(\frac{x}{a})^b,(a,b>0);$

解：由于

$$\ln y=\ln[(\frac{a}{b})^x(\frac{b}{x})^a(\frac{x}{a})^b]=\ln(\frac{a}{b})^x+\ln(\frac{b}{x})^a+\ln(\frac{x}{a})^b$$
$$=x\ln\frac{a}{b}+a(\ln b-\ln x)+b(\ln x-\ln a),$$

因此有

$$\frac{y'}{y}=\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x};$$

于是$y'=y(\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x})$,即

$$y'=(\frac{a}{b})^x(\frac{b}{x})^a(\frac{x}{a})^b(\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}).$$

(6) $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a},(a>0);$

解：$y'=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{x}{2}\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2}\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2}-\frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$

$$=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2-x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{a^2-x^2}$$

(7) $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|,(a>0);$

解：$y'=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{2}+\frac{x}{2}\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{a^2}{2}\bullet\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{2}+\frac{x^2}{2\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2+x^2}}$

$$=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{2}+\frac{a^2+x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{a^2+x^2}$$

(8) $y=\ln(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}})$

解：$y'=\frac{1}{\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}})'=\frac{1}{\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}(\frac{1}{\sqrt{x}})'$

$$=-\frac{1}{2\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

(9) $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}, (a > 0)$;

解：$y' = a^a x^{a^a-1} + a^{x^a}\ln a \cdot (x^a)' + a^{a^x}\ln a \cdot (a^x)' = a^a x^{a^a-1} + a^{x^a+1}x^{a-1}\ln a + a^{a^x+x}\ln^2 a$

(10) $y = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

解：$y' = \frac{1}{6}\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}[\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}]' + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{1+\frac{(2x-1)^2}{3}}(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})'$

$$= \frac{x^2-x+1}{6(x+1)^2}\cdot\frac{2(x+1)(x^2-x+1)-(2x-1)(x+1)^2}{(x^2-x+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{3+(2x-1)^2}\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3(1-x)(1+x^2)}{6(x+1)^2(x^2-x+1)^2} + \frac{2}{3+(2x-1)^2} = \frac{(1-x)(1+x^2)}{2(x+1)^2(x^2-x+1)^2} + \frac{1}{2(1-x+x^2)}$$

$$= \frac{(1-x)(1+x^2)}{2(x+1)^2(x^2-x+1)^2} + \frac{(1-x+x^2)(x+1)^2}{2(1-x+x^2)^2(x+1)^2} = \frac{2+x^2+x^4}{2+4x^3+2x^6}\{???\}$$

第二节 微分概念及其计算

1.求下列函数在指定点的微分：

(1) $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 求$dy(0), dy(1)$;

解：$\frac{dy}{dx} = y' = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1$, 于是有

$$dy = [na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1]dx;$$

因此可得

$$dy(0) = a_1 dx,$$
$$dy(1) = [na_n + (n-1)a_{n-1} + \cdots + 2a_2 + a_1]dx.$$

(2) $y = \sec x + \tan x$, 求$dy(0), dy(\frac{\pi}{4})$和$dy(\pi)$;

解：$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\tan x}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x}$, 于是有$dy = \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x}dx$; 因此可得

$$dy(0) = dx, dy(\frac{\pi}{4}) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{\frac{1}{2}}dx = (\sqrt{2}+2)dx, dy(\pi) = dx.$$

(3) $y = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$, 求$dy(0), dy(a)$;

解：$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^2+x^2}$, 于是有$dy = \frac{dx}{a^2+x^2}$, 因此有

$$dy(0) = \frac{dx}{a^2}, dy(a) = \frac{dx}{2a^2}.$$

(4) $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$, 求 $dy(0.1), dy(0.01)$.

解: $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}$, 于是有 $dy=(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3})dx$, 因此有

$$dy(0.1)=(-\frac{1}{0.01}-\frac{2}{0.001})dx=-2100dx,$$

$$dy(0.01)=(-\frac{1}{0.0001}-\frac{2}{0.000001})dx=-2010000dx.$$

2.求下列函数的微分:

(1) $y=\frac{x}{1-x^2}$;　　解: $\frac{dy}{dx}=y'=\frac{1-x^2+2xx}{(1-x^2)^2}=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$, 于是 $dy=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}dx$.

(2) $y=x\ln x-x$;　　解: $\frac{dy}{dx}=y'=\ln x+1-1=\ln x$, 于是 $dy=\ln x dx$.

(3) $y=\sqrt{x}+\ln x-\frac{1}{\sqrt{x}}$;　　解: $\frac{dy}{dx}=y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$, 于是 $dy=(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}})dx$.

(4) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

解: $\frac{dy}{dx}=y'=\frac{1}{\sqrt{1-1+x^2}}(\sqrt{1-x^2})'=\frac{1}{|x|}\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 于是有 $dy=\pm\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

(5) $y=e^{\sin x^2}$;　　解: $\frac{dy}{dx}=y'=e^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2x$, 于是有 $dy=2x\cdot\cos x^2\cdot e^{\sin x^2}dx$.

(6) $y=\ln\left|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right|$;

解: $\frac{dy}{dx}=y'=\frac{1}{\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}\frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}\frac{1}{2}=\frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{\cos x}$, 于是 $dy=-\frac{dx}{\cos x}$.

3.设 u,v 是 x 的可导函数, 求 dy:

(1) $y=\arctan\frac{u}{v}$;

解: $\frac{dy}{dx}=y'=\frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}}(\frac{u}{v})'$

$=\frac{v^2}{u^2+v^2}\frac{u'v-v'u}{v^2}$

$=\frac{vdu-udv}{(u^2+v^2)dx}$,

于是$dy=\frac{vdu-udv}{u^2+v^2}$.

(2) $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$;

解: $\frac{dy}{dx}=y'=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}(\sqrt{u^2+v^2})'$

$=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{2uu'+2vv'}{2\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{udu+vdv}{(u^2+v^2)dx}$,

于是$dy=\frac{udu+vdv}{u^2+v^2}$.

(3) $y=\ln\sin(u+v)$;

解: $\frac{dy}{dx}=y'=\frac{1}{\sin(u+v)}(\sin(u+v))'$

$=\frac{\cos(u+v)}{\sin(u+v)}\bullet(u'+v')$

$=\frac{\cos(u+v)}{\sin(u+v)}\frac{du+dv}{dx}$,

于是$dy=\frac{du+dv}{\tan(u+v)}$.

(4) $y=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$

解: $\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{1}{2}\frac{1}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}(u^2+v^2)'$

$=-\frac{1}{2}\frac{1}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}(2uu'+2vv')$

$=-\frac{udu+vdv}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}dx}$

于是有$dy=-\frac{udu+vdv}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$.

4.求下列函数的微分dy:

(1) $y=\sin^2 t, t=\ln(3x+1)$;

解: $\frac{dy}{dx}=y'=2\sin t\cos t\bullet t'=\sin 2t\bullet\frac{3}{3x+1}=\frac{3}{3x+1}\sin[2\ln(3x+1)]=\frac{3\sin[\ln(3x+1)^2]}{3x+1}$

于是有$dy=\frac{3\sin[\ln(3x+1)^2]}{3x+1}dx$.

(2) $y=\ln(3t+1), t=\sin^2 x$;

解: $\frac{dy}{dx}=y'=\frac{3}{3t+1}t'=\frac{6\sin x\cos x}{3t+1}=\frac{3\sin 2x}{3\sin^2 x+1}$, 于是有$dy=\frac{3\sin 2x}{3\sin^2 x+1}dx$.

(3) $y=e^{3u},u=\frac{1}{2}\ln t,t=x^3-2x+5;$

解: $\frac{dy}{dx}=y'=e^{3u}3u'=3e^{\frac{3}{2}\ln t}\frac{1}{2}\frac{1}{t}t'=\frac{3}{2t}e^{\frac{3}{2}\ln(x^3-2x+5)}(3x^2-2)=\frac{3e^{\frac{3}{2}\ln(x^3-2x+5)}(3x^2-2)}{2(x^3-2x+5)}$

于是有 $dy=\frac{3e^{\frac{3}{2}\ln(x^3-2x+5)}(3x^2-2)}{2(x^3-2x+5)}dx.$

(4) $y=\arctan u,u=(\ln t)^2,t=1+x^2-\cot x.$

解: $\frac{dy}{dx}=y'=\frac{1}{1+u^2}u'=\frac{1}{1+(\ln t)^4}2\ln t\bullet\frac{1}{t}t'=\frac{2\ln t}{1+\ln^4 t}\frac{1}{t}(2x+\frac{1}{\sin^2 x})$

$$=\frac{2\ln(1+x^2-\cot x)}{1+\ln^4(1+x^2-\cot x)}\frac{1}{1+x^2-\cot x}(2x+\frac{1}{\sin^2 x}),$$

于是有 $dy=\frac{2\ln(1+x^2-\cot x)}{1+\ln^4(1+x^2-\cot x)}\frac{dx}{1+x^2-\cot x}(2x+\frac{1}{\sin^2 x}).$

5.求下列各式的近似值：

(1) $\sqrt{120}$

解：取 $y=\sqrt{x}$，则 $\sqrt{120}=\sqrt{x}\big|_{x=120}$，

$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$

$$=\sqrt{121}+\frac{1}{2\sqrt{121}}(-1)$$

$$=11-\frac{1}{22}$$

$$=\frac{241}{22}=10.9\dot{5}\dot{4}.$$

(2) $\arctan 1.05$

解：取 $y=\arctan x,x_0=1,\Delta x=0.05$

则 $\arctan 1.05=\arctan x\big|_{x=1.05}$，

$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$

$$=\arctan 1+\frac{1}{1+1}0.05$$

$$=\frac{\pi}{4}+0.025\approx 0.810398.$$

(3) $\sin 29^\circ$

解：取 $y=\sin x,x_0=30^\circ,\Delta x=-1^\circ$，

则 $\sin 29^\circ=\sin x\big|_{x=29^\circ}$，

$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$

$$=\sin 30^\circ+\cos 30^\circ\bullet(-1^\circ)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180}$$

$$=\frac{180-\sqrt{3}\pi}{360}\approx 0.484885.$$

(4) $\sqrt{\frac{(2.037)^2-1}{(2.037)^2+1}}.$

解：取 $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}},x_0=2,\Delta x=0.037,$

$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$

$$=\sqrt{\frac{3}{5}}+0.037\frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4-1}}\Bigg|_{x=2}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{5}}+\frac{4*0.037}{5\sqrt{15}}$$

$$\approx 0.782239$$

第三节 隐函数与参数方程微分法

1.求下列隐函数的导数：

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a,b\text{为常数})$;

解：在方程两边对x求导可得

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0,$$

整理可得

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

(2) $y^2=2px,(p\text{为常数})$;

解：在方程两边对x求导可得

$$2yy'=2p$$

整理可得

$$y'=\frac{p}{y}.$$

(3) $x^2+xy+y^2=a^2,(a\text{为常数})$;

解：在方程两边对x求导可得

$$2x+y+xy'+2yy'=0$$

整理可得

$$y'=-\frac{2x+y}{2y+x}.$$

(4) $x^3+y^3-xy=0$;

解：在方程两边对x求导可得

$$3x^2+3y^2y'-y-xy'=0$$

整理可得

$$y'=-\frac{3x^2-y}{3y^2-x}.$$

(5) $y=x+\frac{1}{2}\sin y$;

解：在方程两边对x求导可得

$$y'=1+\frac{1}{2}y'\cos y$$

整理可得

$$y'=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos y}.$$

(6) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},(a\text{为常数})$;

解：在方程两边对x求导可得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$$

整理可得

$$y'=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}.$$

(7) $y=\cos(x+y)$;

解：在方程两边对x求导可得

$$y'=-\sin(x+y)(1+y')$$

整理可得

$$y'=-\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}.$$

(8) $y=x+\arctan y$;

解：在方程两边对x求导可得

$$y'=1+\frac{1}{1+y^2}y'$$

整理可得

$$y'=\frac{1}{1-\frac{1}{1+y^2}}=\frac{1+y^2}{y^2}.$$

$(9)\, y = 1-\ln(x+y)+e^{y};$

解：在方程两边对x求导可得

$$y' = -\frac{1}{x+y}(1+y') + e^{y}y'$$

整理可得

$$y' = \frac{-\dfrac{1}{x+y}}{1+\dfrac{1}{x+y}-e^{y}} = -\frac{1}{x+y+1-(x+y)e^{y}}.$$

$(10)\, \arctan\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}.$

解：在方程两边对x求导可得

$$\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\frac{y'x-y}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

即

$$\frac{y'x-y}{x^2+y^2} = \frac{x+yy'}{x^2+y^2}$$

整理可得

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

2.求下列参数方程的导数：

$(1)\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t} \\ y = \dfrac{1-t}{1+t} \end{cases};$ 解：$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{\dfrac{-(1+t)-(1-t)}{(1+t)^2}}{\dfrac{1+t-t}{(1+t)^2}} = -2.$

$(2)\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases};$ 解：$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{-2\sin t\cos t}{2\cos t\sin t} = -1.$

$(3)\begin{cases} x = e^{2t}\cos^2 t \\ y = e^{2t}\sin^2 t \end{cases};$ 解：$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{2e^{2t}\sin^2 t + 2e^{2t}\cos t\sin t}{2e^{2t}\cos^2 t - 2e^{2t}\cos t\sin t} = \dfrac{\sin^2 t+\cos t\sin t}{\cos^2 t-\cos t\sin t}.$

(4) $\begin{cases} x = a(\ln\tan\dfrac{t}{2} + \cos t) \\ y = a\sin t \end{cases}$;

解：$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{a\cos t}{a(\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\tan\dfrac{t}{2}}\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{t}{2}} - \sin t)} = \dfrac{\cos t}{\dfrac{1}{\sin t} - \sin t} = \dfrac{\sin t\cos t}{1-\sin^2 t} = \dfrac{\sin t}{\cos t} = \tan t.$

3.求函数$y = y(x)$在指定点的导数：

(1) $y = \cos x + \dfrac{1}{2}\sin y,\quad (\dfrac{\pi}{2}, 0);$

解：在方程两边求导可得$y' = -\sin x + \dfrac{1}{2}\cos y y'$, 整理得

$$y' = -\frac{\sin x}{1 - \frac{1}{2}\cos y};$$

那么隐函数在指定点的导数为

$$y'\Big|_{(x,y)=(\frac{\pi}{2},0)} = -\frac{\sin x}{1-\frac{1}{2}\cos y}\Bigg|_{(x,y)=(\frac{\pi}{2},0)} = -\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = -2.$$

(2) $ye^x + \ln y = 1,\quad (0,1);$

解：在方程两边求导可得$y'e^x + ye^x + \dfrac{1}{y}y' = 0$, 整理得

$$y' = -\frac{ye^x}{e^x + \frac{1}{y}} = -\frac{y^2e^x}{ye^x + 1};$$

那么隐函数在指定点的导数为

$$y'\Big|_{(x,y)=(0,1)} = -\frac{y^2e^x}{ye^x+1}\Bigg|_{(x,y)=(0,1)} = -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}.$$

(3) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, 在$t = \dfrac{\pi}{2}, \pi$处;

解：$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$, 那么隐函数在指定点的导数分别为

$$y'\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin t}{1-\cos t}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1-0} = 1;$$

$$y'\Big|_{t=\pi} = \frac{\sin t}{1-\cos t}\Big|_{t=\pi} = \frac{0}{1-(-1)} = 0.$$

(4) $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$, 在$t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}$处;

解：$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{1-3t^2}{-2t}$, 那么隐函数在指定点的导数分别为

$$y'\Big|_{t=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1-3t^2}{-2t}\Big|_{t=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1-\frac{3}{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$y'\Big|_{t=\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1-3t^2}{-2t}\Big|_{t=\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1-\frac{3}{3}}{-\frac{2\sqrt{3}}{3}} = 0.$$

4.一圆锥形容器, 深$10m$, 上顶圆半径为$4m$.

(1)灌入水时，求水的体积V对水面高度h的变化率;

(2)求体积V对容器截面积圆半径R的变化率。

解：设灌入水时水深为h,水面圆半径为R,则有$\dfrac{h}{10} = \dfrac{R}{4}$.

(1)$V = \pi R^2 h \dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{3}(\dfrac{2h}{5})^2 h = \dfrac{4\pi}{75}h^3$, 那么有$\dfrac{dV}{dh} = \dfrac{4\pi}{25}h^2$;

(1)$V = \pi R^2 h \dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{3}R^2 \dfrac{5}{2}R = \dfrac{5\pi}{6}R^3$, 那么有$\dfrac{dV}{dh} = \dfrac{5\pi}{2}R^2$.

5.设$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t.$

(1)求$y'(x)$;

(2)证明曲线的切线被坐标轴所截长度为一常数。

解:(1)由于$\begin{cases} x^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\cos^2 t \\ y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\sin^2 t \end{cases}$,于是有$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$,在此式两端求导整理可得$y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$;则

$$y'(x)=-\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{x}}.$$

(2)可求得$y'(t)=-\tan t$,那么曲线上任意一点的切线由点斜式可得

$$y=-\tan t(x-a\cos^3 t)+a\sin^3 t;$$

那么与x轴,y轴的交点分别为

$$(a\cos t,0),(0,a\sin t),$$

这两点间的距离为

$$d=\sqrt{(a\cos t)^2+(a\sin t)^2}=|a|.$$

因此曲线的切线被坐标轴所截长度为一常数。

6.证明:曲线$\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$上任意一点的法线到原点的距离恒等于$a$

证明：法线的斜率为

$$\frac{1}{y'}=\frac{dx}{dy}=\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}=\frac{a(-\sin t+\sin t+t\cos t)}{a(\cos t-\cos t+t\sin t)}=\cot t,$$

那么由点斜式可知在任意一点(x,y)的法线为

$$y=-[x-a(\cos t+t\sin t)]\cot t+a(\sin t-t\cos t);$$

则原点到法线的距离为

$$\begin{aligned} d&=\frac{|-a(\cos t+t\sin t)\cot t-a(\sin t-t\cos t)|}{\sqrt{1+\cot^2 t}} \\ &=\frac{a|(\cos t+t\sin t)\cot t+(\sin t-t\cos t)|}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}}} \\ &=a|(\cos t+t\sin t)\cos t+(\sin^2 t-t\sin t\cos t)| \\ &=a|\sin^2 t+\cos^2 t|=a. \end{aligned}$$

于是可知曲线上任意一点的法线到原点的距离恒等于a.

第四节 高阶微商与高阶微分

1.求下列函数在指定点的高阶导数：

$(1) f(x)=3x^3+4x^2-5x-9,$ 求$f''(1), f'''(1), f^{(4)}(1).$

解：可以求得

$$f'(x)=9x^2+8x-5, f''(x)=18x+8, f'''(x)=18, f^{(4)}(x)=0;$$

因此有

$$f''(1)=26, f'''(1)=18, f^{(4)}(1)=0.$$

$(2) f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}},$ 求$f''(0), f''(1), f''(-1);$

解：可以求得

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}, f''(x)=\frac{-3x\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^3}=-\frac{3x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}};$$

于是有

$$f''(0)=0, f''(1)=-\frac{3}{(1+1)^{\frac{5}{2}}}=-\frac{3}{4\sqrt{2}}, f''(-1)=\frac{3}{4\sqrt{2}}.$$

$(3) y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$ 求$y^{(n)}(0).$

解：$y^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i(\arcsin x)^{(i)}(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})^{(n-i)}$???

2.求下列函数的高阶导数：

$(1) y=x\ln x,$ 求$y'';$ 解：$y'=\ln x+1, y''=\dfrac{1}{x}.$

$(2) y=e^{-x^2},$ 求$y''';$

解：$y'=-2xe^{-x^2}, y''=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}, y'''=4xe^{-x^2}+8xe^{-x^2}-8x^3e^{-x^2}=4xe^{-x^2}(3-2x^2).$

$(3) y=x^2e^{2x},$ 求$y^{(n)};$

解：
$$\begin{aligned}y^{(n)}&=\sum_{i=0}^{n}C_n^i(x^2)^{(i)}(e^{2x})^{(n-i)}\\&=C_n^0(x^2)^{(0)}(e^{2x})^{(n)}+C_n^1(x^2)^{(1)}(e^{2x})^{(n-1)}+C_n^2(x^2)^{(2)}(e^{2x})^{(n-2)}\\&=x^2 2^n e^{2x}+n2x2^{n-1}e^{2x}+\frac{n(n-1)}{2!}22^{n-2}e^{2x}\\&=2^n x^2e^{2x}+n2^n xe^{2x}+n(n-1)2^{n-2}e^{2x}.\end{aligned}$$

$(4) y=x^5\cos x$, 求$y^{(50)}$;

解：$y^{(n)}=\sum_{i=0}^{50}C_{50}^{i}(x^5)^{(i)}(\cos x)^{(50-i)}$

$=C_{50}^{0}(x^5)^{(0)}(\cos x)^{(n)}+C_{50}^{1}(x^5)^{(1)}(\cos x)^{(n-1)}+C_{50}^{2}(x^5)^{(2)}(\cos x)^{(n-2)}$

$+C_{50}^{3}(x^5)^{(3)}(\cos x)^{(n-3)}+C_{50}^{4}(x^5)^{(4)}(\cos x)^{(n-4)}+C_{50}^{5}(x^5)^{(5)}(\cos x)^{(n-5)}$

$=-x^5\cos x-50\bullet 5x^4\sin x+\frac{50\bullet 49}{2!}20x^3\cos x+\frac{50\bullet 49\bullet 48}{3!}60x^2\sin x$

$-\frac{50\bullet 49\bullet 48\bullet 47}{4!}120x\cos x-\frac{50\bullet 49\bullet 48\bullet 47\bullet 46}{5!}120\sin x$

$=-x^5\cos x-250x^4\sin x+24500x^3\cos x+1176000x^2\sin x$

$-27636000x\cos x-254251200\sin x.\{???\}$

$(5) y=x^3\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, 求$y^{(30)}$.

解：$y^{(30)}=\sum_{i=0}^{30}C_{30}^{i}(x^3)^{(i)}(\frac{e^x-e^{-x}}{2})^{(30-i)}$

$=C_{30}^{0}(x^3)^{(0)}(\frac{e^x-e^{-x}}{2})^{(30)}+C_{30}^{1}(x^3)^{(1)}(\frac{e^x-e^{-x}}{2})^{(30-1)}$

$+C_{30}^{2}(x^3)^{(2)}(\frac{e^x-e^{-x}}{2})^{(30-2)}+C_{30}^{3}(x^3)^{(3)}(\frac{e^x-e^{-x}}{2})^{(30-3)}$

$=x^3\frac{e^x-e^{-x}}{2}+30\bullet 3x^2\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{30\bullet 29}{2!}6x\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\frac{30\bullet 29\bullet 28}{3!}6\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$=x^3\frac{e^x-e^{-x}}{2}+90x^2\frac{e^x+e^{-x}}{2}+2610x\frac{e^x-e^{-x}}{2}+24360\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$

3.求下列函数的n阶导数：

$(1) y=a^x$;

解：$y'=a^x\ln a$,

$y''=a^x\ln^2 a$,

$\vdots$

$y^{(k)}=a^x\ln^k a$,

$y^{(k+1)}=a^x\ln^{k+1} a$,

$\vdots$

那么由数学归纳法可得

$y^{(n)}=a^x\ln^n a.$

$(2) y=\ln x$;

解：$y'=\frac{0!}{x}$,

$y''=-\frac{1!}{x^2}$,

$\vdots$

$y^{(k)}=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}$,

$y^{(k+1)}=(-1)^k\frac{k!}{x^{k+1}}$,

$\vdots$

那么由数学归纳法可得

$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$

4.求下列函数的n阶导数：

$(1) y=\dfrac{1}{x(1-2x)}$;

解：$y=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{2x-1}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-\frac{1}{2}}$;

$$y^{(n)}=(\frac{1}{x})^{(n)}-(\frac{1}{x-\frac{1}{2}})^{(n)}$$

$$=(-1)^n n!\frac{1}{x^{n+1}}-(-1)^n n!\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^{n+1}}$$

$$=(-1)^n n![\frac{1}{x^{n+1}}-\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^{n+1}}].$$

$(2) y=\sin^2 x$;

解：$y=\dfrac{1-\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\cos 2x}{2}$,

$$y^{(n)}=(\frac{1}{2})^{(n)}-\frac{1}{2}(\cos 2x)^{(n)}$$

$$=\frac{1}{2}[1-\operatorname{sgn}(n)]-2^{n-1}\cos(2x+\frac{n\pi}{2}).$$

$(3) y=\dfrac{1}{x^2-2x-8}$;

解：$y=\dfrac{1}{(x-4)(x+2)}=\dfrac{1}{6}(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x+2})$,

$$y^{(n)}=\frac{1}{6}[(\frac{1}{x-4})^{(n)}-(\frac{1}{x+2})^{(n)}]$$

$$=\frac{1}{6}(-1)^n n![\frac{1}{(x-4)^{n+1}}-\frac{1}{(x+2)^{n}}].$$

$(4) y=\dfrac{e^x}{x}$;

解：$y^{(n)}=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}C_n^i(\frac{1}{x})^{(i)}(e^x)^{(n-i)}$

$$=e^x\sum_{i=0}^{n}C_n^i(\frac{1}{x})^{(i)}$$

$$=e^x\sum_{i=0}^{n}C_n^i\frac{i!(-1)^i}{x^{i+1}}.$$

$(5) y=\ln\dfrac{x+2}{1-x}$;

解：$y=\ln\dfrac{x+2}{1-x}=\ln(x+2)-\ln(1-x)$,

$$y'(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{-1}{1-x}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-1};$$

那么当$n\neq 0$时有

$$y^{(n)}(x)=[\ln(x+2)]^{(n)}-[\ln(1-x)]^{(n)}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)![\frac{1}{(x+2)^n}-\frac{1}{(x-1)^n}],$$

于是有

$$y^{(n)}(x)=[1-\operatorname{sgn}(n)]\ln\frac{x+2}{1-x}$$

$$+\operatorname{sgn}(n)(-1)^{n-1}(n-1)![\frac{1}{(x+2)^n}-\frac{1}{(x-1)^n}].$$

(6) $y = 2^x \ln x.$

解：当$n \neq 0$时有

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (2^x)^{(n-i)} (\ln x)^{(i)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{C_n^i 2^x (\ln 2)^{n-i} (-1)^{i-1} (i-1)!}{x^i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{C_n^i (\ln 2)^{n-i} (-1)^{i-1} (i-1)! 2^x}{x^i},$$

于是有

$$y^{(n)}(x) = [1-\operatorname{sgn}(n)] 2^x \ln x$$

$$+\operatorname{sgn}(n) \sum_{i=0}^{n} \frac{C_n^i (\ln 2)^{n-i} (-1)^{i-1} (i-1)! 2^x}{x^i}.$$

5.设$f(x)$的各阶导数存在，求y'', y''':

(1) $y = f(x^2)$;

解：$y' = f'(x^2)(x^2)' = 2xf'(x^2)$,

$$y'' = 2f'(x^2) + 2xf''(x^2)(x^2)'$$

$$= 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2),$$

$$y''' = 4xf''(x^2) + 8xf''(x^2) + 8x^3 f'''(x^2)$$

$$= 12xf''(x^2) + 8x^3 f'''(x^2).$$

(2) $y = f(\frac{1}{x})$;

解：$y' = f'(\frac{1}{x})(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x})$,

$$y'' = \frac{2}{x^3} f'(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^4} f''(\frac{1}{x})$$

$$y''' = -\frac{6}{x^4} f'(\frac{1}{x}) - \frac{2}{x^5} f''(\frac{1}{x}) - \frac{4}{x^5} f''(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x^6} f'''(\frac{1}{x})$$

$$= -\frac{6}{x^4} f'(\frac{1}{x}) - \frac{6}{x^5} f''(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x^6} f'''(\frac{1}{x}).$$

(3) $y = f(e^{-x})$;

解：$y' = f'(e^{-x})(e^{-x})' = -e^{-x} f'(e^{-x})$,

$$y'' = e^{-x} f'(e^{-x}) + e^{-2x} f''(e^{-x}),$$

$$y''' = -e^{-x} f'(e^{-x}) - e^{-2x} f''(e^{-x}) - 2e^{-2x} f''(e^{-x}) - e^{-3x} f'''(e^{-x})$$

$$= -e^{-x} f'(e^{-x}) - 3e^{-2x} f''(e^{-x}) - e^{-3x} f'''(e^{-x})$$

$(4) y=f(\ln x);$

解：$y'=f'(\ln x)(\ln x)'=\dfrac{1}{x}f'(\ln x),$

$$y''=-\frac{1}{x^2}f'(\ln x)+\frac{1}{x^2}f''(\ln x)$$

$$y'''=\frac{2}{x^3}f'(\ln x)-\frac{1}{x^3}f''(\ln x)-\frac{2}{x^3}f''(\ln x)+\frac{1}{x^3}f'''(\ln x)$$

$$=\frac{2}{x^3}f'(\ln x)-\frac{3}{x^3}f''(\ln x)+\frac{1}{x^3}f'''(\ln x).$$

$(5) y=f(f(x)).$

解：$y'=f'(f(x))f'(x),$

$$y''=f''(f(x))f'(x)f'(x)+f'(f(x))f''(x)$$

$$=f''(f(x))[f'(x)]^2+f'(f(x))f''(x),$$

$$y'''=f'''(f(x))[f'(x)]^3+f''(f(x))2f'(x)f''(x)+f''(f(x))f'(x)f''(x)+f'(f(x))f'''(x)$$

$$=f'''(f(x))[f'(x)]^3+3f''(f(x))f'(x)f''(x)+f'(f(x))f'''(x).$$

6.若$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$.证明$f^{(n)}(0)=0.$

证明：显然$f(x)$在$x\neq 0$处有任意阶导数, 且

$$f'(x)=\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},$$

$$f''(x)=(-\frac{6}{x^4}+\frac{4}{x^6})e^{-\frac{1}{x^2}},$$

$$\vdots$$

一般的有$f^{(n)}(x)=P_{3n}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$,其中$P_{3n}(t)$为$t$的$3n$次多项式。我们一下利用数学归纳法进行证明：

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0;$$

设$f^{(n)}(0)=0$,则

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}P_{3n}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{tP_{3n}(t)}{e^{t^2}}=0.$$

综上所证可以知道$f^{(n)}(0)=0.$

7.求下列函数的二阶微分：

$(1) y=\dfrac{1}{\sqrt{x}};$　　解:$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{dy}{dx})=\dfrac{d}{dx}(-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}})=\dfrac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$, 于是有$d^2y=\dfrac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}dx^2.$

(2) $y = x\arctan x$;

解: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d}{dx}(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}$,

于是有$d^2y = \frac{2dx^2}{(1+x^2)^2}$.

(3) $y = f(u) = e^u, u = \varphi(x) = x^2$.

解：$y = e^{x^2}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d}{dx}(2xe^{x^2}) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$, 于是有$d^2y = (2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2})dx^2$.

8.求下列函数的三阶微分：

(1)设$u(x) = \ln x, v(x) = e^x$, 求$d^3(uv), d^3(\frac{u}{v})$;

解：$d^3(uv) = \sum_{i=0}^{3} C_3^i u^{(i)} v^{(3-i)} dx^3 = \sum_{i=0}^{3} C_3^i (\ln x)^{(i)} (e^x)^{(3-i)} dx^3$

$$= (e^x \ln x + \frac{3e^x}{x} - \frac{3e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3})dx^3 = e^x(\ln x + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3})dx^3;$$

$$d^3(\frac{u}{v}) = \sum_{i=0}^{3} C_3^i u^{(i)} (\frac{1}{v})^{(3-i)} dx^3 = \sum_{i=0}^{3} C_3^i (\ln x)^{(i)} (e^{-x})^{(3-i)} dx^3$$

$$= (-e^{-x}\ln x + \frac{3e^x}{x} + \frac{3e^{-x}}{x^2} + \frac{2e^{-x}}{x^3})dx^3 = e^{-x}(-\ln x + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3})dx^3.$$

(2)设$u(x) = e^{\frac{x}{2}}, v(x) = \cos 2x$, 求$d^3(uv), d^3(\frac{u}{v})$;

解：$d^3(uv) = \sum_{i=0}^{3} C_3^i u^{(i)} v^{(3-i)} dx^3 = \sum_{i=0}^{3} C_3^i (e^{\frac{x}{2}})^{(i)} (\cos 2x)^{(3-i)} dx^3$

$$= (\frac{e^{\frac{x}{2}}}{8}\cos 2x - \frac{6e^{\frac{x}{2}}}{4}\sin 2x - \frac{12e^{\frac{x}{2}}}{2}\cos 2x + 8e^{\frac{x}{2}}\sin 2x)dx^3$$

$$= e^{\frac{x}{2}}(\frac{13\sin 2x}{2} - \frac{47\cos 2x}{8})dx^3;$$

$$d^3(\frac{u}{v}) = \sum_{i=0}^{3} C_3^i u^{(i)} (\frac{1}{v})^{(3-i)} dx^3 = \sum_{i=0}^{3} C_3^i (e^{\frac{x}{2}})^{(i)} (\frac{1}{\cos 2x})^{(3-i)} dx^3$$

$$= e^{\frac{x}{2}}\sec 2x(48\tan^3 2x + 12\tan^2 2x + \frac{83}{2}\tan 2x + \frac{49}{8})dx^3.$$

9.求下列参数方程的二阶导数：

(1) $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$;

解：$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{3-3t^2}{2-2t} = \dfrac{3}{2}(1+t); y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{dy}{dx}) = \dfrac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{2-2t} = \dfrac{3}{4(1-t)}.$

(2) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$;

解：$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{a\cos t}{-a\sin t} = -\cot t; y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{dy}{dx}) = \dfrac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-a\sin t} = -\dfrac{1}{a\sin^3 t}.$

(3) $\begin{cases} x = a(1-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$;

解：$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{a\sin t}{-a\cos t} = -\tan t; y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{dy}{dx}) = \dfrac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\frac{1}{\cos^2 t}}{a\cos t} = \dfrac{1}{a\cos^3 t}.$

(4) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$;

解：$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{e^t \sin t + e^t \cos t}{e^t \cos t - e^t \sin t} = 1 + \dfrac{2\sin t}{\cos t - \sin t};$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2\cos t(\cos t - \sin t) - (-\sin t - \cos t)2\sin t}{(\cos t - \sin t)^2}}{e^t \cos t - e^t \sin t} = \frac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^3}.$$

(5) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$;

解：$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\dfrac{a3\sin^2 t\cos t}{a3\cos^2 t\sin t} = -\tan t;$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{-a3\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}.$$

(6) $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$.

解：$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\dfrac{f'(t) + tf''(t) - f'(t)}{f''(t)} = t; y'' = \dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{dy}{dx}) = \dfrac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{1}{f''(t)}$.

10.求下列隐函数的二阶微分：

(1)$e^{x+y} - xy = 0$;

解：在隐函数两边对x求导可得$e^{x+y}(1+y') - y - xy' = 0$, 整理有

$$y' = -\frac{e^{x+y} - y}{e^{x+y} - x},$$

那么

$$\begin{aligned} y'' = \frac{d(y')}{dx} &= -\frac{[e^{x+y}(1+y') - y'](e^{x+y} - x) - [e^{x+y}(1+y') - 1](e^{x+y} - y)}{(e^{x+y} - x)^2} \\ &= \frac{e^{x+y}(1+y')(x-y) + (y'-1)e^{x+y} - xy' + y}{(e^{x+y} - x)^2} \\ &= \frac{e^{x+y}(1 - \frac{e^{x+y} - y}{e^{x+y} - x})(x-y) + (-\frac{e^{x+y} - y}{e^{x+y} - x} - 1)e^{x+y} - x\frac{e^{x+y} - y}{e^{x+y} - x} + y}{(e^{x+y} - x)^2} \\ &= \frac{e^{x+y}(\frac{y-x}{e^{x+y} - x})(x-y) - (\frac{2e^{x+y} - y - x}{e^{x+y} - x})e^{x+y} - x\frac{e^{x+y} - y}{e^{x+y} - x} + y}{(e^{x+y} - x)^2} \\ &= \frac{e^{x+y}(y-x)(x-y) - (2e^{x+y} - y - x)e^{x+y} - x(e^{x+y} - y) + y}{(e^{x+y} - x)^3} \\ &= \frac{-e^{x+y}(y-x)^2 - 2e^{2(x+y)} + ye^{x+y} + xy + y}{(e^{x+y} - x)^3} \end{aligned}$$

于是$d^2 y = \dfrac{-e^{x+y}(y-x)^2 - 2e^{2(x+y)} + ye^{x+y} + xy + y}{(e^{x+y} - x)^3} dx^2$.{???}

(2)$x^3+y^3-3axy=0$;

解：在方程两边求导可得$3x^2+3y^2y'-3ay-3axy'=0$, 整理有

$$y'=\frac{3x^2-3ay}{3ax-3y^2}=\frac{x^2-ay}{ax-y^2}.$$

那么

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(y')&=\frac{(2x-ay')(ax-y^2)-(a-2yy')(x^2-ay)}{(ax-y^2)^2}\\&=\frac{2x(ax-y^2)-a(x^2-ay)-[a(ax-y^2)-2y(x^2-ay)]y'}{(ax-y^2)^2}\\&=\frac{2x(ax-y^2)-a(x^2-ay)-[a(ax-y^2)-2y(x^2-ay)]\dfrac{x^2-ay}{ax-y^2}}{(ax-y^2)^2}\\&=\frac{2x^4y-6ax^2y^2+2xy^4+2a^3xy}{(ax-y^2)^3};\end{aligned}$$

于是有

$$d^2y=\frac{2x^4y-6ax^2y^2+2xy^4+2a^3xy}{(ax-y^2)^3}dx^2.\{???\}$$

(3)$y^2+2\ln y-x^4=0$;

解：在方程两边对x求导可得$2yy'+\frac{2}{y}y'-4x^3=0$, 整理后有

$$y'=\frac{2x^3}{y+\frac{1}{y}}=\frac{2x^3y}{y^2+1},$$

那么

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(y')}{dx}=\frac{(6x^2y+2x^3y')(y^2+1)-4x^3y^2y'}{(y^2+1)^2}=\frac{4x^6y(y-1)^2+6x^2y(y^2+1)}{(y^2+1)^3},$$

于是有

$$d^2y=\frac{4x^6y(y-1)^2+6x^2y(y^2+1)}{(y^2+1)^3}dx^2\{???\}.$$

11.设函数$y=f(x)$在点x二阶可导，且$f'(x)\neq 0$.若$f(x)$存在反函数$x=f^{-1}(y)$，试求$(f^{-1})''(y)$.
解：由反函数的求导法则有：

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)},$$

那么

$$(f^{-1})''(y)=\frac{d[(f^{-1})'(y)]}{dy}=\frac{d}{dy}\frac{1}{f'(x)}=\frac{d[\frac{1}{f'(x)}]}{dx}\frac{dx}{dy}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\frac{1}{f'(x)};$$

于是有

$$(f^{-1})''(y)=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}.$$

12.$y=c_1\sin x+c_2\cos x$, 证明y满足方程$y''+y=0$.
证明: $y'=c_1\cos x-c_2\sin x, y'=-c_1\sin x-c_2\cos x$, 于是有$y''+y=0$. 得证。

13.设$y=\arctan x$.
(1)证明：y满足方程$(1+x^2)y''+2xy'=0$;
(2)求$y^{(n)}(0)$.
(1)证明：可以求得

$$y'=\frac{1}{1+x^2}, y''=\frac{-2x}{(1+x^2)^2},$$

于是

$$(1+x^2)y''=\frac{-2x}{1+x^2}, 2xy'=\frac{2x}{1+x^2};$$

因此有$(1+x^2)y''+2xy'=0$, 得证。
(2)解：易得$y'(0)=1, y''(0)=0$;
当$n\geq 3$时在方程$(1+x^2)y''+2xy'=0$两边求$n-2$次导

$$[(1+x^2)y'']^{(n-2)}+(2xy')^{(n-2)}=0,$$

整理后有

$$[(1+x^2)y^{(n)}+(n-2)2xy^{(n-1)}+\frac{(n-2)(n-3)}{2}2y^{(n-2)}]+[2xy^{(n-1)}+(n-2)2y^{(n-2)}]=0.\{???\}$$

令$x=0$, 得

$$y^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0);$$

从而

$$y^{(n)}=\begin{cases}0 & n=2m\\ (-1)^m(2m)! & n=2m+1\end{cases}.$$

第五章 微分中值定理及其应用

第一节 微分中值定理

1.证明:(1)方程$x^3-3x+c=0$(c为常数)在区间$[0,1]$内不可能有两个不同的实根;
(2)方程$x^n+px+q=0$(n为正整数,p,q为实数),当n为偶数时至多有两个实根;当n为奇数时,至多有三个实根。

证明:(1)设在区间$[0,1]$内方程$x^3-3x+c=0$有两个实根,即有$x_1<x_2\in[0,1]$使得函数

$$f(x)=x^3-3x+c$$

值为零。那么由罗尔定理可知存在$x_0\in(x_1,x_2)\subset[0,1]$,使得$f'(x_0)=0$.

但是$f'(x)=3x^2-3$在$(0,1)$内的值域为$(-3,0)$是不可能有零点的,矛盾。因此有:方程$x^3-3x+c=0$(c为常数)在区间$[0,1]$内不可能有两个不同的实根。

(2)当$n\le 2$时,方程至多只可能有两个实根,满足所证。

当$n=2k>2$时,设方程$x^n+px+q=0$有三个实根,即存在实数$x_1<x_2<x_3$使得函数

$$f(x)=x^n+px+q=0$$

成立。那么由罗尔定理可知存在$x_{01}\in(x_1,x_2),x_{02}\in(x_2,x_3)$,使得$f'(x_{01})=f'(x_{02})=0$,即

$$\begin{cases} f'(x_{01})=nx_{01}^{n-1}+p=0 \\ f'(x_{02})=nx_{02}^{n-1}+p=0 \end{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots (*),$$

再次利用罗尔定理可以知道,存在$x_0\in(x_{01},x_{02})$,使得$f''(0)=0$,即

$$f''(x_0)=n(n-1)x_0^{n-2}=0,$$

显然必有$x_0=0$,那么就有$x_{01}<0,x_{02}>0$.

那么由于$n=2k$为偶数,可以知道此时不存在满足(*)式的实数p.因此当n为偶数时方程至多有两个实根。

当$n=2k+1>2$时,设方程$x^n+px+q=0$有三个实根,即存在实数$x_1<x_2<x_3<x_4$使得函数$f(x)=x^n+px+q=0$成立。那么利用罗尔定理可知存在

$$x_{11}\in(x_1,x_2),x_{12}\in(x_2,x_3),x_{13}\in(x_3,x_4)$$

使得$f'(x_{11})=0,f'(x_{12})=0,f'(x_{13})=0$,即有

$$\begin{cases} f'(x_{11})=nx_{11}^{n-1}+p=0 \\ f'(x_{12})=nx_{12}^{n-1}+p=0, \\ f'(x_{13})=nx_{13}^{n-1}+p=0 \end{cases}$$

于是就存在$x_{21}\in(x_{11},x_{12}),x_{22}\in(x_{12},x_{13})$使得$f''(x_{21})=f''(x_{22})=0$,即

$$\begin{cases} f''(x_{21})=n(n-1)x_{21}^{n-2}=0 \\ f''(x_{22})=n(n-1)x_{22}^{n-2}=0 \end{cases}.$$

由于$n=2k+1>2$,于是此时必有$x_{21}=x_{22}=0$;但是由于$x_{21}\in(x_{11},x_{12}),x_{22}\in(x_{12},x_{13})$,可知必有$x_{21}<x_{22}$,出现了矛盾。

因此当n为奇数时,方程$x^n+px+q=0$(n为正整数,p,q为实数)至多有三个实根。

2.设$f(x)=x^m(1-x)^n$, m,n为正整数, $x\in[0,1]$, 则存在$\xi\in(0,1)$使得

$$\frac{m}{n}=\frac{\xi}{1-\xi}.$$

证明：容易知道$f(0)=f(1)=0$, 于是作为多项式函数, 必有$\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)=0$, 即

$$m\xi^{m-1}(1-\xi)^n-n\xi^m(1-\xi)^{n-1}=0,$$

由于$\xi\neq 0, 1-\xi\neq 0$,因此整理可得$m(1-\xi)=n\xi$, 即有

$$\frac{m}{n}=\frac{\xi}{1-\xi}$$

成立, 得证。

3.应用拉格朗日中值定理证明下列不等式：

(1)$|\sin x-\sin y|\le|x-y|$, $x,y\in(-\infty,+\infty)$;

证明：由拉格朗日中值定理可知函数$f(t)=\sin t$, 在区间$[x,y]$上存在$\xi\in(x,y)$使得

$$f'(\xi)=\frac{\sin x-\sin y}{x-y},$$

于是

$$\left|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}\right|\le\max|f'(t)|=\max|\cos t|=1,$$

整理后即得$|\sin x-\sin y|\le|x-y|$.

(2)$|x|\le|\tan x|$, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 等号成立当且仅当$x=0$;

证明：由拉格朗日中值定理可知函数$f(t)=\tan t$, 在区间$[0,x]$上存在$\xi\in(0,x)$使得

$$f'(\xi)=\frac{\tan x-\tan 0}{x-0}=\frac{\tan x}{x},$$

于是

$$\left|\frac{\tan x}{x}\right|\ge\min|f'(t)|=\min\left|\frac{1}{\cos^2 t}\right|=1,$$

整理后即得$|x|\le|\tan x|$.

对于函数$g(x)=\tan x-x$, 满足$g(0)=0$, 且有$g'(x)>0$, 当$x\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$; 即当$x\neq 0$时必有$|x|<|\tan x|$成立。

(3)$e^x > 1+x, x\neq 0$;

证明：当$x>0$时，由拉格朗日中值定理可知函数$f(t)=e^t$在区间$[0,x]$上，存在$\xi\in(0,x)$使得

$f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$，即$f'(\xi)=\dfrac{e^x-1}{x}$；于是有

$$\frac{e^x-1}{x}=f'(\xi)=e^{\xi}>e^0=1;$$

整理即得$e^x>1+x$.

当$x<0$时，由拉格朗日中值定理可知函数$f(t)=e^t$在区间$[x,0]$上，存在$\xi\in(0,x)$使得

$f'(\xi)=\dfrac{f(0)-f(x)}{0-x}$，即$f'(\xi)=\dfrac{1-e^x}{-x}$；于是有

$$\frac{1-e^x}{-x}=f'(\xi)=e^{\xi}>e^0=1;$$

整理即得$e^x>1+x$.

综上有$e^x>1+x, x\neq 0$.

(4)$\dfrac{y-x}{y}<\ln\dfrac{y}{x}<\dfrac{y-x}{x}, 0<x<y$;

证明：由拉格朗日中值定理可知函数$f(t)=\ln t$在区间$[x,y]$上有$\xi\in(x,y)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x},$$

即有$\dfrac{1}{\xi}=\dfrac{\ln y-\ln x}{y-x}$，于是有

$$\min_{x<t<y}\frac{1}{t}<\frac{\ln y-\ln x}{y-x}<\max_{x<t<y}\frac{1}{t},$$

故有$\dfrac{1}{y}<\dfrac{\ln y-\ln x}{y-x}<\dfrac{1}{x}$，整理即得

$$\frac{y-x}{y}<\ln\frac{y}{x}<\frac{y-x}{x}.$$

(5) $\dfrac{x}{1+x^2}<\arctan x<x, x>0.$

证明：由拉格朗日中值定理可知函数$f(t)=\arctan t$在区间$[0,x]$上有$\xi\in(0,x)$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0},$$

即有$\dfrac{1}{1+\xi^2}=\dfrac{\arctan x}{x}$,于是有

$$\min_{0<t<x}\frac{1}{1+t^2}<\frac{\arctan x}{x}<\max_{0<t<x}\frac{1}{1+t^2},$$

故有$\dfrac{1}{1+x^2}<\dfrac{\arctan x}{x}<\dfrac{1}{1+0^2}$,整理即得

$$\frac{x}{1+x^2}<\arctan x<x.$$

4.设函数在点a具有连续二阶导数, 证明：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a).$$

证明：$f''(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(a+h)-f'(a)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}.$$

因此有$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a).$

5.设$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=a$,求证：任意$T>0$, 有

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+t)-f(x)]=Ta.$$

证明：在区间$[x,x+T]$上有$\xi\in(x,x+T)$使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x+T)-f(x)}{T},$$

在此式两边对x取极限可得

$$\lim_{x\to+\infty}f'(\xi)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{T}.$$

由于$\xi>x$,即有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{T}=\lim_{\xi\to+\infty}f'(\xi)=a.$$

整理即得$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+t)-f(x)]=Ta.$

6.设函数$f(x)$在$[a,b]$可导, 其中$a\geq 0$, 证明：存在$\xi\in(a,b)$, 使得

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

证明：构造函数

$$F(x)=x^2[f(b)-f(a)]-(b^2-a^2)f(x),$$

易知$F(a)=a^2f(b)-b^2f(a)=F(b)$.

于是由罗尔定理可知存在$\xi\in(a,b)$,使得$F'(\xi)=0$,即

$$F'(\xi)=2\xi[f(b)-f(a)]-(b^2-a^2)f'(\xi)=0;$$

整理即得$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$.

7.设$f(x)$在$(a,+\infty)$上可导, 且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 求证：存在$\xi\in(a,+\infty)$, 使得$f'(\xi)=0$.

证明：取$b_0>\max(a,0)$,构造函数

$$F(t)=\begin{cases}A & t=b_0\\ f(\dfrac{(b_0-a)t}{b_0-t}) & t\in[a,b_0)\end{cases}.$$

可以知道函数$F(t)$在区间$[a,b_0]$上连续, 且满足$F(a)=F(b_0)=A$.那么由罗尔定理可知存在$\xi_t\in(a,b_0)$,使得$F'(\xi_t)=0$,即

$$F'(\xi_t)=\frac{(b_0-a)(b_0-\xi_t)+(b_0-a)\xi_t}{(b_0-\xi_t)^2}f'(\frac{(b_0-a)\xi_t}{b_0-\xi_t})=0,$$

整理得

$$\frac{(b_0-a)b_0}{(b_0-\xi_t)^2}f'(\frac{(b_0-a)\xi_t}{b_0-\xi_t})=0,$$

由$b_0>\max(a,0)$知$\dfrac{(b_0-a)b_0}{(b_0-\xi_t)^2}>0$, 于是

$$f'(\frac{(b_0-a)\xi_t}{b_0-\xi_t})=0.$$

取$\xi=\dfrac{(b_0-a)\xi_t}{b_0-\xi_t}$, 易知$\xi\in(a,+\infty)$,即为所求。

8.设$f(x)$可导, 求证:$f(x)$的两个零点之间一定有$f(x)+f'(x)$的零点。

证明：设$x_1<x_2$是函数$f(x)$的两个零点。构造函数

$$F(x)=f(x)e^x,$$

易知x_1,x_2也是函数$F(x)$的两个零点。于是由罗尔定理可以知道, 存在$\xi\in(x_1,x_2)$, 使得

$$F'(\xi)=e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)=0.$$

于是$e^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)]=0$,由于必有$e^{\xi}\neq 0$,因此$f(\xi)+f'(\xi)=0$.因此在$f(x)$的两个零点之间一定有$f(x)+f'(x)$的零点。

9.设函数$f(x)$在x_0点附近连续,除x_0外可导,且$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=A$,求证:$f'(x_0)$存在,且$f'(x_0)=A$.

证明:根据拉格朗日中值定理可知存在$\theta\in(0,1)$使得

$$f'(x_0+\theta\Delta x)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

我们在此式两边令$\Delta x\to 0$取极限可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f'(x_0+\theta\Delta x),$$

由于$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$,而$\lim\limits_{\Delta x\to 0} f'(x_0+\theta\Delta x)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=A$,于是有

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0} f'(x)=A.$$

即$f'(x_0)$存在,且$f'(x_0)=A$.

10.若$f(x)$在$[a,b]$上可导,且$f'(a)\neq f'(b)$,k为介于$f'(a),f'(b)$之间的任一实数,则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使得$f'(\xi)=k$.

证明:构造函数$g(x)=f(x)-kx$.显然函数$g(x)$在$[a,b]$上可导,且

$$g'(a)=f'(a)-k,g'(b)=f'(b)-k,$$

显然$f'(a)-k,f'(b)-k$必是一正一负。

不妨设$g'(a)=f'(a)-k=A>0,g'(b)=f'(b)-k=-B<0$.于是

$$\lim_{x\to a^+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=A>0,$$

$$\lim_{x\to b^-}\frac{g(x)-g(b)}{x-b}=-B<0.$$

那么由极限的保号性可知$\exists\delta>0$,当$x\in(a,a+\delta)$时有$\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}>\dfrac{A}{2}>0$;当$x\in(b-\delta,b)$时有$\dfrac{g(x)-g(b)}{x-b}<\dfrac{-B}{2}<0$.于是可得$g(a+\dfrac{\delta}{2})>g(a),g(b+\dfrac{\delta}{2})>g(b)$;那么我们可以知道在区间$[a+\dfrac{\delta}{2},b+\dfrac{\delta}{2}]$上必存在函数$g(x)$的一个极大值点$\xi$.于是有$g'(\xi)=0$,即$f'(\xi)-k=0$.

于是存在一点$\xi\in(a,b)$,使得$f'(\xi)=k$.

11.设函数$f(x)$在区间(a,b)内可导，且$f'(x)$单调，证明：$f'(x)$在(a,b)连续。

证明：不妨设$f'(x)$在区间(a,b)内单调上升。

从而对(a,b)内任意一点x_0，$f'(x)$在(a,x_0)内以$f'(x_0)$为上界，在(x_0,b)内以$f'(x_0)$为下界；那么由单调有界原理可以知道极限$\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$存在。

我们知道导函数不可能有第一类间断点，于是此时必有

$$\lim_{x\to x_0^+} f'(x)=\lim_{x\to x_0^-} f'(x)=f'(x_0),$$

即导函数在x_0点连续。由x_0点的任意性可以知道函数$f'(x)$在(a,b)连续。

*********************导函数没有第一类间断点*****************************

设$f(x)$在区间(a,b)上处处可导，证明在(a,b)的点或是$f'(x)$的连续点，或是$f'(x)$的第二类间断点。

证明：由于$f(x)$在区间(a,b)上处处可导，那么对于$\forall x_0\in(a,b)$，有

$$\begin{aligned}
f'(x_0)&=f_+'(x_0)\\
&=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\
&\overset{\text{拉格朗日中值定理}}{=}\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(\xi)(x-x_0)}{x-x_0}\\
&=\lim_{x\to x_0^+} f'(\xi)\\
&=\lim_{\xi\to x_0^+} f'(\xi)=\lim_{x\to x_0^+} f'(x);
\end{aligned}$$

其中$x_0<\xi<x$.

于是$f'(x)$在x_0处有右极限时，必有$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$.

同理可得若$f'(x)$在x_0处有左极限时，必有$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$.因此在区间$(a,b)$上任意一点处,除非至少有一侧$f'(x)$无极限，不然$f'(x)$在此处连续。

12.若函数$f(x),g(x),h(x)$在$[a,b]$连续, 在(a,b)可导, 证明：存在$\xi\in(a,b)$使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix}=0.$$

再由此导出拉格朗日中值定理和柯西中值定理。

证明：取

$$D(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix},$$

验证即知有$D(a)=D(b)=0,$ 又由于函数$f(x),g(x),h(x)$在$[a,b]$连续, 因此函数$D(x)$在$[a,b]$上也连续。那么由罗尔定理可知道存在$\xi\in(a,b)$使得$D'(\xi)=0.$可以求得

$$D'(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \end{vmatrix},$$

于是存在$\xi\in(a,b)$使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix}=0.$$

取$g(x)=x,h(x)=1,$于是存在$\xi\in(a,b)$使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \\ f'(\xi) & 1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

整理即得$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.$

取$h(x)=1,$于是存在$\xi\in(a,b)$使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \\ f'(\xi) & g'(\xi) & 0 \end{vmatrix}=0,$$

整理即得$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$

13.设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续, 且$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$, 证明：$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$取到它的最小值。

证明：首先选定一个闭区间$[-X_0,+X_0]$, 我们可以找见$f(x)$在这个闭区间上的最大值

$$f(x_0),(x_0\in[-X_0,+X_0]).$$

由于$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$, 于是对于$G=\max(1,f(x_0))>0,\exists X>0$, 当$|x|>X$时, 有$f(x)>G$.那么可知对于$\forall x\in(-\infty,-X)\bigcup(X,+\infty)$, 总有$f(x)>f(x_0)$.

可以肯定必有$[-X_0,+X_0]\subset[-X,+X]$.显然我们可以找见$f(x)$在闭区间$[-X,+X]$的最小值点, 即有$\xi\in[-X,+X]$, 使得对于$\forall x\in[-X,+X]$有$f(x)\ge f(\xi)$, 且有$f(\xi)<f(x_0)$.

综上我们可以说我们找见了一个点$\xi\in(-\infty,+\infty)$, 对于$\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 有$f(x)\ge f(\xi)$.因此$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$取到它的最小值。

14.设$f(x)$在$[a,b)$连续, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=B$.

(1)若存在$x_1\in[a,b)$, 使得$f(x_1)>B$, 则$f(x)$在$[a,b)$上达到最大值;

(2)如果存在$x_1\in[a,b)$, 使得$f(x_1)=B$, 能否断言$f(x)$在$[a,b)$上达到最大值？

证明:(1)构造函数

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & x\in[a,b) \\ B & x=b \end{cases},$$

那么显然有$\lim\limits_{x\to b^-} g(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=B=g(b)$, 于是$g(x)$在$b$点连续; 又因为$f(x)$在$[a,b)$连续, 于是可知道$g(x)$在闭区间$[a,b]$上连续。于是$g(x)$可以在$[a,b]$取到最大值$g(\xi)$.

由于存在点$x_1\in[a,b)$使得$g(x_1)=f(x_1)>B=g(b)$, 于是b点不可能是$g(x)$的最大值点, 即有$\xi\in[a,b)$.

于是对于$\forall x\in[a,b)$, 总有$f(x)=g(x)\le g(\xi)=f(\xi)$, 因此说$f(x)$在$[a,b)$上达到最大值$f(\xi)$.

(2).可以: 如果$f(x)$在$[a,b)$上的最大值为B, 那么x_1点即为所求;

否则必存在$x_0\in[a,b)$使得$f(x_0)>0$, 问题化为(1).

15.设$f(x)$在$[a,+\infty)$有界, $f'(x)$存在, 且$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=b$.求证$b=0$.

证明：使用反证法, 不妨设$b>0$.即$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=b>0$.那么我们利用极限的保号性可以知道$\exists A$, 当$x>A$时, $f'(x)>\dfrac{b}{2}>0$.

取区间$[A,x]$, 由拉格朗日中值定理可知存在ξ, 满足$A<\xi<x$, 使得$f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(A)}{x-A}$, 即有$f(x)=f(A)+f'(\xi)(x-A)>f(A)+\dfrac{b}{2}(x-A)$.那么易证得$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, 这与$f(x)$有界是矛盾的。

15.设$f(x)$在$[a,+\infty)$有界,$f'(x)$存在,且$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=b$.求证$b=0$.

证明：若$b\neq 0$,取$\varepsilon=\frac{|b|}{8}$,此时由于$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=b$,即对$\varepsilon=\frac{|b|}{8}>0,\exists X>0$,当$x>X$时,有

$$\left|f'(x)-b\right|<\varepsilon=\frac{|b|}{8};$$

又因为$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$,即对$\varepsilon=\frac{|b|}{8}>0$,当$\exists\delta>0$,当$0<\Delta x<\delta$时,有

$$\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x)\right|<\varepsilon=\frac{|b|}{8}.$$

我们取$x_{n-1}=X+\frac{n\delta}{2},(n=1,2,\cdots)$.那么此时有

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{\frac{\delta}{2}}-b\right|&=\left|\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{\frac{\delta}{2}}-f'(x_{n-1})+f'(x_{n-1})-b\right|\\&\leq\left|\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{\frac{\delta}{2}}-f'(x_{n-1})\right|+\left|f'(x_{n-1})-b\right|\\&<2\frac{|b|}{8}=\frac{|b|}{4}.\end{aligned}$$

即$b-\frac{|b|}{4}<\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{\frac{\delta}{2}}<b+\frac{|b|}{4}$,整理可得

$$f(x_{n-1})+(b-\frac{|b|}{4})\frac{\delta}{2}<f(x_n)<f(x_{n-1})+\frac{\delta}{2}(b+\frac{|b|}{4}),$$

那么递推可得

$$f(x_0)+(b-\frac{|b|}{4})\frac{n\delta}{2}<f(x_n)<f(x_0)+\frac{n\delta}{2}(b+\frac{|b|}{4}).$$

若$b>0$,那么可知$\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_0)+(b-\frac{|b|}{4})\frac{n\delta}{2}]=\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_0)+\frac{3|b|}{4}\frac{n\delta}{2}]=+\infty$;于是对$\exists G>0,\exists N$,当$n>N$时,有$f(x_n)>f(x_0)+(b-\frac{|b|}{4})\frac{n\delta}{2}>G$.这与$f(x)$有界矛盾。

若$b<0$,那么可知$\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_0)+\frac{n\delta}{2}(b+\frac{|b|}{4})]=\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_0)-\frac{3|b|}{4}\frac{n\delta}{2}]=-\infty$;于是对$\exists G>0,\exists N$,当$n>N$时,有$f(x_n)<f(x_0)+(b-\frac{|b|}{4})\frac{n\delta}{2}<-G$.这与$f(x)$有界矛盾。

因此必有$b=0$.

16.求证：$\arcsin x + \arccos x \equiv \dfrac{\pi}{2}$.

证明：令$f(x) = \arcsin x + \arccos x$,由于

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

于是可知$f(x) = c$,c为常数。

又因为$f(0) = 0 + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$,于是可知$f(x) = \arcsin x + \arccos x \equiv \dfrac{\pi}{2}$,得证。

第二节 洛比达法则

1.求下列待定性的极限：

(1).$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{\sin bx} \overset{\text{洛比达法则}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{b\cos^2 ax\cos bx} = \dfrac{b}{a}.$

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^3\sin x} \overset{\text{洛比达法则}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x^2}{3x^2\sin x + x^3\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2}\dfrac{2x}{3\sin x + x\cos x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3\sin x + x\cos x} \overset{\text{洛比达法则}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{3\cos x + \cos x - x\sin x} = \dfrac{1}{2}.$

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\cos x - 1} \overset{\text{洛比达法则}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}-1}{-\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{(1+x)\sin x} \overset{\text{洛比达法则}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin x + (1+x)\cos x} = 1.$

(4)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x - \sin x} \overset{\text{洛比达法则}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x - \cos^3 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{\cos^2 x} = 2.$

(5)$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1 - x}{x(e^x-1)} \overset{\text{洛比达法则}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \overset{\text{洛比达法则}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2e^x + xe^x} = \dfrac{1}{2}.$

(6)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx} \overset{\text{洛比达法则}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-a\sin ax}{\cos ax}\dfrac{-\cos bx}{b\sin bx} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^2}{b^2}\dfrac{\cos bx}{\cos ax}\dfrac{bx\sin ax}{ax\sin bx} = \dfrac{a^2}{b^2}.$

(7)$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x - 6}{\sec x + 5} \overset{\text{洛比达法则}}{=} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sin x} = 1.$

(8)$\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} \overset{\text{洛比达法则}}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x + \dfrac{x-1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\ln x + x - 1} \overset{\text{洛比达法则}}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\ln x + 2} = \dfrac{1}{2}.$

$$(9).\lim_{x\to\pi}(\pi-x)\tan\frac{x}{2}=\lim_{x\to\pi}\frac{\pi-x}{\cot\frac{x}{2}}\overset{洛比达法则}{=}\lim_{x\to\pi}\frac{-1}{\frac{-1}{2\sin\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to\pi}2\sin\frac{x}{2}=2.$$

$$(10).\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to1}e^{\ln(x^{\frac{1}{1-x}})}=\lim_{x\to1}e^{\frac{\ln x}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}}\overset{洛比达法则}{=}e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}}=e^{-1}.$$

$$(11).\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{e^{ax}}\overset{洛比达法则}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{bx^{b-1}}{ae^{ax}}\overset{洛比达法则}{=}\cdots\overset{洛比达法则}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{b(b-1)(b-2)\cdots(b-[b])}{a^{[b]+1}x^{-b+[b]+1}e^{ax}}=0.$$

$$(12).\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\sin\frac{1}{x}}\overset{洛比达法则}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)\cos\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\frac{1}{x^2}+1)\cos\frac{1}{x}}=1.$$

$$(13).\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^c x}{x^b}\overset{洛比达法则}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{c\ln^{c-1}x}{bx^b}\overset{洛比达法则}{=}\cdots\overset{洛比达法则}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{c(c-1)(c-2)\cdots(c-[c])}{b^{[c]+1}x^b\ln^{[c]+1-c}x}=0.$$

$$(14)\lim_{x\to0^+}x^b\ln^c x,(b,c>0);$$

$$\overset{x=\frac{1}{t}}{=}\lim_{t\to+\infty}(\frac{1}{t})^b\ln^c\frac{1}{t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}(-1)^c\frac{\ln^c t}{t^b}=0.$$

$$(15)\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x};$$

$$\overset{洛比达法则}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{-2\cos x}{-3\sin 3x}$$

$$=\frac{2*\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$(16)\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\cot x};$$

$$\overset{洛比达法则}{=}-\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2 x}{x}$$

$$=-\lim_{x\to0^+}\sin x=0.$$

$$(17)\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x};$$

解：令$y=(1+x)^{\frac{1}{x}},\ln y=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，于是$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$.

因此有$y'=\dfrac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.于是

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}\overset{洛比达法则}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}(1+x)^{\frac{1}{x}}}{1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}e$$

$$\overset{洛比达法则}{=}e\lim_{x\to0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x(1+x)+x^2}\overset{洛比达法则}{=}e\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{1+x}}{2+6x}=-\frac{e}{2}.$$

(18) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln(x^{\sin x})} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x^{\sin x})} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x} \overset{x=\frac{1}{t}}{=} e^{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{-\ln t}{t}} = e^0 = 1.$

(19) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln\dfrac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln[(\ln\frac{1}{x})^x]} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln(\ln\frac{1}{x})} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(\ln\frac{1}{x})} \overset{x=\frac{1}{t}}{=} e^{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{-\ln\ln t}{t}} = e^0 = 1.$

(20) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\tan x}{x})^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln[(\frac{\tan x}{x})^{\frac{1}{x^2}}]} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\frac{\tan x}{x})}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\tan x-\ln x}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{x}}{2x}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{2x^2\sin x\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x^2\sin 2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{2x^3}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{6x^2}} = e^{\frac{1}{3}}.$$

(21) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\cos x - 2x}{4x^3}$

$$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos 2x - 2}{12x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-4\sin^2 x}{12x^2} = -\frac{1}{3}.$$

(22) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x \overset{x=\frac{1}{t}}{=} \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{-\ln t}{t} = 0.$

2.对函数$f(x)$在$[0,x]$上应用拉格朗日中值定理有$f(x)-f(0)=f'(\theta x)x$, $\theta\in(0,1)$. 试证对下列函数有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta = \dfrac{1}{2}$:

(1) $f(x)=\ln(1+x)$; (2) $f(x)=e^x$.

证明：只要证得 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{f'(\frac{1}{2}x)x} = 1$即可。

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{f'(\frac{1}{2}x)x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{\frac{1}{1+\frac{x}{2}}x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(2+x)\ln(1+x)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)+\frac{2+x}{1+x}}{2} = 1;$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{f'(\frac{1}{2}x)x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{xe^{\frac{x}{2}}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{e^{\frac{x}{2}}+\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{2}} = 1.$

3.设$f(x)$二阶可导,求证：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}=f''(x).$$

证明：当$h\to 0$时,分子$f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)\to 0$,分母$h^2\to 0$,因此我们可以对$h$使用洛比达法则：

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{2f'(x+2h)-2f'(x+h)}{2h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{4f''(x+2h)-2f''(x+h)}{2}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{2f''(x+h)}{2}=f''(x).\end{aligned}$$

于是有$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}=f''(x)$.

4.试说明下列函数不能用洛比达法则求极限：

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$;

答：对函数$\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$的分子分母分别求导之后得$\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$,这个函数在$x\to 0$的时候极限是不存在的;但是原函数的极限是存在的:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}x\sin\frac{1}{x}=0$.

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\cos x}$;

答：对函数$\frac{x+\sin x}{x-\cos x}$的分子分母分别求导之后得$\frac{1+\cos x}{1+\sin x}$,这个函数在$x\to\infty$时是没有极限的;而原函数是有极限的:$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\cos x}=1$.

(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+\sin 2x}{(2x+\sin x)e^{\sin x}}$;

答：这是因为函数$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+\sin 2x}{(2x+\sin x)e^{\sin x}}$本身极限就不存在。但是函数有聚点$e$和$e^{-1}$.

(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2-1)\sin x}{\ln(1+\sin\frac{\pi}{2}x)}$.

答：对函数$\dfrac{(x^2-1)\sin x}{\ln(1+\sin\frac{\pi}{2}x)}$的分子分母分别求导之后可得$\dfrac{2x\sin x+(x^2-1)\cos x}{\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+\sin\frac{\pi}{2}x}\cos\frac{\pi}{2}x}$,这个函数在$x\to1$时候是没有极限的, 但是原函数是有极限的: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2-1)\sin x}{\ln(1+\sin\frac{\pi}{2}x)}=0$.

第三节 函数的升降、凸性和函数作图

1.应用函数的单调性证明下列不等式：

(1) $\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x,\ x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$;

证明：取函数$y=\dfrac{\sin x}{x}$,可求得$y'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$; 取函数$z=x\cos x-\sin x$, 可以知道$z(0)=0$, $z'=-x\sin x$.

由于在区间$(0,\dfrac{\pi}{2})$上$z'<0$恒成立, 于是函数$z=x\cos x-\sin x$在区间$(0,\dfrac{\pi}{2})$上单调递减, 于是有$z=x\cos x-\sin x<z(0)=0$成立; 那么y'在区间$(0,\dfrac{\pi}{2})$上小于零成立, 因此函数$y=\dfrac{\sin x}{x}$在此区间上单调递减。

因此有$\lim\limits_{x\to0}y(0)>y(x)>y(\dfrac{\pi}{2})$, 即$1>\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{2}{\pi}$, 整理即得$\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x,\ x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

(2) $x<\sin x<x-\dfrac{x^3}{6},\ x<0$;

证明：取函数$y=\sin x-x$,可求得$y'=\cos-1$; 在区间$(-\infty,0)$上可以知道恒有$y'=\cos-1<0$, 于是函数$y=\sin x-x$单调递减,因此有$y=\sin x-x<y(0)=0$, 即得$\sin x>x,(x<0)$.

取函数$z=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$,可求得$z'=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$; 那么有$z'(0)=0, z''=-\sin x+x$.由于在区间$(-\infty,0)$上恒有$z''=-\sin x+x<0$,因此$z'$满足$z'(x)<z'(0)=0$, 于是函数$z=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$单调递减, 即$z(x)<z(0)=0$, 于是有$\sin x<x-\dfrac{x^3}{6},\ x<0$.

综上可得$x<\sin x<x-\dfrac{x^3}{6},\ x<0$.

$(3) x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x,\ x>0;$

证明：取函数$y=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$, 可求得$y'=\frac{1}{1+x}-1+x$; 那么有$y''=1-\frac{1}{(1+x)^2}$, 由于在区间$(0,+\infty)$上恒有$y''>0$, 于是函数$y'=\frac{1}{1+x}-1+x>y'(0)=0$; 那么函数$y$在这个区间上是个增函数, 于是有$y=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}>y(0)=0$, 即$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x), x\in(0,+\infty)$.

取函数$z=x-\ln(1+x)$, 可求得$z'=1-\frac{1}{1+x}$; 那么在区间$(0,+\infty)$上恒有$z'>0$, 于是函数z为增函数,即有$z=x-\ln(1+x)>z(0)=0$; 于是$\ln(1+x)<x, x\in(0,+\infty)$.

综上可得$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x,\ x>0$.

$(4) \tan x>x+\frac{x^3}{3}, x\in(0,\frac{\pi}{2})$;

证明：取函数$y=\tan x-x-\frac{x^3}{3}$, 可求得

$$y'=\frac{1}{\cos^2 x}-1-x^2, y'(0)=0;$$
$$y''=\frac{2\sin x\cos x}{\cos^4 x}-2x, y''(0)=0;$$
$$y'''=\frac{2(1-\cos^4 x)+4\sin^2 x}{\cos^4 x}>0.$$

那么有$y''>y''(0)=0, y'>y'(0)=0, y=\tan x-x-\frac{x^3}{3}>y(0)=0$, 因此可得

$$\tan x>x+\frac{x^3}{3}, x\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

$(5) 2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}, x>1.$

证明：取$y=2\sqrt{x}-3+\frac{1}{x}$, 那么有$y'=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}>0$在区间$(1,+\infty)$上恒成立, 于是在此区间上恒有$y=2\sqrt{x}-3+\frac{1}{x}>y(1)=0$.即得$2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}, x>1$.

2.确定下列函数的单调区间：

$(1) y=x^3-6x;$

解：令$y'=3x^2-6>0$, 可以解得$x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$.

那么原函数的单调递增区间为$(-\infty,-\sqrt{2})$和$(\sqrt{2},+\infty)$, 单调递减区间为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(2) $y=\sqrt{2x-x^2}$;

解：可以求得函数的定义域为$[0,2]$.

令$y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}>0$, 可以解得$x\in(0,1)$. 那么原函数的单调递增区间为$(0,1)$, 单调递减区间为$(1,2)$.

(3) $y=2x^2-\ln x$;

解：可以求得函数的定义域为$(0,+\infty)$. 令$y'=4x-\dfrac{1}{x}>0$, 解得$x\in(0.5,+\infty)$.

于是原函数的单调递增区间为$(0.5,+\infty)$, 单调递减区间为$(0,0.5)$.

(4) $y=\dfrac{x^2-1}{x}$;

解：可以求得函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 由于$y'=\dfrac{x^2+1}{x^2}>0$恒成立, 于是原函数的单调递增区间为$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$, 没有单调递减区间为.

(6) $y=x^n e^{-x}, n>0, x\geq 0$.

解：令$y'=\dfrac{nx^{n-1}e^x-e^x x^n}{e^{2x}}=\dfrac{(n-x)x^{n-1}e^x}{e^{2x}}=\dfrac{(n-x)x^{n-1}}{e^x}>0$, 解得$x\in(0,n)$.

因此原函数的递增区间为$(0,n)$, 递减区间为$(n,+\infty)$.

(5) $y=2x^2-\sin x$;

解：可以求得函数的定义域为$\mathbb{R}$.

令$y'=4x-\cos x=0$, 可设这个方程的根为x_0(可以大致求得$x_0\approx 0.242675$).

由于$y''=4+\sin x>0$恒成立, 于是函数$y'=4x-\cos x=0$单调递增, 即在区间$(-\infty,x_0)$上$y'<0$成立, 在区间$(x_0,+\infty)$, $y'>0$成立。

因此原函数的递增区间为$(x_0,+\infty)$, 递减区间为$(-\infty,x_0)$.

(6) $y=x^n e^{-x}, n>0, x\geq 0$.

解：令$y'=\dfrac{nx^{n-1}e^x-e^x x^n}{e^{2x}}=\dfrac{(n-x)x^{n-1}e^x}{e^{2x}}=\dfrac{(n-x)x^{n-1}}{e^x}>0$, 解得$x\in(0,n)$.

因此原函数的递增区间为$(0,n)$, 递减区间为$(n,+\infty)$.

3.求下列函数的极值：

(1) $y=x-\ln(1+x)$;

解：容易解得函数的一阶和二阶导数分别是$y'=1-\dfrac{1}{1+x}, y''=\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

令$y'=1-\dfrac{1}{1+x}=0$, 可得$x=0$; 由于$y''(0)=1>0$, 因此$x=0$是函数$y=x-\ln(1+x)$的极小值点, 极小值为$y(0)=0$.

(2) $y = x + \frac{1}{x}$;

解：容易解得函数的一阶和二阶导数分别是 $y' = 1 - \frac{1}{x^2}, y'' = \frac{2}{x^3}$.

令 $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = 0$, 可得 $x = \pm 1$; 由于 $y''(1) = 2 > 0, y''(-1) = -2 < 0$, 因此 $x = 1$ 是函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的极小值点, 极小值为 $y(1) = 2$; $x = -1$ 是函数的极大值点, 极大值为 $y(-1) = -2$.

(3) $y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$;

解：容易解得函数的一阶和二阶导数分别是

$$y' = \frac{12-5x}{(4+5x^2)^{\frac{3}{2}}}, y'' = \frac{-5(4+5x^2)^{\frac{3}{2}} - (12-5x)15\sqrt{4+5x^2}}{(4+5x^2)^3}.$$

令 $y' = \frac{12-5x}{(4+5x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$, 可得 $x = \frac{12}{5}$; 由于 $y''(\frac{12}{5}) < 0$, 因此 $x = \frac{12}{5}$ 是函数 $y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$ 的极大值点, 极大值为 $y(\frac{12}{5}) = \frac{\sqrt{205}}{10}$.

(5) $y = 2x^3 - x^4$;

解：容易解得函数的一阶和二阶导数分别是 $y' = 6x^2 - 4x^3, y'' = 12x - 12x^2$.

令 $y' = 6x^2 - 4x^3 = 0$, 可得 $x = 0$ 或 $x = \frac{3}{2}$; 由于 $y''(0) = 0, y''(\frac{3}{2}) = -9 < 0$. 因此 $x = 0$ 是函数 $y = 2x^3 - x^4$ 的拐点; $x = \frac{3}{2}$ 是函数的极大值点, 极大值为 $y(\frac{3}{2}) = \frac{27}{16}$.

(4) $y = \frac{(\ln x)^2}{x}$;

解：容易解得函数的一阶和二阶导数分别是

$$y' = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2}, y'' = \frac{2x - 6x\ln x + 2x\ln^2 x}{x^4}.$$

令 $y' = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2} = 0$, 可得 $x = 1$ 或 $x = e^2$; 由于 $y''(1) = 2 > 0, y''(e^2) < 0$. 因此 $x = 1$ 是函数 $y = \frac{(\ln x)^2}{x}$ 的极小值点, 极小值为 $y(1) = 0$; $x = e^2$ 是函数的极大值点, 极大值为 $y(e^2) = \frac{4}{e^4}$.

(5) $y = 2x^3 - x^4$;

解：容易解得函数的一阶和二阶导数分别是 $y' = 6x^2 - 4x^3, y'' = 12x - 12x^2$.

令 $y' = 6x^2 - 4x^3 = 0$, 可得 $x = 0$ 或 $x = \frac{3}{2}$; 由于 $y''(0) = 0, y''(\frac{3}{2}) = -9 < 0$. 因此 $x = 0$ 是函数 $y = 2x^3 - x^4$ 的拐点; $x = \frac{3}{2}$ 是函数的极大值点, 极大值为 $y(\frac{3}{2}) = \frac{27}{16}$.

(6) $y=\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$;

解：容易解得函数的一阶和二阶导数分别是$y'=\frac{1-x}{1+x^2}, y''=\frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$.

令$y'=\frac{1-x}{1+x^2}=0$, 可得$x=1$; 由于$y''(1)<0$.因此$x=1$是函数$y=\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$的极大指点, 极大值为$y(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$.

4.设$f(x)=\begin{cases} x^4\sin^2\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$.

(1)证明：$x=0$是函数的极小值点;

(2)说明在$f(x)$的极小值点在$x=0$处是否满足极值的第一充分条件或第二充分条件。

证明:(1)因为当$x\neq 0$时, 总有$f(x)x^4\sin^2\frac{1}{x}>0=f(0)$, 因此$x=0$是函数的极小值点。

(2)当$x\neq 0$时,

$$f'(x)=(x^4\sin^2\frac{1}{x})'=4x^3\sin^2\frac{1}{x}-x^2\sin\frac{2}{x}=x^2(4x\sin^2\frac{1}{x}-\sin\frac{2}{x});$$

我们取

$$x_n=\frac{2}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}, y_n=\frac{2}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}(n=1,2,\cdots),$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, 从而对任意小的$\delta$, 总有$x_n, y_n\in(0,\delta)$, 但是$f(x_n)<0, f(y_n)>0$; 即在任意小的$U_+(0,\delta)$内$f'(x)$不能保持不变号, 因此$f(x)$的极小值点在$x=0$不满足极值的第一充分条件。

由于

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4\sin^2\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x^3\sin^2\frac{1}{x}=0,$$

而

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(4x\sin^2\frac{1}{x}-\sin\frac{2}{x})-0}{x}=\lim_{x\to 0}x(4x\sin^2\frac{1}{x}-\sin\frac{2}{x})=0.$$

因此$f(x)$的极小值点在$x=0$也不满足极值的第二充分条件。

5.证明：若函数$f(x)$在点x_0处有$f_+'(x_0)<0, f_-'(x_0)>0$, 则点x_0为$f(x)$的极大值点。

证明：由于$f_+'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$, 那么由极限的保号性可以知道存在$\delta_1>0$, 使得当$x\in(x_0,x_0+\delta_1)$时有$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$, 由于此时$x-x_0>0$, 因此$f(x)<f(x_0)$.

同理由于$f_-'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$, 那么由极限的保号性可以知道存在$\delta_2>0$, 使得当$x\in(x_0-\delta_2,x_0)$时有$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$, 由于此时$x-x_0<0$, 因此$f(x)<f(x_0)$.

我们取$\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, 那么当$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时, 恒有$f(x)<f(x_0)$, 因此点$x_0$为$f(x)$的极大值点。

6.设$f(x)=a\ln x+bx^2+x$在$x_1=1, x_2=2$处都取得极值, 试定出a与b的值, 并问这时候$f(x)$在x_1,x_2处是极大值还是极小值。

解：可求得$f'(x)=\dfrac{a}{x}+2bx+1$, 令

$$\begin{cases} f'(x_1)=f'(1)=a+2b+1=0 \\ f'(x_2)=f'(2)=\dfrac{a}{2}+4b+1=0 \end{cases},$$

可以解得$\begin{cases} a=-\dfrac{2}{3} \\ b=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$.

于是$f(x)=-\dfrac{2}{3}\ln x-\dfrac{1}{6}x^2+x, f''(x)=-\dfrac{a}{x^2}+2b=\dfrac{2}{3x^2}-\dfrac{1}{3}$; 那么此时有

$$f''(1)=\frac{1}{3}>0, f''(2)=-\frac{1}{6}<0.$$

因此$x_1=1$是函数的极小值点, $x_2=2$是函数的极大值点。

7.(1)求函数$f(x)=ax-\ln x$在$x>0$上的极值; (2)求方程$ax=\ln x$有两个正实根的条件。

解:(1)令$f'(x)=a-\dfrac{1}{x}=0$, 可以解得$x=\dfrac{1}{a}$. 因此当$a\le 0$时, 函数$f(x)$在$x>0$上没有极值;

当$a>0$时, 函数$f(x)$在$x>0$上有极值点$x=\dfrac{1}{a}$; 由于$f''(x)=\dfrac{1}{x^2}$, 故此时$f''(\dfrac{1}{a})>0$, 于是$f(\dfrac{1}{a})$ $=1+\ln a$是函数$f(x)$的极小值。

(2)当$a>0$时, 由于$x=\dfrac{1}{a}$是函数的极小值, 令$f(\dfrac{1}{a})=1+\ln a<0$; 由于

$$\lim_{x\to 0}f(x)=+\infty, \lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty$$

由介值定理可以知道$f(x)$有两个正实根。

于是当$0<a<\dfrac{1}{e}$时, 方程$ax=\ln x$有两个正实根。

8.设$f(x),g(x)$在实轴上连续可微,且

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} > 0,$$

求证：$f(x)=0$的两实根之间一定有$g(x)$的一根。

证明：设a,b是函数$f(x)$相邻的两个实根(那么在区间(a,b)上没有函数$f(x)$的根),则有

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f'(a) & g'(a) \end{vmatrix} = -g(a)f'(a) > 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*),$$

$$\begin{vmatrix} f(b) & g(b) \\ f'(b) & g'(b) \end{vmatrix} = -g(b)f'(b) > 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**);$$

于是必有$g(a)\neq 0, g(b)\neq 0.$

现在我们使用反证法证明$f'(a),f'(b)$异号,不妨设$f'(a)>0,f'(b)>0.$即

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a} > 0,$$

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-b} > 0;$$

那么由极限的局部保号性可以知道$\exists\delta>0$,当$0<|x-a|<\delta, 0<|x-b|<\delta$时有

$$\frac{f(x)}{x-a}>0, \frac{f(x)}{x-b}>0.$$

取$\varepsilon=\min(\frac{\delta}{2},\frac{b-a}{4})>0$,分别取$x_1=a+\varepsilon, x_2=b-\varepsilon$,则有$\frac{f(x_1)}{\varepsilon}>0, \frac{f(x_2)}{-\varepsilon}>0$,于是

$$f(x_1)>0, f(x_2)<0,$$

那么由介值定理可以知道在区间$[x_1,x_2]$上比还有$f(x)$的一个根,这与在区间(a,b)上没有函数$f(x)$的根相矛盾。

于是可知$f'(a),f'(b)$异号,那么由(*)(**)式可以知道$g(a),g(b)$也异号,则由介值定理可以知道在区间(a,b)上必有函数$g(x)$的一个根,即得证。

9.确定下列函数的凸性区间与拐点。

(1)$y=3x^2-x^3$;

解：可以求得$y'=6x-3x^2, y''=6-6x$;令$y''=6-6x\geq 0$,可以解得$x\in(-\infty,1]$.

因此$(-\infty,1)$是函数$y=3x^2-x^3$的下凸区间,$(1,+\infty)$是函数的上凸区间,$x=1$是函数的拐点。

(2)$y=x^2+\frac{1}{x}$;

解：可以求得$y'=2x-\frac{1}{x^2}, y''=2+\frac{2}{x^3}$;令$y''=2+\frac{2}{x^3}\geq 0$,可以解得$x\in(-\infty,-1]\bigcup(0,+\infty)$.

因此$(-\infty,-1)$和$(0,+\infty)$是函数$y=x^2+\frac{1}{x}$的下凸区间,$(-1,0)$是函数的上凸区间,$x=-1$是函数的拐点。

(3) $y=\ln(1+x^2)$;

解：可以求得$y'=\dfrac{2x}{1+x^2}, y''=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$; 令$y''=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\geq 0$, 可以解得$x\in[-1,1]$.

因此$(-1,1)$是函数$y=\ln(1+x^2)$的下凸区间,$(-\infty,-1)$和$(1,+\infty)$是函数的上凸区间,$x=\pm 1$是函数的拐点。

(4) $y=\sqrt{1+x^2}$;

解：可以求得$y'=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, y''=\dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; 令$y''=\dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\geq 0$, 可以解得$x\in \mathrm{R}$.

因此$(-\infty,+\infty)$是函数$y=\sqrt{1+x^2}$的下凸区间。

10.证明曲线$y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$有位于同一条直线上的三个拐点。

证明：可以求得

$$y'=\frac{x^2+1-2x(x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2},$$

$$y''=\frac{(2x^3+6x^2-6x-2)(x^2+1)}{(x^2+1)^4};$$

令$y''=0$可以解得

$$x_1=1, x_2=-2+\sqrt{3}, x_3=-2-\sqrt{3},$$

对应的有

$$y_1=\frac{-1+\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}, y_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}, y_3=1.$$

于是我们得到了曲线$y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$的三个拐点。

点$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$确定的直线为

$$\frac{y-\dfrac{-1+\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}}{x+2-\sqrt{3}}=\frac{y-\dfrac{-1-\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}}{x+2+\sqrt{3}},$$

将点$(1,1)$代入验证可知等式成立,即这三点位于同一条直线上; 因此曲线有位于同一条直线上的三个拐点。

11.问a,b为何值时, 点$(1,3)$为曲线$y=ax^3+bx^2$的拐点？

解：可以求得$y'=3ax^2+2bx, y''=6ax+2b$;由题意可得

$$\begin{cases} y(1)=a+b=3 \\ y''(1)=6a+2b=0 \end{cases}$$

解得$\begin{cases} a=-\dfrac{3}{2} \\ b=\dfrac{9}{2} \end{cases}$,即此时有点$(1,3)$为曲线$y=ax^3+bx^2$的拐点。

12.证明:(1)若$f(x)$为下凸函数,λ为非负实数,则$\lambda f(x)$为下凸函数;

(2)若$f(x), g(x)$均为下凸函数,则$f(x)+g(x)$为下凸函数;

(3)若$f(x)$为区间I上的下凸函数,$g(x)$为区间J上的下凸递增函数,$f(I)\subset J$,则$g\circ f(x)$为I上的下凸函数。

证明:(1)因为$f(x)$为下凸函数,所以对定义域内任意两点x_1, x_2及任意的$\mu\in(0,1)$,有

$$f(\mu x_1+(1-\mu)x_2)\le \mu f(x_1)+(1-\mu)f(x_2),$$

那么在上式两边乘上非负实数λ可得

$$\lambda f(\mu x_1+(1-\mu)x_2)\le \mu\lambda f(x_1)+(1-\mu)\lambda f(x_2).$$

依定义可知道$\lambda f(x)$为下凸函数。

(2)因为$f(x), g(x)$均为下凸函数,那么在它们的区间上的任意两点x_1, x_2及任意的$\mu\in(0,1)$有

$$f(\mu x_1+(1-\mu)x_2)\le \mu f(x_1)+(1-\mu)f(x_2),$$
$$g(\mu x_1+(1-\mu)x_2)\le \mu g(x_1)+(1-\mu)g(x_2);$$

将这两个不等式左右相加可得

$$f(\mu x_1+(1-\mu)x_2)+g(\mu x_1+(1-\mu)x_2)\le \mu f(x_1)+(1-\mu)f(x_2)+\mu g(x_1)+(1-\mu)g(x_2),$$

整理后有

$$f(\mu x_1+(1-\mu)x_2)+g(\mu x_1+(1-\mu)x_2)\le \mu[f(x_1)+g(x_1)]+(1-\mu)[f(x_2)+g(x_2)].$$

依定义可知道$f(x)+g(x)$为下凸函数。

(3)因为$f(x)$为I上的下凸函数,所以对I内任意两点x_1, x_2及任意的$\mu\in(0,1)$,有

$$f(\mu x_1+(1-\mu)x_2)\le \mu f(x_1)+(1-\mu)f(x_2),$$

又因为$g(x)$为J上的递增函数,而且$f(I)\subset J$, $\mu f(x_1)+(1-\mu)f(x_2)\in f(I)$,因此

$$g(f(\mu x_1+(1-\mu)x_2))\le g(\mu f(x_1)+(1-\mu)f(x_2)).$$

而$g(x)$为J上的凸函数,于是有

$$g(\mu f(x_1)+(1-\mu)f(x_2))\le \mu g(f(x_1))+(1-\mu)g(f(x_2)),$$

于是有

$$g(f(\mu x_1+(1-\mu)x_2))\le \mu g(f(x_1))+(1-\mu)g(f(x_2)).$$

依定义可知道$g\circ f(x)$为下凸函数。

13.设$f(x)$为区间I上严格下凸函数, 证明：若$x_0\in I$为$f(x)$的极小值点, 则x_0为$f(x)$在I上唯一的极小值点。

证明：假设$f(x)$在I上还有另一极小值点x_1, 不妨设$x_0<x_1$.由定义, 存在$U(x_0)$及$U(x_1)$, 使得当$x\in U(x_0)$时,$f(x)\ge f(x_0)$;当$x\in U(x_1)$时,$f(x)\ge f(x_1)$.

对任意$x\in(x_0,x_1)$,取$\lambda=\dfrac{x_1-x}{x_1-x_0}$,则$0<\lambda<1, x=\lambda x_0+(1-\lambda)x_1$.据$f(x)$为$I$上的严格下凸函数,有

$$f(x)<\lambda f(x_0)+(1-\lambda)f(x_1).$$

若$f(x_0)\le f(x_1)$,则

$$f(x)<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_1)=f(x_1);$$

特别的当$x\in U(x_1)\bigcap(x_0,x_1)$时,$f(x)<f(x_1)$.这与$x_1$点为$f(x)$的极小值点相矛盾。

若$f(x_0)>f(x_1)$,则

$$f(x)<\lambda f(x_0)+(1-\lambda)f(x_0)=f(x_0);$$

特别的当$x\in U(x_0)\bigcap(x_0,x_1)$时,$f(x)<f(x_0)$.这与$x_0$点为$f(x)$的极小值点相矛盾。

因此x_0为$f(x)$在I上唯一的极小值点。

14.应用下凸函数概念证明如下不等式：

(1)对任意实数a,b,有

$$e^{\frac{a+b}{2}}\le\frac{1}{2}(e^a+e^b);$$

(2)对任意非负实数a,b,有

$$2\arctan\frac{a+b}{2}\ge\arctan a+\arctan b.$$

证明:(1)设$f(x)=e^x$.由于$f''(x)=e^x>0$,故$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上位下凸函数, 对任意$a,b\in(-\infty,+\infty)$,取$\lambda=\dfrac{1}{2}$有$f(\dfrac{a+b}{2})\le\dfrac{1}{2}(f(a)+f(b))$,即

$$e^{\frac{a+b}{2}}\le\frac{1}{2}(e^a+e^b).$$

(2)设$f(x)=\arctan x$.则$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}, f''(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$.那么对于任意非负实数$a,b$, 有$f''(x)\le 0$,于是对于任意非负实数$a,b\in(0,+\infty)$有$f(\dfrac{a+b}{2})\ge\dfrac{1}{2}(f(a)+f(b))$,即

$$2\arctan\frac{a+b}{2}\ge\arctan a+\arctan b.$$

15.证明：若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上恒有$f''(x)\ge 0$, 则在$[a,b]$内任意两点x_1, x_2, 都有

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\ge f(\frac{x_1+x_2}{2}).$$

证明：不妨设$[a,b]$内任意两点$x_1<x_2$.

由于函数$f(x)$在区间$[a,b]$上恒有$f''(x)\ge 0$, 那么在区间(a,b)上也满足$f''(x)\ge 0$, 于是在区间(a,b)上函数为下凸函数, 因此对于任意两点$x_1, x_2\in(a,b)$, 总有

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\ge f(\frac{x_1+x_2}{2})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*).$$

对于(*)式,我们任意取定x_2, 在不等式两边令x_1趋近于a求极限, 即

$$\frac{\lim\limits_{x_1\to a} f(x_1)+f(x_2)}{2}\ge\lim_{x_1\to a} f(\frac{x_1+x_2}{2}).$$

由于函数的连续性可知$\lim\limits_{x_1\to a} f(x_1)=f(a), \lim\limits_{x_1\to a} f(\frac{x_1+x_2}{2})=f(\frac{a+x_2}{2})$, 于是有

$$\frac{f(a)+f(x_2)}{2}\ge f(\frac{a+x_2}{2});$$

即当$x_1=a$时,(*)式也成立。同理可得当$x_2=b$时,(*)式也成立。

因此在$[a,b]$内任意两点x_1, x_2, 都有

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\ge f(\frac{x_1+x_2}{2}).$$

16.如何选择参数$h>0$, 方能使曲线

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$$

在$x=\pm\sigma$($\sigma>0$为给定的常数)处有拐点。

解：容易求得

$$y'=\frac{-2h^3x}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}, y''=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}(4h^4x^2-2h^2),$$

令$y''=0$, 可得$x^2=\frac{1}{2h^2}$;由于拐点为$\pm\sigma$, 故有$\sigma^2=\frac{1}{2h^2}$, 即$h=\sqrt{\frac{1}{2\sigma^2}}$.

17.求$y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$的极值及拐点,并求拐点处的切线方程。

解：可以求得

$$y=\frac{x^2}{x^2+1}=1-\frac{1}{x^2+1}, y'=\frac{2x}{(x^2+1)^2}, y''=\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$$

令$y''=0$,可得$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;由于$y(\dfrac{\sqrt{3}}{3})=\dfrac{1}{4}, y(-\dfrac{\sqrt{3}}{3})=\dfrac{1}{4}$, 于是拐点为

$$(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4})与(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}).$$

由于$y'(\dfrac{\sqrt{3}}{3})=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}, y'(-\dfrac{\sqrt{3}}{3})=-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$,那么由点斜式可得在点$(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4})$与$(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4})$处的直线分别为

$$y=\frac{3\sqrt{3}}{8}(x+\frac{\sqrt{3}}{3})+\frac{1}{4}, y=-\frac{3\sqrt{3}}{8}(x-\frac{\sqrt{3}}{3})+\frac{1}{4}.$$

18.作出下列函数的图形：

(1)$y=x^3-6x$;

解：可以求得函数的定义域为$\mathbb{R}$, 由于$y(x)=-y(-x)$,因此为奇函数。

令$y=x^3-6x=0$,可以求得函数的零点$x_1=0, x_{2,3}=\pm\sqrt{6}$.

令$y'=3x^2-6=0$,可得函数两个稳定点$x_{4,5}=\pm\sqrt{2}$; 令$y'=3x^2-6>0$, 可得函数递增区间$(-\infty,-\sqrt{2}),(\sqrt{2},+\infty)$及递减区间$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

由于$y''=6x$,则$y''(-\sqrt{2})=-6\sqrt{2}<0$,于是稳定点$x_4=-\sqrt{2}$为函数极大值点;

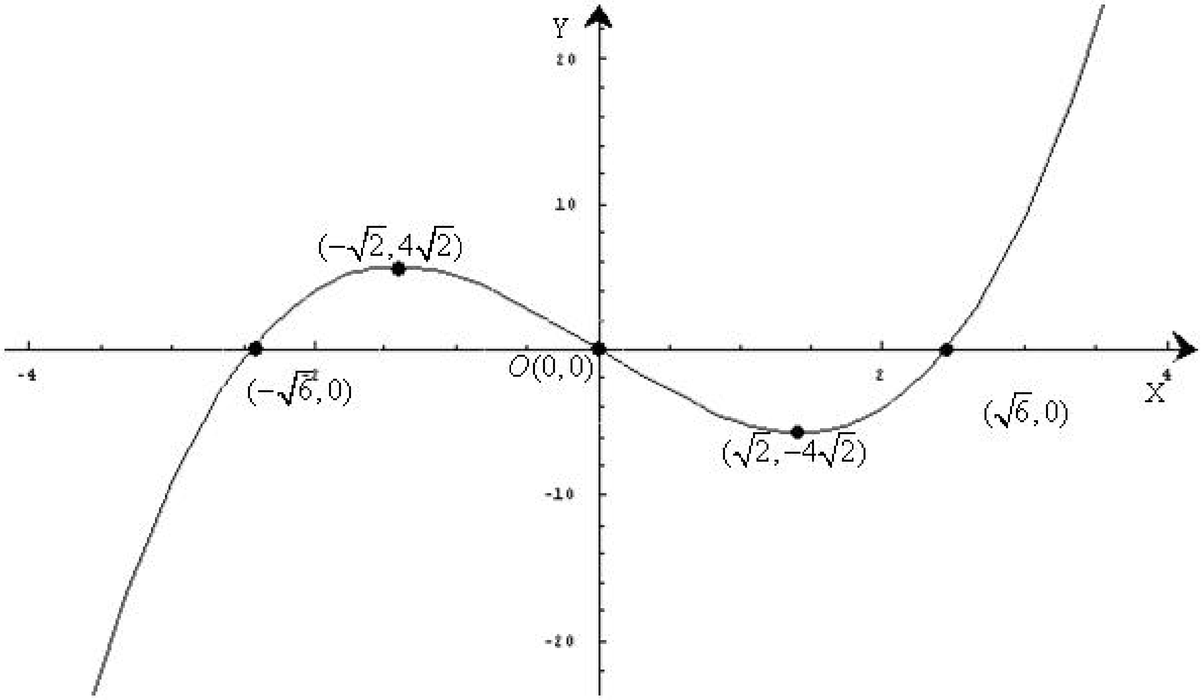
$$y''(\sqrt{2})=6\sqrt{2}>0,于是稳定点x_5=\sqrt{2}为函数极小值点。$$

令$y''=6x>0$,可得函数的上凸区间$(-\infty,0)$, 及下凸区间$(0,+\infty)$.

综上制表得：

$y=x^3-6x$					
定义域	$\mathbb{R}$	奇偶性	奇函数	对称性	原点中心对称
零点	$x_1=0, x_{2,3}=\pm\sqrt{6}$	极大值点	$x_4=-\sqrt{2}$	极小值点	$x_5=\sqrt{2}$
递增区间	$(-\infty,-\sqrt{2}),(\sqrt{2},+\infty)$	递减区间	$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$	渐近线	无
上凸区间	$(-\infty,0)$	下凸区间	$(0,+\infty)$	拐点	无

依表作图如下：



(2) $y=e^{-(x-1)^2}$;

解：可以求得函数的定义域为$\mathbb{R}$, 由于$y(x+1)=y(-x-1)$,因此关于直线$x=1$对称。

令$y=e^{-(x-1)^2}=0$,无解。

令$y'=-2(x-1)e^{-(x-1)^2}=0$, 可得稳定点$x_1=1$; 令$y'=3x^2-6>0$, 可得函数递增区间$(-\infty,1)$, 及递减区间$(1,+\infty)$.

由于$y''=[4(x-1)^2-2]e^{-(x-1)^2}$, 则$y''(1)=-2<0$, 于是稳定点$x_1=1$为函数极大值点;

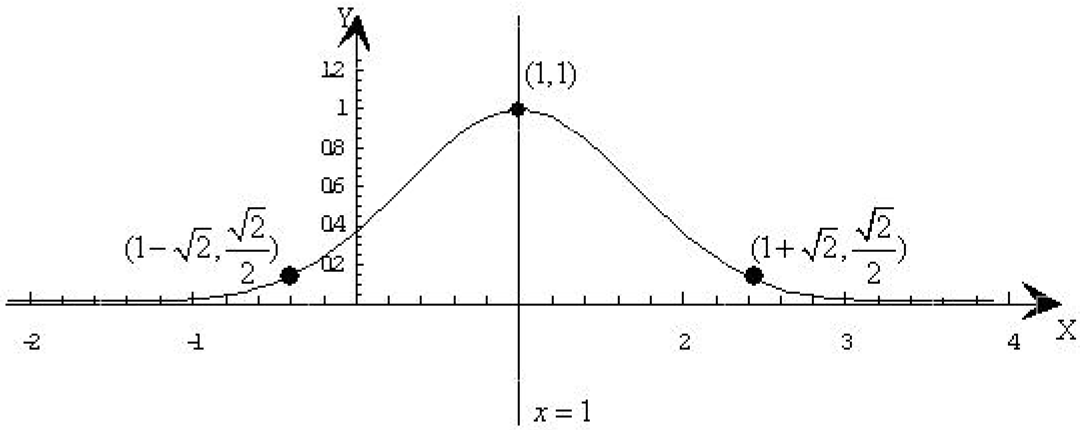
令$y''=[4(x-1)^2-2]e^{-(x-1)^2}>0$, 可得函数的下凸区间$(-\infty,1-\sqrt{2}),(1+\sqrt{2},+\infty)$ 及上凸区间$(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$; 令$y''=[4(x-1)^2-2]e^{-(x-1)^2}=0$ 可得函数的两个拐点$x_{2,3}=1\pm\sqrt{2}$.

由于$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-(x-1)^2}=0$,因此函数有水平渐近线$y=0$.

综上制表得：

$y=e^{-(x-1)^2}$					
定义域	$\mathbb{R}$	奇偶性	无	对称性	$x=1$ 轴对称
零点	无	极大值点	$x_1=1$	极小值点	无
递增区间	$(-\infty,1)$	递减区间	$(1,+\infty)$	渐近线	$y=0$
上凸区间	$(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$	下凸区间	$(-\infty,1-\sqrt{2}),(1+\sqrt{2},+\infty)$	拐点	$x_{2,3}=1\pm\sqrt{2}$

依表作图如下：



(3) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$;

解：可以求得函数的定义域为$\{x\,|\,x\neq\pm1\}$, 由于$y(x)=y(-x)$,因此关于直线$x=0$对称。

令$y=\dfrac{1}{x^2-1}=0$,无解。令$y'=\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}=0$, 可得稳定点$x_1=0$; 令$y'=\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}>0$, 可得函数递增区间$(-\infty,-1),(-1,0)$, 及递减区间$(0,1,),(1+\infty)$.

由于$y''=\dfrac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$,则$y''(0)=-2<0$, 于是稳定点$x_1=0$为函数极大值点;

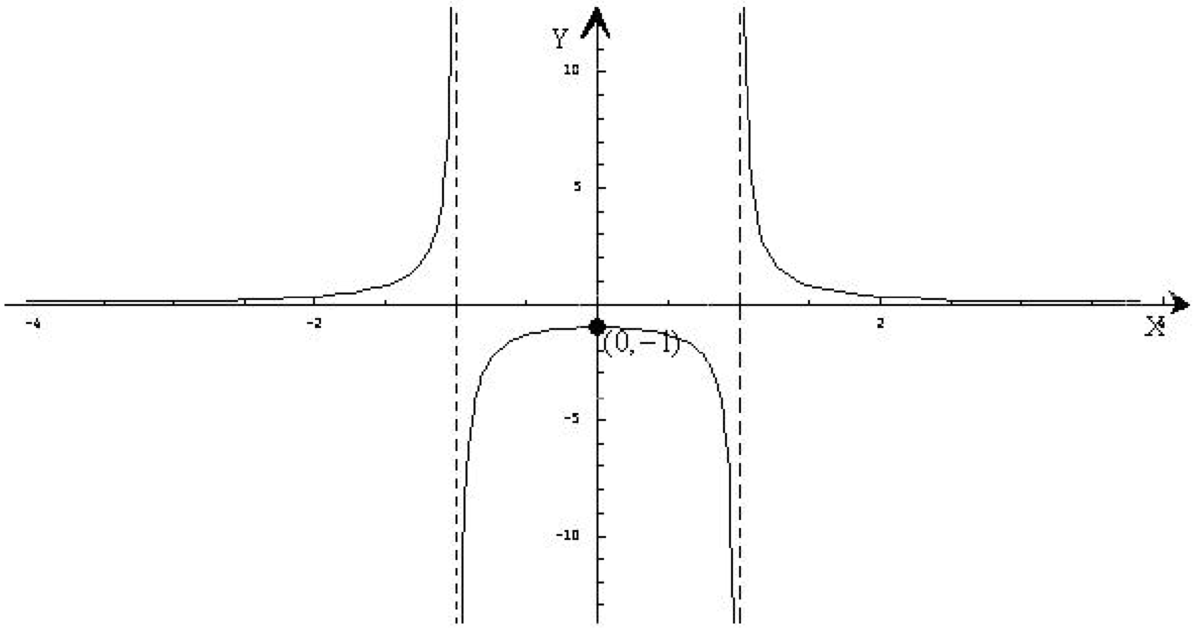
令$y''=\dfrac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}>0$,可得函数的下凸区间$(-\infty,-1),(1,+\infty)$ 及上凸区间$(-1,1)$;

令$y''=\dfrac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}=0$无解, 没有拐点。由于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2-1}=0$, 因此函数有水平渐近线$y=0$;

$\lim\limits_{\substack{x\to1^+\\x\to-1^-}}\dfrac{1}{x^2-1}=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to1^-\\x\to-1^+}}\dfrac{1}{x^2-1}=-\infty$,因此函数有竖直渐近线$x=\pm1$.

综上制表得：

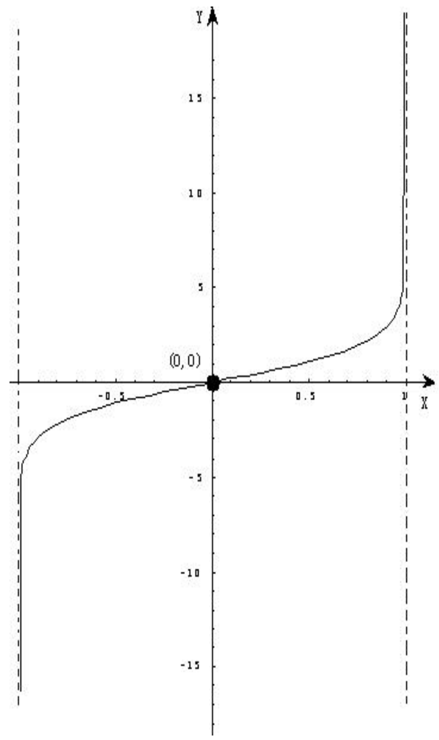
定义域	$\{x\,|\,x\neq\pm1\}$	奇偶性	偶函数	对称性	$x=0$ 轴对称
零点	无	极大值点	$x_1=0$	极小值点	无
递增区间	$(-\infty,-1),(-1,0)$	递减区间	$(0,1,),(1+\infty)$	渐近线	$y=0,x=\pm1$
上凸区间	$(-1,1)$	下凸区间	$(-\infty,-1),(1,+\infty)$	拐点	无



(4) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;解：

$y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$					
定义域	$(-1,1)$	奇偶性	奇函数	对称性	原点中心对称
零点	$x=0$	极大值点	无	极小值点	无
递增区间	$(-1,1)$	递减区间	无	渐近线	$x=\pm 1$
上凸区间	$(-1,0)$	下凸区间	$(0,1)$	拐点	$x=0$

依表作图如下：



(5) $y = x - 2\arctan x$;

解：可以求得函数的定义域为$\mathbb{R}$, 由于$y(x) = -y(-x)$,因此关于原点中心对称。

令$y = x - 2\arctan x = 0$,我们可以求得函数的一个根$x = 0$; 令$y' = 1 - \dfrac{2}{1+x^2} = 0$, 可得稳定点$x = \pm 1$;令$y' = 1 - \dfrac{2}{1+x^2} > 0$,可得函数递增区间$(-\infty,-1),(1,+\infty)$, 及递减区间$(-1,1)$.

由于$y'' = \dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$,则$y''(1) = 1 > 0$,于是稳定点$x = 1$为函数极小值点, $y''(-1) = -1 < 0$,于是稳定点$x = -1$是函数的极大值点。

令$y'' = \dfrac{4x}{(1+x^2)^2} > 0$,可得函数的下凸区间$(0,+\infty)$及上凸区间$(-\infty,0)$;

令$y'' = \dfrac{4x}{(1+x^2)^2} = 0$得$x = 0$, 有拐点$x = 0$。

由于$\lim\limits_{x\to+\infty}(x - 2\arctan x - x) = -\pi, \lim\limits_{x\to\infty}(x - 2\arctan x - x) = \pi$; 且$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x - 2\arctan x}{x} = 1$, 因此函数有斜渐近线$y = x \pm \pi$.

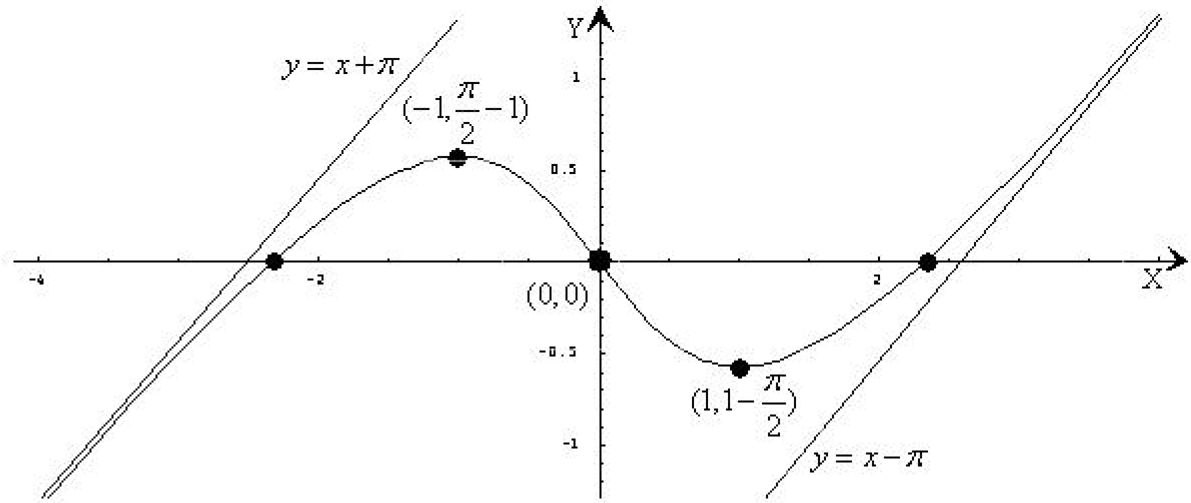
另外$y(-1) = \dfrac{\pi}{2} - 1 > 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$,因此在区间$(-\infty,-1)$上函数有一根, 同理在区间$(1,+\infty)$上函数也有一根, 但是这两个根我们用常规方法无法解得。

综上制表得：

$y = x - 2\arctan x$					
定义域	$\mathbb{R}$	奇偶性	奇函数	对称性	原点中心对称
零点	$x = 0$ (还有两个)	极大值点	$x = -1$	极小值点	$x = -1$

递增区间	$(-\infty,-1),(1,+\infty)$	递减区间	$(-1,1)$	渐近线	$y=x\pm\pi$
上凸区间	$(-\infty,0)$	下凸区间	$(0,+\infty)$	拐点	$x=0$

依表作图如下：



(6) $y=xe^{-x}$;

解：可以求得函数的定义域为$\mathbb{R}$.

令$y=xe^{-x}=0$,我们可以求得函数的根$x=0$;

令$y'=e^{-x}-xe^{-x}=0$,可得稳定点$x=1$;

令$y'=e^{-x}-xe^{-x}>0$,可得函数递增区间$(-\infty,1)$, 及递减区间$(1,+\infty)$.

由于$y''=-2e^{-x}+xe^{-x}$,则$y''(1)=-e^{-1}<0$, 于是稳定点$x=1$为函数极大值点

令$y''=-2e^{-x}+xe^{-x}>0$,可得函数的下凸区间$(2,+\infty)$及上凸区间$(-\infty,2)$;

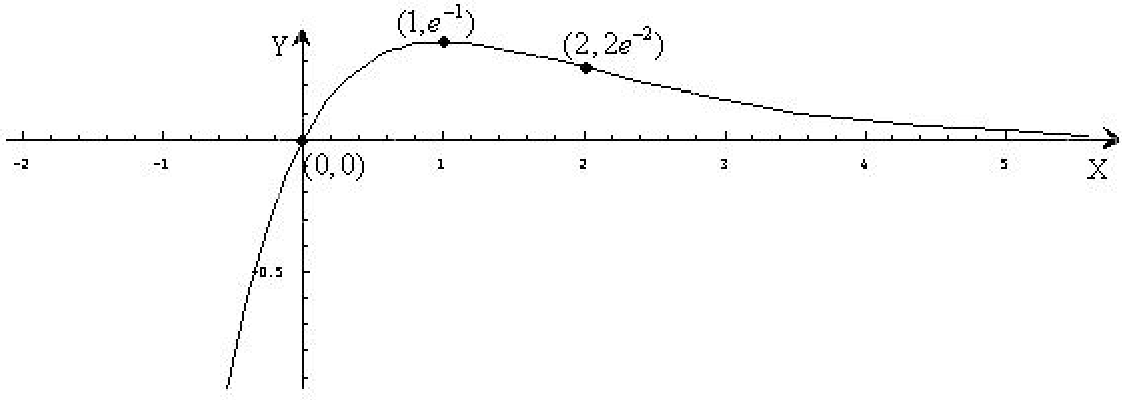
令$y''=-2e^{-x}+xe^{-x}=0$得$x=2$, 有拐点$x=2$.

由于$\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$,因此函数有水平渐近线$y=0$.

综上制表得：

$y=xe^{-x}$					
定义域	$\mathbb{R}$	奇偶性	无	对称性	无
零点	$x=0$	极大值点	$x=1$	极小值点	无
递增区间	$(-\infty,1)$	递减区间	$(1,+\infty)$	渐近线	$y=0$
上凸区间	$(-\infty,2)$	下凸区间	$(2,+\infty)$	拐点	$x=2$

依表作图如下：

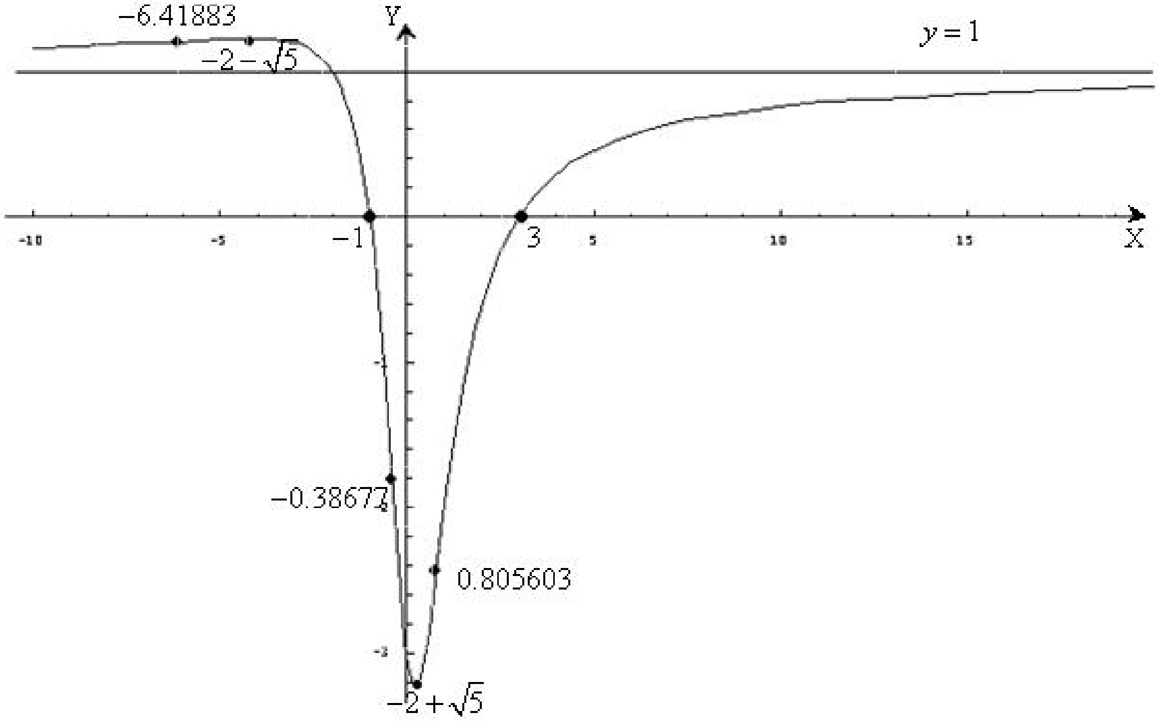


(7) $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+1}$;

解：

$y=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+1}$					
定义域	$\mathbb{R}$	奇偶性	无	对称性	无
零点	$x=3, x=-1$	极大值点	$x=-2-\sqrt{5}$	极小值点	$(x=-2+\sqrt{5})$
递增区间	$(-\infty,-2-\sqrt{5})$, $(-2+\sqrt{5},+\infty)$	递减区间	$(-2-\sqrt{5},-2+\sqrt{5})$	渐近线	$y=1$
上凸区间	$(-6.41883,-0.38677)$, $(0.805603,+\infty)$	下凸区间	$(-\infty,-6.41883)$, $(-0.38677, 0.805603)$	拐点	三个

依表作图如下：

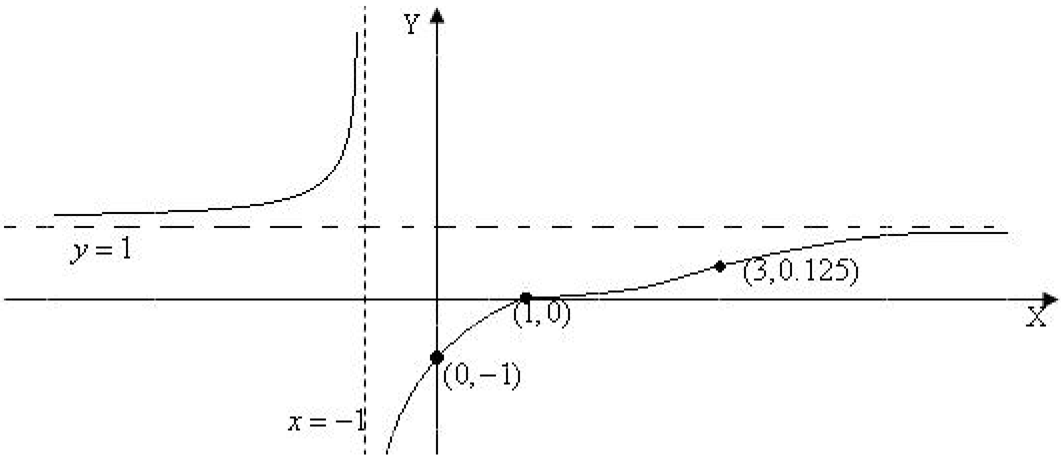


(8) $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^3}$

解：

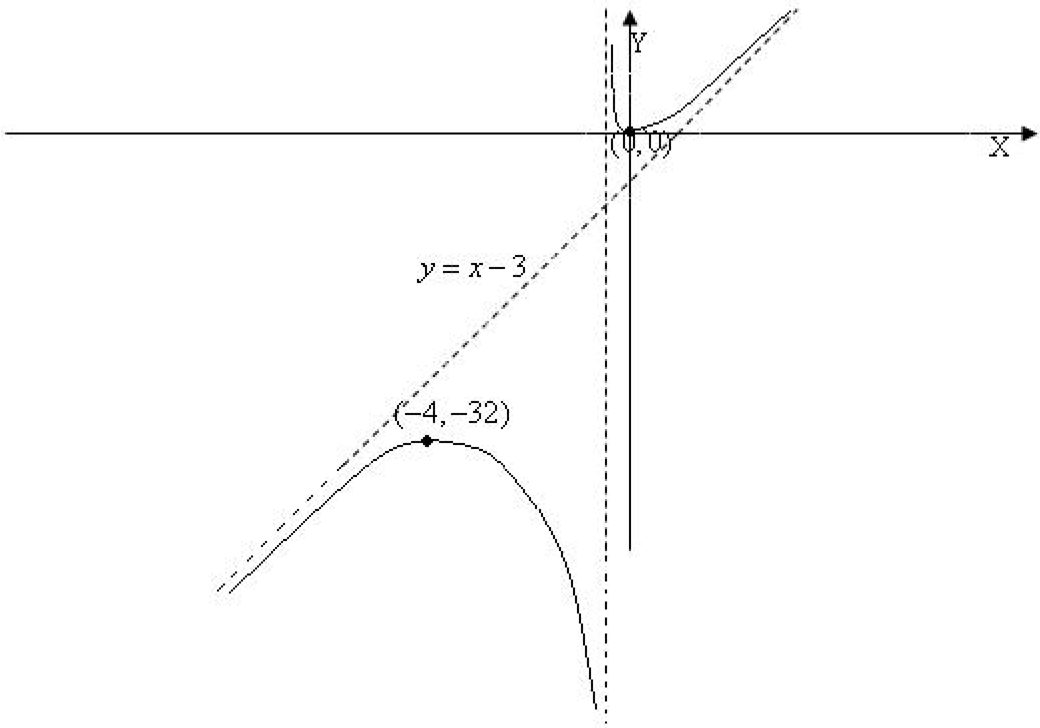
$y=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^3}$					
定义域	$x\neq -1$	奇偶性	无	对称性	无
零点	$x=1$	极大值点	无	极小值点	无
递增区间	$(-\infty,-1),(-1,+\infty)$	递减区间	无	渐近线	$y=1,x=-1$
上凸区间	$(-1,1),(3,+\infty)$	下凸区间	$(-\infty,-1),(1,3)$	拐点	$x=1,x=3$

依表作图如下：



(9) $y=\dfrac{x^4}{(x+1)^3}$ 解：

$y=\dfrac{x^4}{(x+1)^3}$					
定义域	$x\neq -1$	奇偶性	无	对称性	无
零点	$x=0$	极大值点	$x=-4$	极小值点	$x=0$
递增区间	$(-\infty,-4),(0,+\infty)$	递减区间	$(-4,-1),(-1,0)$	渐近线	$y=x-3$
上凸区间	$(-\infty,-1)$	下凸区间	$(-1,+\infty)$	拐点	无



第四节 函数的最大值最小值问题

1.求下列函数在指定区间上的最大值最小值。

(1) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, [-1, 2]$;

解：令$y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$, 可得$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$(舍去).

函数只可能在$x_1 = 0, x_2 = 1$取得极值。由于

$$y(0) = 1, y(1) = 2, y(-1) = -10, y(2) = -7,$$

因此函数的最大值为$y(1) = 2$, 最小值为$y(-1) = -10$.

(2) $y = 2\tan x - \tan^2 x, [0, \frac{\pi}{2})$;

解：令 $\tan x = t$, 则$t \in [0, +\infty)$; 我们求得函数的$z = 2t - t^2$在区间$[0, +\infty)$上的最大最小值就可求得原函数的最大最小值。

令$z' = 2 - 2t = 0$, 可得$t_1 = 1$.函数只可能在$t_1 = 1$取得极值。由于

$$z(1) = 1, z(0) = 0, \lim_{t \to +\infty} z = -\infty$$

因此函数的最大值为$z(1) = 1$, 没有最小值。

那么原函数的最大值为$y(\frac{\pi}{4}) = 1$, 没有最小值。

(3) $y = \sqrt{x} \ln x, [0, +\infty)$;

解：令$y' = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$, 可得$x_1 = e^{-2}$.函数只可能在$x_1 = e^{-2}$取得极值。由于

$$y(e^{-2}) = \frac{-2}{e}, y(0) = 0, \lim_{x \to +\infty} y = \infty,$$

因此函数的没有最大值, 最小值为$y(e^{-2}) = \frac{-2}{e}$.

(4) $y = \left| x^2 - 3x + 2 \right|, [-10, 10]$;

解：取$y_1 = x^2 - 3x + 2$, 令$y_1' = 2x - 3 = 0$, 可得$x = \frac{3}{2}$.那么原函数只可能在$x = \frac{3}{2}$取得极值。

由于

$$y(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}, y(-10) = 132, y(10) = 72,$$

我们知道函数可以取得最大值为$y(-10) = 132$.

令$x^2 - 3x + 2 = 0$, 可得$x_1 = 1, x_2 = 2$.那么函数在$x_1 = 1, x_2 = 2$处取得最小值0.

(5) $y=e^{|x-3|},[-5,5]$.

解：由于e^x是增函数,因此我们只需要求得函数$z=|x-3|$在区间$[-5,5]$上的最大最小值就可以求得原函数的最大最小值。

易求得函数$z=|x-3|$在区间$[-5,5]$上的最大最小值为$z(3)=0, z(-5)=8$. 于是原函数的最大值为$y(-5)=e^8$, 最小值为$y(3)=1$.

2.给定长为l的线段, 试把它分成两段, 使以这两段为边的矩形面积最大。

解：设分成的两段中其中一段长为x, 那么矩形面积为$s=x(l-x)$.

令$s'=-2x+l=0$, 得$x=\dfrac{l}{2}$.由于$s''=-2$, 可知函数$s=x(l-x)$的极值点$x=\dfrac{l}{2}$为它的极大值点。又因为$s(0)=0, s(l)=0$, 因此$s(\dfrac{l}{2})=\dfrac{l^2}{4}$为它的最大值。

于是将这段线段平分, 以之为边的矩形面积最大。

3.设用某仪器进行测量时, 读得n次试验数据为$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$, 问以怎样的数值$x$表达所有测量的真值, 才能使它与这$n$个数据之差的平方和为最小。

解：设$S=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+(x-a_3)^2+\cdots+(x-a_n)^2$, 则

$$\frac{dS}{dx}=2\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)=2(nx-\sum_{i=1}^{n}a_i).$$

令$\dfrac{dS}{dx}=0$,则可求得稳定点为

$$x=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n},$$

又因为$\dfrac{d^2S}{dx^2}=2n>0$, 于是$x=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}$为函数的极小值点。由于极小值点唯一, 因此也是最小值点。

于是当用$x=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}$表示真值时, 它与这$n$个数的差的平方和最小。

4.求内接于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,而边平行于坐标轴的面积最大的矩形。

解：设椭圆与矩形在第一象限的公共点为(x,y),则矩形面积为$s=4xy$.

由于$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,于是有$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$,那么

$$s=4\frac{b}{a}x\sqrt{a^2-x^2},x\in[0,a].$$

令

$$\frac{ds}{dx}=4\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-4\frac{b}{a}\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=0,$$

可得$x=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

由于$s(0)=0,s(a)=0,s(\frac{\sqrt{2}}{2}a)=2ab$,因此面积最大的矩形的四个顶点分别为

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}b),(\frac{\sqrt{2}}{2}a,-\frac{\sqrt{2}}{2}b),(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}b),(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,-\frac{\sqrt{2}}{2}b).$$

此时面积最大为$2ab$.

5.求点$M(p,p)$到抛物线$y^2=2px$的最短距离。

解：设抛物线上点$(x,\sqrt{2px})$到$M(p,p)$点的距为$l=\sqrt{(x-p)^2+(\sqrt{2px}-p)^2}$,要使$l$最小,$l^2$最小即可。可以求得$l^2=x^2-2p\sqrt{2px}+2p^2$.

令$\frac{dl^2}{dx}=2x-\frac{p\sqrt{2p}}{\sqrt{x}}=0$,可得$x=\frac{p}{2^{\frac{1}{3}}}$.由于

$$\left.\frac{d^2l^2}{dx^2}\right|_{x=\frac{p}{2^{\frac{1}{3}}}}=2+\left.\frac{p\sqrt{2p}}{2x^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=\frac{p}{2^{\frac{1}{3}}}}>0,$$

因此$x=\frac{p}{2^{\frac{1}{3}}}$是原函数的极小值点。又因为

$$l^2(\frac{p}{2^{\frac{1}{3}}})=(2+2^{-\frac{2}{3}}-2^{\frac{4}{3}})p^2,l^2(0)=2p^2,\lim_{x\to+\infty}l^2=+\infty.$$

于是可以知道点$M(p,p)$到抛物线$y^2=2px$的最短距离为$\sqrt{2+2^{-\frac{2}{3}}-2^{\frac{4}{3}}}p$.

6.做一个圆柱形锅炉,已知其容积为V, 两端面材料的每单位面积价格为a元, 侧面积材料单位面积价格为b元, 问锅炉的直径与高的比为多少时, 造价最省。

解：设锅炉底面圆半径为r,高为kr,则有体积$V=\pi r^2 kr$,造价为

$$S=2a\pi r^2+2b\pi rkr=2\pi ar^2+2\pi br^2\frac{V}{\pi r^3}=2\pi ar^2+2b\frac{V}{r}.$$

令

$$\frac{dS}{dx}=4\pi ar-2b\frac{V}{r^2}=0,$$

可得$r=\sqrt[3]{\dfrac{bV}{2\pi a}}$.

由于

$$\left.\frac{d^2S}{dx^2}\right|_{r=\sqrt[3]{\frac{bV}{2\pi a}}}=\left.(4\pi a+4b\frac{V}{r^3})\right|_{r=\sqrt[3]{\frac{bV}{2\pi a}}}>0,$$

因此$S(\sqrt[3]{\dfrac{bV}{2\pi a}})$为$S$的极小值, 又因为半径为零不合理,$\lim\limits_{x\to+\infty}S=+\infty$, 于是$S(\sqrt[3]{\dfrac{bV}{2\pi a}})$为$S$的最小值。

此时有$k=\dfrac{V}{\pi r^3}=\dfrac{2a}{b}$,于是当直径与高的比为$\dfrac{2a}{b}$时, 造价最省。

7.某村计划修建一条断面面积为$4\,m^2$的梯形渠道, 侧面的坡度为$\dfrac{3}{4}$(即底边与斜高间夹角θ满足$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$),底边b与斜高l为多长时湿周最小(根据经验, 湿周最小时渠道过水能力最大)。

解：设渠道断面的高为h,那么由题意可知$(\dfrac{4}{3}h+b)h=4$, 湿周为$s=b+2\bullet\dfrac{5}{3}h$.整理可得

$$s=\frac{4}{h}+2h.$$

令$\dfrac{ds}{dh}=2-\dfrac{4}{h^2}=0$,可得稳定点$h=\sqrt{2}$,($-\sqrt{2}$舍去).

由于$\left.\dfrac{d^2s}{dh^2}\right|_{h=\sqrt{2}}=\left.\dfrac{8}{h^3}\right|_{h=\sqrt{2}}>0$,因此$h=\sqrt{2}$是函数$s=\dfrac{4}{h}+2h$的极小值点。又因为$\lim\limits_{h\to0}s=+\infty$, $\lim\limits_{h\to+\infty}s=+\infty$,因此$h=\sqrt{2}$是函数$s=\dfrac{4}{h}+2h$的最小值点。

故$s(\sqrt{2})=4\sqrt{2}$为最小湿周, 此时底边$b=\dfrac{4}{\sqrt{2}}-\dfrac{4}{3}\sqrt{2}=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$, 斜边$l=\dfrac{5}{3}\sqrt{2}$.

8.设炮口的仰角为α, 炮弹的初速为$v_0 m/s$, 炮口取做原点, 发炮时间取做$t=0$, 不计空气阻力时, 炮弹的运动方程为

$$\begin{cases} x = tv_0\cos\alpha \\ y = tv_0\sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}.$$

若初速v_0不变,问如何调整炮口仰角α, 使炮弹射程最远。

解：设炮弹路径曲线为S,那么S上的点与原点距离最远时, 必有$y=tv_0\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2=0$, 此时有$t=\dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$,那么$x=\dfrac{v_0^2\sin2\alpha}{g}$.

显然当$2\alpha=\dfrac{\pi}{2}$时, x值最大, 即当仰角为$\dfrac{\pi}{4}$时, 炮弹射程最远。

第六章 不定积分

在不定积分的计算中，有很多方法是机械性的：有很多固定的模式和方法，还有一些常用的公式。在本章里使用的积分公式除了课本 161 页给出的 10 个常用公式外，还有 6 个很有用的式子，罗列如下：

$$1.\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C;$$

$$2.\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C;$$

$$3.\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C;$$

$$4.\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C;$$

$$5.\int\sqrt{x^2\pm a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C;$$

$$6.\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

这六个公式在答案中的使用次数很大，使用的时候没有进行说明，敬请读者仔细甄别。当然答案计算过程中不免有不少错误，敬请原谅并修改。

第一节 不定积分的概念

1.求下列不定积分：

$$(1)\int (x^5+x^3-\frac{\sqrt{x}}{4})dx=\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3*4}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}+C.$$

$$(2)\int (5-x)^3dx=-\int (5-x)^3d(5-x)=-\frac{1}{4}(5-x)^4+C.$$

$$(3)\int (\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}})dx=\int (x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}+3x^{-\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{3}})dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+6x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{2}{3}}+C.$$

$$(4)\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}=\int (\frac{1-x^2}{x^4}+\frac{1}{1+x^2})dx=\int \frac{1-x^2}{x^4}dx+\int \frac{1}{1+x^2}dx=\int (x^{-4}-x^{-2})dx+\int \frac{dx}{1+x^2}$$
$$=-\frac{1}{3}x^{-3}+x^{-1}+\arctan x+C.$$

$$(5)\int \frac{3x^2}{1+x^2}dx=\int (3-\frac{3}{1+x^2})dx=3x-3\arctan x+C.$$

$$(6)\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx=\int (x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x}+C.$$

$$(7)\int (2\sin x-4\cos x)dx=-2\cos x-4\sin x+C.$$

$$(8)\int (3-\sec^2 x)dx=\int (3-\frac{1}{\cos^2 x})dx=3x-\tan x+C.$$

$$(9)\int (\tan^2 x+3)dx=\int \frac{\sin^2 x+3\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int (\frac{1}{\cos^2 x}+2)dx=\tan x+2x+C.$$

$$(10)\int \frac{2+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int \frac{3-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=3\tan x-x+C.$$

$$(11)\int \frac{\tan x}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}dx=\int \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x}dx=-\int \frac{1}{\cos^2 x}d(\cos x)=\frac{1}{\cos x}+C.$$

$$(12)\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx=\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}dx=\int (\cos x+\sin x)dx=\sin x-\cos x+C.$$

$$(13)\int \frac{dx}{1+\cos 2x}=\int \frac{dx}{1+\cos^2 x-\sin^2 x}=\int \frac{dx}{2\cos^2 x}=\frac{1}{2}\tan x+C$$

$$(14)\int (5^x+1)^2dx=\int (5^{2x}+2*5^x+1)dx=\frac{5^{2x}}{2\ln 5}+\frac{2}{\ln 5}5^x+x+C.$$

$(15)\int(2^x+(\frac{1}{3})^x-\frac{e^x}{5})dx=\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3 \bullet 3^x}-\frac{e^x}{5}+C.$

$(16)\int e^x(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}})dx=\int(e^x-\frac{1}{\sqrt{x}})dx=e^x-2\sqrt{x}+C.$

$(17)\int(\cos x-\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{4\sqrt{1-x^2}})dx=\sin x-2\arctan x-\frac{1}{4}\arcsin x+C.$

$(18)\int\sqrt{x\sqrt{x}}dx=\int x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}dx=\int x^{\frac{3}{4}}dx=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+C.$ $(19)\int 2^{2x}3^x dx=\int 12^x dx=\frac{12^x}{\ln 12}+C.$

$(20)\int(\frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}+\sin x)dx=\int(\frac{3}{2\sqrt{1-x^2}}+\sin x)dx=\frac{3}{2}\arcsin x-\cos x+C.$

2.求一曲线$y=f(x)$,它在点$(x,f(x))$处的切线的斜率为$2x$, 且过点$(2,5)$.
解：设$f'(x)=2x$,那么

$$f(x)=\int f'(x)dx+C=\int 2xdx+C=x^2+C.$$

令$f(2)=5$,那么$4+C=5$,于是有$C=1$,因此函数曲线$y=x^2+1$满足条件。

3.已知$f(x)$满足给定的关系式, 试求$f(x)$.

$(1)xf'(x)=1,(x>0);$

解：可得$f'(x)=\frac{1}{x}$,那么

$$f(x)=\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C.$$

$(2)\frac{f'(x)}{x}=1,(x>0);$

解：可得$f'(x)=x$,那么有

$$f(x)=\int xdx=\frac{x^2}{2}+C.$$

$(3)f(x)f'(x)=1,(x>0);$

解：可知$\int[f(x)f'(x)]dx=\int 1dx$,
于是有

$$\frac{f^2(x)}{2}+C_1=x+C_2,$$

因此有$f(x)=\sqrt{2x+C}$.

$(4)\frac{f'(x)}{f(x)}=1,(f(x)>0);$

解：可知$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 1dx$,于是有

$$\ln[f(x)]+C_1=x+C_2,$$

因此有$f(x)=Ce^x$.

第二节 换元积分与分部积分法

1.用凑微分法求下列不定积分：

$(1)\int\frac{dx}{5x-6}=\frac{1}{5}\int\frac{d(5x-6)}{5x-6}=\frac{1}{5}\ln|5x-6|+C.$

$$(2)\int\frac{dx}{x(1+2x)}=\int(\frac{1}{x}-\frac{2}{2x+1})dx=\ln|x|-\ln|2x+1|+C.$$

$$(3)\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\int\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})dx}{2}=\frac{1}{2}[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}]+C$$

$$=\frac{1}{3}[(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}]+C.$$

$$(4)\int(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}})dx=\int[\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{3}})^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{3}x)^2}}]dx$$

$$=\int\frac{d\frac{x}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{3}})^2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{1-(\sqrt{3}x)^2}}$$

$$=\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(\sqrt{3}x)+C.$$

$$(5)\int\frac{dx}{2+3x^3}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+\frac{3}{2}x^3}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\int\frac{d(\sqrt{\frac{3}{2}}x)}{1+(\sqrt{\frac{3}{2}}x)^3}=\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan(\sqrt{\frac{3}{2}}x)+C$$

$$(6)\int e^{-\frac{x}{2}}dx=-2\int e^{-\frac{x}{2}}d(-\frac{x}{2})=-2e^{-\frac{x}{2}}+C.$$

$$(7)\int xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(x^2)=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$$

$$(8)\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=\int\frac{1}{1+e^x}d(e^x)=\ln(1+e^x)+C.$$

$$(9)\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}+2}=\int\frac{e^xdx}{e^{2x}+1+2e^x}=\int\frac{d(e^x)}{(e^x+1)^2}=-\frac{1}{e^x+1}+C.$$

$$(10)\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{e^xdx}{e^{2x}+1}=\int\frac{d(e^x)}{e^{2x}+1}=\arctan(e^x)+C.$$

$$(11)\int\tan xdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{1}{\cos x}d(\cos x)=-\ln|\cos x|+C.$$

$$(12)\int\tan^5 x\sec^2 xdx=\int\frac{\tan^5 x}{\cos^2 x}dx=\int\tan^5 xd(\tan x)=\frac{1}{6}\tan^6 x+C.$$

$$(13)\int\frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int\frac{2\sin x}{\cos^2 x}dx=\tan x+2\int\frac{1}{\cos^2 x}d(\cos x)+C_1=\tan x-\frac{2}{\cos x}+C.$$

$$(14)\int\frac{dx}{A\sin^2 x+B\cos^2 x}=\int\frac{\frac{1}{\cos^2 x}dx}{A\tan^2 x+B}=\int\frac{d(\tan x)}{A\tan^2 x+B}=\frac{1}{B}\int\frac{d(\tan x)}{\frac{A}{B}\tan^2 x+1}$$

$$=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{B}{A}}\int\frac{d(\sqrt{\frac{A}{B}}\tan x)}{(\sqrt{\frac{A}{B}}\tan x)^2+1}=\frac{1}{\sqrt{AB}}\arctan(\sqrt{\frac{A}{B}}\tan x)+C.$$

$$(15)\int\cos^5 xdx=\int\cos^4 xd(\sin x)=\int(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)=\int(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)d(\sin x)$$

$$=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C.$$

$$(16)\int\frac{dx}{1+\sin x}=2\int\frac{d(\frac{x}{2})}{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=2\int\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}d(\frac{x}{2})}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=2\int\frac{d(\tan\frac{x}{2})}{\tan^2\frac{x}{2}+1+2\tan\frac{x}{2}}$$

$$=2\int\frac{d(\tan\frac{x}{2}+1)}{(\tan\frac{x}{2}+1)^2}=-\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1}+C.$$

$$(17)\int\frac{\cos 2x}{\sin x\cos x}dx=2\int\frac{\cos 2x}{\sin 2x}dx=\int\frac{\cos 2x}{\sin 2x}d(2x)=\int\frac{1}{\sin 2x}d(\sin 2x)=\ln|\sin 2x|+C.$$

$$(18)\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx=\int\frac{\sin x}{1+\sin^4 x}d(\sin x)=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+\sin^4 x}d(\sin^2 x)=\frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x)+C.$$

$$(19)\int\frac{x}{4+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{4+x^2}d(x^2)=\frac{1}{2}\int\frac{1}{4+x^2}d(x^2+4)=\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C.$$

$$(20)\int\frac{x}{4+x^4}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{4+x^4}d(x^2)=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+(\frac{x^2}{2})^2}d(\frac{x^2}{2})=\frac{1}{4}\arctan(\frac{x^2}{2})+C.$$

$$(21)\int\frac{5-4x}{3x-2}dx=\int(-\frac{4}{3}+\frac{\frac{7}{3}}{3x-2})dx=-\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3}\int\frac{1}{3x-2}d(3x)+C_1=-\frac{4}{3}x+\frac{7}{9}\ln|3x-2|+C.$$

$$(22)\int\sin 2x\cos 3xdx=\frac{1}{2}\int 2\sin 2x\cos 3xdx=\frac{1}{2}\int(\sin 5x-\sin x)dx=-\frac{1}{10}\cos 5x+\frac{1}{2}\cos x+C.$$

$$(23)\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx=\int(\ln x)^2 d(\ln x)=\frac{1}{3}\ln^3 x+C.$$

$$(24)\int\sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x^2}=-\int\sin\frac{1}{x}d(\frac{1}{x})=\cos\frac{1}{x}+C.$$

$$(25)\int\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int(\arcsin x)^2d(\arcsin x)=\frac{1}{3}\arcsin^3x+C.$$

$$(26)\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx=\int\arctan xd(\arctan x)=\frac{1}{2}\arctan^2x+C.$$

$$(27)\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}=2\int\frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}=2\int\frac{d(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}=4\sqrt{1+\sqrt{x}}+C.$$

$$(28)\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}=2\int\frac{d(\sqrt{x})}{1+x}=2\arctan(\sqrt{x})+C.$$

$$(29)\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}d(e^x)=\arcsin(e^x)+C.$$

$$(30)\int\sqrt{1+\sin x}dx=2\int\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}d(\frac{x}{2})=2\int\sqrt{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}d(\frac{x}{2})$$

$$=2\int(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})d(\frac{x}{2})=2(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})+C.$$

2.用换元积分法求下列不定积分：

$$(1)\int\sqrt{x^2-a^2}dx=\int(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2}+\frac{x^2-a^2}{2\sqrt{x^2-a^2}})dx=\int(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2}+\frac{x^2}{2\sqrt{x^2-a^2}})dx-\int\frac{a^2}{2\sqrt{x^2-a^2}}dx$$

$$=\int(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2}+\frac{x^2}{2\sqrt{x^2-a^2}})dx-\frac{a^2}{2}\int\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$$

可参考第四章第一节$T9(7)$,此题所得可以当做公式使用,即有

$$\int\sqrt{x^2\pm a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C.$$

$$(2)\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx\overset{x=2\sin t}{=}\int\frac{4\sin^2t}{\sqrt{4-4\sin^2t}}d(2\sin t)=\int\frac{4\sin^2t}{2\cos x}(2\cos t)dt=4\int\sin^2tdt;$$

令$I=\int\sin^2tdt,J=\int\cos^2tdt$,可得

$$I+J=\int(\sin^2t+\cos^2t)dt=\int dt=t+C_1;$$

$$J-I=\int(\cos^2t-\sin^2t)dt=\int\cos 2tdt=\frac{1}{2}\sin 2t+C_2.$$

于是有

$$I=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t+C_3.$$

因此

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=2t-\sin 2t+C=2\arcsin\frac{x}{2}-\sin(2\arcsin\frac{x}{2})+C.$$

$$(2)\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int\frac{x^2-4+4}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}dx-\int\frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=4\int\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}d\frac{x}{2}-\int\sqrt{4-x^2}dx$$

$$=4\arcsin\frac{x}{2}-(\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2})+C=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.$$

$$(3)\int\frac{x}{\sqrt{5+x-x^2}}dx=\int\frac{x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{21}{4}-(\frac{1}{2}-x)^2}}dx=\int\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{21}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{\frac{21}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}d(x-\frac{1}{2})$$

$$=\int\frac{1}{2\sqrt{\frac{21}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}d(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-[\frac{2}{\sqrt{21}}(x-\frac{1}{2})]^2}}d[\frac{2}{\sqrt{21}}(x-\frac{1}{2})]$$

$$=-\sqrt{\frac{21}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}+\frac{1}{2}\arcsin[\frac{2}{\sqrt{21}}(x-\frac{1}{2})]+C$$

$$=-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}}+C.$$

$$(4)\int\sqrt{2+x-x^2}dx=\int\sqrt{\frac{9}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}d(x-\frac{1}{2})$$

$$=\frac{x-\frac{1}{2}}{2}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin[\frac{2}{3}(x-\frac{1}{2})]+C$$

$$=\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}+C.$$

$$(5)\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}dx-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}dx-\frac{1}{2a^2}\int\frac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d(x^2+a^2)$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}dx-\frac{1}{2a^2}\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}\int xd[\frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}]$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}dx+\frac{1}{a^2}[x\frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}dx]+C_1$$

$$=\frac{1}{a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}+C$$

$$(6)\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x^2-(x^2-1)}dx=\int(x-\sqrt{x^2-1})\,dx=\int xdx-\int\sqrt{x^2-1}dx$$
$$=\frac{x^2}{2}-\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)+C.$$

$$(7)\int e^{\sqrt{x+1}}dx\overset{t=\sqrt{x+1}}{=}\int e^t d(t^2-1)=\int 2te^t dt=\int 2td(e^t)=2te^t-2\int e^t dt+C_1$$
$$=2te^t-2e^t+C\overset{t=\sqrt{x+1}}{=}2\sqrt{x+1}e^{\sqrt{x+1}}-2e^{\sqrt{x+1}}+C.$$

$$(8)\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx\overset{t=\sqrt{x+1}}{=}\int\frac{t-1}{t+1}d(t^2-1)=\int(1-\frac{2}{t+1})2tdt=\int(2t-\frac{4t}{t+1})dt=\int(2t-4+\frac{4}{t+1})dt$$
$$=t^2-4t+4\ln|t+1|+C\overset{t=\sqrt{x+1}}{=}x+1-4\sqrt{x+1}+4\ln(1+\sqrt{x+1})+C.$$

$$(9)\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx\overset{t=\sqrt[6]{x}}{=}\int\frac{t^3}{1+t^2}dt^6=\int\frac{6t^8}{1+t^2}dt=\int(6t^6-6t^4+6t^2-6+\frac{6}{1+t^2})dt$$
$$=\frac{6}{7}t^7-\frac{6}{5}t^5+2t^3-6t+6\arctan t+C$$
$$\overset{t=\sqrt[6]{x}}{=}\frac{6}{7}x^{7/6}-\frac{6}{5}x^{5/6}+2x^{1/2}-6x^{1/6}+6\arctan(x^{1/6})+C.$$

$$(10)\int\frac{x}{1+\sqrt{x}}dx\overset{t=\sqrt{x}}{=}\int\frac{t^2}{1+t}dt^2=\int\frac{2t^3}{1+t}dt=\int(2t^2-2t+2-\frac{2}{1+t})dt=\frac{2}{3}t^3-t^2+2t-2\ln|1+t|+C$$
$$\overset{t=\sqrt{x}}{=}\frac{2}{3}x^{3/2}-x+2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$$

$$(11)\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx^2\overset{t=\sqrt{1-x^2}}{=}\frac{1}{2}\int\frac{(1-t^2)^2}{t}d(1-t^2)=-\int(1-t^2)^2dt=-\int(1-2t^2+t^4)dt$$
$$=-t+\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5+C\overset{t=\sqrt{1-x^2}}{=}-\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}+C.$$

$$(12).\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3}dx=\int\frac{(x+1)^2-2(x+1)+3}{(x+1)^3}d(x+1)$$
$$=\int\frac{1}{x+1}d(x+1)-2\int\frac{1}{(x+1)^2}d(x+1)+3\int\frac{1}{(x+1)^3}d(x+1)$$
$$=\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}-\frac{3}{2}\frac{1}{(x+1)^2}+C.$$

3.用分部积分法求下列不定积分：

$$
\begin{aligned}
(1)&\int x^2\cos x dx\\
&=\int x^2 d\sin x\\
&=x^2\sin x-\int\sin x dx^2+C_1\\
&=x^2\sin x-\int 2x\sin x dx+C_1\\
&=x^2\sin x+\int 2x d\cos x+C_1\\
&=x^2\sin x+2x\cos x-2\int\cos x dx+C_2\\
&=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)&\int x^3\ln x dx\\
&=\frac{1}{4}\int\ln x dx^4\\
&=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{1}{4}\int x^4 d(\ln x)+C_1\\
&=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{1}{4}\int x^3 dx+C_1\\
&=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{1}{16}x^4+C
\end{aligned}
$$

$$(3)\int\ln x dx=x\ln x-\int x d(\ln x)+C_1=x\ln x-\int dx+C_1=x\ln x-x+C.$$

$$
\begin{aligned}
(4)&\int\arctan x dx\\
&=x\arctan x-\int x d(\arctan x)+C_1\\
&=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx+C_1\\
&=x\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}dx^2+C_1\\
&=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(5)&\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}dx\\
&=-2\int\arcsin x d(\sqrt{1-x})\\
&=-2\arcsin x(\sqrt{1-x})+2\int\sqrt{1-x}d(\arcsin x)+C_1\\
&=-2\arcsin x(\sqrt{1-x})+2\int\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}dx+C_1\\
&=-2\arcsin x(\sqrt{1-x})+2\int\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx+C_1\\
&=-2\arcsin x(\sqrt{1-x})+4\sqrt{1+x}+C.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(6)\int x\arctan x dx&=\frac{1}{2}\int\arctan x dx^2=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int x^2 d\arctan x+C_1\\
&=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx+C_1=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx+C_1\\
&=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{x}{2}+\frac{\arctan x}{2}+C.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(7)\int\frac{\ln x}{x^3}dx&=-\frac{1}{2}\int\ln x d(\frac{1}{x^2})=-\frac{1}{2x^2}\ln x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2}d(\ln x)+C_1=-\frac{1}{2x^2}\ln x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^3}dx+C_1\\
&=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(8)\int\cos(\ln x)dx&=x\cos(\ln x)-\int x d[\cos(\ln x)]+C_1=x\cos(\ln x)+\int\sin[\ln x]dx+C_1\\
&=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-\int x d[\sin(\ln x)]+C_2=x[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]-\int\cos(\ln x)dx+C_2
\end{aligned}
$$

因此

$$\int\cos(\ln x)dx=\frac{x[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]}{2}+C.$$

$$(9)\int \sec^5 x dx=\int \sec^3 x d(\tan x)=\sec^3 x\tan x-\int \tan x d(\sec^3 x)+C_1$$

$$=\sec^3 x\tan x-3\int \tan x\frac{\sin x}{\cos^4 x}dx+C_1=\sec^3 x\tan x-3\int \frac{\sin^2 x}{\cos^5 x}dx+C_1$$

$$=\sec^3 x\tan x-3\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^5 x}dx+C_1=\sec^3 x\tan x-3\int \sec^5 x dx+3\int \sec^3 x dx+C_1,$$

因此有

$$\int \sec^5 x dx=\frac{\sec^3 x\tan x+3\int \sec^3 x dx}{4}+C_2;$$

$$\int \sec^3 x dx=\int \sec x d(\tan x)=\sec x\tan x-\int \tan x d(\sec x)+C_3$$

$$=\sec x\tan x-\int \tan x\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx+C_3=\sec x\tan x-\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx+C_3$$

$$=\sec x\tan x-\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}dx+C_3=\sec x\tan x-\int \sec^3 x dx-\int \frac{1}{\cos x}dx+C_3$$

$$=\sec x\tan x-\int \sec^3 x dx-\ln|\sec x+\tan x|+C_3;$$

于是

$$\int \sec^3 x dx=\frac{\sec x\tan x-\ln|\sec x+\tan x|}{2}+C_4.$$

综上可得

$$\int \sec^5 x dx=\frac{\sec^3 x\tan x}{4}+\frac{3(\sec x\tan x-\ln|\sec x+\tan x|)}{8}+C.$$

$$(10)\int x\ln(\frac{1+x}{1-x})dx=\int x\ln(1+x)dx-\int x\ln(1-x)dx=\frac{1}{2}\int \ln(1+x)d(x^2)-\frac{1}{2}\int \ln(1-x)d(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\{x^2\ln(1+x)-\int x^2 d[\ln(1+x)]\}-\frac{1}{2}\{x^2\ln(1-x)-\int x^2 d[\ln(1-x)]\}+C_1$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(\frac{1+x}{1-x})-\frac{1}{2}\int(\frac{x^2}{1+x}+\frac{x^2}{1-x})dx+C_1=\frac{1}{2}x^2\ln(\frac{1+x}{1-x})-\int \frac{x^2}{1-x^2}dx+C_1$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(\frac{1+x}{1-x})-\int(\frac{1}{1-x^2}-1)dx+C_1=x+\frac{1}{2}x^2\ln(\frac{1+x}{1-x})-\int \frac{dx}{1-x^2}+C_1$$

$$=x+\frac{1}{2}x^2\ln(\frac{1+x}{1-x})-\frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})+C.$$

(11)$\int x\sin^2 xdx$

解：取

$$\begin{cases} I=\int x\sin^2 xdx \\ J=\int x\cos^2 xdx \end{cases},$$

那么$I+J=\int xdx=\dfrac{x^2}{2}+C_1$;

$$J-I=\int x(\cos^2 x-\sin^2 x)dx=\int x\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int xd(\sin 2x)$$

$$=\frac{x\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}\int \sin 2xdx+C_2=\frac{x\sin 2x}{2}+\frac{\cos 2x}{4}+C_3.$$

于是有

$$\begin{cases} I=\int x\sin^2 xdx=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x\sin 2x}{4}-\dfrac{\cos 2x}{8}+C \\ J=\int x\cos^2 xdx=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x\sin 2x}{4}+\dfrac{\cos 2x}{8}+C \end{cases}.$$

(12)$\int x\cos^2 xdx$, 依上题可知$\int x\cos^2 xdx=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x\sin 2x}{4}+\dfrac{\cos 2x}{8}+C.$

(13)$\int [\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}]dx=\int \ln(\ln x)dx+\int \dfrac{dx}{\ln x}=x\ln(\ln x)-\int xd[\ln(\ln x)]+\int \dfrac{dx}{\ln x}+C$

$$=x\ln(\ln x)-\int \frac{x}{\ln x}\frac{1}{x}dx+\int \frac{dx}{\ln x}+C=x\ln(\ln x)-\int \frac{1}{\ln x}dx+\int \frac{dx}{\ln x}+C$$

$$=x\ln(\ln x)+C.$$

(14)$\int \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}dx=\int \dfrac{(x+1-1)e^x}{(x+1)^2}dx=\int \dfrac{e^x}{x+1}dx-\int \dfrac{e^x}{(x+1)^2}dx=\int \dfrac{de^x}{x+1}-\int \dfrac{e^x}{(x+1)^2}dx$

$$=\frac{e^x}{x+1}-\int e^x d(\frac{1}{x+1})-\int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx+C$$

$$=\frac{e^x}{x+1}+\int \frac{e^x}{(x+1)^2}d(\frac{1}{x+1})-\int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx+C=\frac{e^x}{x+1}+C.$$

(15)$\int (\arcsin x)^2 dx \overset{\arcsin x=t}{=} \int t^2 d(\sin t)=t^2\sin t-\int \sin td(t^2)+C_1=t^2\sin t-2\int t\sin tdt+C_1$

$$=t^2\sin t+2\int td(\cos t)+C_1=t^2\sin t+2t\cos t-2\int \cos tdt+C_2$$

$$=t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t+C \overset{\arcsin x=t}{=} (\arcsin x)^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x+2x+C.$$

(16)$\int \dfrac{x}{\sin^2 x}dx=-\int xd(\cot x)=-x\cot x+\int \cot xdx+C_1=-x\cot x+\int \dfrac{\cos x}{\sin x}dx+C_1$

$$=-x\cot x+\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}dx+C_1=-x\cot x+\ln|\sin x|+C.$$

$$(17)\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int xd[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]+C_1$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int \frac{x(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})}{x+\sqrt{1+x^2}}dx+C_1$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+C_1$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int \frac{dx^2}{2\sqrt{1+x^2}}+C_1$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C.$$

$$(18)\int \sqrt{x}\ln^2 xdx = \frac{2}{3}\int \ln^2 xd(x^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x-\frac{2}{3}\int x^{\frac{3}{2}}d(\ln^2 x)+C_1$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x-\frac{2}{3}\int 2x^{\frac{1}{2}}\ln xdx+C_1 = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x-\frac{8}{9}\int \ln xd(x^{\frac{3}{2}})+C_1$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x-\frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}\ln x+\frac{8}{9}\int x^{\frac{3}{2}}d(\ln x)+C_2 = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x-\frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}\ln x+\frac{8}{9}\int x^{\frac{1}{2}}dx+C_2$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x-\frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}\ln x+\frac{16}{27}x^{\frac{3}{2}}+C.$$

4.求下列不定积分的递推公式：

$$(1)I_n = \int x^n e^{kx}dx = \frac{1}{k}\int x^n d(e^{kx}) = \frac{1}{k}x^n e^{kx}-\frac{1}{k}\int e^{kx}d(x^n) = \frac{1}{k}x^n e^{kx}-\frac{n}{k}\int e^{kx}x^{n-1}dx = \frac{1}{k}x^n e^{kx}-\frac{n}{k}I_{n-1}$$

$$(2)I_n = \int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n-\int xd(\ln x)^n = x(\ln x)^n-\int n(\ln x)^{n-1}dx = x(\ln x)^n-nI_{n-1}$$

$$(3)I_n = \int \tan^n xdx = \int \tan^{n-2}x\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}\tan^{n-2}xdx = \int \frac{\tan^{n-2}x}{\cos^2 x}dx-\int \tan^{n-2}xdx$$

$$= \int \tan^{n-2}xd(\tan x)-\int \tan^{n-2}xdx = \frac{\tan^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}.$$

$$(4)I_n = \int (\arcsin x)^n dx = x(\arcsin x)^n-\int xd(\arcsin x)^n = x(\arcsin x)^n-\int (\arcsin x)^{n-1}\frac{nx}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x(\arcsin x)^n+\int n(\arcsin x)^{n-1}d(\sqrt{1-x^2})$$

$$= x(\arcsin x)^n+n\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{n-1}-\int n\sqrt{1-x^2}d[(\arcsin x)^{n-1}]$$

$$= x(\arcsin x)^n+n\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{n-1}-\int n(n-1)(\arcsin x)^{n-2}dx$$

$$= x(\arcsin x)^n+n\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{n-1}-n(n-1)I_{n-2}.$$

5.求下列有理函数的积分：

$$(1)\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx=\int(x^2+x+1+\frac{8}{x}-\frac{4}{x+1}-\frac{3}{x-1})dx$$
$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+8\ln|x|-4\ln|x+1|-3\ln|x-1|+C.$$

$$(2)\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}=\int(-\frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+1})dx=-\frac{1}{4}\int\frac{dx^2}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}$$
$$=-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\ln|x+1|+C.$$

$$(3).\int\frac{x^2}{1-x^4}dx=\int\frac{1}{2}(\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1+x^2})dx=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

$$(4)\int\frac{dx}{1+x^3}=\int\frac{1}{3}(\frac{1}{x+1}+\frac{-x+2}{x^2-x+1})dx=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx+C_1$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int\frac{x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}d(x+\frac{1}{2})+C_1$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{d(x-\frac{1}{2})^2}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}d(x+\frac{1}{2})+C_1$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan[\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})]+C$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}})+C.$$

$$(5)\int\frac{x-2}{x^2-7x+12}dx=\int\frac{x-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}}{(x-\frac{7}{2})^2-\frac{1}{4}}d(x-\frac{7}{2})=\frac{1}{2}\ln|x^2-7x+12|+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}}{x-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}}\right|+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-7x+12|+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-4}{x-3}\right|+C=2\ln|x-4|-\ln|x-3|+C.$$

$$(6)\int\frac{x+4}{(x^2-1)(x+2)}dx=\int\frac{1}{6}(\frac{-9}{x+1}+\frac{5}{x-1}+\frac{4}{x+2})dx=-\frac{3}{2}\ln|x+1|+\frac{5}{6}\ln|x-1|+\frac{2}{3}\ln|x+2|+C.$$

$$(7)\int\frac{dx}{x^4+1}=\int(\frac{\frac{\sqrt2}{4}x+\frac12}{x^2+\sqrt2x+1}+\frac{-\frac{\sqrt2}{4}x+\frac12}{x^2-\sqrt2x+1})dx=\int[\frac{\frac{\sqrt2}{4}(x+\frac{\sqrt2}{2})+\frac14}{(x+\frac{\sqrt2}{2})^2+\frac12}+\frac{-\frac{\sqrt2}{2}(x-\frac{\sqrt2}{2})+\frac14}{(x-\frac{\sqrt2}{2})^2+\frac12}]dx$$

$$=\frac{\sqrt2}{8}\ln\left|\frac{(x+\frac{\sqrt2}{2})^2+\frac12}{(x-\frac{\sqrt2}{2})^2+\frac12}\right|+\frac{\sqrt2}{4}\arctan(\sqrt2x+1)+\frac{\sqrt2}{4}\arctan(\sqrt2x-1)+C$$

$$=\frac{\sqrt2}{8}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt2x+1}{x^2-\sqrt2x+1}\right|+\frac{\sqrt2}{4}\arctan(\sqrt2x+1)+\frac{\sqrt2}{4}\arctan(\sqrt2x-1)+C.$$

$$(8)\int\frac{2x-3}{x^2+2x+1}dx=\int\frac{2(x+1)-5}{(x+1)^2}dx=\ln(x^2+2x+1)+\frac{5}{x+1}+C.$$

$$(9)\int\frac{dx}{x^2+4x+2}=\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2-2}=\frac{1}{2\sqrt2}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt2}{x+2+\sqrt2}\right|+C.$$

$$(10)\int\frac{dx}{8-2x-x^2}=-\int\frac{dx}{6(x-2)(x+4)}=-\frac16(\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{dx}{x+4})=-\frac16\ln\left|\frac{x-2}{x+4}\right|+C$$

6.求下列三角函数有理式积分：

$$(1)\int\frac{dx}{4+5\cos x}=2\int\frac{d(\frac{x}{2})}{4\cos^2\frac{x}{2}+4\sin^2\frac{x}{2}+5\cos^2\frac{x}{2}-5\sin^2\frac{x}{2}}=2\int\frac{d(\frac{x}{2})}{9\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=2\int\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}d(\frac{x}{2})}{9-\tan^2\frac{x}{2}}=2\int\frac{d(\tan\frac{x}{2})}{9-\tan^2\frac{x}{2}}=-\frac13\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-3}{\tan\frac{x}{2}+3}\right|+C$$

$$(2)\int\frac{dx}{5+4\sin 2x}=\int\frac{dx}{5\sin^2x+5\cos^2x+8\sin x\cos x}=\int\frac{\frac{1}{\cos^2x}dx}{5\tan^2x+5+8\tan x}$$

$$=\int\frac{d(\tan x)}{5\tan^2x+5+8\tan x}=\frac15\int\frac{d(\tan x)}{\tan^2x+\frac85\tan x+1}=\frac15\int\frac{d(\tan x)}{(\tan x+\frac45)^2+(\frac35)^2}$$

$$=\frac15\frac53\arctan\frac{5(\tan x+\frac45)}{3}+C=\frac13\arctan(\frac53\tan x+\frac43)+C.$$

(3) $\int \frac{dx}{2+\sin^2 x} = \int \frac{d(\tan x)}{3\tan^2 x+2} = \frac{1}{3}\int \frac{d(\tan x)}{\tan^2 x+\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\tan x) + C$

$= \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan(\frac{\sqrt{6}}{2}\tan x) + C.$

(4) $\int \frac{\sec x}{(1+\sec x)^2}dx = \int \frac{\frac{1}{\cos x}}{(1+\frac{1}{\cos x})^2}dx = \int \frac{1}{(\cos x+1)(1+\frac{1}{\cos x})}dx = \int \frac{\cos x}{(\cos x+1)^2}dx$

$= \int \frac{1}{\cos x+1}dx - \int \frac{1}{(\cos x+1)^2}dx = 2\int \frac{d(\frac{x}{2})}{2\cos^2\frac{x}{2}} - 2\int \frac{d(\frac{x}{2})}{(2\cos^2\frac{x}{2})^2}$

$= \tan\frac{x}{2} - \int \frac{d(\tan\frac{x}{2})}{2\cos^2\frac{x}{2}} + C_1 = \tan\frac{x}{2} - \frac{\tan\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\int \tan\frac{x}{2}d(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}) + C_1$

$= \tan\frac{x}{2} - \frac{\tan\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\int \frac{\tan^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}dx + C_1 = \tan\frac{x}{2} - \frac{\tan\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{3}\tan^3\frac{x}{2} + C.$

(5) $\int \frac{dx}{1+\tan x} = \int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx,$

取

$$\begin{cases} I = \int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx \\ J = \int \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx \end{cases},$$

那么有

$$\begin{cases} I+J = \int dx = x+C \\ I-J = \int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx = \int \frac{d(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x} = \ln\left|\cos x+\sin x\right| + C \end{cases};$$

于是

$$\begin{cases} I = \int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx = \frac{x+\ln\left|\cos x+\sin x\right|}{2} + C \\ J = \int \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx = \frac{x-\ln\left|\cos x+\sin x\right|}{2} + C \end{cases}.$$

$$(6)\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=\int\frac{1}{3}\left(\frac{-\sin x}{2+\cos x}+\frac{2-\cos x}{\sin x}\right)dx=\frac{1}{3}\int\frac{d(\cos x)}{2+\cos x}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{\sin x}-\frac{1}{3}\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}$$

$$=\frac{1}{3}\ln|2+\cos x|+\frac{2}{3}\int\frac{\sin xdx}{1-\cos^2 x}-\frac{1}{3}\ln|\sin x|+C_1$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+\cos x}{\sin x}\right|-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+C.$$

$$(7)\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\left(\int\frac{1+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx-\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}dx-2\int\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}+1-\tan\frac{x}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}\right|+C.$$

$$(8)\int\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx=-\int\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}d(\cos x)=-\int\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}d(\cos x)=\int\left(1-\frac{2}{1+\cos^2 x}\right)d(\cos x)$$

$$=\cos x-2\arctan(\cos x)+C$$

$$(9)\int\tan^3 xdx\overset{参见T_{4(3)}}{=}\frac{1}{2}\tan^2 x-\int\tan xdx+C_1=\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C.$$

$$(10)\int\frac{1}{\sin^2 x\cos x}dx=\int\frac{\cos x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{d\sin x}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)}\overset{\sin x=t}{=}\int\frac{dt}{t^2(1-t^2)}=\int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{1-t^2}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C\overset{\sin x=t}{=}-\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C$$

(11) $\int \frac{\cos x}{\sin x+2\cos x}dx$

取

$$\begin{cases} I=\int \frac{\cos x}{\sin x+2\cos x}dx \\ J=\int \frac{\sin x}{\sin x+2\cos x}dx \end{cases},$$

那么

$$\begin{cases} 2I+J=\int dx=x+C \\ I-2J=\int \frac{\cos x-2\sin x}{\sin x+2\cos x}dx=\int \frac{d(\sin x+2\cos x)}{\sin x+2\cos x}=\ln|\sin x+2\cos x|+C \end{cases};$$

于是

$$I=\int \frac{\cos x}{\sin x+2\cos x}dx=\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}\ln|\sin x+2\cos x|+C.$$

(12) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx=\int \frac{\sin^2 x}{2-\sin^2 x}dx=\int(-1+\frac{2}{2-\sin^2 x})dx=-x+2\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}+C_1$

$$=-x+2\int \frac{d(\tan x)}{\tan^2 x+2}+C_1=-x+\sqrt{2}\arctan(\frac{\sqrt{2}}{2}\tan x)+C.$$

7.求下列无理函数的积分：

(1) $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\overset{x^{1/6}=t}{=}\int \frac{6t^5dt}{t^6(1+2t^3+t^2)}=6\int \frac{dt}{t(1+t)(2t^2-t+1)}=\frac{3}{2}\int(\frac{4}{t}-\frac{1}{t+1}-\frac{6t-1}{2t^2-t+1})\,dx$

$$=6\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|1+t|-\frac{3}{4}\int \frac{6(t-\frac{1}{4})+\frac{1}{2}}{(t-\frac{1}{4})^2+\frac{7}{16}}dt+C_1$$

$$=6\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|1+t|-\frac{9}{4}\ln\left|t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right|-\frac{3}{8}\frac{4\sqrt{7}}{7}\arctan[\frac{4\sqrt{7}}{7}(t-\frac{1}{4})]+C$$

$$\overset{x^{1/6}=t}{=}\ln|x|-\frac{3}{2}\ln|1+x^{1/6}|-\frac{9}{4}\ln\left|x^{1/3}-\frac{x^{1/6}}{2}+\frac{1}{2}\right|-\frac{3\sqrt{7}}{14}\arctan[\frac{4\sqrt{7}}{7}(x^{1/6}-\frac{1}{4})]+C$$

(2) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx=\int \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{2}dx=\int \frac{x+1+x-1-2\sqrt{x^2-1}}{2}dx$

$$=\int(x-\sqrt{x^2-1})\,dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C.$$

$$(3)\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{d(\frac{1}{x})}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}}\overset{\frac{1}{x}=t}{=}-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+\frac{1}{2}}}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{d(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{2}}\right|+C$$

$$\overset{\frac{1}{x}=t}{=}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}\right|+C.$$

$$(4)\int x\sqrt{x^2-2x+2}dx=\int[(x-1)\sqrt{(x-1)^2+1}+\sqrt{(x-1)^2+1}]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\sqrt{(x-1)^2+1}d(x-1)^2+\int\sqrt{(x-1)^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}(x^2-2x+2)^{\frac{3}{2}}+\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2}+\frac{1}{2}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right|+C.$$

$$(5)\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x^2}=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dx}{x^2}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{dx}{x^3\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}-\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d(\frac{1}{x^2})}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}+\int\frac{d(\frac{1}{x})}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}=-\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}+\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right|+C$$

$$(6)\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}=\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+C.$$

$$(7)\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx=-\int\frac{1+x-x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx+\int\frac{1+x}{\sqrt{1+x-x^2}}dx=-\int\sqrt{1+x-x^2}dx+\int\frac{(x-\frac{1}{2})+\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}dx$$

$$=-\frac{x-\frac{1}{2}}{2}-\frac{5}{8}\arcsin\frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{5}}+\frac{1}{2}\ln\left|1+x-x^2\right|-\frac{3}{2}\arcsin\frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{5}}+C$$

$$=-\frac{x-\frac{1}{2}}{2}-\frac{11}{8}\arcsin\frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{5}}+\frac{1}{2}\ln\left|1+x-x^2\right|+C.$$

$$(8)\int\sqrt{x^2+x+1}dx=\int\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx=\frac{x+\frac{1}{2}}{2}\sqrt{x^2+x+1}+\frac{3}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.$$

$$(9)\int\frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^4}}=\int\frac{xdx}{x^2\sqrt[4]{1+x^4}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{x^2\sqrt[4]{1+x^4}}\overset{x^2=t}{=}\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t\sqrt[4]{1+t^2}}=\frac{1}{4}\int\frac{dt^2}{t^2\sqrt[4]{1+t^2}}\overset{t^2=s}{=}\frac{1}{4}\int\frac{ds}{s\sqrt[4]{1+s}}$$

$$\overset{y=\sqrt[4]{1+s}}{=}\frac{1}{4}\int\frac{d(y^4-1)}{(y^4-1)y}=\int\frac{y^2dy}{(y^4-1)}=\frac{\arctan y}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-y}{1+y}\right|+C$$

$$\overset{y=\sqrt[4]{1+s}}{=}\frac{\arctan\sqrt[4]{1+s}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\sqrt[4]{1+s}}{1+\sqrt[4]{1+s}}\right|+C\overset{t^2=s}{=}\frac{\arctan\sqrt[4]{1+t^2}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\sqrt[4]{1+t^2}}{1+\sqrt[4]{1+t^2}}\right|+C$$

$$\overset{x^2=t}{=}\frac{\arctan\sqrt[4]{1+x^4}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\sqrt[4]{1+x^4}}{1+\sqrt[4]{1+x^4}}\right|+C.$$

$$(10)\int\frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}=\int\frac{xdx}{x\sqrt[4]{\frac{1-x}{x}}}=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{1-x}{x}}}\overset{\sqrt[4]{\frac{1-x}{x}}=t}{=}\int\frac{d(\frac{1}{1+t^4})}{t}=-\int\frac{4t^2dt}{(1+t^4)^2}$$

$$=-\frac{1}{8}[\frac{8t^3}{1+t^4}-2\sqrt{2}\arctan(1-\sqrt{2}t)+2\sqrt{2}\arctan(1+\sqrt{2}t)+\sqrt{2}\ln\left|\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right|]+C$$

$$\overset{\sqrt[4]{\frac{1-x}{x}}=t}{=}-\frac{1}{8}[8x(\frac{1-x}{x})^{3/4}-2\sqrt{2}\arctan(1-\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{1-x}{x}})+2\sqrt{2}\arctan(1+\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{1-x}{x}})$$

$$+\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}}-\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{1-x}{x}}+1}{\sqrt{\frac{1-x}{x}}+\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{1-x}{x}}+1}\right|]+C$$

8.求下列不定积分：

$$(1)\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}-ab-(x-\frac{a+b}{2})^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4}-(x-\frac{a+b}{2})^2}}$$

$$=\arcsin\frac{2(x-\frac{a+b}{2})}{a-b}+C=\arcsin\frac{2x-a-b}{a-b}+C.$$

$$(2)\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\alpha x^2+\beta}}=\int\frac{dx}{x^3\sqrt{\alpha+\frac{\beta}{x^2}}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(\frac{1}{x^2})}{\sqrt{\alpha+\frac{\beta}{x^2}}}=-\frac{1}{2\beta}\int\frac{d(\frac{\beta}{x^2})}{\sqrt{\alpha+\frac{\beta}{x^2}}}=-\frac{1}{\beta}\sqrt{\alpha+\frac{\beta}{x^2}}+C$$

(3) $\int xe^x\sin xdx=-\int xe^x d(\cos x)=-xe^x\cos x+\int\cos xd(xe^x)=-xe^x\cos x+\int\cos x(e^x+xe^x)dx$

由于有

$$\int xe^x\sin xdx=\int x\sin xde^x=x\sin xe^x-\int e^x d(x\sin x)=x\sin xe^x-\int e^x(\sin x+x\cos x)dx$$

于是有

$$\begin{cases}\int xe^x\sin xdx-\int xe^x\cos xdx=-xe^x\cos x+\int\cos xe^x dx\\ \int xe^x\sin xdx+\int xe^x\cos xdx=xe^x\sin x-\int\sin xe^x dx\end{cases};$$

可以求得

$$\begin{cases}\int\cos xe^x dx=\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}\\ \int\cos xe^x dx=\dfrac{e^x(\sin x+\cos x)}{2}\end{cases},$$

于是有

$$\begin{cases}\int xe^x\sin xdx=-\dfrac{xe^x(\sin x-\cos x)}{2}+\dfrac{e^x\sin x}{2}+C\\ \int xe^x\cos xdx=\dfrac{xe^x(\sin x+\cos x)}{2}-\dfrac{e^x\cos x}{2}+C\end{cases}.$$

(4) $\int xe^x\cos xdx$ 可见上题！

$$\begin{aligned}(5)\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}&=\int\frac{\sin(b-a)dx}{\sin(b-a)\sin(x+a)\sin(x+b)}=\int\frac{\sin(x+b-x-a)dx}{\sin(b-a)\sin(x+a)\sin(x+b)}\\&=\int\frac{\sin(x+b)\cos(x+a)-\sin(x+a)\cos(x+b)}{\sin(b-a)\sin(x+a)\sin(x+b)}dx\\&=\int\frac{\cos(x+a)dx}{\sin(b-a)\sin(x+a)}-\int\frac{\cos(x+b)dx}{\sin(b-a)\sin(x+b)}\\&=\frac{1}{\sin(b-a)}\ln|\sin(x+a)|-\frac{1}{\sin(b-a)}\ln|\sin(x+b)|+C\\&=\frac{1}{\sin(b-a)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)}\right|+C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(6)\int\tan x\tan(x+a)dx&=\int\frac{\sin x\sin(x+a)}{\cos x\cos(x+a)}dx=\int[\frac{\cos x\cos(x+a)+\sin x\sin(x+a)}{\cos x\cos(x+a)}-1]dx\\&=-x+\int\frac{\cos a}{\cos x\cos(x+a)}dx+C_1=-x+\int\frac{\cos adx}{\cos^2 x\cos a-\sin x\cos x\sin a}+C_1\\&=-x+\int\frac{\cos ad(\tan x)}{\cos a-\tan x\sin a}+C_1=-x-\frac{\cos a}{\sin a}\ln|-\sin a\tan x+\cos a|+C.\end{aligned}$$

$$(7)\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{x^2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}d(x^2)=-\frac{1}{2}\int \frac{(1-x^2)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}d(x^2)+\frac{1}{2}\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}d(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}\arccos xd(1-x^2)-\frac{1}{2}\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2}{3}\int \arccos xd(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-\int \arccos xd(\sqrt{1-x^2})$$

$$=\frac{1}{3}\arccos x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\int (1-x^2)^{\frac{3}{2}}d(\arccos x)$$

$$-\arccos x(\sqrt{1-x^2})+\int \sqrt{1-x^2}d(\arccos x)+C_1$$

$$=\frac{1}{3}\arccos x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}\int (1-x^2)dx-\arccos x(\sqrt{1-x^2})-\int dx+C_1$$

$$=\frac{1}{3}\arccos x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}(x-\frac{1}{3}x^3)-\arccos x(\sqrt{1-x^2})-x+C$$

$$=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}(-x^2-2)\arccos x+C.$$

$$(8)\int \frac{\tan x}{1+\tan x+\tan^2 x}dx=\int \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+\sin x\cos x+\sin^2 x}dx=\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin x\cos x}dx$$

$$=\int \frac{1+\sin x\cos x}{1+\sin x\cos x}dx-\int \frac{dx}{1+\sin x\cos x}=x-\int \frac{dx}{\cos^2 x+\sin x\cos x+\sin^2 x}+C_1$$

$$=x-\int \frac{d(\tan x)}{1+\tan x+\tan^2 x}+C_1=x-\int \frac{d(\tan x)}{(\tan x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+C_1$$

$$=x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan[\frac{2\sqrt{3}}{3}(\tan x+\frac{1}{2})]+C.$$

$$(9)\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx=\int \frac{xd(e^x)}{\sqrt{1+e^x}}=2\int xd(\sqrt{1+e^x})=2x\sqrt{1+e^x}-2\int \sqrt{1+e^x}dx+C_1$$

$$=2x\sqrt{1+e^x}-2\int \frac{\sqrt{1+e^x}}{e^x}d(e^x)+C_1\overset{e^x=t}{=}2x\sqrt{1+e^x}-2\int \frac{\sqrt{1+t}}{t}dt+C_1$$

$$\overset{\sqrt{1+t}=y}{=}2x\sqrt{1+e^x}-2\int \frac{y\bullet 2y}{y^2-1}dy+C_1=2x\sqrt{1+e^x}-4y-2\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|+C$$

$$\overset{\sqrt{1+e^x}=y}{=}2x\sqrt{1+e^x}-4\sqrt{1+e^x}-2\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C.$$

(10) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx$

取 $\frac{1}{f'(x)} = \frac{x+\sin x}{1+\cos x}$,即$f'(x) = \frac{1+\cos x}{x+\sin x}$, 那么有

$$\int f'(x)dx = \int \frac{1+\cos x}{x+\sin x} dx = \ln |x+\sin x| + C.$$

由于$f(x)$单调递增,由定理4.3可以知道$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(x)}$, 因此有

$$\int \frac{1}{f'(x)} dx = \int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx = f^{-1}(x),$$

其中$f(x) = \ln |x+\sin x| + C.$

(10) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx$

令

$$\begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases},$$

于是有

$$\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx = \int \frac{2\arctan t + \frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int (2\arctan t + \frac{2t}{1+t^2}) dt$$

$$= 2t\arctan t - 2\int t d(\arctan t) + \int \frac{d(t^2)}{1+t^2} + C_1$$

$$= 2t\arctan t - 2\int \frac{t}{1+t^2} d(\arctan t) + \int \frac{d(t^2)}{1+t^2} + C_1$$

$$= 2t\arctan t + C \overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} 2\tan\frac{x}{2}\arctan(\tan\frac{x}{2}) + C = x\tan\frac{x}{2} + C.$$

(11) $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x} dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int \frac{d(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x} = \ln |\cos x + \sin x| + C.$

(12) $\int e^{\sin x} \sin 2x dx = \int e^{\sin x} 2\sin x \cos x dx = 2\int e^{\sin x} \sin x d(\sin x) = 2\int \sin x d(e^{\sin x})$

$$= 2\sin x e^{\sin x} - 2\int e^{\sin x} d(\sin x) + C_1 = 2\sin x e^{\sin x} - 2e^{\sin x} + C.$$

$$(13)\int \arctan(1+\sqrt{x})dx = x\arctan(1+\sqrt{x}) - \int xd(\arctan(1+\sqrt{x})) + C_1$$

$$= x\arctan(1+\sqrt{x}) - \int \frac{x\bullet\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(1+\sqrt{x})^2}dx + C_1$$

$$= x\arctan(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{x}}{2+2\sqrt{x}+x}dx + C_1$$

$$\overset{\sqrt{x}=t}{=} x\arctan(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\int \frac{t\bullet 2t}{2+2t+t^2}dt + C_1$$

$$= x\arctan(1+\sqrt{x}) - \int \frac{t^2}{2+2t+t^2}dt + C_1$$

$$= x\arctan(1+\sqrt{x}) - \int (1-\frac{2t+2}{2+2t+t^2})dt + C_1$$

$$= x\arctan(1+\sqrt{x}) - t + \int \frac{d(2t+t^2)}{2+2t+t^2} + C_1$$

$$= x\arctan(1+\sqrt{x}) - t + \ln\left|2+2t+t^2\right| + C$$

$$\overset{\sqrt{x}=t}{=} x\arctan(1+\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \ln\left|2+2\sqrt{x}+x\right| + C.$$

$$(14)\int \frac{dx}{(1+2^x)^4} = \int \frac{\ln 2\bullet 2^x dx}{\ln 2\bullet 2^x(1+2^x)^4} = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{d(2^x)}{2^x(1+2^x)^4} \overset{2^x=t}{=} \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{t(1+t)^4}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\int (\frac{1}{t} - \frac{(1+t)^3+(1+t)^2+(1+t)+1}{(1+t)^4})\,dt$$

$$= \frac{1}{\ln 2}[\ln|t| - \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2(t+1)^2} + \frac{1}{3(t+1)^3}] + C$$

$$\overset{2^x=t}{=} \frac{1}{\ln 2}[\ln 2^x - \ln(2^x+1) + \frac{1}{2^x+1} + \frac{1}{2(2^x+1)^2} + \frac{1}{3(2^x+1)^3}] + C$$

第七章 定积分

第一节 定积分的概念

1.已知下列函数在指定区间上可积, 用定义求下列积分：

(1)$\int_a^b xdx \ \ (0<a<b)$;

解：注意到函数已经可积, 我们只需要找到一种满足条件的分法求和求极限就可以啦。

将区间$[a,b]$等分为n份, 分点为

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

其中$x_i=a+\dfrac{b-a}{n}$.小区间长度为

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}.$$

那么

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}x_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(a+\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n},$$

则

$$\begin{aligned}\int_a^b xdx=I&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(a+\frac{b-a}{n}\right)\bullet\frac{b-a}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{ab-a^2}{n}+\frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{n^2+n}{2}\right]\\&=\frac{(b-a)^2}{2}.\end{aligned}$$

(2)$\int_a^b kdx \ \ (0<a<b)$ (k为任意常数);

解：将区间$[a,b]$等分为n份, 分点为

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

其中$x_i=a+\dfrac{b-a}{n}$.小区间长度为

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}.$$

那么

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}k\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}k\frac{b-a}{n},$$

则

$$\begin{aligned}\int_a^b xdx=I&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}k\bullet\frac{b-a}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}k(b-a)\\&=k(b-a).\end{aligned}$$

(3)$\int_{-1}^{2}x^2dx$;

解：将区间$[-1,2]$等分为n小分,取

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}\frac{2-(-1)}{n}\left(-1+\frac{2-(-1)}{n}i\right)^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left(-1+\frac{3i}{n}\right)^2,$$

于是

$$\int_{-1}^{2}x^2dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left(-1+\frac{3i}{n}\right)^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left(1-\frac{6i}{n}+\frac{9i^2}{n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{n}-\frac{18i}{n^2}+\frac{27i^2}{n^3}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{18n(n+1)}{2n^2}+\frac{27n(n+1)(2n+1)}{n^3}\right)$$
$$=3-9+9=3.$$

(4)$\int_{0}^{1}a^xdx.$

解：将区间$[0,1]$均分为n等分,取$\sigma=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}}$, 那么

$$\int_{0}^{1}a^xdx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}a^{\frac{i}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}\bullet\left[1-\left(a^{1/n}\right)^n\right]}{\left(1-a^{1/n}\right)\bullet n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}\left(1-a\right)}{-\frac{1}{n}\ln a\bullet n}$$
$$=\frac{a-1}{\ln a}.$$

2.设$f(x)$在区间$[a+c,b+c]$上可积, 证明：$f(x+c)$在$[a,b]$上可积, 且

$$\int_a^b f(x+c)dx=\int_{a+c}^{b+c} f(x)dx.$$

证明：设$\int_{a+c}^{b+c} f(x)dx=I$,即;将区间$[a+c,b+c]$被分点

$$a+c=x_0+c<x_1+c<x_2+c<\cdots<x_n+c=b+c$$

任意分成n个小区间,小区间长度为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$, 记$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}|\Delta x_i|$, 在每个小区间上任取一点$\xi_i=\eta_i+c\in[x_{i-1}+c,x_i+c]$,做和式$\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, 应有$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=I$, 即

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i+c)\Delta x_i=I.$$

于是可知：将区间$[a,b]$被分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

任意分成n个小区间,小区间长度为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$, 记$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}|\Delta x_i|$, 在每个小区间上任取一点$\eta_i\in[x_{i-1},x_i]$,做和式$\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i+c)\Delta x_i$, 满足$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\eta_i+c)\Delta x_i=I$,即

$$\int_a^b f(x+c)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i+c)\Delta x_i=I.$$

因此有

$$\int_a^b f(x+c)dx=\int_{a+c}^{b+c} f(x)dx.$$

3.设

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=c \quad c\in(a,b)\\ 0 & x\in[a,c)\bigcup(c,b]\end{cases},$$

求证:$\int_a^b f(x)dx=0$.

证明：区间$[a,b]$被分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

任意分成n个小区间,小区间长度为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$,记$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}|\Delta x_i|$,在每个小区间上任取一点$\xi_i=\eta_i\in[x_{i-1},x_i]$,做和式$\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, 应有

$$0\le\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right|\le|\lambda f(c)|=\lambda,$$

于是当λ趋近于零时, 根据夹迫性原理可知$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=0$,

即

$$\int_a^b f(x)dx=0.$$

4.若函数$f(x)$在区间$[a,b]$可积,其积分是I,今在$[a,b]$内有限个点上改变函数$f(x)$的值使它变成另一个函数$f^*(x)$,证明：$f^*(x)$也在区间$[a,b]$可积,其积分也是I.

证明：首先设将函数$f(x)$改变m个点$x_{i_1}<x_{i_2}<\cdots<x_{i_n}$后得到函数$f^*(x)$,并设

$$\left|\sum_{j=1}^{m} f(x_{i_j})\right| = M.$$

由于$f(x)$在区间$[a,b]$可积,且积分为I,我们知道区间$[a,b]$被分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

任意分成n个小区间,小区间长度为$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i=1,2,\cdots,n)$,记$\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} |\Delta x_i|$,在每个小区间上任取一点$\xi_i = \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$,做和式$\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$,应该有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I.$$

那么对任意的$\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$\lambda<\min(\dfrac{\varepsilon}{2M},\delta)$时有$\left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$;同时

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f^*(\xi_i)\Delta x_i - I\right| \le \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| + \left|\sum_{j=1}^{m} f(x_{i_j})\Delta x_i\right|$$

$$\le \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| + M\lambda < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

因此函数$f^*(x)$也在区间$[a,b]$可积,其积分也是I.

第二节 定积分的基本性质

1.设$f(x)$在$[a,b]$连续,$f(x)\ge 0$,$f(x)$不恒为零,证明:$\int_a^b f(x)dx > 0$.

证明：设有一点$x_0\in[a,b]$使得$f(x_0)=\alpha>0$,那么有函数极限的局部保号性原理可知:$\exists\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时$f(x)>\dfrac{\alpha}{2}>0$.于是有

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx > \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{\alpha}{2}dx = \alpha\delta > 0,$$

又由于函数$f(x)$在区间$[a,b]$上满足$f(x)\ge 0$,故有

$$\int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx \ge 0,$$

则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx > \alpha\delta + 0 > 0.$$

2.设$f(x)$在$[a,b]$上连续,$\int_a^b f^2(x)dx=0$, 证明$f(x)$在区间$[a,b]$上恒等于零。

证明：由于函数$f(x)$在$[a,b]$上连续可知函数$f^2(x)$在$[a,b]$上连续, 又因为必有$f^2(x)\ \geq 0$, 那么如果函数$f^2(x)$不恒为零, 则由上题可知$\int_a^b f^2(x)dx>0$, 这与题意矛盾。

因此必有$f^2(x)\equiv 0$, 于是$f(x)\equiv 0$

3.举例说明$f^2(x)$在$[a,b]$上可积, $f(x)$在$[a,b]$上不可积。

答：取狄里克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\text{为有理数}\\ -1 & x\text{为无理数}\end{cases}.$$

显然有$D^2(x)=1$, 在任意区间上可积; 而函数$D(x)$在任意区间上不可积。

4.比较下列各对定积分的大小：

(1)$\int_0^1 xdx, \int_0^1 x^2dx$;

解：在区间$[0,1]$上必有$x\geq x^2$成立, 因此有$\int_0^1 xdx\geq\int_0^1 x^2dx.$

(2)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx, \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$;

解：在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上必有$x\geq\sin x$成立, 因此有$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx\geq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx.$

(3)$\int_{-2}^{-1}(\frac{1}{3})^x dx, \int_0^1 3^x dx.$

解：由上一节T_2可知$\int_{-2}^{-1}(\frac{1}{3})^x dx=\int_{-2+2}^{-1+2}(\frac{1}{3})^{x-2}dx=\int_0^1\frac{9}{3^x}dx.$

在区间$[0,1]$上必有$\frac{9}{3^x}\geq 3^x$成立, 因此有$\int_{-2}^{-1}(\frac{1}{3})^x dx=\int_0^1\frac{2}{3^x}dx\geq\int_0^1 3^x dx.$

5.证明下列不等式(设所给积分均存在)

(1)$1\leq\int_0^1 e^{x^2}dx\leq e$;

证明：在区间$[0,1]$上显然有$1\leq e^{x^2}\leq e$, 于是$\int_0^1 1dx\leq\int_0^1 e^{x^2}dx\leq\int_0^1 edx$, 即$1\leq\int_0^1 e^{x^2}dx\leq e.$

(2)$1\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\leq\frac{\pi}{2}$;

证明：在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上$\frac{\sin x}{x}$单调递减, 故有$1\leq\frac{\sin x}{x}\leq\frac{2}{\pi}$, 于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}dx\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx,$$

因此$1\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\leq\frac{\pi}{2}.$

(3) $\frac{\pi}{2}\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}\le\frac{\pi}{\sqrt{2}}$;

证明：在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}$单调递增, 故有$1\le\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}\le\sqrt{2}$, 于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}dx,$$

因此$\frac{\pi}{2}\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}\le\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(4) $3\sqrt{e}\le\int_e^{4e}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx\le 6$.

证明：可以验证在区间$[e,4e]$上e^2是$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$的极大值点, 且是一个最大值点, 因此在区间$[e,4e]$上有$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\le\frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}}=\frac{2}{e}$.

同样可以求得在区间$[e,4e]$上e是$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$的极小值点, 那么在区间$[e,4e]$上有$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\ge\frac{1}{\sqrt{e}}$.因此有

$$\int_e^{4e}\frac{1}{\sqrt{e}}dx\le\int_e^{4e}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx\le\int_e^{4e}\frac{2}{e}dx,$$

即$3\sqrt{e}\le\int_e^{4e}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx\le 6$.

6.证明:(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=0$.

证明:(1)由积分第一中值定理可知存在$\xi\in(0,1)$使得$\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\frac{\xi^n}{1+\xi}$, 由于$0<\xi<1$, 可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{\xi^n}{1+\xi}=0.$$

(2)由积分第一中值定理可知存在$\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$使得$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\sin^n\xi$,由于$-1<\sin\xi<1$, 可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\lim_{n\to\infty}\sin^n\xi=0.$$

7.设$f(x),g(x)$在区间$[a,b]$连续, 证明：

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\theta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)g(x)dx,$$

其中$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b;\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\xi_i,\theta_i\in[x_i,x_{i-1}],i=1,2,\cdots;\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}|\Delta x_i|$.

证明：由$f(x)$在区间$[a,b]$连续, 可知其在此闭区间上有界, 即存在$M>0$, 使得对$\forall x\in[a,b]$, 有$|f(x)|<M$.又由于$g(x)$在区间$[a,b]$连续, 因此在区间$[a,b]$上一致连续; 于是对$\forall\ \varepsilon_1>0,\exists\ \delta_1>0$, 对$\forall x_1,x_2\in[a,b]$, 当$|x_1-x_2|<\delta_1$时, 有

$$|g(x_1)-g(x_2)|<\frac{\varepsilon_1}{2M(b-a)}.$$

由于$f(x),g(x)$在区间$[a,b]$连续, 那么$f(x)g(x)$在区间$[a,b]$连续, 故可积, 因此有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)g(x)dx,$$

即对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_2>0$, 当$\lambda<\delta_2$时有$\left|\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)g(x)dx\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

那么我们取$\varepsilon_1=\varepsilon$, 此时由于$\xi_i,\theta_i\in[x_i,x_{i-1}]$, 因此有$|\xi_i-\theta_i|<|x_i-x_{i-1}|<\lambda<\delta_2$, 于是可得$|g(\xi_i)-g(\theta_i)|<\dfrac{\varepsilon_1}{2M(b-a)}$.综上此时有

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\theta_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\\
&=\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)g(x)dx+\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(\theta_i)-g(\xi_i)]\Delta x_i\right|\\
&\le\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)g(x)dx\right|+\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(\theta_i)-g(\xi_i)]\Delta x_i\right|\\
&\le\frac{\varepsilon}{2}+M\frac{\varepsilon_1}{2M(b-a)}\left|\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\right|=\frac{\varepsilon}{2}+M\frac{\varepsilon_1}{2M(b-a)}(b-a)=\varepsilon
\end{aligned}$$

于是可知$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\theta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)g(x)dx$成立.

8.设$0<\delta<1$,求证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_\delta^1(1-t^2)^n\,dt}{\int_0^1(1-t^2)^n\,dt}=0.$$

证明：由于在区间[0,1]上函数$(1-t^2)^n$是非负且单调下降的,因此有

$$0\le\lim_{n\to\infty}\frac{\int_\delta^1(1-t^2)^n\,dt}{\int_0^1(1-t^2)^n\,dt}\le\lim_{n\to\infty}\frac{\int_\delta^1(1-t^2)^n\,dt}{\int_0^{\frac{\delta}{2}}(1-t^2)^n\,dt}$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\frac{\int_\delta^1(1-\delta^2)^n\,dt}{\int_0^{\frac{\delta}{2}}(1-\frac{\delta^2}{2})^n\,dt}\le\lim_{n\to\infty}\frac{(1-\delta^2)^n(1-\delta)}{[1-(\frac{\delta}{2})^2]^n\frac{\delta}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\delta}{\frac{\delta}{2}}\left[\frac{1-\delta^2}{1-(\frac{\delta}{2})^2}\right]^n=0$$

于是有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_\delta^1(1-t^2)^n\,dt}{\int_0^1(1-t^2)^n\,dt}=0.$$

9.(1)设$f(x)$在$[a,b]$上连续, 且对$[a,b]$上任一连续函数$g(x)$均有$\int_a^b f(x)g(x)dx=0$, 证明：

$$f(x)\equiv 0, x\in[a,b].$$

证明：取连续函数$g(x)=f(x)$,则有$\int_a^b f^2(x)dx=0$, 于是由T_2可知$f(x)\equiv 0, x\in[a,b]$.

(2)设$f(x)$在$[a,b]$上连续, 且对所有那些在$[a,b]$上满足附加条件$g(a)=g(b)=0$的连续函数$g(x)$有$\int_a^b f(x)g(x)dx=0$, 证明在区间$[a,b]$上同样有$f(x)\equiv 0$.

证明：由于函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上是连续函数, 因此在该区间上有界, 即存在$M>0$, 对于$\forall x\in[a,b]$有$f(x)<M$.

对于$\forall\varepsilon>0$,我们如下构造函数$g(x)$:

取$\delta=\min(\frac{b-a}{4},\frac{\varepsilon}{2M^2})$, 当$|s-a|<\delta, |t-b|<\delta$时, 构造函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(s)(x-s)}{s-a}+f(s) & x\in[a,s)\\ f(x) & x\in[s,t]\\ \dfrac{f(t)(x-t)}{t-b}+f(t) & x\in(t,b]\end{cases}.$$

显然有

$$\begin{aligned}\left|\int_s^t f(x)g(x)dx\right| &= \left|\int_a^b f(x)g(x)dx-\int_a^s f(x)g(x)dx-\int_t^b f(x)g(x)dx\right|\\ &\le \left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|+\left|\int_a^s f(x)g(x)dx\right|+\left|\int_t^b f(x)g(x)dx\right|\\ &< 0+\left|\int_a^s f(x)f(s)dx\right|+\left|\int_t^b f(x)f(t)dx\right|\\ &< 0+\left|\int_a^s f^2(s)dx\right|+\left|\int_t^b f^2(t)dx\right|=f^2(s)|a-s|+f^2(t)|b-t|\\ &=[f^2(s)+f^2(t)]\delta<2M^2\frac{\varepsilon}{2M^2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

于是有$\lim\limits_{\substack{s\to a\\ t\to b}}\int_s^t f(x)f(x)dx=\lim\limits_{\substack{s\to a\\ t\to b}}\int_s^t f(x)g(x)dx=0$.

由于函数$F(s,t)=\int_s^t f(x)f(x)dx$是连续函数, 于是有

$$\int_a^b f(x)f(x)dx=\lim_{\substack{s\to a\\ t\to b}}\int_s^t f(x)f(x)dx=0,$$

因此可得$f(x)\equiv 0, x\in[a,b]$.

10.设$f(x), g(x)$在$[a,b]$上连续, 求证:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx},$$

而且等号成立当且仅当$g(x)=\lambda f(x)$(或$f(x)=\lambda g(x)$, 其中λ为常数).

证明：若$f(x), g(x)$在$[a,b]$上连续, 则$f^2(x), g^2(x), f(x)-g(x)$在$[a,b]$上都连续, 故可积;那么对于任意的实数$\lambda$,有$[\lambda f(x)-g(x)]^2$在$[a,b]$上也可积, 且有

$$\int_a^b [\lambda f(x)-g(x)]^2 dx \ge 0,$$

展开即得

$$\lambda^2\int_a^b f^2(x)dx - 2\lambda\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \ge 0.$$

那么关于实数λ的二次三项式的判别式Δ非正, 即有

$$4[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 - 4\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx \le 0,$$

化简后两边开方即得

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}.$$

显然当且仅当$g(x)=\lambda f(x)$时, 有$\int_a^b [\lambda f(x)-g(x)]^2 dx = 0$, 此时判别式$\Delta=0$,即上式中等号成立。

11.设$f(x), g(x)$在$[a,b]$上连续, 求证：

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx} \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx};$$

而且等号成立当且仅当$g(x)=\lambda f(x)$($\lambda \ge 0$为常数).

证明：要证

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx} \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx},$$

即证

$$\left|\sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx}\right|^2 \le \left(\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}\right)^2,$$

即

$$\left|\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx\right| \le \int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx + 2\sqrt{\int_a^b f^2(x)g^2(x)dx}.$$

由上题可知$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$, 于是有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx\right| &\le \int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx + 2\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \\ &\le \int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx + 2\sqrt{\int_a^b f^2(x)g^2(x)dx}.\end{aligned}$$

综上即知所证成立。

12.设$f(x)$在$[0,1]$上连续, $f(x)\ge\alpha>0$, 求证：

$$\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\ge\frac{1}{\int_0^1 f(x)dx}.$$

证明：由T_{10}可知

$$\sqrt{\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx}\bullet\sqrt{\int_0^1 f(x)dx}\ge\left|\int_0^1\sqrt{\frac{1}{f(x)}\bullet f(x)}dx\right|=1,$$

即$\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\bullet\int_0^1 f(x)dx\ge1$.于是有

$$\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\ge\frac{1}{\int_0^1 f(x)dx}.$$

13.设$y=\varphi(x)(x\ge0)$是严格单调增加的连续函数, $\varphi(0)=0, x=\psi(y)$是它的反函数, 证明

$$\int_0^a\varphi(x)dx+\int_0^b\psi(y)dy\ge ab\quad(a\ge0,b\ge0).$$

证明：i我们首先证明等式

$$\int_0^a\varphi(x)dx+\int_0^{\varphi(a)}\psi(y)dy=a\varphi(a).$$

由于$\varphi(x)$是严格单调增加函数,因此它的反函数$\psi(y)$也是严格单调增加函数, 因此它们分别在区间$[0,a],[0,\varphi(a)]$上可积。将区间$[0,a]$分为n份, 其各分点为

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

那么对应该分点有$y_i=\varphi(x_i)(i=0,1,2,\cdots,n)$.

又因为$\varphi(x)$在$[0,a]$上连续, 那么就一致连续。于是对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$, 当

$$\max_{1\le i\le n}\Delta x_i=\max_{1\le i\le n}(x_i-x_{i-1})<\delta_1$$

时, $|\varphi(x_{i+1})-\varphi(x_i)|<\varepsilon$.

那么

$$\begin{aligned}
&\int_0^a\varphi(x)dx+\int_0^{\varphi(a)}\psi(y)dy\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^n\varphi(x_i)\Delta x_i+\sum_{i=0}^n\psi(y_{i-1})\Delta y_i\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^n y_i(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=0}^n x_{i-1}(y_i-y_{i-1})\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^n[y_i(x_i-x_{i-1})+x_{i-1}(y_i-y_{i-1})]\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^n[y_ix_i-y_ix_{i-1}+x_{i-1}y_i-x_{i-1}y_{i-1})]\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^n[y_ix_i-x_{i-1}y_{i-1})]=\lim_{n\to\infty}(y_nx_n-y_0x_0)\\
&=a\varphi(a).
\end{aligned}$$

$ii.$那么当$b=\varphi(a)$时，有$\int_0^a\varphi(x)dx+\int_0^b\psi(y)dy=ab.$

$iii.$当$0<b<\varphi(a)$时，由介值定理可知$\exists x_0\in(0,a)$使得$\varphi(x_0)=b$，于是由于$\varphi(x)$是严格单调增加函数可得

$$\begin{aligned}&\int_0^a\varphi(x)dx+\int_0^b\psi(y)dy\\&=\int_0^{x_0}\varphi(x)dx+\int_{x_0}^a\varphi(x)dx+\int_0^{\varphi(x_0)}\psi(y)dy\\&\ge\int_0^{x_0}\varphi(x)dx+\int_0^{\varphi(x_0)}\psi(y)dy+\int_{x_0}^a\varphi(x_0)dx\\&=x_0\varphi(x_0)+(a-x_0)\varphi(x_0)=a\varphi(x_0)\\&=ab.\end{aligned}$$

$iv.$当$0<\varphi(a)<b$时有$y_0\in(0,b)$使得$\psi(y_0)=a.$那么

$$\begin{aligned}&\int_0^a\varphi(x)dx+\int_0^b\psi(y)dy\\&=\int_0^{\psi(y_0)}\varphi(x)dx+\int_{y_0}^b\psi(y)dx+\int_0^b\psi(y)dy\\&\ge\int_0^{\psi(y_0)}\varphi(x)dx+\int_{y_0}^b\psi(y_0)dx+\int_0^b\psi(y)dy\\&=b\psi(y_0)+(b-y_0)\psi(y_0)=b\psi(y_0)\\&=ab.\end{aligned}$$

$v.$综上即可知

$$\int_0^a\varphi(x)dx+\int_0^b\psi(y)dy\ge ab\quad(a\ge0,b\ge0),$$

当且仅当$b=\varphi(a)$时等号成立。

14.用一致收敛的定义验证：

(1)$f(x)=\sqrt[3]{x}$在$[0,1]$上是一致连续的，

(2)$f(x)=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上是一致连续的，

(3)$f(x)=x^2$在$[a,b]$上一致连续，但在$(-\infty,+\infty)$上非一致连续，

(4)$f(x)=\sin x^2$在$(-\infty,+\infty)$上非一致连续。

证明:(1)对于任意的$x_1,x_2\in[0,1]$，由于

$$\left|\sqrt[3]{x_1}-\sqrt[3]{x_2}\right|=\frac{|x_1-x_2|}{x_1^{2/3}+x_1^{1/3}x_2^{1/3}+x_2^{2/3}}\le\frac{|x_1-x_2|}{x_1^{2/3}-2x_1^{1/3}x_2^{1/3}+x_2^{2/3}}=\frac{|x_1-x_2|}{\left(x_1^{1/3}-x_2^{1/3}\right)^2}$$

即$\left|\sqrt[3]{x_1}-\sqrt[3]{x_2}\right|\le\sqrt[3]{|x_1-x_2|}$，那么对于$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\varepsilon^3$，当$|x_1-x_2|<\delta=\varepsilon^3$时，有$\left|\sqrt[3]{x_1}-\sqrt[3]{x_2}\right|<\varepsilon.$

因此$f(x)=\sqrt[3]{x}$在$[0,1]$上是一致连续的。

(2).对于$\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$,有

$$\left|\sin x_1-\sin x_2\right|=2\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\le 2\frac{\left|x_1-x_2\right|}{2}=\left|x_1-x_2\right|,$$

于是对于$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\varepsilon$,当$\left|x_1-x_2\right|<\delta$时,有$\left|\sin x_1-\sin x_2\right|<\varepsilon$成立。

因此在$(-\infty,+\infty)$上$\sin x$一致连续。

(3)$i.$对于$\forall x_1,x_2\in[a,b]$,有

$$\left|x_1^2-x_2^2\right|=\left|x_1+x_2\right|\left|x_1-x_2\right|\le\left(\left|x_1\right|+\left|x_2\right|\right)\left|x_1-x_2\right|\le 2b\left|x_1-x_2\right|,$$

于是对于$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{2b}$,当$\left|x_1-x_2\right|<\delta$时,有$\left|x_1^2-x_2^2\right|<2b\left|x_1-x_2\right|=\varepsilon$成立。

因此在$[a,b]$上x^2一致连续。

$ii.$取$\varepsilon_0=1$,无论δ多么小,总存在$x_1=\dfrac{1}{\delta},x_2=\dfrac{1}{\delta}+\dfrac{\delta}{2}$,使得$\left|x_1-x_2\right|<\delta$,但是

$$\left|x_1^2-x_2^2\right|=\left|x_1+x_2\right|\left|x_1-x_2\right|=1+\frac{\delta^2}{4}>1=\varepsilon_0.$$

因此在$(-\infty,+\infty)$上x^2非一致连续。

(4)取$x_1=\sqrt{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}},x_2=\sqrt{2n\pi}$,易知$\left|\sin x_1^2-\sin x_2^2\right|=1$,但此时

$$\left|x_1-x_2\right|=\left|\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2n\pi}\right|=\left|\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{2n\pi}}\right|\to 0(n\to\infty)$$

于是存在$\varepsilon_0=1$,对于任意的$\delta>0$,当$\left|x_1-x_2\right|<\delta$时,

$$\left|\sin x_1^2-\sin x_2^2\right|=1=\varepsilon_0.$$

因此在$(-\infty,+\infty)$上$\sin x^2$非一致连续。

第三节 微积分基本定理

1.计算下列定积分:

(1)$\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2 xdx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$

(2)$\displaystyle\int_0^{a}\sqrt{a-x}dx=-\frac{2}{3}(a-x)^{\frac{2}{3}}\Big|_0^{a}=\frac{2}{3}a^{\frac{2}{3}}.$

(3)$\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin^2 x}dx=\int_0^{\pi}\left|\cos x\right|dx=2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2.$

(4)$\displaystyle\int_{-3}^{-4}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}=\int_{-3}^{-4}\frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{4}{x}}}=-\int_{-3}^{-4}\frac{d\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}}}=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{x}\Big|_{-3}^{-4}=\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$

$$(5)\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^2 \ln x d\left(\ln x\right) = \left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^2 = \frac{\ln^2 2}{2}.$$

$$(6)\int_{\frac{1}{e}}^{e} \left|\ln x\right| dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x dx + \int_1^e \ln x dx = -x\ln x + x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + x\ln x - x\Big|_1^e = 2 - \frac{2}{e}.$$

2.求下列极限：

$$(1)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{k\pi}{n} = \int_0^1 \sin(\pi x)dx = -\left.\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

$$(2)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{n+i}{n}}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

$$(3)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}\frac{1}{n} = \int_0^1 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$(4)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right] = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i\pi}{n}}\frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+\cos(\pi x)}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sqrt{2}\left|\cos(\pi x)\right| d\left(\pi x\right) = \frac{1}{\pi}2\sqrt{2}\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

3.若$f(x)$连续,求$F'(x)$:

$(1)F(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt,$

解：我们首先设$G'(x) = f(x),$则

$$F'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_0^{(x+\Delta x)^2} f(t)dt - \int_0^{x^2} f(t)dt}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_{x^2}^{(x+\Delta x)^2} f(t)dt}{\Delta x}$$

$$\overset{\text{牛顿莱布尼兹公式}}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{G(x)\Big|_{x^2}^{(x+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{G((x+\Delta x)^2)-G(x^2)}{\Delta x}$$

$$= [G(x^2)]' = G(x^2)\left(x^2\right)'$$

$$= 2xf(x^2).$$

$(2)F(x)=\int_x^b f(t)dt,$

解：我们首先设$G'(x)=f(x)$,则

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_{x+\Delta x}^b f(t)dt-\int_x^b f(t)dt}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_{x+\Delta x}^x f(t)dt}{\Delta x}$$

$$\overset{\text{牛顿莱布尼兹公式}}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{G(x)\Big|_{x+\Delta x}^x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{G(x)-G(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}$$

$$=-G'(x)=-f(x).$$

$(3)F(x)=\int_x^{x^3} e^{t^2}dt,$

解：我们首先设$G'(x)=e^{x^2}$,则

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_{x+\Delta x}^{(x+\Delta x)^3} e^{t^2}dt-\int_x^{x^3} f(t)dt}{\Delta x}$$

$$\overset{\text{牛顿莱布尼兹公式}}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{G(x)\Big|_{x+\Delta x}^{(x+\Delta x)^3}-G(x)\Big|_x^{x^3}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{G((x+\Delta x)^3)-G(x+\Delta x)-[G(x^3)-G(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{G((x+\Delta x)^3)-G(x^3)}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}$$

$$=[G(x^3)]'-G'(x)=e^{x^6}\left(x^3\right)'-e^{x^2}$$

$$=3x^2e^{x^6}-e^{x^2}.$$

4.求下列极限：

$$(1)\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos t^2dt}{x}\overset{\text{洛比达法则}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1}=1.$$

$$(2)\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}\overset{\text{洛比达法则}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt\bullet e^{x^2}}{e^{2x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}\overset{\text{洛比达法则}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

5.求函数$F(x)=\int_{-1}^{x}|t|dt, x\in[-1,1]$.

解：当$x\in[-1,0]$时, $F(x)=\int_{-1}^{x}|t|dt=-\int_{-1}^{x}tdt=-\left.\frac{t^2}{2}\right|_{1}^{x}=-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$;

当$x\in(0,1]$时, $F(x)=\int_{-1}^{x}|t|dt=-\int_{-1}^{0}tdt+\int_{0}^{x}tdt=-\left.\frac{t^2}{2}\right|_{1}^{0}+\left.\frac{t^2}{2}\right|_{0}^{x}=\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}$.

综上有

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{2} & x\in[-1,0]\\ \dfrac{1+x^2}{2} & x\in(0,1]\end{cases}.$$

6.设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续且单调递增, 求证：函数

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_{0}^{x}f(t)dt$$

在区间$(0,+\infty)$上连续且单调递增。

证明：由于函数$\frac{1}{x},\int_{0}^{x}f(t)dt$在区间$(0,+\infty)$内都连续, 因此函数$F(x)=\frac{1}{x}\int_{0}^{x}f(t)dt$在此区间上连续。

可以求得函数$F(x)$的导函数为

$$F'(x)=\frac{xf(x)-\int_{0}^{x}f(t)dt}{x^2},$$

由于函数$f(t)$单调递增,因此有

$$F'(x)=\frac{xf(x)-\int_{0}^{x}f(t)dt}{x^2}>\frac{xf(x)-\int_{0}^{x}f(x)dt}{x^2}=\frac{xf(x)-xf(x)}{x^2}=0,$$

于是可知函数$F(x)$单调递增。

7.设$f'(x)$在(a,b)连续，且$f(a)=0$，求证

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)^2}{2}\max_{a\le x\le b}|f'(x)|.$$

证明：取$M=\max\limits_{a\le x\le b}|f'(x)|$，由于

$$f(x)=\int_a^x f'(t)dt - f(a)=\int_a^x f'(t)dt$$

则有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\int_a^b\int_a^x f'(t)dtdx\right| \le \left|\int_a^b\int_a^x Mdtdx\right| \\ &= M\left|\int_a^b\int_a^x dtdx\right| = M\left|\int_a^b (x-a)dx\right| \\ &= M\left.\frac{(x-a)^2}{2}\right|_a^b = M\frac{(b-a)^2}{2}.\end{aligned}$$

综上即有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)^2}{2}\max_{a\le x\le b}|f'(x)|.$$

第四节 定积分的计算

1.计算下列定积分：

(1)$\displaystyle\int_1^2 \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}dx=\int_1^2\left(\frac{x+1}{3}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left.\left(\frac{(x+1)^2}{6}-\ln x+\frac{1}{x}\right)\right|_1^2$

$$=\left(\frac{9}{6}-\ln 2+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{4}{6}-0+1\right)=\frac{1}{3}-\ln 2.$$

(2)$\displaystyle\int_0^1\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left.\left[\arctan\sqrt{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arctan\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\right|_0^1$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\arctan\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\arctan\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

(3)$\displaystyle\int_{-\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}}x\sqrt{2-5x}dx \overset{\sqrt{2-5x}=t}{=} \int_{\sqrt{3}}^1\frac{2-t^2}{5}td\left(\frac{2-t^2}{5}\right)=-\int_{\sqrt{3}}^1\frac{2-t^2}{25}2t^2dt$

$$=-\int_{\sqrt{3}}^1\frac{4t^2-2t^4}{25}dt=\left.\frac{4}{75}t^3-\frac{2}{125}t^5\right|_1^{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}-14}{375}.$$

(4)$\displaystyle\int_4^9\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\left.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x}\right|_4^9=18+6-\frac{16}{3}-4=\frac{44}{3}.$

(5)$\displaystyle\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx=\left.\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+\frac{4}{2}\arcsin\frac{x}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}\sqrt{3}+2\arcsin\frac{1}{2}-0=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}.$

$$(6)\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \overset{x=a\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,d(a\sin t)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4\sin^2 t\cos^2 t\,dt = a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2t\,dt = \frac{a^4}{4}\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{8}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{a^2}{16}\pi.$$

$$(7)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin mx\cos nx\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left[\sin(mx+nx)+\sin(mx-nx)\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(mx+nx)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(mx-nx)\,dx$$

$$=-\frac{1}{2(m+n)}\cos(m+n)x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2(m-n)}\cos(m-n)x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2(m+n)}+\frac{1}{2(m-n)}-\frac{1}{2(m+n)}\cos(m+n)\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2(m-n)}\cos(m-n)\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{m}{m^2-n^2}-\frac{m\cos\frac{m\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}+n\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{m^2-n^2}.$$

$$(8)\int_0^1\frac{dx}{\left(x^2-x+1\right)^{3/2}}=\int_0^1\frac{dx}{\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^{3/2}}=\frac{x-\frac{1}{2}}{2\bullet\frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(x^2-x+1\right)^{1/2}}\Bigg|_0^1=\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\left(x^2-x+1\right)^{1/2}}\Bigg|_0^1=\frac{4}{3}.$$

$$(9)\int_0^3\frac{x\,dx}{1+\sqrt{1+x}} \overset{\sqrt{1+x}=t}{=} \int_1^2\frac{t^2-1}{1+t}\,d\left(t^2-1\right)=\int_1^2 2(t-1)t\,dt=\frac{2}{3}t^3-t^2\Bigg|_1^2=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=\frac{5}{3}.$$

$$(10)\int_0^4 x\left(x+\sqrt{x}\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^4=\left(\frac{4^3}{3}+\frac{2}{5}4^{\frac{5}{2}}-0\right)=\frac{312}{15}.$$

$$(11)\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx=\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sin x)}{1+\sin^2 x}=\arctan(\sin x)\Big|_1^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}-\arctan(\sin 1).$$

$$(12)\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx \overset{\sqrt{x}=t}{=} \int_0^1 2te^t\,dt=2te^t-2e^t\Big|_0^1=(2e-2e)-(0-2)=2.$$

$$(13)\int_0^1 x\arctan x\,dx=\int_0^1\arctan x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\arctan x\Bigg|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\,d(\arctan x)$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left(x-\arctan x\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

$$(14)\int_0^{2\pi}x^2\cos^2 x\,dx=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2\sin 2x+\frac{1}{4}x\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\pi^3.$$

$$(15)\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos^2 xdx=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2\sin 2x+\frac{1}{4}x\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x\bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^3}{3}.$$

$$(16)\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^2e^{-x^2}d\left(x^2\right)\overset{x^2=t}{=}\frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} te^{-t}dt=-\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{1}{2}e^{-t}\bigg|_0^{\ln 2}=-\frac{\ln 2}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{\ln 2}{4}.$$

$$(17)\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nxdx=-\frac{1}{2(m+n)}\cos(m+n)x-\frac{1}{2(m-n)}\cos(m-n)x\bigg|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

$$(18)\int_0^a x^2\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx\quad a>0;$$

$$=\int_0^a\frac{x^2(a-x)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int_0^a\frac{a(x^2-a^2)+a^3-x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=-a\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx+a^3\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{1}{2}\int_0^a\frac{x^2d\left(x^2\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=-a\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx+a^3\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{1}{2}\int_0^a\frac{(a^2-x^2)d\left(x^2\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{a^2}{2}\int_0^a\frac{d\left(x^2\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\left(4a^3+a^2x-ax^2+2x^3\right)+\frac{a^3\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a-x}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\Bigg|_0^a$$

$$=\frac{1}{12}a^3(3\pi-8).$$

$$(19\int_a^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx=\int_a^{2a}\frac{x\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}}{x^4}dx=\int_a^{2a}\frac{a\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx=-\int_a^{2a}\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{x^2}}d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{a}{3}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_a^{2a}=\frac{a}{3}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{4a^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{8a^2}.$$

$$(20)\int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}}x^3(1-5x^2)^{10}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}}x^2(1-5x^2)^{10}d\left(x^2\right)$$

$$=-\frac{1}{50}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}}(1-5x^2)^{11}d\left(1-5x^2\right)-\frac{1}{50}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}}(1-5x^2)^{10}d\left(1-5x^2\right)$$

$$=\frac{1}{600}(1-5x^2)^{12}-\frac{1}{550}(1-5x^2)^{11}\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}}=-\frac{1}{600}+\frac{1}{550}=\frac{1}{6600}.$$

2.计算下列积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x dx;$

解：$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x dx = \frac{\pi}{2},$

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1 x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d\left(\cos x\right)$

$= -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x d\left(\sin^{n-1} x\right)$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x(1-\sin^2 x) dx$

$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$

于是有$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$,那么

$I_9 = \frac{8\bullet6\bullet4\bullet2}{9\bullet7\bullet5\bullet3\bullet1} I_1 = \frac{384}{945} = \frac{128}{315}.$

(2) $\int_0^{\pi} \sin^5 x dx;$

解：$I_0 = \int_0^{\pi} \sin^0 x dx = \pi,$

$I_1 = \int_0^{\pi} \sin^1 x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = 2,$

$I_n = \int_0^{\pi} \sin^n x dx = -\int_0^{\pi} \sin^{n-1} x d\left(\cos x\right)$

$= -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x d\left(\sin^{n-1} x\right)$

$= \int_0^{\pi} (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x dx$

$= \int_0^{\pi} (n-1)\sin^{n-2} x(1-\sin^2 x) dx$

$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$

于是有$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$,那么

$I_5 = \frac{4\bullet2}{5\bullet3\bullet1} I_1 = \frac{8}{15}\bullet2 = \frac{16}{15}.$

(3) $\int_0^{2\pi} \cos^6 x dx = \int_0^{2\pi} \sin^6 \left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^6 t dt,$

由于

$$I_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^0 t dt = 2\pi, I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^1 t dt = 0,$$

于是同(1)有

$$I_6 = \frac{5\bullet3\bullet1}{6\bullet4\bullet2} I_0 = \frac{5}{8}\pi.$$

(4) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos^7 x dx = -\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin^7 \left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^7 t dt$

由于

$$I_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^0 t dt = \frac{3}{2}\pi, I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^1 t dt = 1,$$

于是同(1)有

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos^7 x dx = -I_7 = -\frac{6\bullet4\bullet2}{7\bullet5\bullet3} I_1 = -\frac{16}{35}.$$

$$(5)\int_0^a (a^2-x^2)^n dx \overset{x=a\cos t}{=} a^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)^n d(a\cos t) = -a^{2n+1}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^{2n+1} tdt = a^{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1} tdt$$

由于

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0 tdt=\frac{\pi}{2}, I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^1 tdt=1;$$

于是同(1)有

$$\int_0^a (a^2-x^2)^n dx = a^{2n+1}I_{2n+1} = a^{2n+1}\frac{(2k)\bullet(2k-2)\bullet\cdots\bullet 4\bullet 2}{(2k+1)\bullet(2k-1)\bullet\cdots\bullet 5\bullet 3}I_1 = a^{2n+1}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

$$(6)\int_0^1 (1-x^2)^6 dx \overset{x=\cos t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)^6 d(\cos t) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^{13} tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{13} tdt$$

由于

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0 tdt=\frac{\pi}{2}, I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^1 tdt=1;$$

于是同(1)有

$$\int_0^1 (1-x^2)^6 dx = a^{13}I_{13} = \frac{12\bullet 10\bullet\cdots\bullet 4\bullet 2}{13\bullet 11\bullet\cdots\bullet 5\bullet 3}I_1 = \frac{(12)!!}{(13)!!} = \frac{1024}{3003}.$$

3.证明连续的奇函数的一切原函数皆是偶函数, 连续的偶函数的原函数中有且只有一个为奇函数。

证明：$i.$若函数$f(x)$为奇函数, 则其所有原函数可以表示为

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt+C.$$

由于$f(t)$是奇函数, 那么有$-\int_{-x}^0 f(t)dt=\int_0^x f(t)dt$, 于是

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt+C=-\int_{-x}^0 f(t)dt+C=\int_0^x f(t)dt+C=F(x).$$

因此奇函数的所有原函数都是偶函数。

$ii.$若函数$g(x)$为偶函数, 则其所有原函数可以表示为

$$G(x)=\int_0^x g(t)dt+C.$$

由于$g(t)$是偶函数, 那么有$\int_{-x}^0 g(t)dt=\int_0^x g(t)dt$, 于是

$$G(-x)=\int_0^{-x} g(t)dt+C=\int_{-x}^0 g(t)dt+C=-\int_0^x f(t)dt+C,$$

若要使得$G(-x)=-G(x)$, 那么必有$C=0$.

因此偶函数的所有原函数中只有一个是奇函数。

4.设$f(x)$在所示区间是连续函数, 证明：

(1)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$;

证明:$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx \overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right))dt=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\cos t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt$, 得证。

(2)$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$;

证明:$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx \overset{x=\pi-t}{=} -\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))dt=\int_{\pi}^{0} tf(\sin t)dt-\int_{\pi}^{0}\pi f(\sin t)dt$

$$=-\int_0^{\pi} tf(\sin t)dt+\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt.$$

于是有

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

(3)$\int_1^{a} f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{dx}{x}=\int_1^{a^2} f(x+\frac{a^2}{x})\frac{dx}{2x}$;

证明:$\int_1^{a} f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{dx}{x} \overset{x^2=t}{=} \int_1^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{d\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}=\int_1^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{t}}=\int_1^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{2t}$,

于是有

$$\int_1^{a} f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{dx}{x}=\int_1^{a^2} f(x+\frac{a^2}{x})\frac{dx}{2x}.$$

(4)$\int_0^{a} x^3 f(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx.$

证明: $\int_0^{a} x^3 f(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{a} x^2 f(x^2)d\left(x^2\right) \overset{x^2=t}{=} \frac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$, 得证。

5.计算积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx.$

解：取

$$\begin{cases} I=\int\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx \\ J=\int\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx \end{cases}.$$

那么

$$\begin{cases} I+J=\int\frac{\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}dx=x+C \\ J-I=\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\int\frac{d\left(\cos x+\sin x\right)}{\cos x+\sin x}=\ln\left|\sin x+\cos x\right|+C \end{cases}.$$

于是有

$$I=\int\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\frac{x-\ln\left|\sin x+\cos x\right|}{2}+C,$$

那么由牛顿莱布尼兹公式可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\frac{x-\ln\left|\sin x+\cos x\right|}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

6.利用分部积分法证明：

$$\int_0^x f(u)(x-u)du=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du.$$

证明:$\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du=u\left(\int_0^u f(t)dt\right)-\int_0^x ud\left(\int_0^u f(t)dt\right)$

$$=\int_0^u uf(t)\,dt-\int_0^x uf(u)\,du$$

$$=\int_0^x xf(u)du-\int_0^x uf(u)du$$

$$=\int_0^x(x-u)\,f(u)\,du.$$

得证。

$7.$设$f''(x)$在$[a,b]$上连续,且$f(a)=f(b)=0$,

求证:$(1)\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx$;

$(2)\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{(b-a)^3}{12}\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$.

证明：可以知道$i.f(x)=\int_a^x f'(t)dt,ii.f(x)=-\int_x^b f'(t)dt$

$iii.f'(x)=\int_a^x f''(t)dt+f'(a)$,

$iv.f'(x)=f'(b)-\int_x^b f''(t)dt$

于是有

$$
\begin{aligned}
<1>\int_a^b f(x)dx&\overset{i}{=}\int_a^b\left(\int_a^x f'(t)dt\right)dx\\
&=x\left(\int_a^x f'(t)dt\right)\Bigg|_a^b-\int_a^b xd\left(\int_a^x f'(t)dt\right)\\
&=b\int_a^b f'(t)dt-\int_a^b xf'(x)dx\\
&=-\int_a^b (x-b)f'(x)dx\\
&\overset{iii}{=}-\int_a^b (x-b)\left[\int_a^x f''(t)dt+f'(a)\right]dx\\
&=-\frac{1}{2}(x-b)^2\int_a^x f''(t)dt\Bigg|_a^b+\frac{1}{2}\int_a^b (x-b)^2d\left(\int_a^x f''(t)dt\right)-\frac{1}{2}(x-b)^2f'(a)\Bigg|_a^b\\
&=\frac{1}{2}\int_a^b (x-b)^2f''(x)dx+\frac{1}{2}(a-b)^2f'(a)\\
&=\frac{1}{2}\int_a^b (x^2-2bx+b^2)f''(x)dx+\frac{1}{2}(a-b)^2f'(a);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
<2>\int_a^b f(x)dx&\overset{ii}{=}-\int_a^b\left(\int_x^b f'(t)dt\right)dx\\
&=-x\left(\int_x^b f'(t)dt\right)\Bigg|_a^b+\int_a^b xd\left(\int_x^b f'(t)dt\right)\\
&=a\int_a^b f'(t)dt-\int_a^b xf'(x)dx\\
&=-\int_a^b (x-a)f'(x)dx\\
&\overset{iii}{=}-\int_a^b (x-a)\left[\int_a^x f''(t)dt+f'(a)\right]dx\\
&=-\frac{1}{2}(x-a)^2\int_a^x f''(t)dt\Bigg|_a^b+\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)^2d\left(\int_a^x f''(t)dt\right)-\frac{1}{2}(x-a)^2f'(a)\Bigg|_a^b\\
&=-\frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b f''(t)dt+\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)^2f''(x)dx-\frac{1}{2}(a-b)^2f'(a)\\
&=\frac{1}{2}\int_a^b\left[(x-a)^2-(b-a)^2\right]f''(x)dx-\frac{1}{2}(a-b)^2f'(a)
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b (x^2-2ax+2ab-b^2)f''(x)dx-\frac{1}{2}(a-b)^2 f'(a);$$

将 $<1>,<2>$ 所得结果相加可得

$$2\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b (x^2-2bx+b^2+x^2-2ax+2ab-b^2)f''(x)dx$$

$$=\int_a^b (x^2-bx-ax+ab)f''(x)dx=\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx$$

于是有 $\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx$, 得证。

(2)取 $M=\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$, 那么有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx\right|\le\frac{M}{2}\left|\int_a^b (x-a)(x-b)dx\right|$$

$$=\frac{M}{2}\left|\int_a^b (x-a)^2-(x-a)(b-a)dx\right|$$

$$=\frac{M}{2}\left(\left|\frac{(x-a)^3}{3}-\frac{(b-a)(x-a)^2}{2}\right|\right)\Bigg|_a^b$$

$$=\frac{M}{2}\frac{(b-a)^3}{6}=\frac{M(b-a)^3}{12}.$$

于是有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{(b-a)^3}{12}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|.$$

8.设 $f(x)$ 在 $x>0$ 时连续, 对任意 $a,b>0$, 积分 $\int_a^{ab} f(x)dx$ 与 a 无关, 求证: $f(x)=\frac{c}{x}$(c 为常数).

证明：取

$$F(a)=\int_a^{ab} f(x)dx,$$

那么由于 $F(a)=\int_a^{ab} f(x)dx$ 与 a 无关可知：$F(a)$ 关于 a 为常数, 那么有

$$\frac{dF(a)}{da}=bf(ab)-f(a)=0$$

于是有 $f(ab)=\frac{f(a)}{b}$, 令 $a=1$ 可得 $f(b)=\frac{f(1)}{b}$, 即

$$f(x)=\frac{c}{x}\quad\left(c=f(1)\right).$$

9.设$f(x)$在任意有限区间上可积，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$，求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(x)dx=l$.

证明：我们进行分类讨论。

当$l>0$时候，那么根据极限的保号性，可以知道$\exists X>0$，当$x>X$时，有$f(x)>\dfrac{l}{2}$. 于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(x)dx&=\int_0^X f(x)dx+\lim_{x\to+\infty}\int_X^x f(x)dx\\&>\int_0^X f(x)dx+\lim_{x\to+\infty}\int_X^x \frac{l}{2}dx\\&=\int_0^X f(x)dx+\lim_{x\to+\infty}\frac{l}{2}(x-X)\\&=+\infty\end{aligned}$$

那么对于极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(x)dx$我们使用洛比达法则即得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{1}=l.$$

同理当$l<0$时，我们也可以使用洛比达法则求得所证。

当$l=0$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(x)dx$无非有三种情况，$i.$极限存在，$ii.$极限不存在但有界，$iii$ 极限不存在且趋向于无穷。

对于前两种情况易知$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(x)dx=0=l$，对于第三种情况我们仍然使用洛比达法则即得所证。

综上即知所证成立。

第五节 定积分在物理中的应用初步

1.有一薄板$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\left(a>b\right)$，长轴沿铅直方向一半浸入水中，求水对板的压力。

解：如右图(1)，B,C两点的坐标为$(0,b),(a,0)$，曲线BC的方程为$y=\sqrt{b^2-\dfrac{b^2}{a^2}x^2}$.由于在相同深处水的静压强相同，其值为$\rho gx$，故当$\Delta x$很小时，薄板从$x$到$x+\Delta x$上所受的静压力为

$$\Delta p\approx dp=2ydx\bullet\rho gx=2\rho gx\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}dx$$

于是浸入水中的薄板受到的压力为

$$p=\int_0^a dp=\int_0^a 2\rho gx\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}dx=\frac{2}{3}a^2b\rho g.$$

(其中$\rho=1000kg/m^3$，g取$9.8m/s^2$)

2.修建大桥桥墩时要先下围图。设一圆柱围图的直径为$20\ m$, 水深$27\ m$, 围图高出水面$3\ m$, 要把水抽尽, 计算克服重力所做的功。

解：圆柱底面积为

$$S=\pi r^2=100\pi,$$

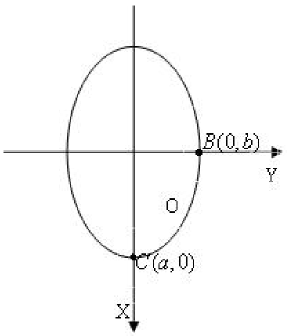
相同深处的水抽上需要做相同的功, Δx很小时, 从深度x到$x+\Delta x$的水层需做功为

$$dw=100\pi dxx=\rho g100\pi xdx;$$

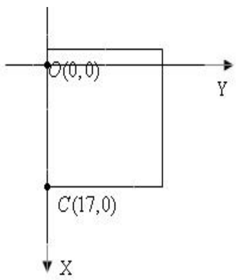
如图(2)我们沿着OC直线积分可得总做功为

$$W=\int_0^{17}dw=\int_0^{17}\rho g100\pi xdx\approx 4.44881\times 10^8\ j.$$

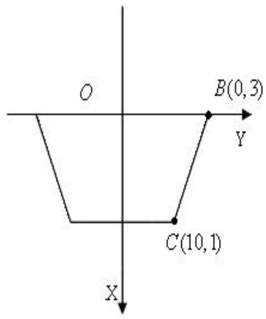
(其中$\rho=1000kg/m^3$, g取$9.8m/s^2$)



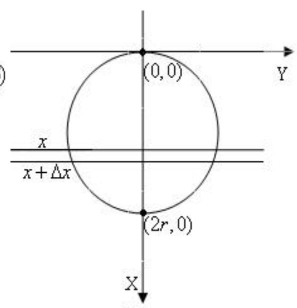
图(1)



图(2)



图(3)



图(4)

3.某水库的闸门是一梯形, 上底$6\ m$, 下底$2\ m$, 高$10\ m$, 求水灌满时闸门所受力。

解：如图(3), B,C点的坐标为$(0,3),(10,1)$, 则BC直线为

$$y=-\frac{1}{5}x+3.$$

那么

$$dp=2ydx\bullet\rho gx=2\rho g(-\frac{1}{5}x+3)xdx$$

于是

$$P=\int_0^{10}dp=\int_0^{10}2\rho g(-\frac{1}{5}x+3)xdx\approx 1.633\times 10^6\ N.$$

(其中$\rho=1000kg/m^3$, g取$9.8m/s^2$)

4.半径为r的球沉入水中, 它与水面相接, 球的比重为1, 现将球从水中取出, 问需要做多少功。

解：由于球的比重为1,因此只有当球的某部分在水外时, 才对这部分做功。如图(4) 与x点相同深度的球层的被做功距离为$l=2r-x$, 当Δx充分小的时, 从x到$x+\Delta x$这部分球体质量为$1\bullet x(2r-x)dx$, 于是对其所做的功为

$$dw=gl1\bullet x(2r-x)dx=(2r-x)g\bullet\pi x(2r-x)dx;$$

那么总做功为

$$W=\int_0^{2r}dw=\int_0^{2r}(2r-x)g\bullet\pi x(2r-x)dx=\frac{4\pi gr^4}{3}.$$

5.把弹簧拉长所需力与弹簧伸长成正比，已知$1\,kg$的力能使弹簧伸长$1\,cm$，问把弹簧拉长$10\,cm$需要做多少功。

解：设拉长弹簧所需力与弹簧伸长所成比例为k，则$k=\dfrac{1kg}{1cm}$.于是弹簧从x变为Δx所需功为

$$dw=kxdx=1xdx$$

于是总功为

$$W=\int_0^{10}dw=\int_0^{10}1xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{10}=50\,j.$$

6.有一长为a的细棒，它在各点处的线密度与相距某一端点的距离平方成正比，求此细棒的平均密度。

解：设各点处的线密度与相距一端点的距离平方所成比例为k，那么细棒的质量为

$$M=\int_0^a kx^2dx=\left.\frac{kx^3}{3}\right|_0^a=\frac{ka^3}{3};$$

那么平均线密度为

$$\frac{M}{a}=\frac{ka^3}{3a}=\frac{ka^2}{3}.$$

第六节 定积分的近似计算

1.已知$\int_0^1\dfrac{dx}{1+x^2}=\dfrac{\pi}{4}$，试把积分区间$[0,1]$分为10等分，分别利用梯形公式和抛物线公式计算$\pi$的值，将结果精确到小数点后三位。

$$\text{解}: i.\pi=4\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\approx 4\sum_{i=1}^{10}\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\cdot\frac{1-0}{10}=\frac{4}{10}\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{2}+\sum_{i=1}^{9}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{10}\right)^2}\right)\approx 3.140;$$

$$\begin{aligned} ii.\pi&=4\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\\ &\approx\frac{4}{30}\left[1+\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{1+0.2^2}+\frac{1}{1+0.4^2}+\frac{1}{1+0.6^2}+\frac{1}{1+0.8^2}\right)+4\left(\frac{1}{1+0.1^2}+\frac{1}{1+0.3^2}+\cdots+\frac{1}{1+0.9^2}\right)\right]\\ &\approx 3.141592614.\end{aligned}$$

2.把积分区间10等分,用抛物线公式计算下列积分的近似值,精确到小数点后三位。

(1)$\int_0^1\sqrt{1-x^3}dx$ （比较精确的结果为0.841309）

$$\approx\frac{1}{30}\left[1+0+2\left(\sqrt{1-0.2^3}+\sqrt{1-0.4^3}+\cdots\sqrt{1-0.8^3}\right)+4\left(\sqrt{1-0.1^3}+\sqrt{1-0.3^3}+\cdots+\sqrt{1-0.9^3}\right)\right]$$

$\approx 0.836825215.$

(2)$\int_1^2\frac{dx}{x}\approx\frac{1}{30}\left[1+\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.4}+\cdots+\frac{1}{1.8}\right)+4\left(\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.3}+\cdots\frac{1}{1.9}\right)\right]\approx 0.69315.$

（比较精确的结果为0.693147）

第八章 微积分的进一步应用

第一节 泰勒公式

1.写出下列函数在$x=0$点的带佩亚诺余项的泰勒展式：

(1)$e^{2x}=1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\cdots+\frac{(2x)^n}{n!}+o\left(x^n\right).$

(2)$\cos x^2=1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{12}}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}\left(x^2\right)^{2k-2}}{(2k-2)!}+o\left(x^{4k-4}\right).$

(3)$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots-\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right).$

(4)$\frac{1}{(1+x)^2}=(1+x)^{-2}=1-2x+\frac{6}{2!}x^2+\cdots+\frac{-2\bullet(-3)\bullet\cdots\bullet(-2-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right).$

(5)$\frac{x^3+2x+1}{x-1}=x^2+x+3+\frac{4}{x-1}=x^2+x+3-4(1-x)^{-1}$

$$=x^2+x+3-4\left(1+x+\frac{2}{2!}x^2+\cdots+\frac{-1\bullet(-2)\bullet(-3)\bullet\cdots\bullet(-1-n+1)}{n!}(-x)^n\right)+o\left(x^n\right)$$

$$=-1-3x-3x^2-4x^3-\cdots-4x^n+o\left(x^n\right).$$

(6)$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3^{2n}-1)}{(2n+1)!}x^{2n+1};$

(7)$\frac{x}{2x^2+x-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-2x}\right)$

$$=\frac{1}{3}\left(1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)\right)$$

$$-\frac{1}{3}\left(1-\frac{-2x}{1!}+\frac{(-1)^2 2!}{2!}(-2x)^2-\frac{(-1)^3 3!}{3!}(-2x)^3+\cdots+\frac{(-1)^n n!}{n!}(-2x)^n+o(x^n)\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(-3x+(1-2^2)x^2+(-1-2^3)x^3+\cdots+[(-1)^n-2^n]x^n\right)+o\left(x^n\right).$$

$$(8)\ln\frac{1+x}{1-2x}=\ln(1+x)-\ln(1-2x)=\int_0^x\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-2x}\right)dx$$

$$=\int_0^x\left[\left(-3x+(1-2^2)x^2+(-1-2^3)x^3+\cdots+[(-1)^n-2^n]x^n\right)+o\left(x^n\right)\right]dx$$

$$=-\frac{3}{2}x^2+\frac{1-2^2}{3}x^3+\frac{-1-2^3}{4}x^4+\cdots+\frac{(-1)^n-2^n}{n+1}x^{n+1}+o\left(x^{n+1}\right).$$

2.写出下列函数在$x=0$的泰勒公式至所指的阶数：

(1)$e^{\sin x},(x^3)$;

解:$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$,

$$e^{\sin x}=e^{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}=1+\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)+\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)^2}{2!}+\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)^3}{3!}+o(x^3)$$

$$=1+x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^3).$$

(2)$\ln\cos x,(x^6)$;

解:$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6)$,

$$\ln\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6)\right)=-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}-\frac{\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\right)^2}{2}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\right)^3}{3}+o(x^6)$$

$$=-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{2\times4!}-\frac{x^6}{24}+o(x^6)$$

$$=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^6).$$

(3)$\frac{x}{\sin x},(x^4)$;

解:$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5),\ \frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o(x^4)=1+\Delta$;

$$\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{1+\Delta}=1-\Delta+\Delta^2-\Delta^3+\Delta^4+o(\Delta^4)$$

$$=1+\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!}+\frac{x^4}{36}+o(x^4)=1+\frac{x^2}{3!}+\frac{7}{360}x^4+o(x^4).$$

(4) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x+x^2}}, (x^4)$.

解: $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x+x^2}} = x^2 \bullet \left(1-x+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = x^2 \bullet \left(1-\dfrac{1}{2}(-x+x^2)+\dfrac{-\frac{1}{2}\bullet(-\frac{1}{2}-1)(-x+x^2)^2}{2!}+o(x^2)\right)$

$$= x^2 \bullet \left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{8}x^2+o(x^2)\right) = x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4).$$

3.求下列函数在$x=1$的泰勒展开式:

(1) $\ln x = \ln(1+x-1) = (x-1)-\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{(x-1)^3}{3}+\cdots+\dfrac{(-1)^n(x-1)^n}{n}+o\left((x-1)^n\right)$

(2) $a^x = a^{x-1+1} = a\bullet a^{x-1} = a\bullet\left(1+\ln a\bullet(x-1)+\dfrac{\ln a\bullet(x-1)^2}{2!}+\cdots+\dfrac{\ln a\bullet(x-1)^n}{n!}+o\left((x-1)^n\right)\right)$.

(3) $P(x) = x^3-3x^2+3x+5$.

解: $P(x)\big|_{x=1} = 6, P'(x)\big|_{x=1} = 3x^2-6x+3\big|_{x=1} = 0, P''(x)\big|_{x=1} = 6x-6\big|_{x=1} = 0, P'''(x)\big|_{x=1} = 6\big|_{x=1} = 6.$

于是$P(x) = 6+\dfrac{0}{1!}(x-1)+\dfrac{0}{2!}(x-1)^2+\dfrac{6}{3!}(x-1)^3 = 6+(x-1)^3$.

4.确定常数a,b使得$x\to 0$时,

(1) $f(x) = (a+b\cos x)\sin x - x$为$x$的5阶无穷小;

(2) $f(x) = e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$为$x$的三阶无穷小。

解:(1)由于

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4), \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)$$

于是

$$a+b\cos x = a+b-\frac{bx^2}{2!}+\frac{bx^4}{4!}+o(x^4)$$

那么

$$(a+b\cos x)\sin x - x = (a+b-1)x-\left(\frac{a+b}{3!}+\frac{b}{2!}\right)x^3+O(x^5).$$

若要使$f(x)$为x的5阶无穷小, 那么必有

$$\begin{cases} a+b-1=0 \\ \dfrac{a+b}{3!}+\dfrac{b}{2!}=0 \end{cases},$$

易解得$a=\dfrac{4}{3}, b=-\dfrac{1}{3}$.

$$(2)\, f(x)=e^{x}-\frac{a}{b}-\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1}{1+bx}\right)$$

$$=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+o(x^{3})-\frac{a}{b}-\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1-bx+b^{2}x^{2}-b^{3}x^{3}+o(x^{3})\right)$$

$$=(1+b-a)x+\left(\frac{1}{2}-b^{2}+ab\right)x^{2}+O(x^{3}).$$

因此若要使$f(x)$为x的三阶无穷小量, 必有

$$\begin{cases}1+b-a=0\\ \dfrac{1}{2}-b^{2}+ab=0\end{cases}$$

容易解得$a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}.$

5.利用泰勒公式求极限：

$$(1)\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+o(x^{5})-x}{x^{2}-\frac{x^{4}}{3!}+\frac{x^{6}}{5!}+o(x^{6})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{3!}+\frac{x^{3}}{5!}+o(x^{3})}{1-\frac{x^{2}}{3!}+\frac{x^{4}}{5!}+o(x^{4})}$$

$$=0.$$

$$(2)\lim_{x\to0}\frac{e^{x^{3}}-1-x^{3}}{\sin^{6}2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+x^{3}+\frac{x^{6}}{2!}+o(x^{6})-1-x^{3}}{\left[2x-\frac{(2x)^{3}}{3!}+o(x^{3})\right]^{6}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^{6}}{2!}+o(x^{6})}{2^{6}x^{6}+o(x^{6})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2!}+o(1)}{2^{6}1+o(1)}=\frac{1}{2^{7}}=\frac{1}{128}.$$

$$(3)\lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+o(1)}{1}+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

$$(4)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{2\ln(1+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(x+o(x)\right)}{2\left(x^2+o(x^2)\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)}{2\left(x^2+o(x^2)\right)}$$

$$=\frac{1}{4}.$$

$$(5)\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^2}}-x\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\frac{1}{3}\frac{3}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-x\left(1-\frac{1}{2}\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)+1+\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$=1.$$

6.设$f(x)$在原点的邻域二次可导, 且$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=0.$

(1)求$f(0), f'(0), f''(0)$;

(2)求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^2}+\frac{f(x)}{x^2}\right).$

解:(1)由泰勒公式可得：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left[3x-\frac{(3x)^3}{3!}+o(x^3)\right]+x\left[f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[3+f(0)]x+f'(0)x^2+\left[\frac{f''(0)}{2}-\frac{9}{2}\right]x^3+o(x^3)}{x^3}$$

由于$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=0$, 那么可知

$$f(0)=-3, f'(0)=0, f''(x)=9.$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^2}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3-3+0\bullet x+\frac{9}{2!}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{9}{2}.$$

7.设$f(x)$在实轴上任意次可导, 令$F(x)=f(x^2)$, 求证：

$$F^{(2n+1)}(0)=0, \frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

证明：由于$f(x)$在实轴上任意可导且$F(x)=f(x^2)$, 故可知函数$f(x)$与$F(x)$可以在$x=0$处进行任意阶泰勒展开, 那么

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n}+\frac{F^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1}),$$

$$f(x^2)=f(0)+f'(0)x^2+\frac{f''(0)}{2!}x^4+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{2n}+\frac{F^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{2n+2}+o(x^{2n+2}).$$

根据多项式相等即其对应系数相等, 由$F(x)=f(x^2)$, 可知

$$\frac{F^{(2n+1)}(0)}{(2n)!}=0, \frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

即得

$$F^{(2n+1)}(0)=0, \frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

8.设$P(x)$为一n次多项式,

(1)若$P(a), P'(a), \cdots, P^{(n)}(a)$皆为正数, 证明：$P(x)$在$(a, +\infty)$上无根;

(2)若$P(a), P'(a), \cdots, P^{(n)}(a)$正负号相间, 证明：$P(x)$在$(-\infty, a)$上无根

证明:对于多项式我们可以进行任意阶的泰勒展开, 由于多项式$P(x)$是n次的, 故有

$$P^{(i)}(a)=0, i>n,$$

于是有 $$P(x)=P(a)+P'(a)(x-a)+\frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \cdots\cdots\cdots\cdots(*).$$

(1).若$P(a), P'(a), \cdots, P^{(n)}(a)$皆为正数, 那么当$x\in(a, +\infty)$时$(*)$式中各项皆为正, 于是此时$P(x)>0$恒成立, 因此无根。

(2).若$P(a), P'(a), \cdots, P^{(n)}(a)$正负号相间,由于当$x\in(-\infty, a)$时,$(x-a), (x-a)^2, \cdots, (x-a)^n$也是正负号相间的, 于是此时(*)式中各项皆同号,因此无根。

9.求证:(1)$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!},(0<\theta<1)$;

(2)e是无理数。

证明:(1)将e^x展开为带柯西余项的泰勒展式:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta}x^{n+1}}{(n+1)!},(0<\theta<1),$$

于是有$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!},(0<\theta<1)$.

(2).首先我们要肯定e是一个小数;使用反证法,设$e=\frac{m}{n}$,其中m,n都是正整数,且$(m,n)=1$,显然必有$n>1$.

令$S_n=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$,我们来估计$e-S_n$的值:

$$\begin{aligned}e-S_n&=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}-\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}=\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i!}=\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+3)(n+2)}+\cdots\right)\le\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^n}=\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!n}.\end{aligned}$$

由以上估计可以知道$n!\left(e-S_n\right)$是$(0,1)$上的一个小数。

但是

$$n!\left(e-S_n\right)=n!\left[\frac{m}{n}-\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\right]=(n-1)!m-\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!};$$

可以肯定$(n-1)!m-\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!}$是一个整数,矛盾。故假设错误,于是$e$是无理数。

10设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶连续导数，且$f'(a)=f'(b)=0$，则存在$c\in(a,b)$使得

$$\left|f''(c)\right|\geq\frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|.$$

证明：分别在$x=a,x=b$处对函数$f(x)$进行二阶泰勒展开，可得

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2$$

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-b)^2$$

将$x=\dfrac{a+b}{2}$带入两式,再将所得相减，又注意到$f'(a)=f'(b)=0$可得

$$0=f(a)-f(b)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2-\frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2,$$

整理即得

$$f(b)-f(a)=\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{8}(b-a)^2.$$

取$\left|f''(c)\right|=\max\{\left|f''(\xi_1)\right|,\left|f''(\xi_2)\right|\}$，那么有

$$\left|f(b)-f(a)\right|=\frac{\left|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\right|}{8}(b-a)^2\leq\frac{2\left|f''(c)\right|}{8}(b-a)^2,$$

即是

$$\left|f''(c)\right|\geq\frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|.$$

11.设$f(x)$在a点附近二次可导，且$f''(a)\neq 0$，由微分中值定理有

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h, 0<\theta<1,$$

求证：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$.

证明：由题意可知：

$$f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)h\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A).$$

将$f(x)$在$x=a$附近二阶泰勒展开：

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+o\left((x-a)^2\right).$$

于是有$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\dfrac{h^2}{2!}f''(a)+o\left(h^2\right)$，对比$(A)$可得

$$f'(a+\theta h)h=hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+o\left(h^2\right);$$

整理后有

$$\theta\frac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{\theta h}=\frac{f''(a)}{2}+o\left(1(h)\right),$$

两边关于$h\to 0$取极限可得

$$\lim_{h\to 0}\theta\frac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{\theta h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f''(a)}{2}+o\left(1(h)\right)\right],$$

即有$\theta f''(a)=\dfrac{f''(a)}{2}$，由于$f''(a)\neq 0$，于是此时有$\theta=\dfrac{1}{2}$.

故有$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$.

第二节 微积分在几何与物理中的应用

1.求下列各曲线所围成的图形面积：

(1)$y^2=4(x+1), y^2=4(1-x)$;

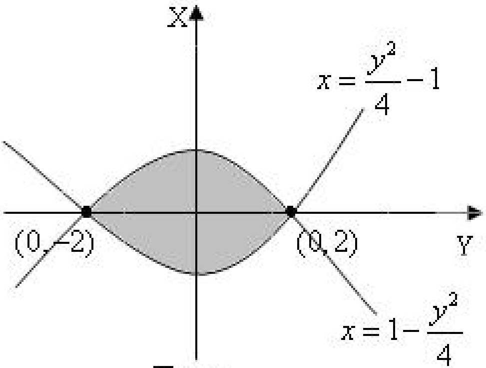
解：如图(1)，两曲线的交点为$(0,-2),(0,2)$.图形面积为

$$S=-\int_{-2}^{2}\left[\left(\frac{y^2}{4}-1\right)-\left(1-\frac{y^2}{4}\right)\right]dy=\frac{16}{3}.$$

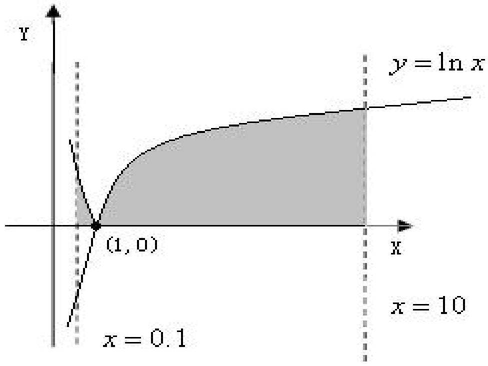
(2)$y=|\ln x|, y=0, (0.1<x<10)$;

解：如图(2)，所围面积为

$$S=-\int_{0.1}^{1}\ln xdx+\int_{1}^{10}\ln xdx=9.9\ln 10-8.1\approx 14.6956.$$



图(1)



图(2)

(3) $y=x, y=x+\sin^2 x, (0<x<\pi)$;

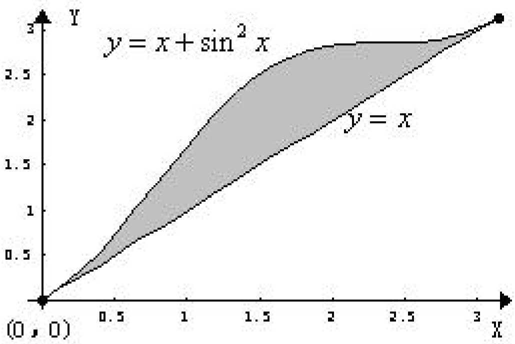
解：解方程 $x=x+\sin^2 x$, 可得 $(0,0),(\pi,\pi)$ 两个交点(如图(3)示). 那么所围图形面积为

$$S=\int_0^{\pi}(x+\sin^2 x-x)dx=\frac{\pi}{2}.$$

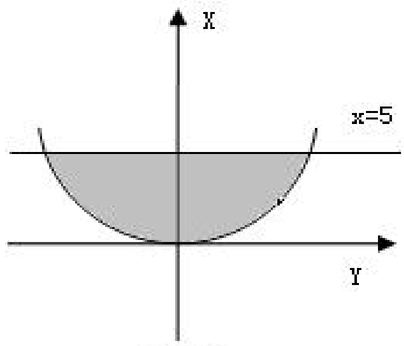
(4) $y^2=2x, x=5$;

解：如图(4).所围面积为：

$$S=\int_{-\sqrt{10}}^{\sqrt{10}}\left(5-\frac{y^2}{2}\right)dx=\frac{20\sqrt{10}}{3}\approx 21.0819.$$



图(3)



图(4)

(5) $y=x^2, y=x+5$;

解：解方程 $x^2=x+5$, 可得两个交点, 其横坐标分别为

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2};$$

于是所围图形面积为

$$S=\int_{\frac{1-\sqrt{21}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}\left(x+5-x^2\right)dx=\frac{7\sqrt{21}}{2}\approx 16.039.$$

(6)$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

解：设$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$,其中$t\in[()0,\frac{\pi}{2}]$,这只是对应于$\frac{1}{4}$面积的图形曲线, 如图(5) 所示。所围图形面积为

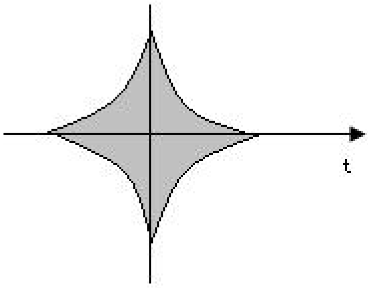
$$S=4\int_0^a ydx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sin^3 td\left(a\cos^3 t\right)=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 tdt=\frac{3\pi a^2}{8}.$$

2.求下列用极坐标表示的曲线所围图形的面积：

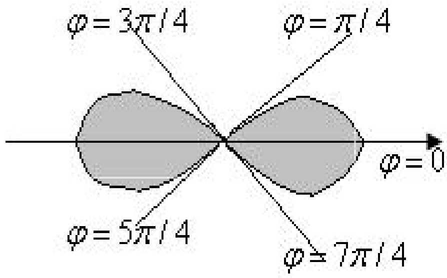
(1)双扭线$r^2=a^2\cos^2\varphi$;

解：如图(6),所围面积为：

$$S=\frac{4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos^2\varphi d\varphi=\frac{a^2}{4}\left(2+\pi\right).$$



图(5)
极坐标下图形



图(6)
极坐标下图形

(2)三叶玫瑰线：$r=a\sin3\varphi$;

解：这样的题当我们不知道如何画出它的图形时, 我们首先要求出曲线与极径的极大极小值的交点, 这是为了求出所围图形的某一部分的积分上下限;然后利用图形的对称性, 得到所围图形中一共有几块这样子的部分。

比如这题, 当$\varphi=0,r=0$,此时极径最小;当$\varphi=\frac{\pi}{6}$时,$r=a$, 此时极径最大。由于

$$r=a\sin3(\frac{\pi}{6}-\varphi)=a\sin(\frac{\pi}{2}-3\varphi)=a\cos3\varphi=a\sin(\frac{\pi}{2}+3\varphi)=a\sin3(\frac{\pi}{6}+\varphi)$$

$$r=a\sin3(\frac{5\pi}{6}-\varphi)=a\sin(\frac{5\pi}{2}-3\varphi)=a\cos3\varphi=a\sin(\frac{5\pi}{2}+3\varphi)=a\sin3(\frac{5\pi}{6}+\varphi)$$

$$r=a\sin3(\frac{3\pi}{2}-\varphi)=a\sin(\frac{9\pi}{2}-3\varphi)=a\cos3\varphi=a\sin(\frac{9\pi}{2}+3\varphi)=a\sin3(\frac{3\pi}{2}+\varphi)$$

于是此图形分别关于$\varphi=\frac{\pi}{6},\varphi=\frac{5\pi}{6},\varphi=\frac{3\pi}{2}$对称,因此所围图形面积为

$$S=6s=6\bullet\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(a\sin3\varphi\right)^2d\varphi=\frac{\pi a^2}{4}.$$

(3)蚌线：$r = a\cos\theta + b.$

解：
$$S = \frac{2}{2}\int_0^{\pi}\left(a\cos\theta + b\right)^2 d\theta = b^2\pi + \frac{a^2\pi}{2}.$$

3.求下列用参数方程表示的曲线所围图形的面积：

(1) $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 2t^2 - t^3 \end{cases}.$

解：图形从$t=0$到$t=2$构成一闭合曲线，于是所求面积为
$$S = \left|\int_a^b y dx\right| = \left|\int_0^2 \left(2t^2 - t^3\right)\bullet\left(2 - 2t\right)dt\right| = \frac{8}{15}.$$

(2)摆线：$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, (0 < t \le 2\pi)$ 及x轴;

解：
$$S = \left|\int_0^{2\pi} y(t)\bullet x'(t)dt\right| = \left|\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\bullet a(1-\cos t)dt\right| = \left|\int_0^{2\pi} \left(a(1-\cos t)\right)^2 dt\right| = 3a^2\pi.$$

(3)圆的渐开线：$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}, (0 < t \le 2\pi)$ 及半直线$x = a, (y \le 0)$, 其中$a > 0.$

解：
$$S = \left|\int_0^{2\pi} y(t)\bullet x'(t)dt\right| = \left|\int_0^{2\pi} a(\sin t - t\cos t)\bullet at\cos t dt\right|$$
$$= \left|a^2\int_0^{2\pi}\left(t\sin t\cos t - t^2\cos^2 t\right)dt\right| = \left(\pi + \frac{4\pi^2}{3}\right)a^2.$$

4.直线$y = x$把椭圆$x^2 + 3y^2 = 6y$的面积分成两部分A(小的一块)和B(大的一块), 求$\dfrac{A}{B}$的值。

解：椭圆的面积为
$$S = 2\int_0^2 \sqrt{3 - 3\left(y-1\right)^2}dy = \sqrt{3}\pi\left(\text{或}S = 2\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3 - x^2}{3}}dx\right),$$

A的面积为
$$S_A = \int_0^{\frac{3}{2}} x dx - \int_0^{\frac{3}{2}}\left(1 - \sqrt{\frac{3 - x^2}{3}}\right)dx = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

于是所求值为
$$\frac{A}{B} = \frac{S_A}{S - S_A} = \frac{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}\pi - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}} = \frac{1}{5}.$$

5.求$r=3\cos\theta$和$r=1+\cos\theta$所围的公共部分的面积

解：解方程组

$$\begin{cases} r=3\cos\theta \\ r=1+\cos\theta \end{cases}, \theta\in[-\pi,\pi],$$

可得$\theta=\pm\dfrac{\pi}{3}$,那么所求面积为

$$S=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos\theta)^2 d\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos\theta)^2 d\theta\right]=\frac{5}{2}\pi.$$

6.求下列旋转体的体积：

(1)椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 绕$x$轴;

解：可以解得显式为

$$y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2,$$

那么旋转所得体积为

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right)dx=\frac{4\pi b^2 a}{3}.$$

(2)$y=\sin x, y=0,(0\le x\le\pi)$, $i.$绕x轴, $ii.$绕y轴;

解：$i.V=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x dx=\dfrac{\pi^2}{2}$;

$$ii.V=\pi\int_0^1\left[(\pi-2\arcsin x)^2-(\arcsin x)^2\right]dx=-6\pi+4\pi^2-\frac{\pi^3}{4}\approx 12.876$$

(3)旋轮线$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t),(0\le t\le 2\pi), y=0$

$i.$绕x轴, $ii.$绕y轴, $iii.$绕直线$y=2a$.

解：$i.V=\pi\int_0^{2\pi}a^3(1-\cos t)^3 dt=5\pi^2 a^3$;

$ii.V=2\pi\int_0^{2\pi}a^3(t-\sin t)(1-\cos t)^2 dt=6\pi^3 a^3$;

$iii.$作平移：$y=\overline{y}+2a, x=\overline{x}$, 则曲线方程为$\overline{x}=a(t-\sin t)$, $\overline{y}=-a(1+\cos t)$, 及$\overline{y}=-2a$.于是做求体积为

$$V=\pi\int_0^{2\pi}\left[4a^2-a^2(1+\cos t)^2\right]a(1-\cos t)dt=7\pi^2 a^3.$$

7.求下列各曲面所围成的几何体的体积：

(1)求截椎体的体积, 其上下底皆是椭圆, 椭圆的轴长分别为A, B和a, b, 而高为h;

解：$V=\pi\int_0^h\left(\dfrac{B-b}{h}x+b\right)\left(\dfrac{A-a}{h}x+a\right)dx=\pi\dfrac{2ab+aB+Ab+2AB}{6}h$.

(2).正圆台，其上下底分别是半径为a, b的圆，而其间距离为h.

解：$V=\pi\int_0^h\left(\frac{b-a}{h}x+a\right)^2dx=\frac{\pi h}{3}\left(b^2+ab+a^2\right).$

8.已知球半径为R，试求高为h的球冠体积($h\le R$).

解：$V=\pi\int_{R-h}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\frac{3Rh^2-h^3}{3}.$

9.求下列曲线的弧长：

(1)$y=x^2, 0\le x\le 1$;

解：$s=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\approx 1.47894.$

(2)$y=e^x, 1\le x\le 2$;

解：$s=\int_1^2\sqrt{1+e^{2x}}dx=\sqrt{1+e^4}-\sqrt{1+e^2}+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{e^2}{\left(\sqrt{1+e^2}-1\right)^2}+\ln\frac{e^4}{\left(\sqrt{1+e^4}+1\right)^2}\right)\approx 4.78515.$

(3)$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$;

解：解出显式为

$$y=\left(1-\sqrt{x}\right)^2=1-2\sqrt{x}+x,$$

于是弧长为

$$s=\int_0^1\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}dx\approx 1.62323.$$

(4)星形线$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t, (0\le t\le 2\pi)$;

解：$s=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(-3\cos^2 t\sin t\right)^2+\left(3\sin^2 t\cos t\right)^2}dt=6a.$

(5)圆的渐开线$x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t), a>0, 0\le t\le 2\pi$;

解：$s=\int_0^{2\pi}a\sqrt{(-\sin t+\sin t+t\cos t)^2+(\cos t-\cos t+t\sin t)^2}dt=\int_0^{2\pi}atdt=2a\pi^2.$

(6).$r=a\sin^3\frac{\theta}{3}, (a>0)$;

解：$s=a\int_0^{3\pi}\sqrt{\sin^6\frac{\theta}{3}+\left(\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}\right)^2}d\theta=\frac{3a\pi}{2}.$

(7).心脏线$r=a(1+\cos\theta), (0<\theta\le 2\pi, a>0)$;

解：$s=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\theta+\left(1+\cos\theta\right)^2}d\theta=8a.$

10.求下列各曲线在指定点的曲率和曲率半径：

(1)$xy=4$,点$(2,2)$;

解：曲率公式为$k=\dfrac{\left|y''\right|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.由于

$$y=\frac{4}{x},y'=-\frac{4}{x^2},y''=\frac{8}{x^3},$$

因此$k=\dfrac{\dfrac{8}{x^3}}{\left(1+\dfrac{16}{x^4}\right)^{\frac{3}{2}}}$,那么

$$k(2,2)=\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

于是曲率半径为$\dfrac{1}{k}=2\sqrt{2}$.

(2)$y=\ln x$,点$(1,0)$.

解：曲率为

$$k=\frac{\left|y''\right|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\left.\frac{\dfrac{1}{x^2}}{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=1}=\frac{1}{2\sqrt{2}};$$

那么曲率半径为$2\sqrt{2}$.

11.求下列曲线的曲率与曲率半径：

(1).抛物线$y^2=2px,(p>0)$;

解：可以求得$y=\sqrt{2px},y'=\dfrac{2p}{2\sqrt{2px}}=\dfrac{p}{\sqrt{2px}},y''=-\dfrac{p^2}{(2px)^{\frac{3}{2}}}$,于是曲率为

$$k=\frac{\dfrac{p^2}{(2px)^{\frac{3}{2}}}}{\left(1+\dfrac{p^2}{2px}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{p^2}{\left(2px+p^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{p}}{(2x+p)^{\frac{3}{2}}};$$

曲率半径为$\dfrac{1}{k}=\dfrac{(2x+p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}$.

对于该题，也可求得$x=\dfrac{y^2}{2p},x'=\dfrac{y}{p},x''=\dfrac{1}{p}$，于是曲率为

$$k_y=\frac{\frac{1}{p}}{\left(1+\frac{y^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{p^2}{\left(p^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

(2)双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

解：设$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=ib\sin t\end{cases}$,则有

$$y'=ib\cos t,y''=-ib\sin t,x'=-a\sin t,x''=-a\cos t,$$

那么曲率为

$$k=\frac{|y'x''-x'y''|}{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|a\cos t\cdot ib\cos t+a\sin t\cdot ib\sin t|}{\left(a^2\sin^2 t-b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|iab|}{\left(a^2\sin^2 t-b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}},$$

那么曲率半径为$\dfrac{1}{k}=\dfrac{\left(a^2\sin^2 t-b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}{|iab|}$.

本题中i表示虚数单位。

(3).星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

解：设$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$,那么有

$$x'=-3a\sin t\cos^2 t,x''=6a\sin^2 t\cos t-3a\cos^3 t,$$
$$y'=3a\sin^2 t\cos t,y''=6a\sin t\cos^2 t-3a\sin^3 t;$$

于是可知曲率为

$$\begin{aligned}k&=\frac{|y'x''-x'y''|}{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{\left|3a\sin^2 t\cos t\left(6a\sin^2 t\cos t-3a\cos^3 t\right)+3a\sin t\cos^2 t\left(6a\sin t\cos^2 t-3a\sin^3 t\right)\right|}{\left[\left(3a\sin t\cos^2 t\right)^2+\left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{\left|9a^2\sin^2 t\cos^2 t\right|}{\left(9a^2\sin^2 t\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{|3a\sin t\cos t|};\end{aligned}$$

那么曲率半径为$\dfrac{1}{k}=3a\sin t\cos t$.

12.求下列参数方程给出的曲线的曲率和曲率半径：

(1)旋轮线$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t),(a>0)$;

解：可以求得

$$x'=a(1-\cos t), x''=a\sin t; y'=a\sin t, y''=a\cos t,$$

于是有

$$k=\frac{|y''x'-x''y'|}{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|a^2\cos t(1-\cos t)-a^2\sin^2 t\right|}{\left(a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\cos t-1|}{a\left(2-2\cos t\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{a2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}};$$

那么曲率为$k=\dfrac{1}{a2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}}$,曲率半径为$\dfrac{1}{k}=a2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}$.

(2)椭圆$x=a\cos t, y=b\sin t,(a,b>0)$;

解：可以求得

$$x'=-a\sin t, x''=-a\cos t; y'=b\cos t, y''=-b\sin t$$

于是有

$$k=\frac{|y''x'-x''y'|}{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|ab\sin^2 t+ab\cos^2 t\right|}{\left(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}};$$

那么曲率为$k=\dfrac{ab}{\left(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}$,曲率半径为$\dfrac{1}{k}=\dfrac{\left(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}{ab}$.

(3)圆的渐开线$x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)$.

解：可以求得

$$x'=a(-\sin t+\sin t+t\cos t)=at\cos t, x''=a\cos t-at\sin t;$$
$$y'=a(\cos t-\cos t+t\sin t)=at\sin t, y''=a\sin t+at\cos t,$$

于是有

$$k=\frac{|y''x'-x''y'|}{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|a^2t\sin t\cos t+a^2t^2\cos^2 t-a^2t\sin t\cos t+a^2t^2\sin^2 t\right|}{\left(a^2t^2\sin^2 t+a^2t^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a^2t^2}{a^3t^3}=\frac{1}{at};$$

那么曲率为$k=\dfrac{1}{at}$,曲率半径为$\dfrac{1}{k}=at$.

13.求下列以极坐标表示的曲线的曲率半径：

(1)心脏线$r=a(1+\cos\theta), a>0$;

解：极坐标下曲线的曲率公式为$\dfrac{1}{k}=\dfrac{\left(r^2+r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|r^2+2r'^2-rr''\right|}$，证明可见14题。

可以求得

$$r'=-a\sin\theta, r''=-a\cos\theta,$$

于是曲率半径为

$$\frac{1}{k}=\frac{\left(a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|a^2(1+\cos\theta)^2+2a^2\sin^2\theta+a^2(1+\cos\theta)\cos\theta\right|}$$

$$=\frac{a^3\left(2+2\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2\left|3+3\cos\theta\right|}=\frac{2\sqrt{2}}{3}a\sqrt{1+\cos\theta}.$$

(2)双扭线$r^2=2a^2\cos 2\theta, a>0$;

解：可以求得

$$r=\sqrt{2a^2\cos 2\theta}, r'=-\sqrt{2}a\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}},$$

$$r''=-\sqrt{2}a\frac{2\cos 2\theta\sqrt{\cos 2\theta}+\dfrac{\sin^2 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}}{\cos 2\theta}=-\sqrt{2}a\frac{1+\cos 2\theta}{\left(\cos 2\theta\right)^{\frac{3}{2}}},$$

于是曲率半径为

$$\frac{1}{k}=\frac{\left(2a^2\cos 2\theta+2a^2\dfrac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|2a^2\cos 2\theta+4a^2\dfrac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}+\sqrt{2a^2\cos 2\theta}\sqrt{2}a\dfrac{1+\cos 2\theta}{\left(\cos 2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\right|}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{2a^2}{\cos 2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\dfrac{2a^2\cos^2 2\theta+4a^2\sin^2 2\theta+\sqrt{2a^2}\sqrt{2}a\left(1+\cos 2\theta\right)}{\cos 2\theta}\right|}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{2a^2}{\cos 2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\dfrac{6a^2}{\cos 2\theta}\right|}=\frac{2\sqrt{2}a^3}{6a^2\sqrt{\cos 2\theta}}=\frac{\sqrt{2}a}{3\sqrt{\cos 2\theta}}.$$

(3).对数螺线$r=ae^{\lambda\theta},(\lambda>0)$.(–.–)/}/}(*.*）

解：可求得

$$r'=\lambda ae^{\lambda\theta},r''=\lambda^2ae^{\lambda\theta};$$

那么曲率半径为

$$\frac{1}{k}=\frac{\left(r^2+r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|r^2+2r'^2-rr''\right|}=\frac{\left(a^2e^{2\lambda\theta}+\lambda^2a^2e^{2\lambda\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|a^2e^{2\lambda\theta}+2\lambda^2a^2e^{2\lambda\theta}-ae^{\lambda\theta}\lambda^2ae^{\lambda\theta}\right|}=\frac{a^3e^{3\lambda\theta}\left(1+\lambda^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2e^{2\lambda\theta}\left(1+\lambda^2\right)}=ae^{\lambda\theta}\left(1+\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

14.设曲线是用极坐标方程$r=r(\theta)$给出, 且二阶可导, 证明它在点θ处的曲率为

$$k=\frac{\left|r^2+2r'^2-rr''\right|}{\left(r^2+r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

解：设$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$,那么

$$x'=-r\sin\theta+r'\cos\theta,$$
$$y'=r\cos\theta+r'\sin\theta;$$
$$x''=-r\cos\theta-r'\sin\theta-r'\sin\theta+r''\cos\theta=r''\cos\theta-2r'\sin\theta-r\cos\theta;$$
$$y''=-r\sin\theta+r'\cos\theta+r'\cos\theta+r''\sin\theta=r''\sin\theta+2r'\cos\theta-r\sin\theta,$$

于是曲率为

$$\begin{aligned}k&=\frac{\left|y''x'-x''y'\right|}{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{\left|\left(r''\sin\theta+2r'\cos\theta-r\sin\theta\right)\left(-r\sin\theta+r'\cos\theta\right)-\left(r''\cos\theta-2r'\sin\theta-r\cos\theta\right)\left(r\cos\theta+r'\sin\theta\right)\right|}{\left(\left(-r\sin\theta+r'\cos\theta\right)^2+\left(r\cos\theta+r'\sin\theta\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{\left|r^2+2r'^2-rr''\right|}{\left(r^2+r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

15.证明：抛物线$y=ax^2+bx+c$在定点出的曲率半径最小。

证明：可以求得

$$y'=2ax+b,y''=2a,$$

那么曲率为

$$k=\frac{\left|y''\right|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|2a\right|}{\left(1+\left(2ax+b\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

显然当$x=-\dfrac{b}{2a}$时候,$\dfrac{1}{k}$最小;易知$x=-\dfrac{b}{2a}$为抛物线$y=ax^2+bx+c$定点的横坐标。

16.求曲线$y=2(x-1)^2$的最小曲率半径。

解：可以求得

$$y'=4(x-1), y''=4;$$

于是曲率为

$$k=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4}{\left[1+16(x-1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

那么可以求得当$x=1$时候,$\frac{1}{k}$取得最小值为$\frac{1}{4}$.

17.求曲线$y=e^x$上曲率最大的点。（-. -）

解：易解得$y'=e^x, y''=e^x$,那么曲率为

$$k=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)^{\frac{3}{2}}}=\sqrt{\frac{e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^3}}=\sqrt{\frac{e^{2x}}{1+3e^{2x}+3e^{4x}+e^{6x}}}$$

$$\overset{e^{2x}=t}{=}\sqrt{\frac{t}{1+3t+3t^2+t^3}}.$$

解$\frac{dk}{dt}=0$可得$t=\frac{1}{2}$,又由于$\left.\frac{d^2k}{dt^2}\right|_{t=\frac{1}{2}}=-\frac{8}{9\sqrt{3}}$,因此可知,当$t=\frac{1}{2}$时候,$k$值最大。

当$t=\frac{1}{2}$时,可以解得$x=-\frac{\ln 2}{2}$;即曲线$y=e^x$上曲率最大的点为$\left(-\frac{\ln 2}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

以下各题做得稀里糊涂（-.-）（*?*）<<-?->>还有待有兴趣者将其完善！

18.求下列平面曲线绕轴旋转所得旋转曲面的面积：(-?-)

(1)$y=\sin x, 0\le x\le\pi$,绕x轴;

解：由于$y'=\cos x$,则所求面积为

$$S=2\pi\int_0^{2\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx=2\pi\left[\sqrt{2}+\operatorname{arcsin\,h}(1)\right]\approx 14.4236.$$

(2)$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), a>0, 0\le t\le 2\pi$,绕直线$y=2a$; (-?-)

解：可以求得

$$ds=\sqrt{x_t^2+y_t^2}dt=2a\sin\frac{t}{2}dt,$$

于是

$$S=\left|2\pi\int_0^{2\pi}\left[-a\left(1+\cos t\right)\right]2a\sin\frac{t}{2}dt\right|=\frac{32}{3}\pi a^2.$$

(3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a>b)$绕$x$轴;(−?−)

解：设$x=a\cos t, y=b\sin t$,于是

$$ds=\sqrt{x_t^2+y_t^2}dt=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt,$$

那么

$$S=2\pi\int_0^{2\pi} b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt \overset{\sin^2 t=s}{=} 4b\pi\int_0^1 \sqrt{(a^2-b^2)s+b^2}ds=b\pi\ \frac{8\left(a^3-b^3\right)}{3\left(a^2-b^2\right)}.$$

(4) $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t,$ 绕x轴;(+?+) <<−?−>>

解：可以求得

$$ds=\sqrt{x_t^2+y_t^2}dt=\begin{cases}3a\sin t\cos t dt & \dfrac{\pi}{4}\le t\le\dfrac{\pi}{2}\\ -3a\sin t\cos t dt & \dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{3\pi}{4}\end{cases},$$

那么有

$$S=2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t3a\sin t\cos t dt-2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} a\sin^3 t3a\sin t\cos t dt=\frac{3(8-\sqrt{2})a^2\pi}{10}.$$

(5) $r^2=2a^2\cos 2\theta$.{*!*}

解：可以求得

$$y=a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta, ds=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta,$$

于是

$$S=2\bullet 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\sin\theta d\theta=2\pi a^2(2-\sqrt{2}).$$

以下各题没有给出答案!!! 不会做呀<<x?x>>

19.求下列曲线段的质心：

(1)半径为r,弧长为$\dfrac{1}{2}\pi\alpha(\alpha\le\pi)$的均匀圆弧;

(2)对数螺线$r=ae^{k\theta}(a>0,k>0)$上由点$(0,a)$到点(θ,r)的均匀弧段;

(3)以$A(0,0),B(0,1),C(2,1),D(2,0)$为顶点的矩形周界,曲线上任意一点的密度等于该点到原点距离的2倍;

(4) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0\le t\le 2\pi, a>0,$ 密度为常数。

20.已知一抛物线段$y=x^2(-1\le x\le 1)$,曲线段上任意一点处的密度与该点到原点的距离成正比,$x=1$处的密度为5,求此线段的质量。

21.轴长$10m$,密度分布为$\rho(x)=(6+0.3)kg/m$,其中x为距轴的一个端点的距离,求轴的质量。

22.求半球$0 \le z \le \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$的质心。

23.求锥体$\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le h$的质心和绕$z$轴的转动惯量。

24.求抛物体$x^2 + y^2 \le z \le h$的质心和绕z轴的转动惯量。

第三节微分方程初步

1.求下列微分方程的通解：

(1)$xy' - y\ln y = 0$;

解：整理可得 $x\dfrac{dy}{dx} = y\ln y$

即 $\dfrac{dy}{y\ln y} = \dfrac{dx}{x}$

两边积分有 $\displaystyle\int \frac{dy}{y\ln y} = \int \frac{dy}{x}$

整理即得$\ln y = Ce^x$,(C为常数).

(2)$y' = \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}$;

解：整理可得 $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}$

即 $\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

两边积分有 $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

整理即得 $\arcsin y = \arcsin x + C$.

(C为常数).

(3)$3x^2 + 5x - 5y' = 0$;

解：整理可得 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2+5x}{5}$

即 $5dy = \left(3x^2 + 5x\right)dx$

两边积分有 $\displaystyle\int 5dy = \int \left(3x^2+5x\right)dx$

整理即得 $y = \dfrac{x^3}{5} + \dfrac{x^2}{2} + C.$

(C为常数).

(4)$xydx + (x^2+1)dy = 0$;

解：整理可得 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{x^2+1}$

即 $-\dfrac{dy}{y} = \dfrac{xdx}{x^2+1}$

两边积分有 $\displaystyle -\int \frac{dy}{y} = \int \frac{xdx}{x^2+1}$

整理即得 $y = \dfrac{C}{\sqrt{x^2+1}}.$

(5)$y - xy' = a(y^2 + y')$;

解：整理可得 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - ay^2}{a+x}$,

即 $\dfrac{dy}{y-ay^2} = \dfrac{dx}{a+x}$,

两边积分有 $\displaystyle\int \frac{dy}{y-ay^2} = \int \frac{dx}{a+x}$;

整理即得 $C(a+x) = \left(1 - \dfrac{1}{ay}\right)^{-\frac{1}{4a^2}}.$

(6)$(y+3)dx + \cot x dy = 0$;

解：整理可得 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y+3}{\cot x}$,

即 $\dfrac{dy}{y+3} = -\dfrac{dx}{\cot x}$,

两边积分有 $\displaystyle\int \frac{dy}{y+3} = -\int \frac{dx}{\cot x}$;

整理即得 $y = C\cos x - 3.$

(C为常数).

(7) $\frac{dy}{dx}=10^{x+y}$;

解：整理可得 $\frac{dy}{10^y}=10^x dx,$

两边积分有 $\int\frac{dy}{10^y}=\int 10^x dx;$

整理即得 $-\frac{1}{10^y}=10^x+C.$

(C为常数).

(8) $x\sec ydx+(x+1)dy=0$;

解：整理可得 $\frac{dy}{\sec y}=-\frac{xdx}{x+1},$

两边积分有 $\int\frac{dy}{\sec y}=-\int\frac{xdx}{x+1};$

整理即得 $\sin y=-x+\ln|1+x|+C.$

(C为常数).

(9) $(e^{x+y}-e^x)dx+(e^{x+y}+e^y)dy=0$;

解：整理可得 $\frac{e^x dx}{e^x+1}=\frac{e^y dx}{1-e^y},$

两边积分有 $\int\frac{e^x dx}{e^x+1}=\int\frac{e^y dx}{1-e^y};$

整理即得 $\ln|e^x+1|=-\ln|1-e^y|+C.$

(C为常数).

(10) $y\ln xdx+x\ln ydy=0$;

解：整理可得 $\frac{\ln xdx}{x}=-\frac{\ln ydx}{y},$

两边积分有 $\int\frac{\ln xdx}{x}=-\int\frac{\ln ydx}{y};$

整理即得 $\ln^2 x=-\ln^2 y+C.$

(C为常数).

2.求已给微分方程满足初始条件的特解：

(1) $\frac{dy}{dx}\sin x=y\ln y, y|_{x=\frac{\pi}{2}}=e;$

解：整理可得 $\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{\sin x},$

可解得 $\ln y=C\left(\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right);$

由 $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=e$,那么

$$\ln y|_{x=\frac{\pi}{2}}=C\left(\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right)\Bigg|_{x=\frac{\pi}{2}}=-C=1,$$

因此原式化得 $\ln y=-\left(\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right).$

(2) $y'=e^{2x-y}, y|_{x=0}=0;$

解：整理可得 $e^y dy=e^{2x}dx,$

可解得 $e^y=\frac{1}{2}e^{2x}+C;$

由 $y|_{x=0}=0$,那么

$$e^y|_{x=0}=\frac{1}{2}e^{2x}+C\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}+C=1,$$

因此原式化得 $e^y=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}.$

(3). $\frac{x}{1+y}dx - \frac{y}{1+x}dy = 0, y\big|_{x=0} = 1.$

解：整理可得$(x+x^2)dx = (y+y^2)dy$,两边积分有

$$\int (x+x^2)dx = \int (y+y^2)dy,$$

整理即有

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + C.$$

由于$y\big|_{x=0} = 1$,因此$0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + C$,于是$C = -\frac{5}{6}$;于是有

$$3x^2 + 2x^3 = 3y^2 + 2y^3 + 5.$$

3.质量为$1g$的质点受力作用作直线运动,这力和时间成正比,和质点运动的速度成反比,在$t = 10s$时,速度等于$50cm/s$,力为$4\times10^{-5}N$.问从运动开始经过了一分钟后的速度是多少？

解：设质点速度为v,质量为m,受力为F,那么可知$F = \frac{kt}{v}$,那么可得

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = \frac{kt}{v},$$

可以解得

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kt^2 + C.$$

那么由题意可知

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\times10^{-3}\bullet(0.5)^2 = \frac{1}{2}k10^2 + C \\ 4\times10^{-5} = \frac{k10}{0.5} \end{cases},$$

可解得$k = 2\times10^{-6}, C = 0.25\times10^{-4}$.

解$\frac{1}{2}\times10^{-3}\bullet v^2 = \frac{1}{2}\bullet2\times10^{-6}\bullet60^2 + 0.25\times10^{-4}$,可得$v = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$;于是可知一分钟后质点速度为$v = \frac{\sqrt{29}}{2}m/s \approx 2.69258m/s$.

4.镭的衰变有如下规律：镭的衰变速度与镭所现存的量R成正比,由经验材料断定,镭经过1600年后,只余原始量R_0的一半,试求镭的量R与时间t的函数关系。

解：由题意可得$\frac{dR}{dt}=kR$,可以解得

$$\ln R=kt+C.$$

那么可知

$$\begin{cases}\ln\frac{R_0}{2}=k\bullet 1600+C\\ \ln R_0=k\bullet 0+C\end{cases},$$

解之可得$k=\frac{-\ln 2}{1600}$,$C=\ln R_0$,于是有

$$\ln R=-\frac{\ln 2}{1600}t+\ln R_0.$$

第九章 再论实数系

§1 实数连续性的等价描述

1.求数列$\{x_n\}$的上下确界(若$\{x_n\}$无上下确界,则称$+\infty,-\infty$是$\{x_n\}$的上下确界)：

(1).$x_n=1-\frac{1}{n}$;　　$\sup x_n=1,\inf x_n=0$;

(2)$x_n=n[2+(-2)^n]$;　　$\sup x_n=+\infty,\inf x_n=-\infty$;

(3)$x_{2k}=k,x_{2k+1}=1+\frac{1}{k},(k=1,2,\cdots)$;　　$\sup x_n=+\infty,\inf x_n=2$;

(4)$x_n=[1+(-1)^n]\frac{n+1}{n}$;　　$\sup x_n=3,\inf x_n=0$;

(5)$x_n=\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$;　　$\sup x_n=2,\inf x_n=1$;

(6)$x_n=\frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$;　　$\sup x_n=1,\inf x_n=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.设$f(x)$在D上定义,求证：

(1) $\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\inf\limits_{x\in D}f(x)$;　　(2) $\inf\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\sup\limits_{x\in D}f(x)$.

证明:(1)设$A=\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}$,即有

i.对$\forall x\in D$,有$-f(x)\le A$;

ii.对$\forall \varepsilon>0$,$\exists x\in D$使得$-f(x)>A-\varepsilon$.

于是有

i.对$\forall x\in D$,有$f(x)\ge -A$;

ii.对$\forall \varepsilon>0$,$\exists x\in D$使得$f(x)<-A+\varepsilon$.

那么$-A=\inf\limits_{x\in D}f(x)$,即$A=-\inf\limits_{x\in D}f(x)$,因此有

$$\sup_{x\in D}\{-f(x)\}=-\inf_{x\in D}f(x)$$

成立。

(2)设$B=\inf\limits_{x\in D}\{-f(x)\}$,即有

i.对$\forall x\in D$,有$-f(x)\ge B$;

ii.对$\forall \varepsilon>0$,$\exists x\in D$使得$-f(x)<B+\varepsilon$.

于是有

i.对$\forall x\in D$,有$f(x)\le -B$;

ii.对$\forall \varepsilon>0$,$\exists x\in D$使得$f(x)>-B-\varepsilon$.

那么$-B=\sup\limits_{x\in D}f(x)$,即$A=-\sup\limits_{x\in D}f(x)$,因此有

$$\inf_{x\in D}\{-f(x)\}=-\sup_{x\in D}f(x)$$

成立。

3.设$\beta=\sup E$,且$\beta\notin E$,试证从E中可选取数列$\{x_n\}$且x_n互不相同,使得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\beta$;又若$\beta\in E$,则情况又如何?

证明:$<i>$.由于$\beta=\sup E$,那么可知i.对$\forall x\in E$,有$x\le\beta$成立;ii.对$\forall\varepsilon>0,\exists x\in E$,使得$x+\varepsilon>\beta$.

那么

$$
\begin{aligned}
&\text{取}\varepsilon_1=\frac{1}{2},\text{则}\exists x_1\in E,\text{使得}\beta\ge x_1\ge\beta-\frac{1}{2};\\
&\text{取}\varepsilon_2=\frac{1}{2^2},\text{则}\exists x_2\in E,\text{使得}\beta\ge x_2\ge\beta-\frac{1}{2^2};\\
&\text{取}\varepsilon_3=\frac{1}{2^3},\text{则}\exists x_3\in E,\text{使得}\beta\ge x_3\ge\beta-\frac{1}{2^3};\\
&\vdots\\
&\text{取}\varepsilon_n=\frac{1}{2^n},\text{则}\exists x_n\in E,\text{使得}\beta\ge x_n\ge\beta-\frac{1}{2^n};\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

我们得到数列$\{x_n\}\in E$,且由夹迫性原理可知有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\beta$成立。

如果$\{x_n\}$有无限个数彼此相同(设等于α),那么必有$\alpha=\beta$;否则可知$\exists\varepsilon_0=\frac{|\alpha-\beta|}{2}$,对$\forall N$,有$n>N$,使得$|x_n-\beta|=|\alpha-\beta|>\varepsilon_0$成立,这与$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\beta$矛盾;但是我们知道$\beta\notin E$,矛盾。因此$\{x_n\}$至多只有有限个数彼此相同,我们只需要将$\{x_n\}$中的相同的数剔除(剔除到只余一个;如果还有有限个彼此相同的数,继续剔除即可)就可以得到满足条件的数列$\{x_n\}$.

$<ii>$.如果$\beta\in E$,则可能找不见这样的数列。对于$E=[1,2]$,我们可以找见满足条件的数列,但当$E=\{2,1,3,51\}$的时候,我们找不见这样的数列。

4.试证收敛数列必有上下确界,趋于$+\infty$的数列必有下确界,趋于$-\infty$的数列必有上确界。

证明:i.对于数列$\{x_n\}$如果有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,那么可知数列$\{x_n\}$必有上下界,那么可知数列$\{x_n\}$必有上下确界。

ii.若对于数列$\{x_n\}$如果有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$,那么对于100,存在$N$,当$n>N$时,有$x_n>100$成立。那么我们取$m=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_N,100\}$,可以知道对于任意$x\in\{x_n\}$可知有$x>m$成立,于是数列$\{x_n\}$有下界,则由确界定理可以知道此数列必有下确界。

iii.同理可证得,趋于$-\infty$的数列必有上确界。

5.试分别给出满足下列条件的数列:

(1)有上确界无下确界的数列; $x_n=-n$;

(2)含有上确界但不含有下确界的数列; $x_n=1+\frac{1}{n}$;

(3)既含有上确界又含有下确界的数列; $x_n=(-1)^n$;

(4)既不含有上确界又不含有下确界的数列,其中上下确界都有限. $x_n=(-1)^n\frac{n+1}{n}$.

6.设$f(x)$在$[a,b]$上有界, 定义$\omega_f[a,b]=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)-\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, 求证：

$$\omega_f[a,b]=\sup_{x',x''\in[a,b]}\left|f(x')-f(x'')\right|.$$

证明：设$\alpha=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x),\beta=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$; 那么可知

$i.$对于$\forall x\in[a,b]$, 有$f(x)\le\alpha, f(x)\ge\beta$成立;

$ii.$对于$\forall\varepsilon>0,\exists x'\in[a,b],x''\in[a,b]$使得$f(x')>\alpha-\dfrac{\varepsilon}{2}, f(x'')<\beta+\dfrac{\varepsilon}{2}$.

对于$\forall x_1,x_2\in[a,b]$, 有$f(x_1)<\alpha, f(x_1)>\beta; f(x_2)<\alpha, f(x_2)>\beta$, 于是

$$f(x_1)-f(x_2)<\alpha-\beta, f(x_2)-f(x_1)<\alpha-\beta$$

成立, 即$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\alpha-\beta$.

由于对于$\forall\varepsilon>0,\exists x_1^*,x_2^*\in[a,b]$, 使得$f(x_1^*)>\alpha-\dfrac{\varepsilon}{2}, f(x_2^*)<\beta+\dfrac{\varepsilon}{2}$, 即

$$f(x_1^*)-f(x_2^*)>\alpha-\beta-\varepsilon$$

成立,故有$\left|f(x_1^*)-f(x_2^*)\right|>\alpha-\beta-\varepsilon$.

综上可知$\alpha-\beta=\sup\limits_{x',x''\in[a,b]}\left|f(x')-f(x'')\right|$,即

$$\omega_f[a,b]=\sup_{x',x''\in[a,b]}\left|f(x')-f(x'')\right|.$$

7.设$f(x)$在x_0附近由定义且有界, 定义

$$\omega_f(x_0)=\lim_{n\to\infty}\omega_f\left(x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}\right).$$

证明：$f(x)$在x_0连续的充要条件为$\omega_f(x_0)=0$.

证明：必要性;如果$f(x)$在x_0连续, 那么对于$\forall\varepsilon>0$, 总$\exists\delta_1>0$, 当$|x-x_0|<\delta_1$的时候有

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

成立。

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$,因此$\exists N$, 当$n>N$的时候有$\left|\dfrac{1}{n}\right|<\dfrac{\delta_1}{2}$, 即$\dfrac{2}{n}<\delta_1$.

那么对于$\forall x_1,x_2\in\left(x_0-\dfrac{1}{n},x_0+\dfrac{1}{n}\right)$,由于$|x_1-x_0|<\delta_1$,因此$\left|f(x_1)-f(x_0)\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$, 同理我们可得$\left|f(x_2)-f(x_0)\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$.

综上有对于$\forall\varepsilon>0,\exists N$,当$n>N$的时候, 对于$x_1,x_2\in\left(x_0-\dfrac{1}{n},x_0+\dfrac{1}{n}\right)$有

$$\left|f(x_2)-f(x_1)\right|\le\left|f(x_2)-f(x_0)\right|+\left|f(x_0)-f(x_1)\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\frac{2\varepsilon}{3},$$

于是必有

$$\sup_{x_1,x_2\in\left(x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}\right)}\left|f(x_2)-f(x_1)\right|\le\frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon,$$

因此$\omega_f(x_0)=\lim_{n\to\infty}\omega_f\left(x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}\right)=0.$

充分性;如果$\lim_{n\to\infty}\omega_f\left(x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}\right)=0$, 那么对于$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 当$n>N$的时候, 对于任意$x\in\left(x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}\right)$, 有$\sup\limits_{x\in\left(x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}\right)}\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$.那么对于$\forall\varepsilon>0$, 取$\delta=\frac{1}{n+1}$, 当$|x-x_0|<\delta$的时候, 有

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|<\sup_{x\in\left(x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}\right)}\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$$

成立, 因此函数$f(x)$在x_0点连续。

8.设$f(x),g(x)$在D上有界, 且大于0, 求证：

$$\inf_{x\in D}f(x)\bullet\inf_{x\in D}g(x)\le\inf_{x\in D}\{f(x)g(x)\}\le\inf_{x\in D}f(x)\bullet\sup_{x\in D}g(x)$$
$$\le\sup_{x\in D}f(x)\bullet\sup_{x\in D}g(x)\le\sup_{x\in D}\{f(x)g(x)\}.$$

证明：$i.$设$\alpha_1=\inf\limits_{x\in D}f(x),\alpha_2=\inf\limits_{x\in D}g(x);\alpha=\inf\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}$.那么对于任意$x\in D$, 有

$$f(x)\ge\alpha_1,g(x)\ge\alpha_2.$$

又由于在D上有$f(x),g(x)>0$, 于是对于任意$x\in D$, 有$f(x)g(x)\ge\alpha_1\alpha_2$; 因此$\alpha_1\alpha_2$是函数$f(x)g(x)$的一个下界, 由于$\alpha=\inf\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}$, 故有$\alpha_1\alpha_2\le\alpha$, 即$\inf\limits_{x\in D}f(x)\bullet\inf\limits_{x\in D}g(x)\le\inf\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}$.

$ii.$同理可证得$\sup\limits_{x\in D}f(x)\bullet\sup\limits_{x\in D}g(x)\le\sup\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}$.

$iii.$设$\beta_2=\sup\limits_{x\in D}g(x)$, 于是对于任意$x\in D$, 由于$f(x)>0$, 因此总有$f(x)g(x)\le f(x)\beta_2$成立。于是有

$$\inf_{x\in D}\{f(x)g(x)\}\le\inf_{x\in D}\{f(x)\beta_2\}=\inf_{x\in D}f(x)\bullet\sup_{x\in D}g(x).$$

$iv.$同理可得$\inf\limits_{x\in D}f(x)\bullet\sup\limits_{x\in D}g(x)\le\sup\limits_{x\in D}f(x)\bullet\sup\limits_{x\in D}g(x)$.

综上即知所证成立。

§2 实数闭区间的紧致性

1.利用有限覆盖定理9.2证明紧致性定理9.3.

证明：设数列$\{x_n\}$有界, 令$x_n \in [a,b]$.使用反证法证明：

设有界数列$\{x_n\}$不含有收敛子列, 则$\forall x \in [a,b]$, 存在去心邻域$\overset{o}{U}(x, \varepsilon)$, 其中不含有数列$\{x_n\}$中的项。否则$x$的任意去心邻域必含有数列$\{x_n\}$中的无穷多项(若仅含有有限项, 则满足要求的去心邻域必存在),即$\forall \varepsilon > 0, \exists n$, 使得$0 < |x_n - x| < \varepsilon$; 那么我们如下构造数列：

取$\varepsilon_1 = 1, \exists n_1$, 使得$0 < |x_{n_1} - x| < \varepsilon_1$;

取$\varepsilon_2 = \min(\frac{1}{2}, |x_{n_1} - x|), \exists n_2 > n_1$, 使得$0 < |x_{n_2} - x| < \varepsilon_2$;

$\vdots$

取$\varepsilon_k = \min(\frac{1}{k}, |x_{n_{k-1}} - x|), \exists n_k > n_{k-1}$, 使得$0 < |x_{n_k} - x| < \varepsilon_k$;

$\vdots$

易知所构造的子列$\{x_{n_k}\}$, 满足$|x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$, 于是有$x_{n_k} \to x (k \to \infty)$; 因此如果紧致性定理不成立, 则$\forall x \in [a,b]$, 存在去心邻域$\overset{o}{U}(x, \varepsilon)$, 其中不含有数列$\{x_n\}$中的项。

那么开区间集合$\{U(x,\varepsilon) \mid x \in [a,b]\}$是闭区间$[a,b]$的一个覆盖, 由有限覆盖定理可以知道, $\{U(x,\varepsilon) \mid x \in [a,b]\}$中有有限个开区间可以把区间$[a,b]$覆盖。但是我们知道这些有限个开区间中只可能含有数列$\{x_n\}$的有限项, 这与数列$\{x_n\}$是$[a,b]$上的一个无穷数集相矛盾。

2.利用有紧致性定理9.3证明单调有界数列必有极限。

证明：设数列$\{x_n\}$单调增加有界, 由紧致性定理可以知道, $\{x_n\}$存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$.

设$\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = A$; 那么对于$\forall \varepsilon > 0, \exists K > 0$, 当$k > K$时, 有$|x_{n_k} - A| < \varepsilon$成立, 即$A - \varepsilon < x_{n_k} \le A$.
取$N = n_K$, 由单调性可以知道当$n > N$时, 有$A - \varepsilon < x_n \le A$成立, 于是$\lim\limits_{n \to \infty} x_{n_k} = A$.

3.用区间套定理证明单调有界数列必有极限。

证明：不妨设设数列$\{x_n\}$单调上升有上界，那么由确界定理可以知道数列$\{x_n\}$必有上下确界。

设$\alpha=\sup\{x_n\},\beta=\inf\{x_n\}$，于是对于$\forall\varepsilon>0,\exists x_N\in\{x_n\}$使得$\alpha-\varepsilon<x\le\alpha$；那么由于数列$\{x_n\}$单调递增，可知对于$\forall\varepsilon>0,\exists N$，当$n>N$的时候，有$\alpha-\varepsilon<x_n\le\alpha.$

我们如下构造数列$\{x_{n_k}\}$：

取$\varepsilon_1=\dfrac{\alpha-\beta}{2},\exists N_1$，当$n>N_1$时，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\alpha-\dfrac{\alpha-\beta}{2}<x_n\le\alpha$，令$n_1=N_1+1$；

取$\varepsilon_2=\dfrac{\alpha-\beta}{2^2},\exists N_2$，当$n>N_2$时，$\alpha-\dfrac{\alpha-\beta}{2^2}<x_n\le\alpha$，令$n_2=2+\max(n_1,N_2)$；

取$\varepsilon_3=\dfrac{\alpha-\beta}{2^3},\exists N_3$，当$n>N_3$时，$\alpha-\dfrac{\alpha-\beta}{2^3}<x_n\le\alpha$，令$n_3=2+\max(n_2,N_3)$；

$\vdots$

取$\varepsilon_k=\dfrac{\alpha-\beta}{2^k},\exists N_k$，当$n>N_k$时，$\alpha-\dfrac{\alpha-\beta}{2^k}<x_n\le\alpha$，令$n_k=2+\max(n_{k-1},N_k)$；

$\vdots$

于是我们的一个数列$\{x_{n_k}\}$，及一个区间套$\{[a_k,b_k]\}=\{[\alpha-\dfrac{\alpha-\beta}{2^k},\alpha]\}(k=1,2,\cdots)$. 显然有$x_{n_k}\in[a_k,b_k]$且$\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}b_k=\alpha$，利用极限的两边夹法则可以知道$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\alpha.$

即对于$\forall\varepsilon>0,\exists K>0$，当$k>K$的时候，有$\alpha-\varepsilon<x_{n_k}<\alpha$；那么取$N=N_K$，由数列$\{x_n\}$的单调性可以知道，当$n>N$的时候有$\alpha-\varepsilon<x_n<\alpha$，即$|x_n-\alpha|<\varepsilon$，于是可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha.$

4.试分析区间套定理的条件: 若将闭区间列改为开区间列, 结果怎样？若将条件

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

去掉或将$b_n-a_n\to 0$去掉,结果怎样？试举例说明。

答：i.若将闭区间改为开区间则可能套不到一个公共点, 例如$(a_n,b_n)=\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$, 显然有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)=\varnothing.$$

ii.若将条件$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots[a_n,b_n]\cdots$去掉则可能找不见一个实数$r$ 包含于所有的区间里,例如

$$[a_n,b_n]=\begin{cases}\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right], & n=4\\ \left[0,\dfrac{1}{n}\right], & \text{其他}\end{cases},$$

显然$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$,但是$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)=\varnothing.$

iii.若无$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$,则得到的可能不是一个点而是一个区间, 例如$[a_n,b_n]=\left[-1,\dfrac{1}{n}\right]$,

显然有$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)=[-1,0].$

5.若数列$\{x_n\}$无界, 且非无穷大量, 则必存在两个子列,$x_{n_k}\to\infty, x_{m_k}\to a$($a$为有限数).

证明：i.由数列$\{x_n\}$无界可知, 对于$\forall G>0$, 总有$x\in\{x_n\}$使得$|x|>G$. 那么我们如下构造数列：

取$G_1=2$, 则有$x_{n_1}\in\{x_n\}$, 使得$|x_{n_1}|>G_1$;

取$G_2=\max(2^2,x_{n_1})$, 则有$x_{n_2}\in\{x_n\}$, 使得$|x_{n_2}|>G_2$;

取$G_3=\max(2^3,x_{n_2})$, 则有$x_{n_3}\in\{x_n\}$, 使得$|x_{n_3}|>G_3$;

$\vdots$

取$G_k=\max(2^k,x_{n_{k-1}})$, 则有$x_{n_k}\in\{x_n\}$, 使得$|x_{n_k}|>G_k$;

$\vdots$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}2^n=+\infty$, 那么我们可以知道我们得到一个子列$\{x_{n_k}\}$满足$\lim\limits_{k\to\infty}|x_{n_k}|=+\infty$.

ii.由于数列$\{x_n\}$不是无穷大量, 那么$\exists G_0>0$, 对$\forall N>0, \exists n>N$, 使得$|x_n|<G_0$.我们如下构造数列：

取$N_1=1$, 那么$\exists n_1>N_1$, 使得$|x_{n_1}|<G_0$,

取$N_2=\max(2,n_1)$, 那么$\exists n_2>N_2$, 使得$|x_{n_2}|<G_0$,

取$N_3=\max(3,n_2)$, 那么$\exists n_3>N_3$, 使得$|x_{n_3}|<G_0$,

$\vdots$

取$N_k=\max(2,n_{k-1})$, 那么$\exists n_k>N_k$, 使得$|x_{n_k}|<G_0$,

$\vdots$

于是我们得到一个以G_0为界的数列$\{x_{n_k}\}$,那么由紧致性定理可以知道此数列必有收敛子列$\{x_{m_k}\}$,显然这个收敛子列也必是数列$\{x_n\}$的子列。

6.有界数列$\{x_n\}$若不收敛，则必有两个子列$x_{n_k}\to a, x_{m_k}\to b, (a\neq b)$.

证明：由于数列$\{x_n\}$有界，那么必有上下确界，设$\inf\{x_n\}=\alpha, \sup\{x_n\}=\beta$.而且必有收敛子列，设其收敛子列$\{x_{n_k}\}$收敛于实数$a$.

由于数列$\{x_n\}$不收敛于a，我们知道$\exists\varepsilon_0>0$，对于$\forall N>0, \exists n>N$，使得$|x_n-a|\geq\varepsilon_0$.我们如下构造数列：

取$N_1=1, \exists n_1>N_1$，使得$\left|x_{n_1}-a\right|\geq\varepsilon_0$，

取$N_2=n_1, \exists n_2>N_2$，使得$\left|x_{n_2}-a\right|\geq\varepsilon_0$，

取$N_3=n_2, \exists n_3>N_3$，使得$\left|x_{n_3}-a\right|\geq\varepsilon_0$，

$\vdots$

取$N_k=n_{k-1}, \exists n_k>N_k$，使得$\left|x_{n_k}-a\right|\geq\varepsilon_0$

$\vdots$

那么我们得到一个区间$[\alpha, a-\varepsilon_0]\cup[a+\varepsilon_0, \beta]$上的数列$\{x_{n_k}\}$，可以知道这个数列必有收敛子列，且其收敛子列必不收敛于a，可设其收敛于实数$b(b\neq a)$；显然这个收敛于实数b的子列也是数列$\{x_n\}$的收敛子列。于是得证。

7.求证：数列$\{a_n\}$有界的充要条件是：$\{a_n\}$的任意子列$\{a_{n_k}\}$都有收敛子列。

证明：必要性。如果数列$\{a_n\}$有界，那么它的任意子列$\{a_{n_k}\}$也必有界，故此子列有收敛子列。

充分性，使用反证法。首先我们要肯定无穷大量没有收敛子列，若数列$\{x_n\}$是无穷大量且有一个收敛子列$\{x_{n_k}\}$收敛于x_0，那么该子列必有界。设对于$\forall k$，有$\left|x_{n_k}\right|<G_0$成立，那么对于任意的N，必有$n_k>N$使得$\left|x_{n_k}\right|<G_0$成立，这与数列$\{x_n\}$是无穷大量相矛盾。

那么如果$\{a_n\}$有界则得证；如果$\{a_n\}$无界，则由T_5可知必有子列是一个无穷大量，这与数列$\{a_n\}$的任意子列都有收敛子列相矛盾。总之数列$\{a_n\}$必有界。

8.设$f(x)$在$[a,b]$上定义,且在每一点出函数的极限存在,求证：函数$f(x)$在$[a,b]$上有界。

证明：使用反证法。若函数$f(x)$在$[a,b]$上无界,那么对于$\forall G>0,\forall x\in[a,b]$使得$f(x)>G$,则

取$G_1=2,\forall x_1\in[a,b]$,使得$f(x_1)>G_1$;

取$G_2=\max(2^2,f(x_1)),\forall x_2\in[a,b]$,使得$f(x_2)>G_2$;

取$G_3=\max(2^3,f(x_2)),\forall x_3\in[a,b]$,使得$f(x_3)>G_3$;

$\vdots$

取$G_n=\max(2^n,f(x_{n-1})),\forall x_n\in[a,b]$,使得$f(x_n)>G_n$;

$\vdots$

于是我们得到$[a,b]$上的数列$\{x_n\}$,显然该数列有界,因此它必有收敛子列$\{x_{n_k}\}$;我们设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$,可以知道必有$x_0\in[a,b]$.

对于数列$\{f(x_n)\}$,我们知道它是一个无穷大量,由T_7可知它没有收敛子列,于是有

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})\neq f(x_0),$$

这与函数$f(x)$在x_0点有极限是矛盾的(由海涅原理可知矛盾)。

9.设$f(x)$在$[a,b]$上无界,求证：存在$c\in[a,b]$,对于任意的$\delta>0$,函数$f(x)$在$(c-\delta,c+\delta)\bigcap[a,b]$上无界。

证明：由于$f(x)$在$[a,b]$上无界,可以知道对于$\forall G>0,\exists x\in[a,b]$使得$f(x)>G$.那么

取$G_1=2,\exists x_1\in[a,b]$,使得$|f(x_1)|>G_1$;

取$G_2=\max(2^2,f(x_1)),\exists x_2\in[a,b]$,使得$|f(x_2)|>G_2$;

取$G_3=\max(2^3,f(x_2)),\exists x_3\in[a,b]$,使得$|f(x_3)|>G_3$;

$\vdots$

取$G_n=\max(2^n,f(x_{n-1})),\exists x_n\in[a,b]$,使得$|f(x_n)|>G_n$;

$\vdots$

于是我们得一个$[a,b]$上的有界数列$\{x_n\}$,设它的一个收敛子列$\{x_{n_k}\}$收敛于$c\in[a,b]$.由于数列$\{f(x_n)\}$是一个无穷大量,那么对于任意的$G>0,\exists N>0$,当$n>N$时,$|f(x_n)|>G$;而对于N,我们可以找见K_1,使得$k>K_1$时,由$n_k>N$,那么此时$|f(x_{n_k})|>G$,因此数列$f(x_{n_k})$是一个无穷大量.

由于$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=c$,故对于$\forall\delta,\exists K_2$,当$k>K_2$时,$x_{n_k}\in(c-\delta,c+\delta)\bigcap[a,b]$;取$K=\max(K_1,K_2)$,可知对于$\forall G,\exists k>K$使得$x_{n_k}\in(c-\delta,c+\delta)\bigcap[a,b]$,且$|f(x_{n_k})|>G$.

因此对于任意的$\delta>0$,函数$f(x)$在$(c-\delta,c+\delta)\bigcap[a,b]$上无界。

10.设$f(x)$是(a,b)上的下凸函数, 且有上界, 求证:$\lim\limits_{x\to a^+}f(x),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在。

证明：对于任意$x\in(a,b)$有$f(x)<M$.

设$x>x_1>x_0$为(a,b)内任意三点, 那么由凸函数的性质可知$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$单调上升; 且有$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le\dfrac{M-f(x_0)}{x_1-x_0}$成立。那么根据单调有界有极限可设$\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A$.于是有

$$\lim_{x\to b^-}f(x)=\lim_{x\to b^-}\left[(x-x_0)\bullet\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\right]=A\bullet(b-x_0)+f(x_0).$$

因此可知极限$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在;同理可知$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$存在。

(由于凸函数的定义不明确，这里将原题中的“凸函数”改为“下凸函数”)

11.设$f(x)$在$[a,b]$上只有第一类间断点, 定义

$$\omega(x)=\left|f(x+0)-f(x-0)\right|;$$

求证：任意$\varepsilon>0,\omega(x)\ge\varepsilon$的点只有有限多个。

证明：如果点x_0是函数$f(x)$的连续点,那么可以容易的证得$\omega(x_0)<\varepsilon$,(对于$\forall\varepsilon>0$成立).我们现在证明若$f(x)$在r点的左极限存在, 那么$\exists\delta>0$, 使$\forall x\in(r-\delta,r)$, 对$\forall\varepsilon>0$有$\omega(x)<\varepsilon$成立。

设$\lim\limits_{x\to r^-}f(x)=A$,则对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$, 当$x\in(r-\delta_1,r)$时有$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

那么$\forall x_0\in(r-\delta_1,r)$取$\delta=\min(x_0-r+\delta_1,r-x_0)$, 可知当$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(r-\delta_1,r)$时, 有$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$成立。于是函数$f(x)$在$x_0$点的左右极限存在且相等, 依题意可知此点必是函数的连续点, 于是有$\omega(x_0)<\varepsilon$.由点x_0在区间$(r-\delta_1,r)$上的任意性可知所证成立。同理可证得当函数在点r处有右极限的时候,$\exists\delta>0$, 使得$\forall x\in(r,r+\delta)$, 对$\forall\varepsilon>0$有$\omega(x)<\varepsilon$成立。

以下, 我们使用反证法证明函数$f(x)$在区间$[a,b]$上只有有限个间断点。

若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有无限个间断点, 那么我们将区间$[a,b]$等分, 取其中含有$f(x)$无限个间断点的那个小区间记为$[a_1,b_1]$;同理我们将区间$[a_1,b_1]$等分, 取含有无限个间断点的那个小区间记为$[a_2,b_2]\cdots$;如此下去我们将得到一个区间套$\{[a_n,b_n]\}$, 可设$r_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$.

可以知道,不论r_0是函数$f(x)$的间断点还是连续点, 函数$f(x)$在此点都必有左极限和右极限;即存在δ_1,δ_2使得$\forall x\in(r_0-\delta_1,r_0)$或$(r_0,r_0+\delta_2)$总有$\omega(x)<\varepsilon$成立。则在区间$(r_0-\delta_1,r_0+\delta_2)$上仅有一个点$r_0$不满足$\omega(x)<\varepsilon$成立。

但是此时我们发现：只要n取足够大就有$[a_n,b_n]\subset(r_0-\delta_1,r_0+\delta_2)$, 这与$[a_n,b_n]$的构造是矛盾的。因此函数在区间$[a,b]$上只有有限个间断点; 即得证。

12.设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续有界, 对任意$a\in(-\infty,+\infty)$, $f(x)=a$在$[0,+\infty)$上只有有限个根或无根,求证:$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在。

证明：由函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续有界可知,函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上必有上下确界,我们设$\inf\limits_{x\in[0,+\infty)}f(x)=\alpha$, $\sup\limits_{x\in[0,+\infty)}f(x)=\beta$.即对于$\forall x\in[0,+\infty)$, 有$f(x)\in[\alpha,\beta]$成立; 且对于$\forall c\in[\alpha,\ \beta]$, $\exists x_0\in[0,+\infty)$使$f(x_0)=c$成立。

对于方程$f(x)=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$,由于它只有有限个根;故我们可以取得$x_1$为其在区间$[0,+\infty)$上最大的那个根,即对于任意$x>x_1$总有$f(x)>\dfrac{\alpha+\beta}{2}$或$f(x)<\dfrac{\alpha+\beta}{2}$成立。若$f(x)>\dfrac{\alpha+\beta}{2}$成立,则取$[a_1,b_1]=[\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta]$,否则取$[a_1,b_1]=[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}]$.

同理对于方程$f(x)=\dfrac{a_1+b_1}{2}$,由于它只有有限个根;故我们可以取得x_2为其在区间$[x_1,+\infty)$上最大的那个根,即对于任意$x>x_2$总有$f(x)>\dfrac{a_1+b_1}{2}$或$f(x)<\dfrac{a_1+b_1}{2}$成立。若$f(x)>\dfrac{a_1+b_1}{2}$成立,则取$[a_2,b_2]=[\dfrac{a_1+b_1}{2},b_1]$,否则取$[a_2,b_2]=[a_1,\dfrac{a_1+b_1}{2}]$.

如此继续下去,我们可得一个区间套$\{[a_n,b_n]\}$及一个单调递增数列$\{x_n\}$.此时必有唯一的点$r\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$,且有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=r\left(\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0\right)$.

对于$\forall x>x_n$,有$f(x),r\in[a_n,b_n]$成立,那么对$\forall\ \varepsilon>0,\exists N$,当$n>N,x>x_N$时有

$$\left|f(x)-r\right|<\left|b_n-a_n\right|<\varepsilon$$

成立。因此有$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=r$.

§3 实数的完备性

1.设$f(x)$在(a,b)上连续,求证：$f(x)$在(a,b)一致连续的充要条件是$\lim\limits_{x\to a^+}f(x),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$都存在。

证明：必要性。若$f(x)$在(a,b)一致连续,那么$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$x',x''\in(a,b)$且$|x'-x''|<\delta$时，有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$

因此对于任意$x',x''\in(a,b),$当$x',x''\in(a,a+\delta)$时，有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$那么由柯西收敛原理可知$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$存在。同理可知$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在。

充分性。设$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\alpha,\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\beta,$构造函数

$$g(x)=\begin{cases}\alpha & x=a\\ f(x) & x\in(a,b).\\ \beta & x=b\end{cases}$$

可以知道,函数$g(x)$在闭区间$[a,b]$上是连续的,则由康托定理可以知道函数$g(x)$在该区间上是一致连续的。那么它在开区间(a,b)上也必是一致连续的;而此时$f(x)=g(x),$因此可知$f(x)$在区间(a,b)上一直连续。

2.求证数列$x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$当$n\to\infty$时,极限不存在。

证明：存在$\varepsilon_0=\frac{\sqrt{3}}{3},$对于$\forall N,\exists n=2N,m=3N,$使得

$$|x_m-x_n|=\left|\frac{1}{\sqrt{2N+1}}+\frac{1}{\sqrt{2N+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{3N}}\right|\geq\left|\frac{N}{\sqrt{3N}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}>\frac{\sqrt{3}}{6}=\varepsilon_0.$$

那么由极限的柯西原理可以知道数列$\{x_n\}$的极限是不存在的。

3.利用柯西收敛原理讨论下列数列的收敛性：

(1)$x_n=a_0+a_1q+a_2q^2+\cdots+a_nq^n,\left(|q|<1,|a_k|\leq M\right);$

证明：对于$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\log_q\frac{(1-q)\varepsilon}{2M}\right]+1,$对于$\forall m,n>N$有

$$|x_m-x_n|=\left|a_{n+1}q^{n+1}+a_{n+2}q^{n+2}+\cdots+a_mq^m\right|\leq M\left|q^{n+1}+q^{n+2}+\cdots+q^m\right|$$

$$=\frac{Mq^{n+1}(1-q^{m-1})}{1-q}<\frac{2Mq^{n+1}}{1-q}<\frac{2Mq^N}{1-q}<\frac{2M\frac{(1-q)\varepsilon}{2M}}{1-q}=\varepsilon;$$

因此可知原数列是收敛的。

$(2)x_n=1+\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n};$

证明：对于$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\log_{\frac{1}{2}}\varepsilon\right]+1,$对于$\forall m,n>N$有

$$\left|x_m-x_n\right|=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin m}{2^m}\right|\le\left|\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right|$$

$$=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}(1-\frac{1}{2^{m-n}})}{1-\frac{1}{2}}<\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2^N}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}\varepsilon}=\varepsilon;$$

因此可知原数列是收敛的。

$(3)x_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$

证明：对于$\left|x_m-x_n\right|$,当$m-n=2k$时

$$\left|x_m-x_n\right|=\left|(-1)^{n+2k+1}\frac{1}{n+2k}+(-1)^{n+2k}\frac{1}{n+2k-1}+\cdots+(-1)^{n+3}\frac{1}{n+2}+(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}\right|$$

$$=\frac{1}{(n+2k)(n+2k-1)}+\frac{1}{(n+2k-2)(n+2k-3)}+\cdots+\frac{1}{(n+4)(n+3)}+\frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

$$<\frac{1}{(n+2k)(n+2k-1)}+\frac{1}{(n+2k-1)(n+2k-2)}+\frac{1}{(n+2k-2)(n+2k-3)}+\cdots+$$

$$\frac{1}{(n+4)(n+3)}+\frac{1}{(n+3)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+1)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(插入一些正数项)}$$

$$=\frac{1}{(n+2k-1)}-\frac{1}{(n+2k)}+\frac{1}{(n+2k-2)}-\frac{1}{(n+2k-1)}+\frac{1}{(n+2k-3)}-\frac{1}{(n+2k-2)}+\cdots+$$

$$\frac{1}{(n+3)}-\frac{1}{(n+4)}+\frac{1}{(n+2)}-\frac{1}{(n+3)}+\frac{1}{(n+1)}-\frac{1}{(n+2)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(拆开所有正数项)}$$

$$=\frac{1}{(n+1)}-\frac{1}{(n+2k)}\le\frac{1}{n+1};$$

当$m-n=2k+1$时

$$\left|x_m-x_n\right|=\left|(-1)^{n+2k+2}\frac{1}{n+2k+1}+(-1)^{n+2k+1}\frac{1}{n+2k}+(-1)^{n+2k}\frac{1}{n+2k-1}+\cdots+(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}\right|$$

$$\le\left|(-1)^{n+2k+2}\frac{1}{n+2k+1}\right|+\left|(-1)^{n+2k+1}\frac{1}{n+2k}+(-1)^{n+2k}\frac{1}{n+2k-1}+\cdots+(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}\right|$$

$$\le\frac{1}{n+2k+1}+\frac{1}{(n+1)}-\frac{1}{(n+2k)}<\frac{1}{n+1}.$$

因此对于$\forall\varepsilon>0,$只要取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+2,$那么对于任意$m,n>N$总有$\left|x_m-x_n\right|\le\frac{1}{n+1}<\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon;$

故原数列是收敛的。

4.证明$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的充要条件是：对给定的$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0,$ 当$0<|x'-x_0|<\delta, 0<|x''-x_0|<\delta$时, 恒有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$

证明：必要性. 设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,$则对于$\forall\varepsilon>0,\exists\delta,$当$0<|x-x_0|<\delta$时,$|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2};$ 那么对于任意$x',x'',$若$0<|x'-x_0|<\delta, 0<|x''-x_0|<\delta,$ 则必有

$$|f(x')-f(x'')|=|f(x')-A+A-f(x'')|\le|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

充分性. 设$\{x_n\}$是任意一个满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$的数列。已知对任意给定的$\varepsilon>0, \exists\delta>0,$ 当$0<|x'-x_0|<\delta, 0<|x''-x_0|<\delta$时, 恒有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$那么对于这个$\delta,\exists N,$ 当$n>N$的时候, $0<|x_n-x_0|<\delta;$故可知当$m,n>N$时候, 有$|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon.$那么由柯西收敛原理可以知道数列$\{f(x_n)\}$收敛。

下面我们证明,对于任意收敛于x_0的数列$\{x_n\},$ 对应的数列$\{f(x_n)\}$都收敛于同一个实数。若不然则存在$\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(1)}=x_0, \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(2)}=x_0,$ 但$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^{(1)})\ne\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^{(2)}).$我们如下定义数列$\{t_n\}$:

$$t_n=\begin{cases} x_k^{(1)} & n=2k \\ x_k^{(2)} & n=2k+1 \end{cases}.$$

易证得$\lim\limits_{n\to\infty} t_n=x_0,$但是显然$\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n)$不存在, 这与我们已证得矛盾。

综上所证有：对于任意数列$\{x_n\},$若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0,$则数列$\{f(x_n)\}$都收敛于同一个实数。由海涅原理可以知道$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在。

5.证明：$f(x)$在x_0点连续的充要条件是：任意给定的$\varepsilon>0, \exists\delta>0,$ 当$|x'-x_0|<\delta, |x''-x_0|<\delta$的时候,恒有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$

证明：必要性. 若$f(x)$在x_0点连续,则对于$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$|x-x_0|<\delta$时, 有$|f(x)-f(x_0)|<\dfrac{\varepsilon}{2};$ 那么当$|x'-x_0|<\delta, |x''-x_0|<\delta$时, 有

$$\begin{aligned}|f(x')-f(x'')|&=|f(x')-f(x_0)+f(x_0)-f(x'')|\\&\le|f(x')-f(x_0)|+|f(x_0)-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

充分性. 已知$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$|x'-x_0|<\delta, |x''-x_0|<\delta$的时候, 恒有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$那么由于$0=|x_0-x_0|<\delta,$则对于任意满足$|x-x_0|<\delta$的$x,$ 总有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$

因此可知函数$f(x)$在x_0点连续。

6.证明下列极限不存在：

(1).$x_n=\dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$;

证明:$\exists\varepsilon_0=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$,对于$\forall N,\exists n=3N,m=3N+2$, 使得

$$\begin{aligned}|x_m-x_n|&=\left|\frac{m-1}{m+1}\cos\frac{2m\pi}{3}-\frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}\right|\\&=\left|\frac{3N+1}{3N+3}\cos\frac{2(3N+2)\pi}{3}-\frac{3N-1}{3N+1}\cos\frac{2(3N)\pi}{3}\right|\\&=\left|\frac{3N+1}{3N+3}\cos\left(2N\pi+\frac{4\pi}{3}\right)-\frac{3N-1}{3N+1}\cos(2N\pi)\right|\\&=\left|-\frac{3N+1}{3N+3}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3N-1}{3N+1}\right|\ge\left|\frac{3N+1}{3N+3}\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\\&\ge\frac{4}{6}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}>\frac{\sqrt{3}}{6}=\varepsilon_0.\end{aligned}$$

因此由柯西收敛原理可知原数列发散。

(2).$x_n=\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$;

证明:$\exists\varepsilon_0=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$,对于$\forall N,\exists n=2N,m=2N+1$, 使得

$$\begin{aligned}|x_m-x_n|&=\left|\sqrt[m]{1+2^{m(-1)^m}}-\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}\right|\\&=\left|\sqrt[2N+1]{1+2^{(2N+1)(-1)^{2N+1}}}-\sqrt[2N]{1+2^{2N(-1)^{2N}}}\right|\\&=\left|\sqrt[2N+1]{1+\frac{1}{2^{(2N+1)}}}-\sqrt[2N]{1+2^{2N}}\right|\\&\ge\left|2-\sqrt{2}\right|\ge\frac{2-\sqrt{2}}{2}=\varepsilon_0.\end{aligned}$$

因此由柯西收敛原理可知原数列发散。

$(3)x_n=\sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right);$

证明：当$n=2k$时

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\sin\left(\pi\sqrt{(2k)^2+2k}\right)=\sin\left(\pi\sqrt{(2k)^2+2k}-\pi 2k\right)$$

$$=\sin\left(\pi\frac{2k}{\sqrt{(2k)^2+2k}+2k}\right)=\sin\left(\pi\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2k}}+1}\right);$$

显然有$\lim\limits_{k\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{(2k)^2+2k}\right)=1.$

当$n=2k+1$时

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\sin\left(\pi\sqrt{(2k+1)^2+2k+1}\right)=-\sin\left(\pi\sqrt{(2k+1)^2+2k+1}-\pi(2k+1)\right)$$

$$=-\sin\left(\pi\frac{2k+1}{\sqrt{(2k+1)^2+2k+1}+2k+1}\right)=-\sin\left(\pi\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2k+1}}+1}\right);$$

显然有$\lim\limits_{k\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{(2k+1)^2+2k+1}\right)=-1.$

于是有$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\begin{cases}1 & n\text{为偶数}\\ -1 & n\text{为奇数}\end{cases}$, 故原数列的极限不存在。

$(4)x_n=\cos n;$

证明：存在$\varepsilon_0=\sin 1\sin 3$, 对于$\forall N,\exists m=2N, n=2N+1$使得

$$\left|\cos m-\cos n\right|=\left|2\sin(m-n)\sin(m+n)\right|=\left|2\sin 1\sin(4N+1)\right|\overset{???}{>}2\sin 1\sin 3=\varepsilon_0.$$

于是由柯西收敛原理可知原数列发散。

$(5)x_n=\tan n.$

证明：存在$\varepsilon_0=\sin 1$对于$\forall N,\exists m=2N+2, n=2N+1$使得

$$\left|\tan m-\tan n\right|=\left|\frac{\sin m}{\cos m}-\frac{\sin n}{\cos n}\right|=\left|\frac{\sin m\cos n-\sin n\cos m}{\cos m\cos n}\right|=\left|\frac{\sin(m-n)}{\cos m\cos n}\right|\geq\left|\sin(m-n)\right|=\sin 1=\varepsilon_0$$

于是由柯西收敛原理可知原数列发散。

7.设$f(x)$在$(a,+\infty)$上可导, $|f'(x)|$单调下降, 且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在, 求证$\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x)=0.$

证明：由于$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在, 根据柯西收敛原理可以知道：对于$\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, 当$x'>x''>X$时, 有$|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$; 在此我们令$\dfrac{x'}{2}=x''>X$, 于是有

$$|f(x')-f(x'')|=\left|(x'-x'')\bullet\frac{f(x')-f(x'')}{x'-x''}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

根据朗格朗日微分中值定理可以知道$\exists\xi\in(x'',x')$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x')-f(x'')}{x'-x''};$$

那么由$|f'(x)|$单调下降可以知道

$$\left|\frac{x'}{2}f'(x')\right|<\left|\frac{x'}{2}f'(\xi)\right|=\left|(x'-x'')\frac{f(x')-f(x'')}{x'-x''}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

综上我们知道对于$\forall\varepsilon>0,\exists X$, 当$x'>X$时, 有$|x'f'(x')|<\varepsilon$, 于是可知$\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x)=0.$

8.设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导, 且$|f'(x)|\le k<1$, 任给x_0, 令

$$x_{n+1}=f(x_n), n=0,1,2,\cdots.$$

求证:(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在;

(2)上述极限为$x=f(x)$的根, 且是唯一的。

证明:(1)对于$\forall n, m=n+p$有

$$|x_m-x_n|=|x_{n+p}-x_p|\le\sum_{i=n}^{n+p}|x_{i+1}-x_i|;$$

由于

$$\begin{aligned}|x_{i+1}-x_i|&=|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\left|(x_i-x_{i-1})\bullet\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\right|\\&=\left|(x_i-x_{i-1})\bullet f'(\xi_i)\right|\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{拉格朗日中值定理})\\&\le k|x_i-x_{i-1}|\le k^2|x_{i-1}-x_{i-2}|\le\cdots\le k^i|x_1-x_0|,\end{aligned}$$

于是有

$$|x_m-x_n|\le\sum_{i=n}^{n+p}|x_{i+1}-x_i|\le\sum_{i=n}^{n+p}k^i|x_1-x_0|=|x_1-x_0|\frac{k^n(1-k^p)}{1-k}<|x_1-x_0|\frac{k^n}{1-k}.$$

那么对于$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\log_k\dfrac{\varepsilon(1-k)}{|x_1-x_0|}\right]+1$, 当$m,n>N$的时候, 有

$$|x_m-x_n|\le|x_1-x_0|\frac{k^n}{1-k}\le|x_1-x_0|\frac{k^N}{1-k}<|x_1-x_0|\frac{k^{\log_k\frac{\varepsilon(1-k)}{|x_1-x_0|}}}{1-k}=\varepsilon;$$

于是由柯西收敛原理可知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在。

(2)设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,在等式$x_{n+1}=f(x_n)$两边取极限可得$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$,由函数$f(x)$的连续性可以知道$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=f(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)$,即$A=f(A)$.于是可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$为方程$x=f(x)$的一根。

另设$B=f(B)$,若$A\neq B$,那么

$$|A-B|=|f(A)-f(B)|=\left|(A-B)\bullet\frac{f(A)-f(B)}{A-B}\right|=|(A-B)\bullet f'(\xi)|=|A-B|\bullet|f'(\xi)|;$$

其中$\xi\in(A,B)$或是$\xi\in(B,A)$.依上式可得$|f'(\xi)|=1$,这与$|f'(x)|\le k<1$矛盾。

故可知方程$x=f(x)$的根是唯一的。

9.设$f(x)$在$[a,b]$上满足条件:

(1)$|f(x)-f(y)|\le k|x-y|,\forall x,y\in[a,b],0<k<1$;

(2)$f(x)$的值域包含在$[a,b]$内,则对于任意$x_0\in[a,b]$,令

$$x_{n+1}=f(x_n),n=0,1,2,\cdots;$$

有

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在;

(2)方程$x=f(x)$的解在$[a,b]$是唯一的,且这个解就是上述极限。

证明:(1)对于$\forall n,m=n+p$有

$$|x_m-x_n|=|x_{n+p}-x_p|\le\sum_{i=n}^{n+p}|x_{i+1}-x_i|;$$

由于

$$\begin{aligned}|x_{i+1}-x_i|&=|f(x_i)-f(x_{i-1})|\\&\le k|x_i-x_{i-1}|\le k^2|x_{i-1}-x_{i-2}|\le\cdots\le k^i|x_1-x_0|,\end{aligned}$$

于是有

$$|x_m-x_n|\le\sum_{i=n}^{n+p}|x_{i+1}-x_i|\le\sum_{i=n}^{n+p}k^i|x_1-x_0|=|x_1-x_0|\frac{k^n\left(1-k^p\right)}{1-k}<|x_1-x_0|\frac{k^n}{1-k}.$$

那么对于$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\log_k\dfrac{\varepsilon(1-k)}{|x_1-x_0|}\right]+1$,当$m,n>N$的时候,有

$$|x_m-x_n|\le|x_1-x_0|\frac{k^n}{1-k}\le|x_1-x_0|\frac{k^N}{1-k}<|x_1-x_0|\frac{k^{\log_k\frac{\varepsilon(1-k)}{|x_1-x_0|}}}{1-k}=\varepsilon;$$

于是由柯西收敛原理可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在。

(2).设方程$x=f(x)$在区间$[a,b]$上有两个不同的根α,β.即$\alpha=f(\alpha),\ \beta=f(\beta)$, 于是有

$$|\alpha-\beta|=|f(\alpha)-f(\beta)|\le k|\alpha-\beta|.$$

由于$\alpha\ne\beta$,故有$1\le k$,这与$0<k<1$是矛盾的。因此方程$x=f(x)$至多只有一个解。

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,那么对于$\forall\varepsilon>0,\exists N$,当$n>N$时,有$|x_n-A|<\varepsilon$,那么此时也有

$$|f(x_{n+1})-A|=|x_n-A|<\varepsilon;$$

即数列$\{f(x_{n+1})\}$也收敛于A,于是有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, 那么必有$f(A)=A$ (为什么?).

综上可知极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$是方程$x=f(x)$唯一的解。

§4 再论闭区间上连续函数的性质

1.设$f(x)$在$[a,b]$上连续,并且最大值点x_0是唯一的, 又设$x_n\in[a,b]$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$, 求证:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

证明:由于$x_n\in[a,b]$则数列$\{x_n\}$必有收敛子列$\{x_{n_k}\}$; 设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\beta$, 显然有$\beta\in[a,b]$.

作为数列$\{f(x_n)\}$的子列$\{f(x_{n_k})\}$,由于$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$, 可以知道$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0)$; 又由于函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, 可以知道$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k})=f(\beta)$. 于是有$f(x_0)=f(\beta)$。由于最大值点$x_0$是唯一的, 因此有$x_0=\beta$.

如果有界数列$\{x_n\}$不收敛, 那么由§3T_6可知必有另一个收敛子列$\{x_{n_{k'}}\}$收敛于$\alpha\ne\beta$; 但是由以上证明可以知道必有$\alpha=x_0=\beta$,矛盾。因此必有数列$\{x_n\}$收敛, 且易证得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

2.设$f(x)$在$[a,b]$上连续,可微;又设

(1) $\min\limits_{a\le x\le b} f(x) < p < \max\limits_{a\le x\le b} f(x)$;

(2)若$f(x)=p$,则有$f'(x)\ne 0$.

求证：方程$f(x)=p$的根只有有限多个。

证明：我们利用区间套定理使用反证法证明。

设$f(x)=p$在区间$[a,b]$上有无限个根,那么我们将区间$[a,b]$等分为$\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$与$\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$两个小区间,其中必有一个区间含有方程$f(x)=p$的无限个根,取之记为$[a_1,b_1]$;同理我们将区间$[a_1,b_1]$等分为$\left[a_1,\dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$与$\left[\dfrac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$两个小区间,取其中包含有方程$f(x)=p$的无限个根的那个小区间记为$[a_2,b_2]\cdots$;持续这样下去,我们可以得到一个区间套$\{[a_n,b_n]\}$.

由区间套定理可以知道,有唯一的点$r\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=r\left(\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0\right)$.

若$f(r)\ne p$,不妨设$f(r)=p_1>p$.那么由函数$f(x)$的连续性可以知道,$\lim\limits_{x\to r}f(x)=p_1>p$,即有$\lim\limits_{x\to r}\left[f(x)-p\right]=p_1-p>0$.那么根据函数极限的保号性可知道$\exists\,\delta>0$,使得当$x\in U(r,\delta)$时有$f(x)-p>0$;即在区间$(r-\delta,r+\delta)$上没有方程$f(x)=p$的根。

可是我们发现只要n取得足够大,就能满足$[a_n,b_n]\subset(r-\delta,r+\delta)$,这与区间$[a_n,b_n]$的构造是相矛盾的。

若$f(r)=p$,则$f'(r)\ne 0$,不妨设$f'(r)>0$;即有$\lim\limits_{x\to r^+}\dfrac{f(x)-f(r)}{x-r}=\lim\limits_{x\to r^-}\dfrac{f(x)-f(r)}{x-r}>0$.

对于$\lim\limits_{x\to r^+}\dfrac{f(x)-f(r)}{x-r}>0$,根据极限的保号性可以知道$\exists\,\delta_1>0$,使得当$x\in(r,r+\delta_1)$时,有$\dfrac{f(x)-f(r)}{x-r}>0$成立;由于此时$x-r>0$,故当$x\in(r,r+\delta_1)$时,有$f(x)-f(r)>0$成立。同理对于$\lim\limits_{x\to r^-}\dfrac{f(x)-f(r)}{x-r}>0,\exists\,\delta_2>0$,当$x\in(r-\delta_2,r)$的时候,有$\dfrac{f(x)-f(r)}{x-r}>0$成立;由于此时$x-r<0$,故当$x\in(r-\delta_2,r)$的时候,有$f(x)-f(r)<0$.我们取$\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$.

综上我们可以发现在区间$(r-\delta,r+\delta)$,仅有方程$f(x)=p$的一个根;但是,我们发现只要n足够大就能使$[a_n,b_n]\subset(r-\delta,r+\delta)$,这与区间$[a_n,b_n]$的构造是相矛盾的。

根据以上讨论,我们知道在区间$[a,b]$上是不可能有方程$f(x)=p$的无限多个根的。即得所证。

3.设$f(x)$在$[a,b]$上连续,$f(a)<0$,$f(b)>0$,求证:$\exists\,\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=0$;且$f(x)>0$,当$x\in(\xi,b]$.

证明：由介值定理可知道在(a,b)上必有方程$f(x)=0$的根,我们不论在这个区间上有关于这个方程的多少个根(一个或多个,有限或无限个),总之我们取ξ为最大的那个根。

(“应该是”可以取得这个最大的根ξ,但是如何用严格的证明,证明我们可以取到呢?)

即当$x\in(\xi,b]$,必有$f(x)\ne 0$.假设有$x_1\in(\xi,b]$,使得$f(x_1)<0$,那么由介值定理可知在区间(ξ,b)必有方程$f(x)=0$的根,矛盾。因此当$x\in(\xi,b]$时,必有$f(x)>0$.

4.设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数,其最大值和最小值分别为M和$m(m<M)$,求证:存在区间$[\alpha,\beta]$满足条件:

(1)$f(\alpha)=M, f(\beta)=m$或$f(\alpha)=m, f(\beta)=M$;

(2)$m<f(x)<M$,当$x\in(\alpha,\beta)$.

证明:由最值定理可以知道在区间$[a,b]$上必有x_1,x_2使得$f(x_1)=M, f(x_2)=m$.

设$x_1<x_2$,如果在区间(x_1,x_2)上仍有方程$f(x)=M$的根(无论有限或无限个),我们取α为其中最大的那一个;否则记$\alpha=x_1$.如果在区间(α,x_2)上仍有方程$f(x)=m$的根,我们取β为最小的那一个;否则记$\beta=x_2$.

此时可以证明区间(α,β)满足题中条件。

****

此时我们发现我们又遇到了上题中同样的问题:为什么我们可以取到那个最大的根?下面我们使用区间套定理证明我们能够取到那个“最大的根”。我们以上题为例。

如果在区间$[a,b]$有关于方程$f(x)=0$的有限个根,我们显然能够取得那个最大的。下面我们证明:即使在这个区间上有无限个根,我们也能取得最大的那个根。

首先令$[a_0,b_0]=[a,b]$.

我们将区间$[a_0,b_0]$等分为$I_0\left[a_0,\dfrac{a_0+b_0}{2}\right], II_0\left[\dfrac{a_0+b_0}{2},b_0\right]$两个小区间。我们首先考虑区间$II_0$,如果在$II_0$上仅有关于方程$f(x)=0$的非零有限个根,那么我们显然可以取得最大的根,记为ξ即可;如果在区间II_0上有关于方程$f(x)=0$的无限个根,那么我们记$[a_1,b_1]=\left[\dfrac{a_0+b_0}{2},b_0\right]$,否则我们记$[a_1,b_1]=\left[a_0,\dfrac{a_0+b_0}{2}\right]$.

同样我们将区间$[a_1,b_1]$等分为$I_1\left[a_1,\dfrac{a_1+b_1}{2}\right], II_1\left[\dfrac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$两个小区间。我们首先考虑区间$II_1$,如果在$II_1$上仅有关于方程$f(x)=0$的非零有限个根,那么我们显然可以取得最大的根,记为ξ即可;如果在区间II_0上有关于方程$f(x)=0$的无限个根,那么我们记$[a_2,b_2]=\left[\dfrac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$,否则我们记$[a_2,b_2]=\left[a_1,\dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$.

我们持续这样做下去,要么我们在某一步取得那个最大根ξ,则我们达到目的;要么我们得到一个区间套$\{[a_n,b_n]\}$.那么根据区间套定理,我们知道存在唯一的一点$r\in\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}[a_n,b_n]$.我们来证明证明这唯一的一点$r$必是方程$f(x)=0$的根。如果这一点不是该方程的根,那么根据函数连续(这个“连续”是非常重要的)及极限的保号性可以知道必有$\delta>0,\forall x\in(r-\delta,r+\delta)$有$f(x)\neq 0$成立;但是我们发现只要$n$取地足够大就能使$[a_n,b_n]\subset(r-\delta,r+\delta)$,这与区间$[a_n,b_n]$的构造是矛盾的。因此这一点$r$必是方程$f(x)=0$的根。

根据我们所得区间套的方式,我们可以知道对于$\forall n$,当$x \geq b_n$时,x都不是方程$f(x)=0$的根。我们知道b_n单调下降,且$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = r$;那么我们可以肯定任意大于$r$的数$x_0$都不是方程$f(x)=0$的根,否则必有足够大的$N$,使得$x_0 \geq b_N$.这与我们区间套的构造方式相矛盾,因此我们记$\xi = r$即可。

综上我们知道当函数$f(x)$连续的时候,我们在区间$[a,b]$可以取得方程$f(x)=0$最大的那个根。

在证明过程中函数的连续是非常重要的,如果没有函数 $f(x)$在r点的连续,我们是得不到那个区间$(r-\delta, r+\delta)$的。例如间断函数

$$g(x)=\begin{cases} 0 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases};$$

我们找不见它在区间$[1,3]$上最大的零点。

5.设$f(x)$在$[0,2a]$上连续,且$f(0)=f(2a)$,求证:存在$x \in [0,a]$使得$f(x)=f(x+a)$.

证明:若$f(a)=f(0)=f(2a)$,则$x=0$即知所证成立。

如果$f(a) \neq f(0)=f(2a)$,我们构造函数$g(x)=f(x)-f(x+a)$.

可以知道函数$g(x)$在区间$[0,2a]$上是连续的。易求得

$$g(0)=f(0)-f(a), g(a)=f(a)-f(2a).$$

由于$f(0)=f(2a)$,因此可知$g(0)=-g(a)$,那么在区间$(0,a)$必有函数$g(x)$的零点ξ即有

$$g(\xi)=f(\xi)-f(\xi+a)=0.$$

综上即知有$\xi \in [0,a]$使得$f(\xi)=f(\xi+a)$.

6.设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,且取值为整数,求证:$f(x) \equiv$常数。

证明:由$f(x)$在$[a,b]$上连续可以知道$f(x)$在区间$[a,b]$上一致连续。于是对于$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, $\exists \delta_0 > 0$使得当$|x_1 - x_2| < \delta_0$时有$|f(x_1)-f(x_2)| < \frac{1}{2}$,即此时有$f(x_2)-\frac{1}{2} < f(x_1) < f(x_2)+\frac{1}{2}$.

我们发现在区间$\left(f(x_2)-\frac{1}{2}, f(x_2)+\frac{1}{2}\right)$上仅有一个整数,因此必有$f(x_1)=f(x_2)=n_0$.

取$\delta = \frac{\delta_0}{3}$,将区间$[a,b]$等分为$\left[\frac{b-a}{\delta}+1\right]$份,可以知道对于任意两个属于同一个小区间,或分别属于相邻两个小区间上的两个点的函数值总相等于同一个整数。那么可以知道在区间$[a,b]$上有$f(x) \equiv$常数。

7.设$f(x)$在(a,b)上一致连续,$a,b\neq\pm\infty$, 证明：$f(x)$在(a,b)上有界。

证明：由于函数$f(x)$在(a,b)上一致连续, 那么由本章 §3T_1可以知道, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$都存在。

我们设$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\beta$, 构造函数

$$g(x)=\begin{cases}\alpha & x=a\\ f(x) & x\in(a,b)\\ \beta & x=\beta\end{cases}.$$

可以知道函数$g(x)$在闭区间$[a,b]$上是连续的, 也是一致连续的。因此函数$g(x)$在闭区间$[a,b]$上必有界, 那么函数$f(x)$在区间(a,b)上也必有界。

8.若函数$f(x)$在(a,b)满足利普希茨条件, 即存在常数k, 使得

$$\left|f(x')-f(x'')\right|\le k\left|x'-x''\right|, \forall x',x''\in(a,b).$$

证明：$f(x)$在(a,b)上一致连续。

证明：对于$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{k+1}$, 对于任意$x',x''\in(a,b)$, 当$\left|x'-x''\right|<\delta$时, 有

$$\left|f(x')-f(x'')\right|\le k\left|x'-x''\right|<k\delta=\frac{k\varepsilon}{k+1}<\varepsilon$$

成立, 那么由一致收敛的定义可以知道函数$f(x)$在区间(a,b)上一致连续。

9.试用一致收敛的定义证明: 若$f(x)$在$[a,c]$和$[c,b]$上都一致连续, 则$f(x)$在$[a,b]$上也一致连续。

证明：由函数$f(x)$在$[a,c]$上一致收敛可以知道, 对于$\forall\varepsilon,\exists\delta_1>0$, 当$x',x''\in[a,c]$且$\left|x'-x''\right|<\delta_1$时, 有

$$\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon;$$

同理可以知道: 对于$\forall\varepsilon,\exists\delta_2>0$, 当$x',x''\in[c,b]$且$\left|x'-x''\right|<\delta_1$时候, 有

$$\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon.$$

由于函数在区间$[a,c]$和$[c,b]$上都一致连续, 那么必也是连续的; 因此可知在点c函数也是连续的。于是对于$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_3>0$, 当$x',x''\in(c-\delta_3,c+\delta_3)$时, 由柯西收敛原理可知有

$$\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon.$$

综上可知对于$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$, 对于任意$x',x''\in[a,b]$, 当$\left|x'-x''\right|<\delta$时, 有

$$\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$$

成立, 于是可知函数$f(x)$在$[a,b]$上一致连续。

10.设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续, 且$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$都存在, 证明$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续。

证明：由于$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在,由柯西收敛原理可以知道对于$\forall\varepsilon>0$, $\exists X_1>0$, 当$x', x''>X_1$时候, 有$\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$成立;同理由于$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$存在可知对于$\forall\varepsilon>0$, $\exists X_2>0$, 当$x', x''<-X_2$时候, 有$\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$成立。取$X=\max(X_1, X_2)$.

那么在区间$[-X,X]$上,由于函数的连续, 可以知道函数$f(x)$在此闭区间上一致连续; 即对于$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当$x', x''\in[-X,X]$, 且$|x'-x''|<\delta$时, 有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$成立。对于任意$x', x''\in[X+\infty)$或$(-\infty,-X]$, 当$|x'-x''|<\delta$时, 显然也有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$成立。

于是可知$f(x)$在区间$(-\infty,-X]$, $[-X,X]$, $[X+\infty)$上一致连续, 那么由上题可知函数$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上一致连续。

11.若$f(x)$在区间X(有穷或无穷)中具有有界的导函数$f'(x)$, 即$|f'(x)|<M$, 对于$\forall x\in X$; 则$f(x)$在X上一致连续。

证明：对于任意$x_1, x_2\in X$,根据朗格朗日微分中值定理总有

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|(x_1-x_2)\bullet\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|=|x_1-x_2|\bullet|f'(\xi)|<M|x_1-x_2|,$$

其中$\xi\in(x_1,x_2)$.于是在区间X上函数$f(x)$满足利普希茨条件, 那么根据T_8可知所证成立。

12.求证: $f(x)=\sqrt{x}\ln x$在$(0,+\infty)$上一致连续。

证明：我们首先证明函数$f(x)=\sqrt{x}\ln x$在$(0,2)$上一致连续。

由于

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{x}\ln x\right)=0,$$
$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}\left(\sqrt{x}\ln x\right)=\sqrt{2}\ln 2;$$

那么根据 §3T_1可以知道$f(x)$在区间$(0,2)$上一致连续。

而函数$f(x)$的导函数为

$$f'(x)=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}};$$

在区间$[1,+\infty)$上,由于$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}=0$, 容易证明$f'(x)$在区间$[1,+\infty)$上有界, 那么由上题可知函数$f(x)$在区间$[1,+\infty)$上一致连续。

那么根据T_9可以知道函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上一致连续。

13.设$f(x)$在$(a,+\infty)$上可导,且$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$,求证:$f(x)$在$(a,+\infty)$上不一致连续。

证明：由$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$可以知道对于$\forall G>0,\exists X>0$,当$x>X$时,$f'(x)>G$成立。

那么$\exists\varepsilon_0=1$,对于$\forall\delta>0,\exists x'=2X,x''=2X+\dfrac{1}{G}$,只要$G$足够大就有$|x'-x''|<\delta$,但是根据拉格朗日中值定理,此时总有

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|\frac{f(x')-f(x'')}{x'-x''}\bullet(x'-x'')\right|=\left|f'(\xi)\right|\bullet\left|x'-x''\right|>G\bullet\frac{1}{G}=1=\varepsilon_0$$

成立;其中$\xi\in(x',x'')$.于是可知函数$f(x)$在区间$(a,+\infty)$上不一致连续。

14.求证:$f(x)=x\ln x$在$(0,+\infty)$上不一致连续。

证明：可以求得函数的导函数为$f'(x)=\ln x+1$,由于

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x+1\right)=+\infty;$$

根据上题可知函数在区间$(0,+\infty)$上不一致连续。

§5 可积性

1.判断下列函数在区间$[0,1]$上的可积性:

(1).$f(x)$在$[0,1]$上有界,不连续点为$x=\dfrac{1}{n},(n=1,2,\cdots)$;

证明：可设$\left|f(x)\right|<M.\forall\varepsilon>0$,由于$f(x)$在区间$\left[\dfrac{\varepsilon}{5M},1\right]$上仅有有限个不连续点,因此函数在此区间上可积;即$\exists\eta>0$,对于区间$\left[\dfrac{\varepsilon}{5M},1\right]$的任意分法,只要$\max|\Delta x_i'|<\eta$,就有$\left|\sum\limits_{i'}\omega_i'\Delta x_i'\right|<\dfrac{\varepsilon}{5}$.那么对于任意区间$[\alpha,\beta]\subset\left[\dfrac{\varepsilon}{5M},1\right]$,只要在其上的分法满足$\max|\Delta x_i'|<\eta$,就有$\left|\sum\limits_{i'}\omega_i'\Delta x_i'\right|<\dfrac{\varepsilon}{5}$.

令$\delta=\min\left(\dfrac{\varepsilon}{5},\eta\right)$,现设$0=x_0<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_m=1$是$[0,1]$上满足$\max|\Delta x_i'|<\delta$的任一分法,设$x_{i_0}\le\dfrac{\varepsilon}{5}\le x_{i_0+1}$.那么可以知道有$\left|\sum\limits_{i=i_0+1}^{m}\omega_i\Delta x_i\right|<\dfrac{\varepsilon}{5}$,又显然有

$$\left|\sum_{i=0}^{i_0}\omega_i\Delta x_i\right|\le 2M\left|\sum_{i=0}^{i_0}\Delta x_i\right|<2M\bullet\frac{2\varepsilon}{5M}=\frac{4\varepsilon}{5}.$$

综上可得

$$\left|\sum_{i=0}^{m-1}\omega_i\Delta x_i\right|\le\left|\sum_{i=i_0+1}^{m}\omega_i\Delta x_i\right|+\left|\sum_{i=0}^{i_0}\omega_i\Delta x_i\right|<\frac{\varepsilon}{5}+\frac{4\varepsilon}{5}=\varepsilon;$$

那么由可积性的定义可知函数$f(x)$在区间$[0,1]$上可积。

$$(2)\, f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right) & x\in(0,1]\\ 0 & x=0\end{cases};$$

证明: 显然$f(x)$在区间$[0,1]$上有界, 间断点为$x=\dfrac{1}{n}, (n=1,2,\cdots)$. 那么依上题所证可知函数$f(x)$在区间$[0,1]$上可积。

$$(3)\, f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right] & x\in(0,1]\\ 0 & x=0\end{cases};\text{可积, 同上。}$$

$$(4)\, f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]} & x\in(0,1]\\ 0 & x=0\end{cases}.\text{可积, 同上。}$$

2.讨论$f(x), f^2(x), |f(x)|$三者间可积性的关系。

答：若$f(x)$可积则$f^2(x)$必可积; 证明如下。

若$f(x)$可积, 则必有界, 设$|f(x)|<M$; 且

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0,$$

其中$\omega_i=M_i-m_i=\sup\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)-\inf\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x), \lambda=\max\limits_{0\le i\le n-1}|\Delta x_i|, \Delta x_i=x_i-x_{i+1}.$

那么$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当$\lambda<\delta$时有$\left|\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i\right|<\dfrac{\varepsilon}{2M}$. 对于$f^2(x)$有

$$\omega_i'=M_i'-m_i'=\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f^2(x)-\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f^2(x),$$

由 §1T_8可以知道$\omega_i'\le\sup\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)\bullet\sup\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)-\inf\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)\bullet\inf\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)=M_i^2-m_i^2$, 那么$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当$\lambda<\delta$时有

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i'\Delta x_i\right|=\left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(M_i^2-m_i^2\right)\Delta x_i\right|\le 2M\bullet\left|\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i\right|<2M\bullet\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon;$$

于是有$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i'\Delta x_i=0$, 因此可知$f^2(x)$可积。

同理容易证得当$|f(x)|$可积时, $f^2(x)$也可积。

我们也可以证明$f^2(x)$可积时, $|f(x)|$可积也成立(不再列出)。

但是当$|f(x)|$或$f^2(x)$可积时, $f(x)$不一定可积, 例如函数

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x\text{为无理数}\\ 1 & x\text{为有理数}\end{cases}.$$

显然$f(x)$不可积, 但是函数$|f(x)|$和$f^2(x)$都可积。

3.设$f(x),g(x)$都在$\left[a,b\right]$上可积, 证明：$M(x)=\max\left(f(x),g(x)\right)$, $\mathrm{m}(x)=\min\left(f(x),g(x)\right)$在区间$\left[a,b\right]$上也可积。

证明：我们首先证明$f(x),g(x)$在$\left[a,b\right]$上可积时, $f(x)\pm g(x)$在$\left[a,b\right]$上也可积。

若$f(x),g(x)$在$\left[a,b\right]$上可积, 那么$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 当$\lambda<\delta$时, 有

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i{'}\Delta x_i\right|<\frac{\varepsilon}{2},\left|\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i{''}\Delta x_i\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

其中$\omega_i{'}=M_i{'}-m_i{'}=\sup\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)-\inf\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x),\omega_i{''}=M_i{''}-m_i{''}=\sup\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}g(x)-\inf\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}g(x),$

$\lambda=\max\limits_{0\le i\le n-1}\left|\Delta x_i\right|,\Delta x_i=x_i-x_{i+1}.$

对于$f(x)+g(x)$, 容易知道

$$\begin{aligned}\omega_i=M_i-m_i&=\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\left(f(x)+g(x)\right)-\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\left(f(x)+g(x)\right)\\&\le\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)+\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}g(x)-\left[\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)-\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]}g(x)\right]\\&=M_i{'}-m_i{'}+M_i{''}-m_i{''}=\omega_i{'}+\omega_i{''}.\end{aligned}$$

那么有

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i\right|\le\left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(\omega_i{'}+\omega_i{''}\right)\Delta x_i\right|\le\left|\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i{'}\Delta x_i\right|+\left|\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i{''}\Delta x_i\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon;$$

因此可知函数$f(x)+g(x)$在区间$\left[a,b\right]$上可积。

对于$f(x)-g(x)$, 由于

$$\begin{aligned}\omega_i=M_i-m_i&=\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\left(f(x)-g(x)\right)-\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\left(f(x)-g(x)\right)\\&\le\left[\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)-\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]}g(x)\right]-\left[\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)-\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}g(x)\right]\\&=M_i{'}-m_i{'}+M_i{''}-m_i{''}=\omega_i{'}+\omega_i{''}.\end{aligned}$$

因此函数$f(x)-g(x)$在区间$\left[a,b\right]$上可积。

根据第三章 §1T_3可以知道

$$\max\left(f(x),g(x)\right)=\frac{1}{2}\left[f(x)+g(x)+\left|f(x)+g(x)\right|\right],$$

$$\min\left(f(x),g(x)\right)=\frac{1}{2}\left[f(x)+g(x)-\left|f(x)+g(x)\right|\right];$$

那么结合上题所证可以知道函数$M(x),m(x)$皆可积。

4.设$f(x)$在$[a,b]$上可积,且$f(x)\ge r>0$,求证：

(1) $\dfrac{1}{f(x)}$在$[a,b]$上可积;

(2) $\ln f(x)$在$[a,b]$上可积。

证明:(1).由于$f(x)$在$[a,b]$上可积,那么对于区间$[a,b]$的任意一个分法

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

有$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$\lambda<\delta$时,有

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i'\Delta x_i\right|<r^2\varepsilon,$$

其中$\omega_i'=M_i'-m_i'=\sup\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)-\inf\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x),\lambda=\max\limits_{0\le i\le n-1}|\Delta x_i|,\Delta x_i=x_i-x_{i+1}$

由于$f(x)\ge r>0$,因此对于$\dfrac{1}{f(x)}$有

$$\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\inf\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)},\ \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sup\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)};$$

于是

$$\omega_i=M_i-m_i=\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\frac{1}{f(x)}-\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\inf\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)}-\frac{1}{\sup\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)}$$

$$=\frac{1}{m_i'}-\frac{1}{M_i'}=\frac{M_i'-m_i'}{M_i'\bullet m_i'}\le\frac{\omega_i'}{r^2}.$$

因此有

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i\right|\le\left|\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\omega_i'}{r^2}\Delta x_i\right|=\frac{1}{r^2}\left|\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i'\Delta x_i\right|<\frac{r^2\varepsilon}{r^2}=\varepsilon,$$

即函数$\dfrac{1}{f(x)}$在区间$[a,b]$上可积。

(2)对于$\forall y>x>0$,有$\dfrac{y-x}{y}<\ln\dfrac{y}{x}<\dfrac{y-x}{x}$(第五章 §1$T_2(4)$),那么对于$\ln f(x)$,在区间$[x_i,x_{i+1}]$上有

$$\omega_i=M_i-m_i<\frac{M_i'-m_i'}{m_i'}<\frac{M_i'-m_i'}{r}=\frac{\omega_i'}{r};$$

于是亦可证得函数$\ln f(x)$也可积。

5.设$f(x)$在$[a,b]$可积,求证:任给$\varepsilon>0$,存在逐段为常数的函数$\varphi(x)$,使得$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|dx<\varepsilon.$

证明：由$f(x)$在$[a,b]$上可积,我们知道对于区间$[a,b]$的任意一个分法

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

有$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$\lambda<\delta$时,有

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

其中$\omega_i=M_i-m_i=\sup\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)-\inf\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x),\lambda=\max\limits_{0\le i\le n-1}|\Delta x_i|,\Delta x_i=x_i-x_{i+1}.$

对应这个分法和"ε"我们如下构造逐段函数$\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=\begin{cases} m_0=\inf\limits_{x\in[x_0,x_1]}f(x) & x\in[x_0,x_1] \\ m_1=\inf\limits_{x\in[x_1,x_2]}f(x) & x\in[x_1,x_2] \\ \vdots & \\ m_{n-1}=\inf\limits_{x\in[x_{n-1},x_n]}f(x) & x\in[x_{n-1},x_n] \end{cases}.$$

我们设λ趋于零时,对应的分法为

$$a=x_0'<x_1'<x_2'<\cdots<x_m'=b,$$

可以知道必有$m>n$,那么可知

$$\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{m-1}|f(x_i')-\varphi(x_i')|\Delta x_i$$

$$\le\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{m-1}\sup_{x\in[x_i',x_{i+1}']}|f(x)-\varphi(x)|\Delta x_{i'}$$

$$\le 3\sum_{i=0}^{n-1}\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}|f(x)-\varphi(x)|\Delta x_i \quad (*)$$

$$=3\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)-\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)\right)\Delta x_i$$

$$=3\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)\Delta x_i=3\left|\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i\right|<3\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

$(*)$成立是由于$\sum\limits_{i=0}^{m-1}\Delta x_{i'}=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\Delta x_i$;但是当$[x_j',x_{j+1}']\subset[x_i,x_{i+1}]$时有

$$\sup_{x\in[x_j',x_{j+1}']}|f(x)-\varphi(x)|\le\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}|f(x)-\varphi(x)|$$

成立,当$x_j'\in[x_i,x_{i+1}],x_{j+1}'\in[x_{i+1},x_{i+2}]$时有

$$\sup_{x\in[x_j',x_{j+1}']}|f(x)-\varphi(x)|=\sup_{x\in[x_j',x_{j+1}']}|f(x)-f(x_{i+1})+f(x_{i+1})-\varphi(x)|$$

$$\le\sup_{x\in[x_j',x_{j+1}']}|f(x)-f(x_{i+1})|+\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}|f(x_{i+1})-\varphi(x)|$$

$$\le\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}|f(x)-f(x)|+\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}|f(x)-\varphi(x)|.$$

即得所证。

6.若函数$f(x)$在$[A,B]$可积,证明：

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \left|f(x+h)-f(x)\right|dx=0.$$

其中$A<a<b<B$,(这一性质被称为积分的平均连续性).

证明：由于函数$f(x)$在$[A,B]$可积,故函数$f(x)$有界,设$\left|f(x)\right|<M$ $(\forall x\in[A,B])$.

易知$f(x)$在$[a,b]$上也可积,$\forall\varepsilon>0$,当λ足够小时,有

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i\right|<\frac{\varepsilon}{6},2M\bullet\frac{b-a}{n}<\frac{\varepsilon}{2};$$

其中$\omega_i=M_i-m_i=\sup\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)-\inf\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x),\lambda=\dfrac{b-a}{n},\Delta x_i=x_i-x_{i+1},x_i=a+\dfrac{i(b-a)}{n}.$

令$|h|<\delta=\dfrac{b-a}{n}$,我们讨论点$x+h$与$x$的位置关系。

由于$|h|<\dfrac{b-a}{n}$,因此要么$x+h$落在x所在的第i个小区间上,那么

$$\left|f(x+h)-f(x)\right|\le\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)-\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)=\omega_i;$$

要么$x+h$落在与x所在区间相邻的那个区间上,若$h>0$,则有

$$\begin{aligned}\left|f(x+h)-f(x)\right|&=\left|f(x+h)-f(x_i)+f(x_i)-f(x)\right|\\ &\le\left|f(x+h)-f(x_i)\right|+\left|f(x_i)-f(x)\right|\le\omega_i+\omega_{i+1},\end{aligned}$$

若$h<0$,则有

$$\begin{aligned}\left|f(x+h)-f(x)\right|&=\left|f(x+h)-f(x_{i-1})+f(x_{i-1})-f(x)\right|\\ &\le\left|f(x+h)-f(x_{i-1})\right|+\left|f(x_{i-1})-f(x)\right|\le\omega_{i-1}+\omega_i.\end{aligned}$$

总之有$\left|f(x+h)-f(x)\right|\le\omega_{i-1}+\omega_i+\omega_{i+1}$.

对于首尾两个区间,必有$\omega_0,\omega_{n+1}\le 2M$.

那么可知

$$\begin{aligned}0&\le\int_a^b\left|f(x+h)-f(x)\right|dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|f(x+h)-f(x)\right|dx\\ &\le 3\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i+\left(\omega_0+\omega_{n+1}\right)\bullet\frac{b-a}{n}\\ &<3\bullet\frac{\varepsilon}{6}+2M\bullet\frac{b-a}{n}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

于是可知

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b\left|f(x+h)-f(x)\right|dx=0.$$

7.设$f(x)\geq 0, f''(x)\leq 0,$对于任意$x\in[a,b]$成立。证明：

$$f(x)\leq \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

证明：可以知道函数$f(x)$在区间$[a,b]$上必有最大值点ξ;即$\xi\in[a,b]$且$f(x)\leq f(\xi), \forall x\in[a,b]$.

只需要证明$f(\xi)\leq \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx$即可;即证

$$\frac{f(\xi)}{2}\bullet(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx,$$

或是

$$\frac{f(\xi)}{2}\bullet(b-\xi)+\frac{f(\xi)}{2}\bullet(\xi-a)\leq \int_a^b f(x)dx=\int_\xi^b f(x)dx+\int_a^\xi f(x)dx.$$

我们现证$\frac{f(\xi)}{2}\bullet(\xi-a)\leq \int_a^\xi f(x)dx.$

易求得

$$\frac{f(\xi)}{2}\bullet(\xi-a)\leq \frac{\xi-a}{2}\bullet f(\xi)+\frac{\xi-a}{2}\bullet f(x)=\int_a^\xi\left[\frac{\xi-x}{\xi-a}\bullet f(a)+\frac{x-a}{\xi-a}\bullet f(\xi)\right]dx.$$

由于$f''(x)\leq 0,$于是$f(x)$是一个凸函数,即对于$\forall\lambda\in(0,1),$当$x=\lambda a+(1-\lambda)\xi$时有

$$f(x)\geq \lambda f(a)+(1-\lambda)f(\xi);$$

取$\lambda=\frac{\xi-x}{\xi-a}, 1-\lambda=\frac{x-a}{\xi-a},$易知$x=\frac{\xi-x}{\xi-a}\bullet a+\frac{x-a}{\xi-a}\bullet\xi,$于是有

$$f(x)\geq \frac{\xi-x}{\xi-a}\bullet f(a)+\frac{x-a}{\xi-a}\bullet f(\xi).$$

因此有

$$\int_a^\xi\left[\frac{\xi-x}{\xi-a}\bullet f(a)+\frac{x-a}{\xi-a}\bullet f(\xi)\right]dx\leq \int_a^\xi f(x)dx;$$

即$\frac{f(\xi)}{2}\bullet(\xi-a)\leq \int_a^\xi f(x)dx.$同理可得$\frac{f(\xi)}{2}\bullet(b-\xi)\leq \int_\xi^b f(x)dx.$

即得所证。

8.设$f(x)$在$[a,b]$有连续的导函数,求证：

$$\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|\leq\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b|f'(x)|dx.$$

证明：由积分第一中值定理可以知道,$\exists\xi\in[a,b]$使得$|f(\xi)|=\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|.$

由$f(x)$在$[a,b]$连续可知,$\exists x_0\in[a,b]$使得$|f(x_0)|=\max\limits_{a\leq x\leq b}|f(x)|.$

那么

$$\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|=|f(x_0)|=\left|\int_\xi^{x_0}f'(x)dx+f(\xi)\right|\leq|f(\xi)|+\left|\int_\xi^{x_0}f'(x)dx\right|$$

$$\leq\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_\xi^{x_0}|f'(x)|dx\leq\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b|f'(x)|dx.$$

9.设$f(x)$在$[a,b]$可积, 求证：存在连续函数序列$\varphi_n(x), n=1,2,\cdots,$ 使$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b |f(x)-\varphi_n(x)|dx=0.$

证明：在区间$[a,b]$上做分法1：$a=x_1^{(1)}<x_2^{(1)}=b,$ 如下构造$\varphi_1(x)$

$$\varphi_1(x)=\frac{f(x_2^{(1)})-f(x_1^{(1)})}{x_2^{(1)}-x_1^{(1)}}\bullet\left(x-x_1^{(1)}\right)+f(x_1^{(1)});$$

在区间$[a,b]$上做分法2：$x_1^{(2)}=a, x_2^{(2)}=a+\dfrac{b-a}{2}, x_3^{(2)}=b,$ 如下构造$\varphi_2(x)$

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x_2^{(2)})-f(x_1^{(2)})}{x_2^{(2)}-x_1^{(2)}}\bullet\left(x-x_1^{(2)}\right)+f(x_1^{(2)}) & x\in[x_1^{(2)},x_2^{(2)})\\ \dfrac{f(x_3^{(2)})-f(x_2^{(2)})}{x_3^{(2)}-x_2^{(2)}}\bullet\left(x-x_2^{(2)}\right)+f(x_2^{(2)}) & x\in[x_2^{(2)},x_3^{(2)})\end{cases};$$

$\vdots$

在区间$[a,b]$上做分法n：$x_1^{(n)}=a, x_i^{(2)}=a+\dfrac{(i-1)\bullet(b-a)}{n}, i=2,\cdots,n+1,$ 如下构造$\varphi_n(x)$

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x_2^{(n)})-f(x_1^{(n)})}{x_2^{(n)}-x_1^{(n)}}\bullet\left(x-x_1^{(n)}\right)+f(x_1^{(n)}) & x\in[x_1^{(n)},x_2^{(n)})\\ \dfrac{f(x_3^{(n)})-f(x_2^{(n)})}{x_3^{(n)}-x_2^{(n)}}\bullet\left(x-x_2^{(n)}\right)+f(x_2^{(n)}) & x\in[x_2^{(n)},x_3^{(n)})\\ \vdots & \\ \dfrac{f(x_{n+1}^{(n)})-f(x_n^{(n)})}{x_{n+1}^{(n)}-x_n^{(n)}}\bullet\left(x-x_n^{(n)}\right)+f(x_n^{(n)}) & x\in[x_n^{(n)},x_{n+1}^{(n)})\end{cases};$$

$\vdots$

如上构造我们得到一个连续函数的序列$\{\varphi_n(x)\}$.由于函数$f(x)$在$[a,b]$上可积, 那么对于分法$x_i^{(2)}=a+\dfrac{(i-1)\bullet(b-a)}{n}, i=1,2,\cdots,n+1,$ 只要n足够大, 对于$\forall\ \varepsilon>0,$ 有$\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\ \dfrac{b-a}{n}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$成立, 其中$\omega_i=M_i-m_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]}f(x)-\inf\limits_{x\in[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]}f(x).$

此时对于任意$x\in[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}],$ 总有$|f(x)-\varphi_n(x)|\overset{(*)}{\le}2\left(\sup\limits_{x\in[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]}f(x)-\inf\limits_{x\in[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]}f(x)\right)=2\omega_i,$ 于是只要n足够大就有

$$\int_a^b|f(x)-\varphi_n(x)|dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f(x)-\varphi_n(x)|dx\le 2\sum_{i=1}^{n}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\omega_i dx=2\sum_{i=1}^{n}\omega_i\ \frac{b-a}{n}<\varepsilon,$$

因此有$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b|f(x)-\varphi_n(x)|dx=0.$

$(*)$成立是由于

$$|f(x)-\varphi_n(x)|=|f(x)-f(x_i^{(n)})+f(x_i^{(n)})-\varphi_n(x)|$$

$$\le|f(x)-f(x_i^{(n)})|+|f(x_i^{(n)})-\varphi_n(x)|=|f(x)-f(x_i^{(n)})|+|\varphi_n(x_i^{(n)})-\varphi_n(x)|$$

$$\le\sup_{x\in[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]}f(x)-\inf_{x\in[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]}f(x)+|\varphi_n(x_i^{(n)})-\varphi_n(x_{i-1}^{(n)})|=\omega_i+|f(x_i^{(n)})-f(x_{i-1}^{(n)})|\le 2\omega_i.$$

10.设$f(x)$在$[a,b]$黎曼可积,求证:

(1).存在区间序列$\{[x_n,b_n]\}$使$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]\subset[a,b]$,且$\omega_f\left([a_n,b_n]\right)<\dfrac{1}{n}$;

(2).存在$c\in\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}[a_n,b_n]$,使得$f(x)$在$c$点连续;

(3).$f(x)$在$[a,b]$上有无穷多个连续点。

证明:(1)由于$f(x)$在$[a,b]$上黎曼可积,那么对于$[a,b]$上的一个分法σ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,有:对于$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,只要$\lambda<\delta$,就有

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i\right|<\varepsilon,$$

其中$\omega_i=M_i-m_i=\sup\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)-\inf\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x),\lambda=\max\limits_{0\le i\le n-1}|\Delta x_i|,\Delta x_i=x_i-x_{i+1}$.

那么此时必有一个$\omega_i\left(i\in\{1,2,3,\cdots,n\}\right)$使得$\omega_i<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$,否则有

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i\right|\ge\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i=\frac{\varepsilon}{b-a}\bullet(b-a)=\varepsilon.$$

于是对于$\varepsilon_1=b-a,\exists\delta_1>0$,我们可以找见这样的分法$\sigma_1$,当$\lambda_1<\delta_1$时,使分法$\sigma_1$存在一个区间$\omega_f\left([x_i^{(1)},x_{i+1}^{(1)}]\right)<\dfrac{\varepsilon_1}{b-a}=1$;此时我们记$[a_1,b_1]=\left[x_i^{(1)}+\dfrac{x_{i+1}^{(1)}-x_i^{(1)}}{4},x_{i+1}^{(1)}-\dfrac{x_{i+1}^{(1)}-x_i^{(1)}}{4}\right]$,可知

$$\omega_f\left([a_1,b_1]\right)\le\omega_f\left([x_i^{(1)},x_{i+1}^{(1)}]\right)<1.$$

同理对于$\varepsilon_2=\dfrac{b-a}{2},\exists\delta_2>0$,我们可以找见这样的分法$\sigma_2$,当$\lambda_2<\delta_2$时,使分法$\sigma_2$存在一个区间$\omega_f\left([x_i^{(2)},x_{i+1}^{(2)}]\right)<\dfrac{\varepsilon_2}{b_1-a_1}=\dfrac{1}{2}$;此时我们记$[a_2,b_2]=\left[x_i^{(2)}+\dfrac{x_{i+1}^{(2)}-x_i^{(2)}}{4},x_{i+1}^{(2)}-\dfrac{x_{i+1}^{(2)}-x_i^{(2)}}{4}\right]$,可知$\omega_f\left([a_2,b_2]\right)\le\omega_f\left([x_i^{(2)},x_{i+1}^{(2)}]\right)<\dfrac{1}{2}$.

我们持续这样下去,可以得到一个区间套$\{[x_n,b_n]\}$使

$$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]\subset[a,b],\text{且 }\omega_f\left([a_n,b_n]\right)<\frac{1}{n}.$$

(2).由区间套定理知$\exists c\in\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}[a_n,b_n]$;易知$c$是函数$f(x)$的连续点:对于$\forall\ \varepsilon>0$,取$n$使得$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,令$\delta=\min(b_n-c,c-a_n)$,则$|x-c|<\delta$时,必有$x\in[a_n,b_n]$,从而

$$\left|f(x)-f(c)\right|<\omega_f\left([a_n,b_n]\right)<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

(3)对于区间$[a,b]$我们将其分为n份,可以知道函数$f(x)$在每一个小区间上都可积,那么由以上证明可知在每一个小区间上都有函数的一个连续点。

于是对于任意N,我们只需要将区间$[a,b]$分为$N+1$份,即知函数$f(x)$的连续点个数必大于N.因此函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的连续点有无穷多个。

第十章 数项级数

§1 级数问题的提出

1.证明：若微分方程$xy''+y'+xy=0$有多项式解

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n;$$

则必有$a_i=0,i=1,2,\cdots,n.$

证明：若$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$微分方程的一个解,那么

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}$$
$$y''=2a_2+6a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2};$$

于是可得

$$xy''=2a_2x+6a_3x^2+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-1}$$
$$xy=a_0x+a_1x^2+a_2x^3+\cdots+a_nx^{n+1}.$$

因此可知

$$xy''+y'+xy=a_1+(4a_2+a_0)x+(9a_3+a_1)x^2+\cdots+(n^2a_n+a_{n-2})x^{n-1}+a_nx^n=0$$

那么由多项式相等可知有

$$\begin{cases}a_1=0\\ n^2a_n+a_{n-2}=0 \qquad n>2.\\ a_n=0\end{cases}$$

递推可知有$a_i=0,i=1,2,\cdots,n$成立。

2.试确定系数$a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$, 使$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$满足勒让德方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0.$$

解：将级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$两次逐项求导可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2};$$

把它们代入勒让德方程可得

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + l(l-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

整理后可得

$$\begin{cases} 2a_1 = 0 \\ a_n = \dfrac{(n-2)(n-1)-l(l+1)}{(n-1)n} a_{n-2}, n = 2,3,4,\cdots \end{cases}.$$

那么由以上递推公式可得方程的解为

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0\left[1-\frac{l(l+1)}{2!}x^2+\frac{l(l-2)(l+1)(l+3)}{4!}x^4-\cdots\right] \\ &\quad + a_1\left[x-\frac{(l-1)(l+2)}{3!}x^3+\frac{(l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{5!}x^5-\cdots\right] \\ &= a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x). \end{aligned}$$

其中a_0, a_1为任意常数,由a_0, a_1的任意性可以知道$y_1(x), y_2(x)$都是勒让德方程的特解, 并且容易验证它们是线性无关的。

§2 数项级数的收敛性及其基本性质

1.求下列级数的和：

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right) = \frac{1}{5}$$

(2)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.$

(3)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\left(1-\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)=\frac{2}{3}.$

(4).$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$;

设$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$,则$\frac{1}{2}S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{n+1}}$,于是$S-\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{2^n}-\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$,

于是$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=3$

(5)$\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin nx,|r|<1$;

解：记$S_n=\sum_{k=1}^{n}r^k\sin kx$.则

$$2r\cos xS_n=\sum_{k=1}^{n}\left(r^{k+1}2\cos x\sin kx\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}r^{k+1}\left(\sin(k+1)x+\sin(k-1)x\right)$$
$$=\left[S_n-r\sin x+r^{n+1}\sin(n+1)x\right]+r^2\left[S_n-r^n\sin nx\right]$$
$$=\left(1-r^2\right)S_n-r\sin x+r^{n+1}\sin(n+1)x-r^{n+2}\sin nx,$$

于是可得

$$S_n=\frac{r\sin x-r^{n+1}\sin(n+1)x+r^{n+2}\sin nx}{1-r^2-2r\cos x};$$

由于$|r|<1$,因此有

$$\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin nx=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{r\sin x}{1-r^2-2r\cos x}.$$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx, |r|<1;$

解：记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} r^k \cos kx$.则

$$2r\cos x S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(r^{k+1} 2\cos x \cos kx\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} r^{k+1}\left(\cos(k+1)x - \cos(k-1)x\right)$$
$$= \left[S_n - r\cos x + r^{n+1}\cos(n+1)x\right] + r^2\left[1 + S_n - r^n \cos nx\right]$$
$$= \left(1+r^2\right)S_n - r\cos x + r^{n+1}\cos(n+1)x - r^{n+2}\cos nx + r^2,$$

于是可得

$$S_n = \frac{r\cos x - r^{n+1}\cos(n+1)x + r^{n+2}\cos nx - r^2}{1+r^2-2r\cos x};$$

由于 $|r|<1$,因此有

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{r\cos x - r^2}{1+r^2-2r\cos x}.$$

2.讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$;　　$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$, 故原级数发散。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$;　　由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 都收敛故原级数收敛。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$;　　$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = 1 \neq 0$, 故原级数发散。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;　　收敛。　　(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}$.　　收敛。

3.证明定理10.2：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

证明：设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和数列分别为 $\{U_n\}, \{V_n\}$.由题意可知数列 $\{U_n\}, \{V_n\}$ 的极限存在, 可设 $\lim_{n\to\infty} U_n = u, \lim_{n\to\infty} V_n = v.$　　转化为极限运算

易知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 的部分和数列为 $\{U_n \pm V_n\}$,那么由数列极限的性质可知数列 $\{U_n \pm V_n\}$ 收敛,且

$$\lim_{n\to\infty}\{U_n \pm V_n\} = \lim_{n\to\infty} U_n \pm \lim_{n\to\infty} V_n = u \pm v;$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

4.设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$各项是正的, 把级数的项经过组合而得到的新级数$\sum_{n=1}^{\infty}U_n$, 即

$$U_{n+1}=u_{k_n+1}+u_{k_n+2}+\cdots+u_{k_{n+1}}, n=0,1,2,\cdots,$$

其中$k_0=0, k_0<k_1<k_2<\cdots<k_n<k_{n+1}<\cdots$.

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}U_n$收敛, 证明原来的级数也收敛。

证明: 根据柯西收敛原理, 由级数$\sum_{n=1}^{\infty}U_n$收敛可知: $\forall\varepsilon>0, \exists N_1>0$, 当$n>N_1$时, 对于$\forall p>0$有

$$\left|U_{n+1}+\cdots+U_{n+p}\right|=\left|u_{k_n+1}+u_{k_n+2}+\cdots+u_{k_{n+1}}+\cdots+u_{k_{n+p-1}+1}+u_{k_{n+p-1}+2}+\cdots+u_{k_{n+p}}\right|<\varepsilon$$

那么对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$有: $\forall\varepsilon>0, \exists N=k_{N_1}>0$, 当$n>N$时, 对于$\forall p>0$有

$$\left|u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}\right|<\left|U_{N_1+1}+\cdots+U_{N_1+p}\right|<\varepsilon;$$

那么由柯西收敛原理可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

§3 正项级数

1.判断下列级数的收敛性:

(1)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;　由于$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$, 由于调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散, 那么可以知道原级数发散。

(2)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$;　由于$\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}\le\frac{1}{2^n}$, 由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛, 那么可以知道原级数收敛。

(3)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{2n-1}$;　由于$\lim_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{2n-1}=\frac{1}{2}$, 那么可以知道原级数发散。

(4)$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$;　由于$\sin\frac{\pi}{2^n}\le\frac{\pi}{2^n}$, 而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$收敛, 那么可以知道原级数收敛。

(5)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\alpha^n}, \alpha>1$;　由于$\frac{1}{1+\alpha^n}\le\frac{1}{\alpha^n}$, 而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^n}$收敛, 那么可以知道原级数收敛。

(6)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;　由于$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt[n]{n}}$, 而调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散, 那么可以知道原级数发散。

(7)$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^n$;　由于$\left(\frac{1}{2n+1}\right)^n\le\frac{1}{2^n}$, 而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛, 那么可以知道原级数收敛。

(8)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left[\ln(n+1)\right]^n}$;　由于$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left[\ln(n+1)\right]^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1$, 那么可以知道原级数收敛。

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$; 由于 $\frac{2+(-1)^n}{2^n}\le\frac{1}{2^n}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛, 那么可以知道原级数收敛。

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$; 由于 $2^n\sin\frac{\pi}{3^n}\le\pi\bullet\frac{2^n}{3^n}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$ 收敛, 那么可以知道原级数收敛。

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(3+(-1)^n\right)^n\sin\frac{\pi}{5^n}$; 由于 $\left(3+(-1)^n\right)^n\sin\frac{\pi}{5^n}\le\pi\bullet\frac{4^n}{5^n}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{5^n}$ 收敛, 故原级数收敛。

(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2^{\frac{1}{n}}}{n!}$; 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\sin 2^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)n!}}{\frac{\sin 2^{\frac{1}{n}}}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin 2^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)\sin 2^{\frac{1}{n}}}=0<1$, 故原级数收敛

由于 $\frac{\sin 2^{\frac{1}{n}}}{n!}\le\frac{1}{n^2}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 故原级数收敛。

(13) $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$; 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 故原级数发散。

(14) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$; 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}=1$, 故原级数发散。

(15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故原级数收敛。

(16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{n^2}$; 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}\ln(1+n)}{n^2}=0<1$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故原级数收敛。

(17) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}\arcsin\frac{1}{n}$; 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\sin\frac{1}{n}\arcsin\frac{1}{n}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t\arcsin t}{t^2}=1$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数收敛。

(18) $\sum_{n=1}^{\infty}n\arctan\frac{\pi}{2^n}$; 由于 $n\arctan\frac{\pi}{2^n}\le\frac{n\pi}{2^n}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{2^n}$ 收敛, 故原级数收敛。

(19) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}\ge\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2}+n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$; 发散。

$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$(20)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2-1\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right);\quad 收敛。$$

$\ln y=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{\frac{x}{x+1}-\ln(1+x)}{x^2}$ $(1+x)^{\frac{1}{x}}$

2.判断下列级数的收敛性：

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!};\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n!}}{\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1,\ 故发散。$$

e

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln n}{2^n};\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n\ln n}{2^n}}=\frac{1}{2}<1,\ 故原级数收敛。$$

$\dfrac{1-\frac{1}{x+1}-\ln(1+x)}{x^2}$

$$(3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n}{n^n};\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!2^n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n2}{(n+1)^n}=\frac{2}{e}<1,\ 故收敛。$$

$\dfrac{-1}{2(x+1)^2}$

$$(4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!3^n}{n^n};\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!3^n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n3}{(n+1)^n}=\frac{3}{e}>1,\ 故发散。$$

$$(5)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^n};\qquad \lim_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\frac{n!e^n}{n^n}}{\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\frac{1}{e}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}n\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n-e\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{e}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}\overset{p_5\S_2T_{1(17)}}{=}-\frac{1}{2}<1,故发散。$$

$$(6)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n};\qquad 由于\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}}=0<1,因此原级数收敛。$$

$$(7)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{\frac{n}{2}};\qquad 由于\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{\frac{n}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{3n-2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}<1,因此原级数收敛。$$

$$(8)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\left(3n^2+n\right)^{\frac{n+1}{2}}};\qquad 由于\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{\left(3n^2+n\right)^{\frac{n+1}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left(3n^2+n\right)^{\frac{n+1}{2n}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}<1,因此原级数收敛。$$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)}, (x\geq 0)$;

解：当$x=0$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)}=\sum_{n=1}^{\infty}0=0$，收敛;

当$1>x>0$时，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)}}\overset{p_3\S_2T_{16(2)}}{=}x<1$，故收敛;

当$x=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$，故也收敛;

当$x>1$时，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)}}\overset{p_3\S_2T_{16(2)}}{=}0<1$，故亦收敛.

综上当$x\geq 0$时，级数收敛。

(10) $\frac{3}{1}+\frac{3\bullet 5}{1\bullet 4}+\frac{3\bullet 5\bullet 7}{1\bullet 4\bullet 7}+\frac{3\bullet 5\bullet 7\bullet 9}{1\bullet 4\bullet 7\bullet 10}+\frac{3\bullet 5\bullet 7\bullet 9\bullet 11}{1\bullet 4\bullet 7\bullet 10\bullet 13}+\cdots$.

解：可以得到级数的通项为$u_n=\frac{3\bullet 5\bullet 7\bullet 9\bullet\cdots\bullet(3+2n)}{1\bullet 4\bullet 7\bullet 10\bullet\cdots\bullet(1+3n)}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3\bullet 5\bullet 7\bullet 9\bullet\cdots\bullet(3+2n)}{1\bullet 4\bullet 7\bullet 10\bullet\cdots\bullet(1+3n)}}\overset{p_3\S_2T_{16(2)}}{=}\frac{2}{3}<1,$$

因此原级数收敛。

3.判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln n}}$;　解：由于$\exists N=9$，当$n>N$时，有$\frac{1}{n^{\ln n}}<\frac{1}{n^2}$，而且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，因此原级数收敛。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

解：由于$\exists N=\left[e^{e^2}\right]+1$，当$n>N$时，有

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}<\frac{1}{(\ln e^{e^2})^{\ln n}}=\frac{1}{e^{2\ln n}}=\frac{1}{n^2},$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，因此原级数收敛。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln n}}$;　解:由于$\frac{1}{2^{\ln n}}>\frac{1}{e^{\ln n}}=\frac{1}{n}$，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，因此原级数发散。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$;　解:由于$\frac{1}{3^{\ln n}}<\frac{1}{e^{1.0986\bullet\ln n}}=\frac{1}{n^{1.0986}}$，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.0986}}$收敛，因此原级数收敛。

(5)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$;

解：由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}=0$, 故$\exists N>0$, 当$n>N$时, $\sqrt{n}>\ln n$, 即$\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}<\frac{1}{3^{\ln n}}$; 由上题可知此级数收敛。

(6).$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{\sqrt{n}}}$;　　解：由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{3^{\sqrt{n}}}=0$, 而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛, 因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{\sqrt{n}}}$收敛。

(7)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$;

解：当$p\le 1$时, 有$\frac{\ln n}{n^p}>\frac{1}{n}$, 而调和级数发散, 因此次级数发散;

当$p>1$时, 总$\exists\delta>0$, 使得$p-\delta>1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{p-\delta}\ln n}{n^p}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\delta}}=0$; 由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p-\delta}}$收敛, 因此原级数收敛。

综上可知级数$\begin{cases}发散 & p\le 1\\ 收敛 & p>1\end{cases}$.

(8)$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln n}$.

解：当$p=1$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$; 函数$f(x)=\frac{1}{x\ln x}$在区间$[2,+\infty)$上单调递减且连续; 显然有$f(n)=\frac{1}{n\ln n}$; 极限$\lim\limits_{t\to+\infty}\int_2^t\frac{1}{x\ln x}dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_2^t\frac{1}{\ln x}d\ln x=\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}=+\infty$, 那么由柯西积分判别法可知级数发散。

由于当$p\le 1$时, $\frac{1}{n^p\ln n}\ge\frac{1}{n\ln n}$, 故可知此时级数发散。

当$p>1$时, 由于$\frac{1}{n^p\ln n}<\frac{1}{n^p}$, 而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛, 因此此时原级数收敛。

综上可知级数$\begin{cases}收敛 p>1\\ 发散 p\le 1\end{cases}$.

4.利用泰勒公式估算无穷小量的阶, 从而判别下列级数的敛散性：

(1)$\sum_{n=1}^{\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p$;

解：由于

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)},$$

于是有

$$\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p=\left[e-e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\right]^p=e^p\left(1-e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^p=e^p\left(\frac{1}{2n^p}+o\left(\frac{1}{n^p}\right)\right).$$

它与$\frac{1}{n^p}$是同阶无穷小量,因此当$p\le 1$时原级数发散, 当$p>1$时原级数收敛。

(2)$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}\right]^p$;

解：易知有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}\right]^p=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^p\ln^p\left(\cos\frac{\pi}{n}\right),$$

又由于

$$\begin{aligned}
\ln^p\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)&=\ln^p\left(1-\sin^2\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=\frac{1}{2^p}\ln^p\left(1-\sin^2\frac{\pi}{n}\right)\\
&=\frac{1}{2^p}\left(-\sin^2\frac{\pi}{n}+o\left(\sin^2\frac{\pi}{n}\right)\right)^p\\
&=\frac{1}{2^p}\left(-\sin^2\frac{\pi}{n}+o\left(\sin^2\frac{\pi}{n}\right)\right)^p\\
&=\frac{1}{2^p}\left(-\frac{\pi}{n^{2p}}+o\left(\frac{\pi}{n^{2p}}\right)\right),
\end{aligned}$$

因此它与$\frac{1}{n^{2p}}$同阶无穷小量, 于是当$p>\frac{1}{2}$时, 级数收敛;当$p\le\frac{1}{2}$时, 级数发散。

$(3)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{p}\ln\frac{n-1}{n+1};$

解：由于

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{p}\ln\frac{n-1}{n+1}=\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^{p}\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^{p}\left(-\frac{2}{n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

因此于是级数的通项是与$\frac{1}{n^{1+\frac{p}{2}}}$同阶的无穷小量, 于是当$p>0$时, 级数收敛; 否则发散。

$(4)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^{2}+n+b}\right).$

解：由于

$$\begin{aligned}\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^{2}+n+b}&=\frac{n+a-\sqrt{n^{2}+n+b}}{\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^{2}+n+b}}\\&=\frac{(n+a)^{2}-\left(n^{2}+n+b\right)}{\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^{2}+n+b}}\bullet\frac{1}{n+a+\sqrt{n^{2}+n+b}}\\&=\frac{(2a-1)n-b+a^{2}}{\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^{2}+n+b}}\bullet\frac{1}{n+a+\sqrt{n^{2}+n+b}},\end{aligned}$$

因此当$a=\frac{1}{2}$时, 级数的通项与$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$是同阶无穷小量,故此时收敛; 否则通项与$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$是同阶无穷小量, 级数发散。

5.讨论下列级数的敛散性：

$(1)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{p}};$

解：对于函数$f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^{p}}$,我们知道它在区间$[2,+\infty)$上连续且单调递减, 显然有$f(n)=u_{n}$

我们考察极限$\lim_{t\to+\infty}\int_{2}^{t}f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\int_{2}^{t}\frac{1}{x(\ln x)^{p}}dx.$

当$p=1$时, $\lim_{t\to+\infty}\int_{2}^{t}\frac{1}{x(\ln x)^{p}}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_{2}^{t}\frac{1}{x\ln x}dx=\ln\ln x\Big|_{2}^{+\infty}=+\infty$, 那么由柯西积分判别法可以知道此时级数发散;

那么当$p<1$时, 由于$\frac{1}{n(\ln n)^{p}}<\frac{1}{n\ln n}$,由比较判别法可以知道此时级数发散;

当$p>1$时, $\lim_{t\to+\infty}\int_{2}^{t}\frac{1}{x(\ln x)^{p}}dx=\frac{1}{1-p}\left(\ln x\right)^{1-p}\Big|_{2}^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}-\frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p}=\frac{(\ln 2)^{1-p}}{p-1}$, 那么由柯西积分判别法可以知道此时级数收敛。

综上可以知道级数$\begin{cases}\text{发散} & p\le 1\\ \text{收敛} & p>1\end{cases}.$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\bullet\ln n\bullet\ln\ln n}$;

解：函数 $f(x)=\frac{1}{x\bullet\ln x\bullet\ln\ln x}$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上连续且单调下降，显然有 $f(n)=u_n$；我们考察以下极限

$$\lim_{t\to+\infty}\int_2^t f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\int_2^t\frac{1}{x\bullet\ln x\bullet\ln\ln x}dx=\ln\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}=+\infty.$$

因此由柯西积分判别法可以知道级数发散。

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\bullet(\ln n)^{1+\sigma}\bullet\ln\ln n},\sigma>0$;

解：当 $\sigma>0$ 时，由于 $\frac{1}{n\bullet(\ln n)^{1+\sigma}\bullet\ln\ln n}\le\frac{1}{n\bullet(\ln n)^{1+\sigma}}$，由本题(1)可知级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\bullet(\ln n)^{1+\sigma}}$ 收敛，那么由比较判别法可知此级数收敛。

(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$.

解：当 $p>1$ 时，由于 $\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}\le\frac{1}{n(\ln n)^p}$，而由本题(1)可以知道级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 收敛，于是由比较判别法可以知道此时级数收敛。

当 $p=1$ 时，若此时 $q\le1$，那么由本题(2)再利用比较判别法可以知道级数发散；

若 $q>1$ 时，由于函数 $f(x)=\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^q}$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上连续且单调下降，易知 $f(n)=u_n$.

我们考察极限

$$\lim_{t\to+\infty}\int_2^t\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^q}dx=\frac{1}{1-q}(\ln\ln\ln x)^{1-q}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{q-1}(\ln\ln\ln 2)^{1-q},$$

那么由柯西积分判别法可以知道此时级数收敛。

当 $p<1$ 时，$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n\ln\ln n}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}=\lim_{n\to\infty}(\ln n)^{1-p}(\ln\ln n)^{1-q}=+\infty$，那么由比较判别法可以知道此时级数发散。

综上有级数 $\begin{cases}\text{收敛} & p>1\text{或}p=1\text{且}q>1\\ \text{发散} & p<1\text{或}p=1\text{且}q\le1\end{cases}$.

6.利用拉阿比判别法研究下列级数的敛散性：

(1)$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$, p是实数;

解：此级数的通项为$u_n=\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$,那么

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p\bullet\left[\frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!}\right]^p=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p;$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(1+\frac{p}{2n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)=\frac{p}{2}.$$

因此当$p>2$时, 级数收敛;当$p<2$时级数发散。当$p=2$时, 拉阿比判别法失效。

(2)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}\bullet\frac{1}{n^{\beta}}$.

解：可以知道

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}\bullet\frac{1}{n^{\beta}}\bullet\frac{(n+1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)(\alpha+n)}\bullet\frac{1}{(n+1)^{\beta}}=\frac{n+1}{\alpha+n}\bullet\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\beta},$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{n+1}{\alpha+n}\bullet\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\beta}-1\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{1}{\frac{\alpha+n}{n}}\bullet\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\beta+1}-1\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+\alpha x}\bullet(1+x)^{\beta+1}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\beta+1)(1+x)^{\beta}(1+\alpha x)-\alpha(1+x)^{\beta+1}}{(1+\alpha x)^2}$$

$$=\beta+1-\alpha.$$

因此当$\beta>\alpha$时级数收敛, $\beta<\alpha$时级数发散。当$\beta=\alpha$时, 拉阿比判别失效。

7.已知两正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散, 问$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\max(u_n, v_n), \sum\limits_{n=1}^{\infty}\min(u_n, v_n)$两级数的收敛性如何？

解：由比较判别法易知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\max(u_n, v_n)$发散。

此时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\min(u_n, v_n)$可能收敛也可能发散, 例如

$$u_n=\begin{cases} n & n=2k \\ 0 & n=2k+1 \end{cases} \quad v_n=\begin{cases} \dfrac{1}{n^2} & n=2k \\ n & n=2k+1 \end{cases};$$

两级数都发散,但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\min(u_n, v_n)$收敛.

但是当$u_n=n, v_n=n$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\min(u_n, v_n)$发散。

8.若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0.$

证明：由于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.那么根据柯西收敛原理可以知道:$\forall\varepsilon>0, \exists N_1>0,$ 当$n>N_1$时,对于$\forall p$有

$$x_{n+p}+x_{n+p-1}+\cdots+x_n=\left|x_{n+p}+x_{n+p-1}+\cdots+x_n\right|<\frac{\varepsilon}{2};$$

设$\sum\limits_{n=1}^{N_1+1}a_n=M$,由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{M}{n}=0$,因此$\forall\varepsilon>0, \exists N_2>0$, 当$n>N_2$时, $\dfrac{M}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

综上$\forall\varepsilon>0, \exists N=\max(N_1, N_2)>0$, 当$n>N$时,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}\right| \\ =&\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+(N_1+1)a_{N_1+1}}{n}+\frac{(N_1+2)a_{N_1+2}+(N_1+3)a_{N_1+3}+\cdots+na_n}{n}\right| \\ \le&\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+(N_1+1)a_{N_1+1}}{n}\right|+\left|\frac{(N_1+2)a_{N_1+2}+(N_1+3)a_{N_1+3}+\cdots+na_n}{n}\right| \\ \le&\frac{M}{n}+\left|a_{N_1+2}+a_{N_1+3}+\cdots+a_n\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

于是可知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0.$

9.设$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{n^2}, n\neq k^2, k=1,2,\cdots \\ a_{k^2}=\dfrac{1}{k^2}, k=1,2,\cdots \end{cases}$;

求证:(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛,(2)$\lim\limits_{n\to\infty} na_n\neq 0.$

证明:(1)我们已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛, 那么级数$\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\neq k^2}}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$也收敛, 又由于级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k^2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$收敛, 因此级数$\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\neq k^2}}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$也收敛,即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。

(2)数列$\{na_n\}$的一个子列$\{k^2a_{k^2}\}$,其极限为$\lim\limits_{k\to\infty}k^2a_{k^2}=1$,而另一个子列$\{(k^2+1)a_{k^2+1}\}$的极限为$\lim\limits_{k\to\infty}(k^2+1)a_{k^2+1}=0$;因此由海涅原理可知极限$\lim\limits_{n\to\infty} na_n$不存在, 于是可知$\lim\limits_{n\to\infty} na_n\neq 0.$

10.设$a_n>0$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$.求证:$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$, 反之是否成立?

证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1}\bullet\sqrt[n]{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\bullet\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\bullet\cdots\bullet\dfrac{a_3}{a_2}\bullet\dfrac{a_2}{a_1}}$;由于$a_n>0$可知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1}=1$, 而根据$p_3\S_2T_{16(2)}$可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{a_n}\bullet\frac{a_n}{a_{n-1}}\bullet\cdots\bullet\frac{a_3}{a_2}\bullet\frac{a_2}{a_1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l,$$

因此可知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l.$

反之不成立:$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{n^2}, n\neq k^2, k=1,2,\cdots \\ a_{k^2}=\dfrac{1}{k^2}, k=1,2,\cdots \end{cases}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$, 而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$不存在。

11.利用级数收敛的必要条件证明:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0$;

证明:取$u_n=\dfrac{n^n}{(n!)^2}$,那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}\bullet\frac{(n!)^2}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\bullet\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=0,$$

于是我们知道级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}$收敛,那么可知必有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0$成立。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0, a>1.$

证明：取$u_n=\frac{(2n)!}{a^{n!}}$,那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{a^{(n+1)!}}\bullet\frac{a^{n!}}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{a^{n+1}}=0,$$

于是我们知道级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}$收敛,那么可知必有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0$成立。

12设$a_n\ge 0$,且数列$\{na_n\}$有界,证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛。

证明：由于数列$\{na_n\}$有界,因此我们可设$\exists M>0$,使得$|na_n|\le M,\forall n\in\mathbb{Z}^+$.那么可知$a_n\le\frac{M}{n}$,即$a_n^2\le\frac{M^2}{n^2}$,我们知道级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,于是根据比较判别法可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛。

13.设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$也收敛。

证明：由于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,那么级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$也收敛,因此易知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$收敛。

我们知道$\sqrt{a_na_{n+1}}\le\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$,因此根据比较判别法可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$也收敛。

14.设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$,求证：

(1)当$l>1$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$收敛;

(2)当$l<1$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$发散;问$l=1$时会有什么结论？

证明:(1)若$l>1$,那么$\exists\delta>0$,使得$l>1+2\delta$;由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$,根据极限的保号性可知$\exists N$,当$n>N$时,$a_n>1+\delta$.

那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}=\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n^{a_n}}+\sum_{n=N+2}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}<\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n^{a_n}}+\sum_{n=N+2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}},$$

由于级数$\sum\limits_{n=N+2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}}$收敛,因此可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$收敛。

(2)若$l<1$, 那么$\exists\delta>0$, 使得$l<1-2\delta$; 由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$, 根据极限的保号性可知$\exists N$, 当$n>N$时, $a_n<1-\delta$.

那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}=\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n^{a_n}}+\sum_{n=N+2}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}>\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n^{a_n}}+\sum_{n=N+2}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\delta}},$$

由于级数$\sum\limits_{n=N+2}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\delta}}$发散,因此可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$发散。

(3)当$l=1$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$可能收敛也可能发散。我们考察数列$a_n=1+\frac{p\ln\ln n}{\ln n}$, 显然有极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{p\ln\ln n}{\ln n}\right)=1$.

但是对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{p\ln\ln n}{\ln n}}}$,可知$n^{1+\frac{p\ln\ln n}{\ln n}}=n(\ln n)^p$ (两边取对数易知等式成立); 此时,根据$T_{5(1)}$我们知道当$p>1$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$收敛, 当$p\le 1$时级数发散。

§ 3 一般项级数

1.讨论下列级数的收敛性:

(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$;

解：这是个交错级数,且通项u_n满足$|u_n|=\frac{\sqrt{n}}{n+100}$单调下降趋于零, 那么由莱布尼兹判别法可以知道这个级数收敛。

(2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$;

解：可以知道级数$\sum\limits_{\substack{n=1\\n\ne 2k}}^{\infty}\frac{\ln n}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$是一个交错级数, 且$\left|\frac{\ln n}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right|$是随$n$单调下降趋于零的, 故由莱布尼兹判别法可以知道这个级数收敛;

而级数$\sum\limits_{\substack{k=1\\n=2k}}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$必是收敛的, 那么这两个级数的和也是收敛的, 即原级数收敛。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$;

解：由于

$$n+1+\frac{n+1}{2}+\frac{n+1}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n-1}+\frac{n+1}{n}>n+\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\cdots+\frac{n}{n-1}+1+\frac{n}{n+1}$$

因此有

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}>\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{n+1}.$$

再根据$p_3\S_2T_{17(1)}$可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}=0;$$

于是可知级数的通项u_n满足$|u_n|$单调下降趋于零。

这是个交错级数,根据莱布尼兹判别法可以知道级数收敛。

(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$;

解：整理可得

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\bullet\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n}}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\bullet\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]}$$

$$=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\bullet\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right);$$

于是可知原级数化为

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}o\left(\frac{1}{n}\right).$$

我们知道级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\sum_{n=2}^{\infty}o\left(\frac{1}{n}\right)$都收敛,而级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,因此原级数发散。

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$;

解：由于

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=(-1)^n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right)=(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right);$$

可以证得从$n=2$开始$\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)$单调下降趋于零,那么由莱布尼兹判别法可以知道原级数收敛。

(6)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{3^n}$;

解：我们知道$\left|\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{3^n}\right|=\frac{1}{3^n}$,而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$必是收敛的;因此我们知道原级数绝对收敛,因此原级数收敛。

(7)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}, p>0$;

解：由于$\frac{1}{n^p}$当$p>0$时单调下降趋于零,那么由莱布尼兹判别法可以知道原级数收敛。

(8)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\sin\frac{n\pi}{2}$;

解：由于$\left|\frac{1}{3^n}\sin\frac{n\pi}{2}\right|\le\frac{1}{3^n}$,而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$收敛,因此可以知道原级数绝对收敛。

(9)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n}$;

解：我们考察级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n}$的部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\cos 2k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos 2k}{k}-2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\frac{\cos(4k+2)}{2k+1}.$$

对于$\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos 2k}{k}$,有

$$2\sin 1\sum_{k=1}^{n}\cos 2k=\sum_{k=1}^{n}2\sin 1\cos 2k=\sum_{k=1}^{n}\left(\sin(2k-1)-\sin(2k+1)\right)=\sin 1-\sin(2n-1),$$

因此可知

$$\sum_{k=1}^{n}\cos 2k=\frac{\sin 1-\sin(2n-1)}{2\sin 1}\le\frac{1}{2\sin 1};$$

而数列$\left\{\frac{1}{k}\right\}$单调下降趋于零,那么由狄理克雷判别法可以知道级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}$收敛。

同理可以知道级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(4n+2)}{2n+1}$收敛,因此可知原级数收敛。

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$;

解：可以整理得

$$(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}=(-1)^n\frac{1-\cos 2n}{2n};$$

我们知道级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$与级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{2n}$都收敛,因此该级数收敛。

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{x}{n}, x\neq 0$;

解：根据泰勒公式可得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{x}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n o\left(\frac{1}{n}\right);$$

由莱布尼兹判别法可以知道级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x}{n},\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n o\left(\frac{1}{n}\right)$都收敛,因此原级数收敛。

(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+1)^2}$;

解：由于$\left|\frac{(-1)^n n}{(n+1)^2}\right|$单调下降趋于零,因此由莱布尼兹判别法可以知道原级数收敛。

(13) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\cdots$;

解：由于

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{2}{n-1},$$

对于$\forall N$,取$n=3N, p=6N$,可以知道

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+p}-1}-\frac{1}{\sqrt{n+p}+1}\right|\\&=\left|\frac{2}{n-1}+\cdots+\frac{2}{n+p-1}\right|=\left|\frac{2}{3N-1}+\cdots+\frac{2}{9N-1}\right|\\&\geq\left|\frac{6N}{9N-1}\right|\geq\left|\frac{6N}{9N}\right|=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

那么由柯西收敛原理可以知道原级数发散。

$(14)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}, a>0;$

解：当$a=1$时，由莱布尼兹判别法可以知道级数收敛；

当$a>1$时，$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}\right|<\frac{1}{a^{n-1}}$，由比较判别法可知原级数绝对收敛；

当$a<1$时，由于$\frac{a}{1+a^n}$随n的变化单调有界，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$收敛，那么由阿贝尔判别法可以知道级数收敛。

综上级数始终收敛。

$(15)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{n}.$

解：整理可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cos\frac{1}{n}+\cos n\sin\frac{1}{n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cos\frac{1}{n}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\sin\frac{1}{n}}{n}.$$

当$n\geq 2$时$\frac{\cos\frac{1}{n}}{n},\frac{\sin\frac{1}{n}}{n}$单调趋于零，而$\sum_{n=1}^{\infty}\sin n,\sum_{n=1}^{\infty}\cos n$易证得有界，那么由狄理克雷判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cos\frac{1}{n}}{n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\sin\frac{1}{n}}{n}$都收敛，于是原级数收敛。

2.讨论下列级数是否绝对收敛或条件收敛：

$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x};$

解：取$N=[x]+1$，则当$n>N$时，$\left|\frac{(-1)^n}{n+x}\right|$单调下降趋于零，那么由莱布尼兹判别法可以知道级数收敛。由于$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+x}\right|n=1$，由于调和级数不收敛，因此由比较判别法可知此级数不绝对收敛。

综上可知级数条件收敛。

$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2^n x)}{n!};$

解：由于$\left|\frac{\sin(2^n x)}{n!}\right|\leq\frac{1}{n!}$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$熟练，因此此级数绝对收敛。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, 0<x<\pi;$

解：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$的部分和为$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin kx$, 这个部分和满足

$$2\sin xS_n=\sum_{k=1}^{n}2\sin x\sin kx=\sum_{k=1}^{n}\left(-\cos(k+1)x+\cos(k-1)x\right)=1-\cos(n+1)x;$$

因此

$$S_n=\frac{1-\cos(n+1)x}{2\sin x}\le\frac{1}{|\sin x|}.$$

即对于$\forall x\in(0,\pi)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$的部分和有界。

而数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$单调下降趋于零,因此由狄理克雷判别法可知级数收敛。

由于

$$\left|\frac{\sin nx}{n}\right|\ge\frac{\sin^2 nx}{n}=\frac{1}{2n}-\frac{\cos 2nx}{2n},$$

容易证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n}$收敛(狄理克雷判别法),而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散,因此原级数不绝对收敛。

综上可知级数条件收敛。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}, 0<x<\pi;$

解：当$0<p\le 1$时, 仿本题(3)可知级数条件收敛;

当$p>1$时, 由于$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\le\frac{1}{n^p}$, 而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛, 因此级数绝对收敛;

当$p=0$时,由于$\lim_{n\to\infty}\cos nx\ne 0$, 可知级数发散, 那么根据比较判别法可知当$p<0$时原级数发散。

综上级数$\begin{cases}\text{发散} & p\le 0\\ \text{条件收敛} & p\in(0,1]\\ \text{绝对收敛} & p\in(1,+\infty)\end{cases}$.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n};$

解：可以证明$\exists N$, 当$n>N$时, $\left|\frac{(-1)^n\ln n}{n}\right|$单调下降趋于零, 那么根据莱布尼兹判别法可以知道级数收敛。而$\left|\frac{(-1)^n\ln n}{n}\right|\ge\frac{1}{n}$,由于调和级数发散,因此此级数仅是条件收敛。

(6)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[3+(-1)^n\right]^n}{5^n}\sin n$;

解：由于$\left|\frac{\left[3+(-1)^n\right]^n}{5^n}\sin n\right|\le\left(\frac{4}{5}\right)^n$，我们知道级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$收敛，因此由比较判别法可以知道此级数绝对收敛。

(7)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt[n]{n}\sin\frac{1}{n}$;

解：利用泰勒展式可得

$$(-1)^n\sqrt[n]{n}\sin\frac{1}{n}=(-1)^n\sqrt[n]{n}\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=(-1)^n\frac{\sqrt[n]{n}}{n}+(-1)^n\sqrt[n]{n}o\left(\frac{1}{n}\right);$$

由莱布尼兹判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[n]{n}}{n}$条件收敛，由比较判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt[n]{n}o\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛。

综上可知级数条件收敛。

(8)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

解：可以知道$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调上升有上界，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$由阿贝尔判别法可知其收敛，那么由狄理克雷判别法可知原级数收敛。

由于$\left|\frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right|\ge\frac{1}{n}$因此由比较判别法可知此级数只是条件收敛。

(9)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+\frac{1}{n}}, p>0$;

解：根据泰勒展式可得

$$\frac{(-1)^n}{n^p+\frac{1}{n}}=\frac{(-1)^n}{n^p}\bullet\frac{1}{1+\frac{1}{n^{1+p}}}=\frac{(-1)^n}{n^p}\bullet\left(1+\frac{-1}{n^{1+p}}+o\left(\frac{1}{n^{1+p}}\right)\right);$$

它与$\frac{1}{n^p}$是同阶无穷小量，因此当$p>1$时，级数绝对收敛，当$p\in(0,1]$级数条件收敛。

$(10)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left[n+(-1)^n\right]^p}, p>0;$

解：根据泰勒展式可得

$$\frac{(-1)^n}{\left[n+(-1)^n\right]^p}=\frac{(-1)^n}{n^p}\bullet\frac{1}{\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^p}=\frac{(-1)^n}{n^p}\bullet\left(1+\frac{-p(-1)^n}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)\right);$$

可知$\frac{(-1)^n}{\left[n+(-1)^n\right]^p}$是与$\frac{1}{n^p}$同阶的无穷小量,因此级数$\begin{cases}\text{条件收敛} & p\in(0,1]\\ \text{绝对收敛} & p\in(1,+\infty)\end{cases}$.

$(11)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}};$

解：当$p\in(1,+\infty)$,有$\left|\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}\right|\le\frac{1}{n^p}$成立,可知此时级数绝对收敛;

当$p\in(0,1]$,由狄理克雷判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$收敛,而数列$\left\{\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\right\}$单调有界,那么由阿贝尔判别法可知此时级数收敛;由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left|\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^{p+\frac{1}{n}}}=\begin{cases}1 & p=1\\ +\infty & p<1\end{cases},$$

那么由比较判别法可知此时级数只是条件收敛。

当$p\in(-\infty,0]$,易知$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}\ne 0$,故此时级数发散。

(12) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$;

解：由于

$$(-1)^n\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}=(-1)^n\frac{\left(2\sin^2x\right)^n}{n};$$

那么当$x\in\left(k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}\right)$时总有$1>\delta>0$且$\left|2\sin^2x\right|<\delta$, 于是有$\left|(-1)^n\frac{\left(2\sin^2x\right)^n}{n}\right|\le\delta^n$,

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\delta^n$收敛,因此此时级数绝对收敛。

当$x\in\left(k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$时, 由于$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{\left(2\sin^2x\right)^n}{n}\ne0$,故级数发散。

当$x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$时,$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$,此时级数条件收敛。

其中$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

(13) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{a_n}\right)^n,\lim_{n\to\infty}a_n=a>0$;

解：当$|x|>a$时, 级数发散。此时$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{a_n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n\ne0$.

当$|x|<a$时, 级数绝对收敛。此时有极限的保号性可知$\exists N$,当$n>N$时,$\exists\ \delta\in(0,1)$, 使得$\left|\frac{x}{a_n}\right|<\delta$,那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{x}{a_n}\right)^n\right|=\sum_{n=1}^{N}\left|\left(\frac{x}{a_n}\right)^n\right|+\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\left(\frac{x}{a_n}\right)^n\right|\le\sum_{n=1}^{N}\left|\left(\frac{x}{a_n}\right)^n\right|+\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\delta^n\right|$$

由比较判别法可知此时级数绝对收敛。

当$|x|=a$时, 不能判断级数的敛散性。例如$a_n=1+\frac{1}{n}$,由于$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pm1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n=\frac{\pm1}{e}\ne0$因此此时级数发散;但是对于$a_n=\left(\frac{1}{n^p}\right)^{\frac{1}{n}}$,有$\lim_{n\to\infty}a_n=1$; $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{a_n}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pm1}{a_n}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^n}{n^p}$; 显然它随着$p$的不同敛散性也是不同的。

(14) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nr^{n+\sqrt{n}},r>0$;

解：当$r\ge1$, $\lim_{n\to\infty}(-1)^nr^{n+\sqrt{n}}\ne0$, 故此时级数发散。当$r\in(0,1)$易知级数绝对收敛。

(15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$;

解：当$|x|<e$时，由于

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\right|}{\left|\frac{n!x^n}{n^n}\right|}=\frac{n^n|x|}{(n+1)^n},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n|x|}{(n+1)^n}=\frac{|x|}{e}<1.$$

那么此时级数绝对收敛。

当$|x|\geq e$时，由于$\lim_{n\to\infty}\frac{n!x^n}{n^n}\neq 0$，因此可知此时级数发散。

(16) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right], p>0$;

解：由泰勒展式可得

$$\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2p}}+\frac{(-1)^n}{3n^{3p}}-\frac{1}{4n^{4p}}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2k-1)n^{(2k-1)p}}-\frac{1}{2kn^{2kp}}\cdots$$

显然当$p>1$时，级数绝对收敛；

当$p\leq 1$级数发散。$\{???\}$

(17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}\right]^p}$;

解：由泰勒展式可得

$$\frac{(-1)^n}{\left[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}\right]^p}=\frac{(-1)^n}{n^{\frac{p}{2}}}\bullet\frac{1}{\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right]^p}=\frac{(-1)^n}{n^{\frac{p}{2}}}\bullet\left(1+\frac{p(-1)^n}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right);$$

显然当$p>2$时，级数绝对收敛；当$p\leq 2$时，级数发散。$\{???\}$

$(18)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n}{4}\pi}{n^p+\sin\frac{n}{4}\pi}.$

解：由泰勒展式可得

$$\frac{\sin\frac{n}{4}\pi}{n^p+\sin\frac{n}{4}\pi}=\frac{\sin\frac{n}{4}\pi}{n^p\left(1+\frac{\sin\frac{n}{4}\pi}{n^p}\right)}=\frac{\sin\frac{n}{4}\pi}{n^p}\left(1-\frac{\sin\frac{n}{4}\pi}{n^p}+o\left(\frac{1}{n^p}\right)\right)=\frac{\sin\frac{n}{4}\pi}{n^p}-\frac{\sin^2\frac{n}{4}\pi}{n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right);$$

当$p>1$时，级数绝对收敛；当$p\le 1$时，级数发散。$\{???\}$

3.利用柯西收敛原理判断下列级数的敛散性：

$(1)a_0+a_1q+a_2q^2+\cdots+a_nq^n+\cdots,|q|<1,|a_n|<A,n=0,1,2,\cdots;$

解：对于$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\log_q\frac{(1-q)\varepsilon}{A}\right]+1$，则对于$\forall p>0$及$n>N$有

$$\left|a_{n+1}q^{n+1}+a_{n+2}q^{n+2}+\cdots a_{n+p}q^{n+p}\right|$$

$$<A\left|q^{n+1}+q^{n+2}+\cdots q^{n+p}\right|=Aq^{n+1}\frac{1-q^p}{1-q}$$

$$<\frac{Aq^{n+1}}{1-q}<\frac{Aq^{\log_q\frac{(1-q)\varepsilon}{A}}}{1-q}=\varepsilon;$$

于是由 柯西收敛原理可知级数收敛。

$(2)1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\cdots;$

解：$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{6}$，对于$\forall N,\exists n=3N,p=3N+1$这时

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots+a_{n+p}\right|=\left|a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots+a_{2n+1}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{3N+1}+\frac{1}{3N+2}-\frac{1}{3N+3}+\frac{1}{3N+4}+\frac{1}{3N+5}-\frac{1}{3N+6}+\cdots+\frac{1}{6N-2}+\frac{1}{6N-1}-\frac{1}{6N}+\frac{1}{6N+1}\right|$$

$$>\left|\frac{1}{3N+1}+\frac{1}{3N+4}+\cdots+\frac{1}{6N-2}+\frac{1}{6N+1}\right|>\frac{N+1}{6N+1}>\frac{1}{6}=\varepsilon_0;$$

那么由柯西收敛原理可知级数发散。

4.求证：若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, (a_n \geq 0, n=1,2,\cdots)$收敛, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛, 但是反之不成立, 请举出反例。

证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 则必有$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 那么$\exists N$, 当$n > N$时有$a_n < 1$, 即此时有$a_n{}^2 < a_n$ 成立。

那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n^2 < \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n,$$

由正项级数的比较判别法可以知道级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛。

反之不成立, 例如级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛, 但是级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散。

5.若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 且$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$, 问是否能断定$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$也收敛？研究例子$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, b_n = a_n + \frac{1}{n}$.

答：不能, 如题中所给例子：显然有$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + \frac{1}{n}}{a_n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}} = 1.$

由莱布尼兹判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛; 但是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

由于调和级数发散, 我们知道此时级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散。

6.证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(A)$及$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(B)$都收敛, 且

$$a_n < c_n < b_n, n = 1, 2, \cdots;$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(C)$也收敛, 若级数$A, B$都发散, 则$C$如何？

证明：由题意可知对于$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当$n > N$时, 对于$\forall p$, 有

$$\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \right| < \varepsilon$$

$$\left| b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p} \right| < \varepsilon;$$

由于$a_n < c_n < b_n, n = 1, 2, \cdots$, 我们知道此时必有

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+p} < b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p} .$$

那么此时必有下列之一成立：

$$\left| c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+p} \right| < \left| a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \right| < \varepsilon$$

$$\left| c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+p} \right| < \left| b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p} \right| < \varepsilon;$$

于是可知级数$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(C)$也收敛。

当级数A, B都发散, 则C不一定发散, 例如取$a_n = -\frac{1}{n}, b_n = \frac{1}{n}, c_n = \frac{(-1)^n}{n}$; 由于调和级数不收敛, 因此级数$A, B$都发散, 但是由莱布尼兹判别法可知级数$C$收敛。

7.证明：若$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$收敛, 则当$x > x_0$时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$也收敛; 若$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$发散, 则当$x < x_0$时$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$也发散。

证明：i.由于$x > x_0$, 可设$x = x_0 + \delta$, 其中$\delta > 0$; 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0+\delta}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \bullet \frac{1}{n^{\delta}};$$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$收敛, 而数列$\left\{ \frac{1}{n^{\delta}} \right\}$单调有界, 则由阿贝尔判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$收敛。

ii.用反证法, 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$收敛, 那么由$i$中所证可知此时级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$收敛, 矛盾。故可知级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$发散。

8.求证：若数列$\{na_n\}$有极限，$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n - a_{n-1}\right)$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛。

证明：取$b_n = 1$，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$；我们对$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$的部分和$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$做阿贝尔变换：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k - a_{k+1}\right)B_k + a_n B_n;$$

其中$B_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = n$，那么

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k - a_{k-1}\right)B_k + a_n B_n = \sum_{k=1}^{n-1} k\left(a_k - a_{k+1}\right) + n a_n .$$

在上式两边同时对$n \to \infty$取极限可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n - a_{n+1}\right) + \lim_{n\to\infty} n a_n;$$

由于数列$\{na_n\}$有极限，$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n - a_{n-1}\right)$收敛，因此可知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。

9.求证：若$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - a_{n-1}\right)$绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛。

证明：由于$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - a_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(a_n - a_0\right)$收敛，可以知道极限$\lim_{n\to\infty} a_n$存在，即数列$\{a_n\}$收敛。那么可设$\forall n$，有$\left|a_n\right| < M$成立。由于$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - a_{n-1}\right)$是绝对收敛，因此$\forall\ \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当$n > N$，$\forall p > 0$有$\sum_{k=n+1}^{n+p}\left|a_k - a_{k-1}\right| < \varepsilon$.同样由于$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当$n > N$，$\forall p > 0$有$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.

此时我们对于$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$的余项$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k$做阿贝尔变换可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left(a_k - a_{k+1}\right)B_k + a_{n+p}B_{n+p} \le \sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left|a_k - a_{k+1}\right|\left|\sum_{i=n+1}^{k} b_i\right| + M\frac{\varepsilon}{M} \\ &\le \varepsilon\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left|a_k - a_{k+1}\right| + M\frac{\varepsilon}{M} \le \varepsilon\bullet\varepsilon + \varepsilon = \left(\varepsilon + 1\right)\varepsilon.\end{aligned}$$

于是由柯西收敛原理可知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛。

10.求证：若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$都收敛,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n b_n|,\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$

都收敛。

证明：对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n b_n|$有

$$|a_n b_n| \le \frac{a_n^2+b_n^2}{2},$$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$都收敛,因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$收敛,那么由正项级数的比较判别法可以知道级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n b_n|$收敛。

于是可知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛,那么可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+2a_n b_n+b_n^2)$收敛。

取$a_n=\frac{1}{n}$,可知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$,收敛,那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$收敛。

11.设正项数列$\{x_n\}$单调上升且有界,求证:$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$收敛。

证明：可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}}.$$

取$b_n=x_{n+1}-x_n, a_n=\frac{1}{x_{n+1}}$,则$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}(x_n-x_0)$,由正项数列$\{x_n\}$单调上升且有界可知$\{x_n\}$收敛,那么$\lim_{n\to\infty}(x_n-x_0)$存在,即级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛。由于正项数列$\{x_n\}$单调上升且有界可知$\left\{\frac{1}{x_{n+1}}\right\}$单调有界。

那么由阿贝尔判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$收敛。

12.对数列$\{a_n\},\{b_n\}$,定义$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\ \Delta b_k=b_{k+1}-b_k$,求证:

(1)如果$\{S_n\}$有界,$\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta b_k|$收敛,且$\lim_{n\to\infty}b_n=0$,则$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛,且有$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=-\sum_{n=1}^{\infty}S_n\Delta b_n$;

(2)若果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta b_k|$都收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛。

证明:(1)设

$$A_{n+k}=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+k}=S_{n+k}-S_n,k=0,1,2,\cdots,p,\forall p;$$

由于$\{S_n\}$有界可知$\{A_{n+k}\}$有界,设对$\forall n$有$|S_n|<M$成立,那么$|A_{n+k}|<2M$成立;于是可得

$$|A_n|=|A_{n+0}|=|a_n|<2M.$$

对级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛的尾项部分和$\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k$做阿贝尔变换可得

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k=\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k-b_{k+1})A_{n+k}+A_{n+p}b_{n+p}<2M\left[\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|b_k-b_{k+1}|+|b_{n+p}|\right];$$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta b_k|$收敛,那么由柯西收敛原理可知$\forall\varepsilon>0,\exists N_1>0$,当$n>N_1,\exists p>0$有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|\Delta b_k|=\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|b_k-b_{k+1}|<\frac{\varepsilon}{4M};$$

又由于$\lim_{n\to\infty}b_n=0$,可知$\forall\varepsilon>0,\exists N_2>0$,当$n>N_2$有$|b_n|<\frac{\varepsilon}{4M}$.

综上可知$\forall\varepsilon>0,\exists N=\max(N_1,N_2)>0$,当$n>N$有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k<2M\left[\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|b_k-b_{k+1}|+|b_{n+p}|\right]<2M\left(\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{4M}\right)=\varepsilon,$$

于是由柯西收敛原理可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛收敛。

对于$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$的部分和做阿贝尔变换可得

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}S_k(-\Delta b_k)+S_nb_n=-\sum_{k=1}^{n-1}S_k\Delta b_k+S_nb_n.$$

在上式两边对$n\to\infty$取极限可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=-\sum_{n=1}^{\infty}S_n\Delta b_n+\lim_{n\to\infty}S_nb_n;$$

又因为$\{S_n\}$有界且$\lim_{n\to\infty}b_n=0$可知$\lim_{n\to\infty}S_nb_n=0$,于是有$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=-\sum_{n=1}^{\infty}S_n\Delta b_n$.

(2)将T_9中a_n,b_n对调即可知所证成立。

13.设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 且$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, 求证$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n - a_{n+1}\right)$收敛, 且有$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n - a_{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

证明：取$b_n = 1$, 则可知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛, 我们对$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$做阿贝尔变换可得

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k - a_{k+1}\right)B_k + a_n B_n = \sum_{k=1}^{n-1} k\left(a_k - a_{k+1}\right) + na_n ,$$

上式两边对$n\to\infty$取极限可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n - a_{n+1}\right) + \lim_{n\to\infty} na_n ,$$

由于$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, 可知$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n - a_{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

14.下列命题对的请给予证明, 错的请举出反例：

(1)若$a_n > 0$, 则$a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + \cdots$收敛;

答：错; 如$a_n \equiv 1$, 则级数$a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + \cdots$有0和1两个聚点。

(2)若$a_n \to 0$, 则$a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + \cdots$收敛;

答：正确; 对于这个级数的部分和数列$\left\{S_n\right\}$的偶数项必为零; 而奇数项$S_{2k+1} = a_{2k+1}$, 由于$a_n \to 0$, 可知$S_{2k+1} \to 0$, 于是可知级数的部分和数列趋近于零, 因此级数收敛于零。

(3)若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$收敛;

答：错; 例如$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛; 但是级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散。

(4)若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$绝对收敛;

答：正确; 由$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛可知$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$, 于是可知$\exists N_1$, 当$n > N_1$时, $|a_n| < 1$; 与此同此$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2$, 当$n > N_2$时, $\forall p > 0$有$\sum_{k=n}^{n+p} \left|a_k^2\right| = \left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k^2\right| < \varepsilon$成立。那么$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \max\left(N_1, N_2\right)$, 当$n > N, \forall p > 0$有

$$\sum_{k=n}^{n+p} \left|a_k^3\right| = \sum_{k=n}^{n+p} \left|a_n\right| \cdot \left|a_k^2\right| \le \sum_{k=n}^{n+p} \left|a_k^2\right| = \left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k^2\right| < \varepsilon.$$

那么由柯西收敛原理可知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$绝对收敛。

(5)若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散, 则a_n不趋近于零;

答：错误; 调和级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散, 但是显然有$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(6)若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,$b_n\to 1$,则$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛;

答：错误;例如取$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,$b_n=\frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}=1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,由莱布尼兹判别法易知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,

且有$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)=1$成立,但是

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

易知后者发散,因此$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$发散。

(7)若$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛,$b_n\to 1$,则$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛;

答：正确;由$b_n\to 1$可知数列$\{b_n\}$有界;不妨设对于$\forall n$有$|b_n|<M$.由于$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛,根据柯西收敛原理可知对于$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当$n>N$时,$\forall p>0$有$\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k|<\frac{\varepsilon}{M}$,那么此时有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_kb_k|<M\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k|<M\bullet\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

于是由柯西收敛原理可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛。

(8)若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛;

答：错误;如级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$收敛,但是级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散。

(9)若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,$a_n>0$,则$\lim_{n\to\infty}na_n=0$.

答：错误;可见 §3$T_{9(2)}$.

15.求下列极限(其中$p>1$)：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)^p}+\dfrac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^p}\right]$;

解：由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$在$p>1$时收敛;那么由柯西收敛原理可知对于$\forall\ \varepsilon>0,\exists N>0,$ 当$n>N$时有

$$\left|\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right|<\varepsilon$$

于是可知有$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)^p}+\dfrac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^p}\right]=0$成立。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{p^{n+1}}+\dfrac{1}{p^{n+2}}+\cdots+\dfrac{1}{p^{2n}}\right)$;

解：由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{p^n}$在$p>1$时收敛;那么由柯西收敛原理可知对于$\forall\ \varepsilon>0,\exists N>0,$ 当$n>N$时有

$$\left|\frac{1}{p^{n+1}}+\frac{1}{p^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{p^{2n}}\right|<\varepsilon$$

于是可知有$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{p^{n+1}}+\dfrac{1}{p^{n+2}}+\cdots+\dfrac{1}{p^{2n}}\right]=0$成立。

16.若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, $a_{n+1}\le a_n,\ n=1,2,\cdots$; 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0.$

证明：由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,根据柯西收敛原理可知$\forall\varepsilon>0,\exists N_1>0,$ 对于$\forall n>N_1, p=n$ 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+n}a_k\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

那么根据级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$各项非负且有$a_{n+1}\le a_n$,于是可得

$$\left|na_{2n}\right|\le\left|\sum_{k=n+1}^{n+n}a_k\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

即$\left|2na_{2n}\right|<\varepsilon,$ 那么对于$\forall\varepsilon>0,\exists K=2N_1,$ 当$k>K$时有$\left|ka_k\right|<\varepsilon,$ 于是有$\lim\limits_{k\to\infty}ka_k=0,$ 即$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0.$

§5 无穷级数与代数运算

1.不用可惜准则,求证：如果$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛。

证明：取$a_n^+=\dfrac{a_n+|a_n|}{2},a_n^-=\dfrac{a_n-|a_n|}{2}$,那么$0\le a_n^+\le|a_n|,0\le -a_n^-\le|a_n|$;由比较判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+,\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$都收敛,那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+|a_n|+a_n-|a_n|}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^++a_n^-\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^++\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-;$$

于是易知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。

2.设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,求证：将相邻奇偶项交换后所成的级数收敛,且具有相同的和数。

证明：设级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和为S_n,且有$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$;将相邻奇偶项交换后所成的级数的部分和为$S_n^*$,那么显然有$\forall\varepsilon>0,\exists N_1>0$,当$n>N_1$时有$|S_n-S|<\dfrac{\varepsilon}{2}$;与此同时有

$$\left|S_n^*-S\right|=\left|S_n^*-S_n+S_n-S\right|\le\left|S_n^*-S_n\right|+\left|S_n-S\right|$$

当$n=2k$时,有

$$\left|S_n^*-S\right|\le\left|S_n^*-S_n\right|+\left|S_n-S\right|=0+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon;$$

当$n=2k+1$时,有

$$\left|S_n^*-S\right|\le\left|S_n^*-S_n\right|+\left|S_n-S\right|=\left|a_{2k+1}-a_{2k+2}\right|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛可知必有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,那么$\forall\varepsilon>0,\exists N_2>0$,当$n>N_2$时有$|a_n|<\dfrac{\varepsilon}{4}$,此时有

$$\left|S_n^*-S\right|\le\left|a_{2k+1}-a_{2k+2}\right|+\frac{\varepsilon}{2}\le\left|a_{2k+1}\right|+\left|a_{2k+2}\right|+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

那么综上可知$\forall\varepsilon>0,\exists N=\max\left(N_1,N_2\right)>0$,当$n>N$时有$\left|S_n^*-S\right|<\varepsilon$.因此可以知道交换后所成的级数收敛,且与原级数具有相同的和数。

3.求证：由级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$重排所得的级数

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$$

发散。

证明：对$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$进行加括号得：

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)+\cdots$$

取$u_1=1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}},\cdots,u_n=\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}},\cdots.$

那么对于$\forall n$,有

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{1}{\sqrt{4n}}+\frac{1}{\sqrt{4n}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{4n}}>0,$$

于是$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数,由于$u_n>\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{4n}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{4}}\bullet\frac{1}{\sqrt{n}}$, 而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

这说明在加括号之前级数就是发散的, 否则由定理10. 19可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

4.证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛, 则可把级数重排, 使新级数部分和数列有一子列趋向于$+\infty$, 有一子列趋向于$-\infty$.

证明：由引理1可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^+,\sum_{n=1}^{\infty}u_n^-$分别发散到$+\infty,-\infty$.

那么我们首先在$\{u_n^+\}$依次取足够多的N_1项, 并使这N_1项的和大于1;然后在$\{u_n^-\}$依次取足够多的N_2-N_1项,使这N_2项的和小于$-1$$\left(\text{由于}\sum_{n=1}^{\infty}u_n^-\text{发散到}-\infty,\text{我们知道这是可以办到的}\right)$.

同样的我们再在$\{u_n^+\}$依次取足够的N_3-N_2项, 并使这N_3项的和大于2;然后在$\{u_n^-\}$依次取足够的N_4-N_3项,使这N_4项的和小于$-2$$\left(\text{由于}\sum_{n=1}^{\infty}u_n^-\text{发散到}-\infty,\text{我们知道这是可以办到的}\right)$.

持续这样下去,我们得到的新级数的部分和数列$\{S_n^*\}$, 有两个子列分别满足

$$S_N^*\begin{cases}>k & N=2k+1\\ <-k & N=2K\end{cases};$$

于是可知数列$\{S_N^*\}$的奇数子列是无穷大量, 趋近于$+\infty$;偶数子列也是无穷大量趋近于$-\infty$.

5.已知$H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=c+\ln n+r_n$, c是欧拉常数, $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$, 求证：

(1).$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}=\frac{1}{2}\ln m+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}r_m$;

(2).若把级数$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$的各项重排, 而使依次$p$个正项的一组与依次$q$个负项的一组相交替; 则新级数的和为$\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

证明:(1).$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{2}H_m=\frac{1}{2}\ln m+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}r_m$.

(2).我们首先将新级数加括号使得

$$\begin{aligned}u_n=&\left(\frac{1}{2(n-1)p+1}+\frac{1}{2(n-1)p+3}+\cdots+\frac{1}{2np-1}\right)\\&-\left(\frac{1}{2(n-1)q+2}+\frac{1}{2(n-1)q+4}+\cdots+\frac{1}{2nq-2}\right);\end{aligned}$$

我们考察级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和$S_n^*=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$, 由于我们考察的只是一个“部分和”, 因此在这里我们可以对它的各项进行交换, 那么可知

$$\begin{aligned}S_n^*=\sum_{k=1}^{n}u_k=\left(H_{2np-1}-\frac{1}{2}H_{np}\right)-\frac{1}{2}H_{nq}&=c+\ln(2np-1)+r_{2np-1}\\&-\frac{1}{2}\left(c+\ln(np)+r_{np}+c+\ln(nq)+r_{nq}\right)\\&=\ln\frac{2np-1}{np}+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}+r_{2np-1}-\frac{1}{2}\left(r_{np}+r_{nq}\right);\end{aligned}$$

那么在上两边对$n\to\infty$取极限, 又由于$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$可得$\lim\limits_{n\to\infty}S_n^*=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$, 即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

我们重新将级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的括号去掉, 设其级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 部分和为$S_n$, 取

$$m_n=\max\left(\left|\frac{1}{2(n-1)p+1}+\frac{1}{2(n-1)p+3}+\cdots+\frac{1}{2np-1}\right|,\left|\frac{1}{2(n-1)q+2}+\frac{1}{2(n-1)q+4}+\cdots+\frac{1}{2nq-2}\right|\right)$$

那么可知有$\left|S_n-S_n^*\right|\le m_n<\frac{q+p}{2n-2}$, 显然有

$$\lim_{n\to\infty}\left|S_n-S_n^*\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{q+p}{2n-2}=0,$$

于是可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛于$\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

即得所证。

6.求证：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$的平方(柯西乘积)是收敛的。(??? 怎么办呢，不会做???)

7.令$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$,求证：$e^{x+y}=e^x\bullet e^y$.

证明：将级数展开可知

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$e^y=1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\cdots+\frac{y^n}{n!}+\cdots.$$

由于级数$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$是绝对收敛的,因此我们可得

$$\begin{aligned}
&e^x\bullet e^y\\
&=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right)\bullet\left(1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\cdots+\frac{y^n}{n!}+\cdots\right)\\
&=1+\left(x+y\right)+\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x}{1!}\bullet\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}\right)+\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^2}{2!}\frac{y}{1!}+\frac{x}{1!}\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}\right)+\cdots\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{x^i}{i!}\bullet\frac{y^{n-i}}{(n-i)!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x,y);
\end{aligned}$$

其中

$$a_n(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{x^i}{i!}\bullet\frac{y^{n-i}}{(n-i)!}\right)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\left(C_n^i x^i\bullet y^{n-i}\right)}{n!}=\frac{\left(x+y\right)^n}{n!}.$$

因此可得

$$e^x\bullet e^y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x+y\right)^n}{n!}=e^{x+y}.$$

8.证明：若级数的项加括号所成的级数收敛，并且在同一个括号内项的符号相同，那么去掉括号后，此级数亦收敛；并由此考察级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n}$的收敛性。

证明：设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，其中$a_n=\sum_{k=1}^{m_n}b_{n_k},b_{n_k}\ (k=1,2,\cdots,m_n)$具有相同的符号。那么必有$\lim_{n\to\infty}a_n=0$，即$\forall\varepsilon>0,\exists N_1>0$，当$n>N_1$时，$|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$.

设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=I$，那么$\forall\varepsilon>0,\exists N_2>0$，当$n>N_2$时，$\left|\sum_{k=1}^{n}a_n-I\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

设级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和数列为$\{S_n\}$，将其去掉括号后级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m_n}b_{n_k}$的部分和数列记为$\left\{S_{r_n}^*\right\}$，其中$S_{r_n}^*=S_{n+\Delta m_{n+1}}^*=\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=1}^{m_l}b_{l_k}+\sum_{k=1}^{\Delta m_{n+1}}b_{(n+1)_k}$，$r=\sum_{i=1}^{n}m_i+\Delta m_{n+1}$；那么必有$\left|S_n-S_{r_n}^*\right|\le|a_{n+1}|$.

取$N=\max\left(\sum_{i=1}^{N_1}m_i,\sum_{i=1}^{N_2}m_i\right)$，那么对于$\forall\varepsilon>0$，当$r_n>N$时，必有

$$\left|S_{r_n}^*-I\right|=\left|S_{r_n}^*-S_n+S_n-I\right|\le\left|S_{r_n}^*-S_n\right|+\left|S_n-I\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon;$$

即$\lim_{n\to\infty}S_{r_n}^*=I$，即得所证。

对于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n}$，我们取$A_k=\left\{n\,|\left[\sqrt{n}\right]=k\right\},k=1,2,3,\cdots$.则$A_k$内的元素$n$满足：$k\le\sqrt{n}\le k+1$；元素个数为$p_k=2k+1$.

我们将$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n}$中的同号项相加得级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right];$$

显然有$\frac{2}{k+1}<\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}<\frac{2}{k}$；于是$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right]=0$.且易知此级数的通项是单调的。那么由莱布尼兹判别法可知加括号后的级数收敛。

因此加括号之前的级数也收敛。

第十一章 广义积分

§1 无穷限广义积分

1.求下列积分的值：

(1)$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x-1}{x+1}\Big|-\ln\frac{2-1}{2+1}\Big|\right)=\frac{1}{2}\ln 3.$

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{dx^2}{x^2(1+x^2)}=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx^2=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\Bigg|_1^{+\infty}$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x^2}{1+x^2}-\ln\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln 2.$$

(3) $\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}dx, a>0;=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dax^2=-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\Bigg|_0^{+\infty}=-\frac{1}{2a}\left(\lim_{x\to+\infty}e^{-ax^2}-1\right)=\frac{1}{2a}.$

(4) $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bxdx, a>0;$

解: $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bxdx=-\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\sin bxde^{-ax}=-\frac{1}{a}\sin bxe^{-ax}\Big|_0^{+\infty}+\frac{b}{a}\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bxdx$

$$=-\frac{b}{a^2}\int_0^{+\infty}\cos bxde^{-ax}=-\frac{b}{a^2}\cos bxe^{-ax}\Bigg|_0^{+\infty}-\frac{b^2}{a^2}\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bxdx$$

$$=-\frac{b}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bxdx,$$

因此可得

$$\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bxdx=-\frac{b}{a^2+b^2}.$$

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx\overset{\sqrt{x}=t}{=}\int_0^{+\infty}\frac{2t^2}{1+t^4}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

(6) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+p)(x^2+q)}, p,q>0.=\frac{1}{p-q}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+q}-\frac{1}{x^2+p}\right)dx=-\frac{\pi}{2(p-q)}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}-\frac{1}{\sqrt{q}}\right)$

2.讨论下列积分的收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}};\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{x^4+1}}=1,$ 由于 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}dx$ 收敛, 那么由比较判别法可知原积分收敛。

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}dx;\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\arctan x}{1+x^3}=\frac{\pi}{2},$ 由于 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛, 则由比较判别法可知原积分收敛。

(3) $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}dx;\quad$ 由于 $\lim_{x\to+\infty}x^2\sin\frac{1}{x^2}=1,$ 而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛, 因此原积分收敛。

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|};\quad$ 由于 $\frac{1}{1+x|\sin x|}\ge\frac{1}{2x}$ (当 $x>2$ 时), 因此积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$ 发散。

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2\sin^2 x};\quad$ 由于 $\frac{1}{1+x^2\sin^2 x}\ge\frac{1}{2x}$ (当 $x>2$ 时), 因此积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2\sin^2 x}$ 发散。

(6) $\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx;\quad$ 由于 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{n-m}x^m}{1+x^n}=1,$ 因此当 $n-m>1$ 时, 积分收敛, 否则发散。

(7) $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^2}{x^4-x^2+1}dx$;　由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{x^4-x^2+1}=1$, 积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ 收敛, 因此原积分收敛。

(8) $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$;　由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{5}{3}}}{x\sqrt[3]{1+x^2}}=1$, 故由比较判别法可知原积分收敛。

(9) $\int_0^{+\infty}x^pe^{-x}dx$;　由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{2+p}e^{-x}=0$, 因此原积分收敛。

(10) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^p}dx$;　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^q\ln x}{x^p}=\begin{cases}+\infty & p\le q\\ 0 & p>q\end{cases}$, 因此可知当 $p>1$ 时, 积分收敛, 否则发散。

(11) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln^n x}{x^2}dx$, n 是正整数;　由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{3}{2}}\ln^n x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^n x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^n n!}{\sqrt{x}}=0$, 因此原积分收敛。

(12) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty}\dfrac{1-\cos 2x}{x}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x}dx-\dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos 2x}{x}dx$, 故可知积分发散。

(13) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos ax}{1+x^n}dx$;　$\int_0^{+\infty}\cos ax dx$ 有界, $\dfrac{1}{1+x^n}$ 单调下降趋于零, 由狄理克雷判别法知积分收敛。

(14) $\int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}\right]dx=\int_1^{+\infty}\left[\dfrac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}\right]dx=\int_1^{+\infty}\left[\dfrac{1}{x+x^2}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]dx$, 故积分收敛。

(15) $\int_1^{+\infty}\ln\left(\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}\right)dx=\int_1^{+\infty}\ln\left[1+\dfrac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]dx=\int_1^{+\infty}\left[\dfrac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]dx$, 故积分发散。

(16) $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\ln\left(1-\dfrac{\sin^2 x}{2}\right)dx=-\int_0^{+\infty}\left|\dfrac{1}{x^2}\ln\left(1-\dfrac{\sin^2 x}{2}\right)\right|dx$, 由于 $\left|\dfrac{1}{x^2}\ln\left(1-\dfrac{\sin^2 x}{2}\right)\right|\le\left|\dfrac{\ln\frac{1}{2}}{x^2}\right|$, 故收敛。

3.讨论下列无穷积分的收敛性(包括绝对收敛或条件收敛):

(1) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos^2 x}{x}dx=\int_1^{+\infty}\dfrac{1+\cos 2x}{2x}dx=\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{2x}dx+\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos 2x}{2x}dx$, 可知积分发散。

(2) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x}dx$;

解：由于 $\int_1^{+\infty}\cos x dx$ 有界, $\dfrac{1}{x}$ 单调下降趋于零, 那么由狄理克雷判别法可知积分收敛。但是

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x}\right|dx\ge\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}dx,$$

由本题(1)可知积分仅条件收敛。

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx;$

解：当$p\le 0$可知积分发散;

当$p\in(0,1]$由狄理克雷判别法可知积分条件收敛;

当$p>1$积分绝对收敛。

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx;$

解：积分$\int_0^{+\infty}\cos xdx$有界, 而$\frac{\sqrt{x}}{x+100}$单调下降趋于零,因此由狄理克雷判别法可知积分收敛。

但是由于

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\right|dx\ge\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos^2 x}{x+100}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+100}dx+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}dx,$$

等号右边前者发散,后者收敛,因此原积分仅是条件收敛。

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin xdx.$

解：由于$\int_0^{+\infty}\sin xdx$有界,$\frac{\ln\ln x}{\ln x}$单调下降趋于零,因此由狄理克雷判别法可知积分收敛; 但是由于

$$\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\right|\ge\frac{\sin^2 x}{x},\exists X,\text{当}x>X\text{时成立}$$

因此积分仅是条件收敛。

4.设$f(x)\le h(x)\le g(x), a\le x\le+\infty; h(x)$在任意有限区间$[a,A]$上可积, 又$\int_a^{+\infty}f(x)dx$和$\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛,求证:$\int_a^{+\infty}h(x)dx$收敛。

证明：由柯西收敛原理根据$\int_a^{+\infty}f(x)dx$和$\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛可知:$\forall\varepsilon>0,\exists A>a$, 当$A',A''>A$时

$$I=\left|\int_{A'}^{A''}f(x)dx\right|<\varepsilon, J=\left|\int_{A'}^{A''}g(x)dx\right|<\varepsilon$$

成立。由于$f(x)\le h(x)\le g(x)$,因此必有

$$\int_{A'}^{A''}f(x)dx\le\int_{A'}^{A''}h(x)dx\le\int_{A'}^{A''}g(x)dx;$$

那么可知下式成立

$$\left|\int_{A'}^{A''}h(x)dx\right|\le\max(I,J)<\varepsilon.$$

于是由柯西收敛原理可知积分$\int_a^{+\infty}h(x)dx$收敛。

5.证明定理11.2, 并举例说明其逆不成立。

证明：若$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛, 则$\forall\varepsilon>0, \exists A>a$, 当$A', A''>A$时, 有$\int_{A'}^{A''}|f(x)|dx<\varepsilon$成立。由定积分的基本性质可知此时必有

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x)dx\right|\le\int_{A'}^{A''}|f(x)|dx<\varepsilon$$

成立。那么由柯西收敛原理可知积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛。

反之不成立, 例如由狄理克雷判别法可知积分$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$不收敛, 但是由于

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right|dx\ge\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}dx$$

可知积分$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right|dx$不收敛, 亦知$\int_1^{+\infty}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right)^2dx$也不收敛。

6.若$f(x)$在$[a,+\infty)$上单调下降, 且积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛, 求证: $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$.

证明：首先我们证明$f(x)$在$[a,+\infty)$上恒正。否则若$f(x_0)=l<0$, 则在$[x_0,+\infty)$上$f(x)<l<0$成立, 那么

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\int_a^{x_0}f(x)dx+\int_{x_0}^{+\infty}f(x)dx\le\int_a^{x_0}f(x)dx+\int_{x_0}^{+\infty}ldx=\int_a^{x_0}f(x)dx+\lim_{x\to+\infty}l(x-x_0)=-\infty$$

这与积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛矛盾。

由柯西收敛原理可知当积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛时, $\forall\varepsilon>0, \exists A>a$, 当$A', A''>A$时有

$$\int_{A'}^{A''}f(x)dx=\left|\int_{A'}^{A''}f(x)dx\right|<\varepsilon$$

成立。

那么对于$\forall x>A$有$\int_x^{2x}f(t)dt<\int_x^{2x}f(x)dt<\varepsilon$, 即$xf(x)<\varepsilon$, 因此可知$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$.

7.设$f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续, 并且积分$\int_0^{+\infty} f(x)dx$收敛, 证明:$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. 若仅知道$\int_0^{+\infty} f(x)dx$收敛及$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续, 是否仍可得到$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证明：由$f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续可知, $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当$x_1,x_2\in[0,+\infty)$且$|x_1-x_2|<\delta$时有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又根据积分$\int_0^{+\infty} f(x)dx$收敛可知, $\forall\varepsilon>0,\exists A>0$, 当$x_1,x_2>A$时有$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right|<\dfrac{\varepsilon^2}{2}$成立。

对于任意$x_1,x_2>A$, 且$|x_1-x_2|=\min\left(\varepsilon,\dfrac{\delta}{2}\right)=\lambda$, 可知$\exists x\in(x_1,x_2)$使得

$$\begin{aligned}|f(x)\lambda|&=\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dt\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dt-\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt+\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right|\\&\le\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dt-\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right|\le\int_{x_1}^{x_2}|f(x)-f(t)|dt+\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right|\\&<\frac{\varepsilon}{2}\lambda+\frac{\varepsilon^2}{2}\le\frac{\varepsilon}{2}\lambda+\frac{\varepsilon}{2}\lambda=\varepsilon\lambda.\end{aligned}$$

那么此时必有$|f(x)|<\varepsilon$成立, 于是可知$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

若仅仅知道$f(x)$连续,我们不能得到$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.如下例：

$$f(x)=\begin{cases}1-2^n|x-n|, x\in\left[n-\dfrac{1}{2^n},n+\dfrac{1}{2^n}\right];\\0, \qquad\qquad 其他\end{cases}$$

此时$\int_0^{+\infty} f(x)dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}=1$, 且$f(x)\ge0$, 但是$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$不存在。

8.设$\int_a^{+\infty} f(x)dx,\int_a^{+\infty} f'(x)dx$都收敛, 求证$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证明：由于

$$\int_a^{+\infty} f'(x)dx=f(x)\Big|_a^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty} f(x)-f(a);$$

可知当$\int_a^{+\infty} f'(x)dx$收敛收敛时必有$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在; 设$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

若$l>0$, 那么可知$\exists X>a$, 当$x>X$时, $f(x)>\dfrac{l}{2}$成立, 则

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)dx&=\int_a^X f(x)dx+\int_X^{+\infty} f(x)dx\ge\int_a^X f(x)dx+\int_X^{+\infty}\frac{l}{2}dx\\&=\int_a^X f(x)dx+\lim_{x\to+\infty}\frac{l(x-X)}{2}=+\infty.\end{aligned}$$

这与$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛矛盾故必有$l\le0$;同理可知$l\ge0$, 因此必有$l=0$, 即$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

9.设$f(x)$单调下降趋于零, $f'(x)$在$[0,+\infty)$连续, 求证$\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 xdx$收敛。

证明：可以求得：

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 xdx=\int_0^{+\infty}\sin^2 xdf(x)\\&=\sin^2 xf(x)\Big|_0^{+\infty}-2\int_0^{+\infty} f(x)\sin x\cos xdx\\&=\lim_{x\to+\infty}\sin^2 xf(x)-\sin^2 0f(0)-\int_0^{+\infty} f(x)\sin 2xdx\\&=-\int_0^{+\infty} f(x)\sin 2xdx.\end{aligned}$$

由于$\int_0^{+\infty}\sin 2xdx$有界,而$f(x)$单调下降趋于零, 根据狄理克雷判别法可知$\int_0^{+\infty} f(x)\sin 2xdx$收敛。

因此可知$\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 xdx$收敛。

10.设$f(x)$和$g(x)$是定义在$[a,+\infty)$上的函数, 且在任意有限区间$[a,A]$上可积, 证明:$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$与$\int_a^{+\infty} g^2(x)dx$收敛,则$\int_a^{+\infty}\left[f(x)+g(x)\right]^2 dx$与$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$也都收敛。

证明：由于$\left|f(x)g(x)\right|\le\dfrac{f^2(x)+g^2(x)}{2}$,而积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_a^{+\infty} f^2(x)dx+\int_a^{+\infty} g^2(x)dx\right)$$

收敛,因此可知积分$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$绝对收敛, 于是$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛。

由于

$$\int_a^{+\infty}\left[f(x)+g(x)\right]^2 dx=\int_a^{+\infty} f^2(x)dx+\int_a^{+\infty} g^2(x)dx+2\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx,$$

而等号右边各项都收敛,因此$\int_a^{+\infty}\left[f(x)+g(x)\right]^2 dx$收敛。

11.证明:(1)设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续, 且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k$, 则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\left[f(0)-k\right]\ln\frac{b}{a},b>a>0;$$

(2)若上述条件$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k$改为$\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx\left(a>0\right)$存在, 则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a},b>a>0.$$

证明:(1)取$0<\delta<\Delta$, 可知$\frac{f(x)}{x}$在$[\delta,\Delta]$上连续且可积, 则

$$\int_\delta^\Delta\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_\delta^\Delta\frac{f(ax)}{x}dx-\int_\delta^\Delta\frac{f(bx)}{x}dx$$

$$=\int_{a\delta}^{a\Delta}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{b\delta}^{b\Delta}\frac{f(t)}{t}dt=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(t)}{t}dt$$

$$=f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{dt}{t}-f(\eta)\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{dt}{t}\ \left(\text{积分第一中值定理};\xi\in\left(a\delta,b\delta\right),\eta\in\left(a\Delta,b\Delta\right)\right)$$

$$=f(\xi)\ln\frac{b}{a}-f(\eta)\ln\frac{b}{a}=\left[f(\xi)-f(\eta)\right]\ln\frac{b}{a};$$

在上式两边分别对$\Delta\to+\infty,\delta\to0$取极限, 根据函数$F(s,t)=\int_s^t\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$的连续性可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\lim_{\substack{\Delta\to+\infty\\ \delta\to0}}\left[f(\xi)-f(\eta)\right]\ln\frac{b}{a}=\left[f(0)-k\right]\ln\frac{b}{a}.$$

即得所证。

(2)任取$\delta>a$, 则

$$\int_\delta^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_\delta^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}dx-\int_\delta^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}dx$$

$$=\int_{a\delta}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{b\delta}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}dt$$

$$=f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{dt}{t}\qquad\left(\text{积分第一中值定理};\xi\in\left(a\delta,b\delta\right)\right)$$

$$=f(\xi)\ln\frac{b}{a};$$

在上式两边令$\delta\to0$取极限, 根据函数$F(s)=\int_s^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$的连续性可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\lim_{\xi\to0}f(\xi)\ln\frac{b}{a}=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

即得所证。

§2 瑕积分

1.下列瑕积分是否收敛？若收敛, 求其值。

$$(1)\int_0^{\frac{1}{2}}\cot xdx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}dx=\ln|\sin x|\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\ln\left|\sin\frac{1}{2}\right|-\lim_{x\to 0}\ln|\sin x|=+\infty;$$ 因此原瑕积分发散。

$$(2)\int_0^1\ln xdx=x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1 1dx=-x\Big|_0^1=-1;$$

$$(3)\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a-x}}\overset{\sqrt{a-x}=t}{=}\int_{\sqrt{a}}^0\frac{d\left(a-t^2\right)}{t}=\int_0^{\sqrt{a}}\frac{2tdt}{t}=2t\Big|_0^{\sqrt{a}}=2\sqrt{a};$$

$$(4)\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx\overset{\sqrt{1-x}=t}{=}\int_1^0\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}d\left(1-t^2\right)=\int_0^1\frac{2t\sqrt{1-t^2}}{t}dt\overset{t=\sin y}{=}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos y|d\left(\sin y\right)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2 ydy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2y\right)dy=y+\frac{1}{2}\sin 2y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.$$

2.讨论下列积分的收敛性：

$$(1)\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}dx;$$

解：此积分的瑕点为$x=0$,由于$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}=1$,而积分$\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$收敛, 因此由比较判别法可知原积分收敛。

$$(2)\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}};$$

解：整理可得

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}=I+J;$$

其中积分I,J的瑕点分别为$x=0,x=1.$

对于I,由于$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}=1$,而积分$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$收敛, 因此由比较判别法可知积分$I$收敛;

对于J,由于$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}=1$,而积分$\int_{\frac{1}{2}}^1\dfrac{dx}{\left(x-1\right)^{\frac{1}{3}}}$收敛,因此由比较判别法可知积分$J$收敛。

综上可知原积分收敛。

(3) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx;$

解：整理可得

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx = I + J;$$

其中积分I, J的瑕点分别为$x=0, x=1$.

对于I,由于$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\ln x}{1-x^2} = 0$,而积分$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$收敛,因此由比较判别法可知积分$I$收敛;

对于J,由于$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\ln x}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{-2x^2} = -\frac{1}{2}$,则点$x=1$是$\frac{\ln x}{1-x^2}$的可去间断点;故积分$J$收敛。

综上可知原积分收敛。

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x};$

解：整理可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = I + J;$$

其中积分I, J的瑕点分别为$x=0, x=\frac{\pi}{2}$.

对于积分I,由于$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\sin^2 x\cos^2 x} = 1$,而积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{x^2}$发散,则由比较判别法可知积分$I$发散;

于是无论J收敛与否,原积分都发散。

(5) $\int_0^1 |\ln x|^p dx;$

解：当$p \ge 0$时,$x=0$是积分的瑕点;此时由于$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\,|\ln x|^p = 0$,而积分$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$收敛,则由比较判别法可知此时原积分收敛。

当$p<0$时,$x=1$是积分的瑕点;此时根据泰勒展式可知

$$|\ln x|^p = |\ln(1+x-1)|^p = |x-1+o(x-1)|^p = (-1)^p[x-1+o(x-1)]^p$$
$$= (-1)^p\left[(x-1)^p + o(x-1)^p\right] = (-1)^p(x-1)^p[1+o(1)];$$

于是可知当$p\in(-1,0)$时,积分收敛;$p\le -1$时,积分发散。

综上可知当$p>-1$时,积分收敛;$p\le -1$时,积分发散。

(6)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^m}dx;$

解：由泰勒展式可知

$$\frac{1-\cos x}{x^m}=\frac{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)}{x^m}=\frac{\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+o\left(x^2\right)}{x^{m-2}};$$

显然$x=0$是积分的瑕点,且易知当$m-2<1$时,积分收敛,否则积分发散。

综上可知当$m<3$时积分收敛,当$m\geq 3$时积分发散。

(7)$\int_0^1\frac{dx}{\ln x};$

解：由于$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}=0$,因此$x=0$只是函数$\frac{1}{\ln x}$的可去间断点;$x=1$为积分的瑕点。

因为$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x-1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x}{1}=1$,而积分$\int_0^1\frac{1}{x-1}dx$发散,故由比较判别法可知原积分发散。

(8)$\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}};$

解：整理可得

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}=I+J;$$

其中积分I,J的瑕点分别为$x=0,x=\pi.$

对于I,由于$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}=1$,因此由比较判别法可知积分$I$收敛;

对于J,由于$\lim\limits_{x\to \pi^-}\frac{\sqrt{x-\pi}}{\sqrt{\sin x}}=1$,因此由比较判别法可知积分$J$收敛。

综上可知原积分收敛。

(9)$\int_0^1 x^{\alpha}\ln x dx;$

解：当$\alpha>-1$时,由于必有$\delta>0$,使得$\alpha-\delta>-1$,即$\alpha-\delta+1>0$,因此

$$\lim_{x\to 0^+}x^{1-\delta}x^{\alpha}\ln x=\lim_{x\to 0^+}x^{\alpha+1-\delta}\ln x=0;$$

而积分$\int_0^1\frac{dx}{x^{1-\delta}}$必收敛,因此由比较判别法可知此时原积分收敛。

当$\alpha\leq -1$时,由于必有$\delta\geq 0$,使得$\alpha+\delta\leq -1$,即$\alpha+\delta+1\leq 0$,因此

$$\lim_{x\to 0^+}x^{1+\delta}x^{\alpha}\ln x=\lim_{x\to 0^+}x^{\alpha+1+\delta}\ln x=-\infty;$$

而积分$\int_0^1\frac{dx}{x^{1+\delta}}$必发散,那么由比较判别法可知此时积分发散。

(10) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx$;

解：整理可得

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx=I+J\text{;}$$

对于J,由于$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{(p-1)x^{p-1}-(q-1)x^{q-1}}{1}=p-q$, 因此无论何时,$x=1$都只是函数的可去间断点,即$J$始终收敛;我们只考察$I$即可。

当$p=q$时, $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{0}{\ln x}dx=0$,收敛。

由于在相差一个“−1”的情况下p,q的位置是对称的,因此我们只考察$p>q$的情况。此时可得$\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}=\frac{x^{q-1}\left(x^{p-q}-1\right)}{\ln x}$:

i.当$1-q<1$时, 即$q>0$时, 可知$\exists\,\delta>0$, 使得$1-q+\delta<1$, 那么由于积分$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^{1-q+\delta}}$收敛, 而函数$\frac{x^{\delta}}{\ln x}$在区间$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调有界,因此由阿贝尔判别法可知积分$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^{1-q}\ln x}$收敛;此时函数$x^{p-q}-1$在区间$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上也单调有界, 于是可知积分$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{q-1}\left(x^{p-q}-1\right)}{\ln x}dx$收敛。

ii.当$1-q>1$时, 即$q<0$时, 可知$\exists\,\delta>0$, 使得$1-q-\delta>1$, 那么由于积分$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^{1-q-\delta}}$发散, 而极限$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^{p-q}-1}{x^{\delta}\ln x}=+\infty$, 那么可知$\exists\,\varepsilon\in(0,1)$使得当$x\in(0,\varepsilon)$时$\frac{x^{p-q}-1}{x^{\delta}\ln x}>1$, 于是积分

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^{1-q-\delta}}\bullet\frac{x^{p-q}-1}{x^{\delta}\ln x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{q-1}\left(x^{p-q}-1\right)}{\ln x}dx=I\text{;}$$

发散。

iii.当$1-q=1$时, 即$q=0$时, $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^p-1}{x\ln x}dx$, 由于$\left|\frac{x^p-1}{x\ln x}\right|\geq\frac{1}{2}\left|\frac{1}{x\ln x}\right|$, 而积分$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\ln x}$发散, 因此由比较判别法可知积分$I$发散。

综上可知积分

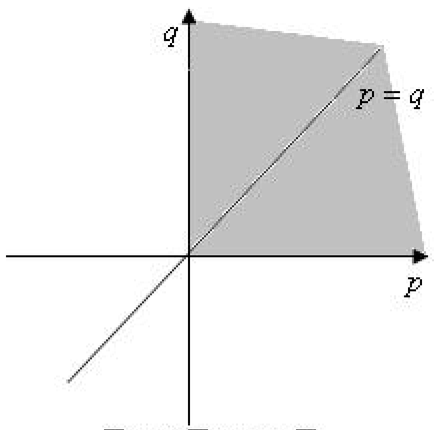
$$\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx\begin{cases}\text{收敛} & p>q>0\\ \text{发散} & p>q\text{且}q\leq0\end{cases};$$

对称的有积分

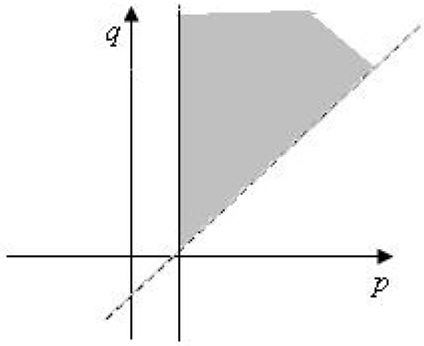
$$\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx\begin{cases}\text{收敛} & q>p>0\\ \text{发散} & q>p\text{且}p\leq0\end{cases};$$

当$p=q$时积分始终收敛。

如图(1)当(p,q)落入第一象限(不包括坐标轴)内及直线$p=q$上时积分收敛:



图(1)题2(10)图



图(2)题3(3)图

(11)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan x}dx;$

解：整理可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan x}dx \overset{\tan x=t}{=} \int_0^{+\infty}\sqrt{t}d\left(\arctan t\right)=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}dt=\int_0^1\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}dt+\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}dt=I+J;$$

其中$I=\int_0^1\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}dt$是常积分故收敛,$J$是一个收敛的无穷限积分,因此原积分收敛。

(12)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln\sin xdx.$

解：由于

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\cos x\ln\sin x=0,\lim_{x\to 0^+}\cos x\ln\sin x=-\infty,$$

因此$x=0$是函数$\cos x\ln\sin x$的瑕点,由于

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cos x\ln\sin x=0;$$

于是由比较判别法可知积分原收敛。

3.判别下列积分的敛散性：

(1)$\int_1^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1}dx;$

解：由于

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1}=0,\lim_{x\to 1^+}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1}=+\infty,$$

因此点$x=1$是函数的瑕点;我们可以解得

$$\int_1^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1}dx=\int_1^{+\infty}\ln\frac{x^2}{x^2-1}dx;$$

由于$\lim_{x\to 1}\sqrt{x-1}\ln\frac{x^2}{x^2-1}=0$,因此由比较判别法可知积分收敛。

(2)$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$;

解：整理可得

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx=\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx=I+J\,;$$

对于J,由于$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{p+1}e^{-x}=0$,而积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$收敛,因此由比较判别法可知积分$J$收敛。

对于积分$I=\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx=\int_0^1\frac{e^{-x}}{x^{1-p}}dx$,当$p>0$时,由于$\frac{e^{-x}}{x^{1-p}}\le\frac{e}{x^{1-p}}$,由比较判别法可知此时积分$I$收敛;当$p\le 0$时,由于$\frac{e^{-x}}{x^{1-p}}>\frac{1}{x^{1-p}}$,由比较判别法可知此时积分$I$发散。

综上可知当$p>0$时原积分收敛,当$p\le 0$时原积分发散。

(3)$\int_0^{+\infty}\frac{(\arctan x)^q}{x^p}dx$;

解：整理可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{(\arctan x)^q}{x^p}dx=\int_0^1\frac{(\arctan x)^q}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{(\arctan x)^q}{x^p}dx=I+J\,.$$

对于I,当$p-q<1$时,$\exists\delta>0$使得$p-q+\delta<1$,那么由于

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^{p-q+\delta}(\arctan x)^q}{x^p}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\delta}(\arctan x)^q}{x^q}=0,$$

而积分$\int_0^1\frac{1}{x^{p-q+\delta}}dx$收敛,因此由比较判别法可知此时积分$I$收敛。

当$p-q\ge 1$时,$\exists\delta\ge 0$使得$p-q-\delta\ge 1$,那么由于

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^{p-q-\delta}(\arctan x)^q}{x^p}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\delta}(\arctan x)^q}{x^q}=\begin{cases}+\infty & \delta>0\\ 1 & \delta=0\end{cases},$$

而积分$\int_0^1\frac{1}{x^{p-q-\delta}}dx$发散,因此由比较判别法可知此时积分$I$发散。

对于J,当$p>1$时,$\frac{(\arctan x)^q}{x^p}\le\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^q}{x^p}$,而积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$收敛,因此由比较判别法可知积分$J$收敛;当$p\le 1$时,$\frac{(\arctan x)^q}{x^p}\ge\frac{(\arctan 1)^q}{x^p}$,而积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$发散,因此由比较判别法可知积分$J$发散。

综上可知当$p-q>1$且$p>1$时原积分收敛,否则发散。即当点(p,q)落入图(2)所示区域(不包括边界)时,积分收敛,否则发散。

$(4)\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx;$

解：整理可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx=I+J\text{；}$$

对于I,当$p<2$时,$\exists\delta>0$使得$p+\delta<2$,即$p+\delta-1<1$,由于

$$\lim_{x\to0}\frac{x^{p+\delta-1}\ln(1+x)}{x^p}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x^{1-\delta}}=\begin{cases}0 & \delta\ge1\\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{(1-\delta)x^{-\delta}(1+x)}=0, & \delta<1\end{cases},$$

而积分$\int_0^1\frac{1}{x^{p+\delta-1}}dx$收敛,因此由比较判别法可知此时积分$I$收敛。

当$p\ge2$时,$\exists\delta\ge0$使得$p-\delta\ge2$,即$p-\delta-1<1$,由于

$$\lim_{x\to0}\frac{x^{p-\delta-1}\ln(1+x)}{x^p}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x^{1+\delta}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{(1+\delta)x^{\delta}(1+x)}=\begin{cases}1 & \delta=0\\ +\infty & \delta>0\end{cases},$$

而积分$\int_0^1\frac{1}{x^{p-\delta-1}}dx$发散,因此由比较判别法可知此时积分$I$发散。

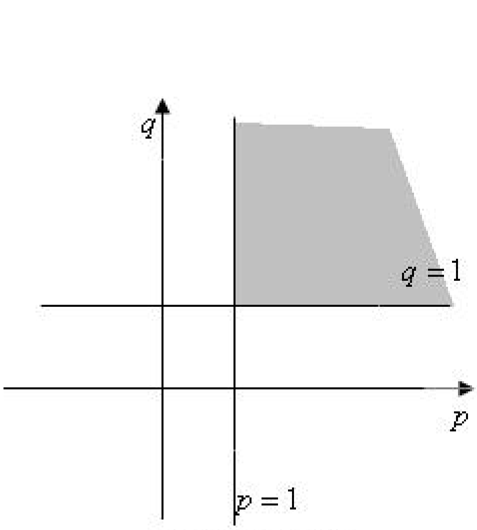
对于J,当$p>1$时,$\exists\delta>0$使得$p-\delta>1$,那么由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p-\delta}\ln(1+x)}{x^p}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{\delta}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\delta x^{\delta-1}(1+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\delta x^{\delta-1}+\delta x^{\delta}}=0;$$

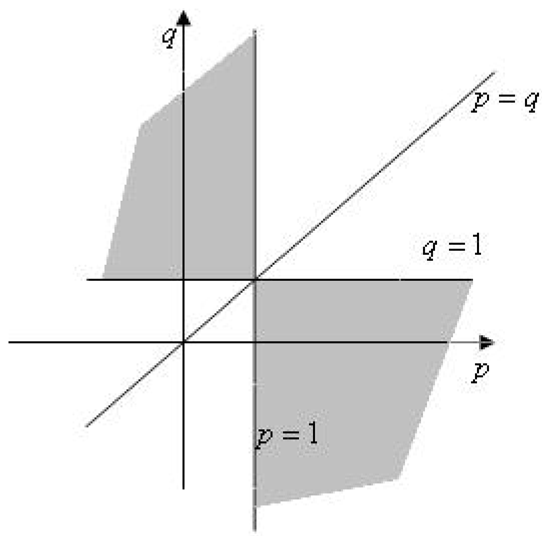
而积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{p-\delta}}dx$收敛,因此可知此时积分$J$收敛。

当$p\le1$时,由于$\frac{\ln(1+x)}{x^p}\ge\frac{\ln2}{x^p}$,而积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$发散,因此可知此时积分$J$发散。

综上可知当$p\in(1,2)$时,原积分收敛;否则发散。



图(3)题3(5)图



图(4)题3(6)图

(5) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$;

解：整理可得

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}=\int_1^{2}\frac{dx}{x^p\ln^q x}+\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}=I+J.$$

对于I,当$q<1$时,$\exists\delta>0$使得$q+\delta<1$, 此时

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^{q+\delta}}{x^p\ln^q x}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^{q+\delta}}{x^p\ln^q\left(1+x-1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^{q+\delta}}{x^p\left[\left(x-1\right)-\frac{\left(x-1\right)^2}{2}+o\left((x-1)^2\right)\right]^q}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^{\delta}}{x^p\left[1-\frac{\left(x-1\right)^1}{2}+o\left(x-1\right)\right]^q}=0,$$

而积分$\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^{q+\delta}}$收敛,因此此时积分$I$收敛。

当$q\geq1$时,$\exists\delta\geq0$使得$q-\delta\geq1$, 此时

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^{q-\delta}}{x^p\ln^q x}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^{q-\delta}}{x^p\ln^q\left(1+x-1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^{q+\delta}}{x^p\left[\left(x-1\right)-\frac{\left(x-1\right)^2}{2}+o\left((x-1)^2\right)\right]^q}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^{-\delta}}{x^p\left[1-\frac{\left(x-1\right)^1}{2}+o\left(x-1\right)\right]^q}=\begin{cases}+\infty & \delta>0\\ 1 & \delta=0\end{cases},$$

而积分$\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^{q-\delta}}$发散,因此此时积分$I$发散。

对于$J=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$,由$p_{10}\S_3T_{3(8)},p_{10}\S_3T_5$可知$J\begin{cases}收敛 & p>1或p=1且q>1\\ 发散 & p<1或p=1且q\leq1\end{cases}$.

综上可知当$p>1$且$q<1$时,原积分收敛。如图当点$\left(p,q\right)$落入图(3) 所示区域(不包括边界) 时,积分收敛。

(6)$\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p+x^q}$;

解：整理可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}=\int_0^1\frac{dx}{x^p+x^q}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}=I+J;$$

由于p,q的位置对称,因此我们只考虑$p\ge q$的情况。

当$p=q$时,由于$I=\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{dx}{x^p}$当$p<1$时收敛,$J=\dfrac{1}{2}\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p}$当$p>1$时收敛,因此此时原积分发散。

当$p>q$时,若$p>1$,对于J,由于$\dfrac{1}{x^p+x^q}<\dfrac{1}{x^p}$,而积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p}$收敛,因此此时$J$收敛;

若$p\le 1$,对于J,由于$\dfrac{1}{x^p+x^q}>\dfrac{1}{2x^p}$,而积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p}$发散,因此此时$J$发散。

若$p>q\ge 1$,则对于I,有$\dfrac{1}{x^p+x^q}>\dfrac{1}{2x^q}$,而积分$\int_0^1\dfrac{dx}{2x^q}$发散,因此此时积分$I$发散,

若$q<1$,则对于I,有$\dfrac{1}{x^p+x^q}<\dfrac{1}{x^q}$,而积分$\int_0^1\dfrac{dx}{x^q}$收敛,因此此时积分$I$收敛。

综上可知$p>q$时,若$p>1$且$q<1$时原积分收敛;$p<q$时,若$q>1$且$p<1$时原积分收敛。即当点$\left(p,q\right)$落入图(4)所示区域(不包含边界)时,积分收敛。

(7)$\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}$;

解：整理可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}+\int_1^{1.5}\frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}$$

$$+\int_{1.5}^2\frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}+\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5;$$

对于I_1,由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}=-\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$,而积分$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}}$收敛,因此积分$I_1$收敛;

对于I_2,由于$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x-1\right)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}=-1$,而积分$\int_{\frac{1}{2}}^1\dfrac{dx}{\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}}$收敛,因此积分$I_2$收敛;

积分I_3是一个常积分,故必收敛;

对于I_4,由于$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x-2\right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}=\sqrt[3]{2}$,而积分$\int_{1.5}^2\dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)}}$收敛,因此积分$I_4$收敛;

对于I_5,由于$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}=1$,而积分$\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{\frac{4}{3}}}$收敛,因此积分$I_5$收敛。

综上可知原积分收敛。

(8) $\int_{-\infty}^{0} e^{x}\ln|x|dx.$

解：整理可得

$$\int_{-\infty}^{0} e^{x}\ln|x|dx \overset{x=-t}{=} \int_{0}^{+\infty} e^{-t}\ln t dt = \int_{0}^{1} e^{-t}\ln t dt + \int_{1}^{+\infty} e^{-t}\ln t dt = I + J;$$

其中I的瑕点为$t=0$,J为无穷限积分。

对于I,由于$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{t}e^{-t}\ln t = 0$,而积分$\int_{0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{t}}$收敛,因此由比较判别法可知积分$I$收敛;

对于J,由于$\lim\limits_{x\to +\infty} t^{2}e^{-t}\ln t = 0$,而积分$\int_{1}^{+\infty}\frac{dt}{t^{2}}$收敛,因此由比较判别法可知积分$J$收敛。

综上可知原积分收敛。

4.讨论下列积分的收敛性与绝对收敛性：

(1) $\int_{0}^{+\infty}\sin x^{2}dx;$

解：整理可得

$$\int_{0}^{+\infty}\sin x^{2}dx \overset{x^{2}=t}{=} \int_{0}^{+\infty}\sin t d\sqrt{t} = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt + \int_{1}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = I + J;$$

其中积分I的瑕点为$t=0$,积分J为无穷瑕积分。

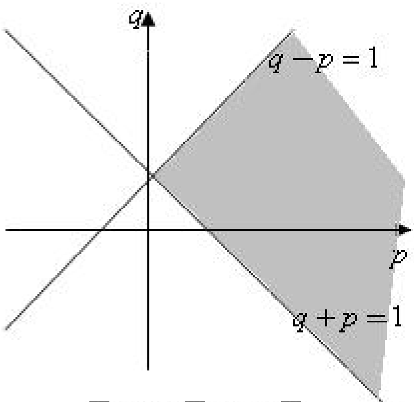
对于I,由于$\left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{t}}$,而积分$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{t}}dt$收敛,因此积分$I$绝对收敛。

对于J,由于$\int_{1}^{+\infty}\sin t dt$有界,而函数$\frac{1}{\sqrt{t}}$在区间$(1,+\infty)$上单调下降趋于零,那么由狄理克雷判别法可知积分$J$收敛。但是由于

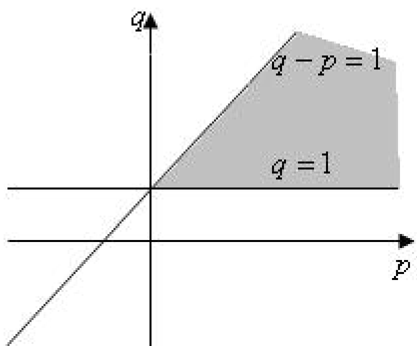
$$\left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right| \ge \frac{\sin^{2} t}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 2t}{\sqrt{t}}\right),$$

其中$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}dt$发散,$\int_{1}^{+\infty}\frac{\cos 2t}{\sqrt{t}}dt$由狄理克雷判别法可知收敛,因此积分$\int_{1}^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right|dt$发散,即积分$J$仅是条件收敛。

综上可知原积分为条件收敛。



图(5) a题4(2)图



图(5) b题4(2)图

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^p}{x^q}dx, p>0;$

解：整理可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^p}{x^q}dx=\int_0^1\frac{\sin x^p}{x^q}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^p}{x^q}dx=I+J;$$

其中积分I的瑕点为$x=0$,积分J为无穷限积分。

对于I,当$q-p\ge 1$时,$\exists\delta\ge 0$,使得$q-p-\delta\ge 1$,由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^p}{x^p}\bullet\frac{x^{q-p-\delta}}{x^{q-p}}=\begin{cases}+\infty & \delta>0\\ 1 & \delta=0\end{cases},$$

而积分$\int_0^1\frac{1}{x^{q-p-\delta}}dx$发散,因此可知此时积分$I$发散。

当$q-p<1$时,$\exists\delta>0$,使得$q-p+\delta<1$,由于

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x^p}{x^p}\bullet\frac{x^{q-p+\delta}}{x^{q-p}}\right|=0,$$

而积分$\int_0^1\frac{1}{x^{q-p+\delta}}dx$收敛,因此可知此时积分$I$绝对收敛。

对于J,有

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^p}{x^q}dx\overset{x^p=t}{=}\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{\frac{q}{p}}}d\left(t^{\frac{1}{p}}\right)=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{pt^{\frac{q+p-1}{p}}}dt;$$

由于积分$\int_1^{+\infty}\sin tdt$有界,因此由狄理克雷判别法可知只要$\frac{q+p-1}{p}>0$,J就收敛;此时$q+p>1$.

若$\frac{q+p-1}{p}>1$,则$\left|\frac{\sin t}{pt^{\frac{q+p-1}{p}}}\right|<\frac{1}{pt^{\frac{q+p-1}{p}}}$,由于积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{pt^{\frac{q+p-1}{p}}}dt$收敛,因此可知此时积分$J$绝对收敛。当$\frac{q+p-1}{p}\in(0,1)$时,由于

$$\left|\frac{\sin t}{pt^{\frac{q+p-1}{p}}}\right|\ge\frac{\sin^2 t}{pt^{\frac{q+p-1}{p}}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{pt^{\frac{q+p-1}{p}}}-\frac{\cos 2t}{pt^{\frac{q+p-1}{p}}}\right),$$

易知此时积分$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{pt^{\frac{q+p-1}{p}}}\right|dt$发散。

因此综上可知当$\begin{cases}p+q>1\\ q-p<1\end{cases}$(图(5)$a$)时积分收敛;当$\begin{cases}q>1\\ q-p<1\end{cases}$(图(5)$b$)时积分绝对收敛。

(3)$\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx, q\geq 0;$

解：整理可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx=\int_0^1\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx=I+J;$$

其中积分I的可能有瑕点为$x=0$,积分J为一个无穷限积分。

对于I,当$-p-1\geq 1$,即$p\leq -2$时,可知$\exists\,\delta\geq 0$使得$-p-1-\delta\geq 1$,由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{-p-1-\delta}x^p\sin x}{1+x^q}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{-\delta}}{1+x^q}\bullet\frac{\sin x}{x}=\begin{cases}+\infty & \delta>0\\ 1 & \delta=0\end{cases},$$

而积分$\int_0^1\frac{dx}{x^{-p-1-\delta}}$发散,那么由比较判别法可知此时积分$I$发散。

当$-p-1<1$,即$p>-2$时,可知$\exists\,\delta>0$使得$-p-1+\delta<1$,由于

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{x^{-p-1+\delta}x^p\sin x}{1+x^q}\right|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{x^{\delta}}{1+x^q}\bullet\frac{\sin x}{x}\right|=0,$$

而积分$\int_0^1\frac{dx}{x^{-p-1+\delta}}$收敛,那么由比较判别法可知此时积分$I$绝对收敛。

对于积分$J=\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$,若$q\leq p$,可知$\forall A>1,\exists A'=[A+1]\pi+\frac{\pi}{2},A_2=[A+1]\pi+2\pi$,使得

$$\left|\int_{[A+1]\pi+\frac{\pi}{2}}^{[A+1]\pi+2\pi}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx\right|\geq\left|\frac{1}{2}\int_{[A+1]\pi+\frac{\pi}{2}}^{[A+1]\pi+2\pi}\sin xdx\right|=\frac{1}{2},$$

那么由柯西收敛原理可知此时积分J发散。

若$q>p$,取$f(x)=\frac{x^p}{1+x^q}$,则

$$f'(x)=\frac{px^{p-1}\left(1+x^q\right)-qx^{q-1}x^p}{\left(1+x^q\right)^2}=\frac{px^{p-1}+(p-q)x^{q+p-1}\left(1+x^q\right)}{\left(1+x^q\right)^2}$$

显然$\exists X>1$,当$x>X$时$f'(x)<0$,又因为$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}=0$,且$\int_1^{+\infty}\sin xdx$有界,因此可由狄理克雷判别法知积分$J$收敛。

当$q\leq p+1$时,有$\frac{x^{p+1}}{1+x^q}\geq\frac{1}{2}$;那么

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\right|dx=\int_1^{+\infty}\left|\frac{x^{p+1}}{1+x^q}\bullet\frac{\sin x}{x}\right|dx\geq\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\geq\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{x}dx$$

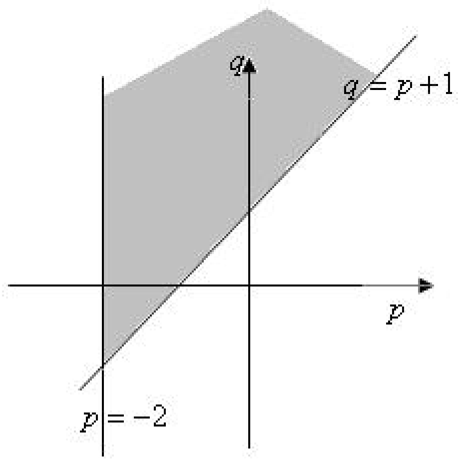
由于积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$发散,积分$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$收敛因此可知此时积分$\int_1^{+\infty}\left|\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\right|dx$发散,即$J$不绝对收敛。

当$q > p+1$时,即$q-p>1$,由于

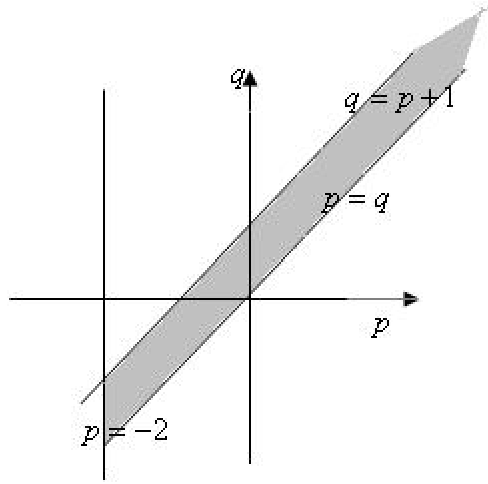
$$\left|\frac{x^p \sin x}{1+x^q}\right| \le \left|\frac{x^p}{1+x^q}\right| < \frac{1}{x^{q-p}}$$

而积分$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{q-p}} dx$收敛,因此此时积分$J$绝对收敛。

综上可知当$\begin{cases} p>-2 \\ q>p+1 \end{cases}$(如图(6)$a$)时积分绝对收敛;当$\begin{cases} p>-2 \\ p<q<p+1 \end{cases}$(如图(6)$b$)时积分条件收敛。



图(6)a题4(3)图



图(6)b题4(3)图

(4)$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n} dx.$

解:当$n \le 0$时的时候原积分显然发散。当$n>0$时整理可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n} dx = \int_0^1 \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n} dx = I+J;$$

其中积分I有瑕点$x=0$,积分J为无穷限积分。

对于J,有

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} dx,$$

由于

$$\int_1^{+\infty} \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x+\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^{+\infty} \sin\left(x+\frac{1}{x}\right) d\left(x+\frac{1}{x}\right) = -\cos\left(x+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{+\infty}$$

有界。而此时函数$f(x)=\dfrac{1}{x^n\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}$有

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x^{n+2}-x^n}\right)'=\frac{2x\left(x^{n+2}-x^n\right)-(2+n)x^{n+3}+nx^{n+1}}{\left(x^{n+2}-x^n\right)^2}=\frac{-nx^{n+3}+\left(n-2\right)x^{n+1}}{\left(x^{n+2}-x^n\right)^2};$$

易知$\exists X$,当$x>X$时,$f'(x)<0$,由于有$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,因此由狄理克雷判别法可知此时积分$J$ 收敛。

对于积分I,有

$$I=\int_0^1\frac{\sin\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{x^n}dx\overset{\frac{1}{x}=t}{=}\int_{+\infty}^1\frac{\sin\left(t+\dfrac{1}{t}\right)}{\dfrac{1}{t^n}}d\left(\frac{1}{t}\right)=\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(t+\dfrac{1}{t}\right)}{t^{2-n}}dt;$$

由我们对积分J的讨论可知当$n<2$时积分I收敛。

综上可知当$0<n<2$时原积分收敛。我们下证此时必有$\int_0^{+\infty}\left|\dfrac{\sin\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{x^n}\right|dx$发散。

由于

$$\left|\frac{\sin\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{x^n}\right|\geq\frac{\sin^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{x^n}=\frac{1-\cos2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{2x^n}.$$

对于积分$I_1=\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{2x^n}dx=\int_0^1\dfrac{1}{2x^n}dx+\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{2x^n}dx$,可知当$n$为何值是都不收敛。对于积分$I_2=\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{2x^n}dx$由狄理克雷判别法可知它始终收敛。那么由比较判别法可知此时积分$\int_0^{+\infty}\left|\dfrac{\sin\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{x^n}\right|dx$发散。

综上所证可知当$0<n<2$时原积分条件收敛;无论n取何值原积分都不可能绝对收敛。

5.计算下列瑕积分的值:

(1)$\int_0^1\left(\ln x\right)^n dx=x\left(\ln x\right)^n\Big|_0^1-\int_0^1xd\left(\ln x\right)^n=-\lim\limits_{x\to0}x\left(\ln x\right)^n-n\int_0^1\left(\ln x\right)^{n-1}dx=-n\int_0^1\left(\ln x\right)^{n-1}dx$

$$=-n(-n+1)\int_0^1\left(\ln x\right)^{n-2}dx=\cdots=(-1)^n n!;$$

(2)$\int_0^1\dfrac{x^n}{\sqrt{1-x}}dx\overset{\sqrt{1-x}=t}{=}\int_1^0\dfrac{(1-t^2)^n}{t}d(1-t^2)=2\int_0^1(1-t^2)^n dt\overset{t=\sin y}{=}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}ydy\overset{p_7\S_4T_2}{=}2I_{2n+1}=\dfrac{2(2n)!!}{(2n+1)!!}$

6.证明积分$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx$收敛,并求其值。

证明：整理可得

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx\overset{\sin x=t}{=}\int_0^1\ln t d\left(\arcsin t\right)=\int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}}dt;$$

由于

$$\lim_{t\to1}\frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}}=\lim_{t\to1}\frac{1}{\frac{-t^2}{\sqrt{1-t^2}}}=\lim_{t\to1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{-t^2}=0,\lim_{t\to0}\frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}}=-\infty,$$

因此只有$t=0$是积分的一个瑕点;由于$\lim\limits_{t\to0}\frac{\sqrt{t}\ln t}{\sqrt{1-t^2}}=0$,而积分$\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}}$收敛,那么由比较判别法可知此积分收敛。

由于

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx\overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=}-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\ln(\cos t)d=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos t)dt;$$

因此可知

$$\begin{aligned}2A&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x\cos x)dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\frac{1}{2}\sin 2x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)dx-\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin x)dx-\frac{\pi\ln 2}{2}\\&=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin x)dx\right)-\frac{\pi\ln 2}{2}\\&\overset{x-\frac{\pi}{2}=t}{=}\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)dt\right)-\frac{\pi\ln 2}{2}\\&=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\cos t\right)dt\right)-\frac{\pi\ln 2}{2}\\&=\frac{1}{2}\bullet 2A-\frac{\pi\ln 2}{2}=A-\frac{\pi\ln 2}{2},\end{aligned}$$

于是可得$A=-\frac{\pi\ln 2}{2}$.

7.利用上体结果证明：

(1).$\int_0^{\pi}\theta\ln(\sin\theta)d\theta=-\frac{\pi^2\ln 2}{2}$.

证明：由于

$$\int_0^{\pi}\theta\ln(\sin\theta)d\theta\overset{t=\pi-\theta}{=}-\int_{\pi}^0(\pi-t)\ln(\sin(\pi-t))dt=\int_0^{\pi}\pi\ln(\sin t)dt-\int_0^{\pi}t\ln(\sin t)dt$$

因此可得$\int_0^{\pi}\theta\ln(\sin\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\pi\ln(\sin t)dt=-\frac{\pi^2\ln 2}{2}$.

(2) $\int_0^{\pi}\frac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}d\theta=2\pi\ln 2.$

证明: $\int_0^{\pi}\frac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}d\theta=\int_0^{\pi}\frac{\theta 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}d\theta=\int_0^{\pi}\frac{\theta\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}d\theta=2\int_0^{\pi}\frac{\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}d\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$$=2\int_0^{\pi}\theta d\ln\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)=2\theta\ln\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}\ln\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\sin t\right)dt=2\pi\ln 2.$$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\ln\left(\sin\theta\right)d\theta=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}-\ln 2\right).$

证明: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\ln\left(\sin\theta\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\ln\left(\sin\theta\right)d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\ln\left(\sin\theta\right)d\theta-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\sin\theta\right)d\left(\sin 2\theta\right)$$

$$=-\frac{\pi}{4}\ln 2-\frac{1}{4}(\sin 2\theta)\ln\left(\sin\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\ln\left(\sin\theta\right)$$

$$=-\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{\sin\theta}d\theta=-\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta$$

$$=-\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=-\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{1}{4}\bullet\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}-\ln 2\right).$$

(4) $\int_0^{1}\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8}\ln 2.$

证明: $\int_0^{1}\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\int_0^{1}\ln(1+x)d\left(\arctan x\right)\overset{x=\tan t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{\sin t+\cos t}{\cos t}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\sin t+\cos t\right)dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\cos t\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\cos t\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}dt+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\sin y\right)dy+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\cos\left(-y+\frac{\pi}{2}\right)\right)dy$$

$$=\frac{\pi}{8}\ln 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\sin y\right)dy-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\sin y\right)dy=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

8.证明不等式：

(1)$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)<\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx<1+\frac{1}{2e}$;

证明：当$x\in\mathbb{R}^+$时有$e^{-x^2}>0$成立,因此

$$\int_0^1 xe^{-x^2}dx<\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx<\int_0^1 1dx+\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}dx;$$

由于

$$\int_0^1 xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}dx^2=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right),$$

$$\int_0^1 1dx+\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}dx=1+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx^2=1+\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_1^{+\infty}=1+\frac{1}{2e};$$

因此可得$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)<\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx<1+\frac{1}{2e}$,得证。

(2)$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}<\frac{\pi}{2}$.

证明：由于

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\bullet\sqrt{1+x^2}}>\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\bullet\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2};$$

因此可得$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}<\frac{\pi}{2}$,得证。

第十二章 函数项级数

12.1 函数序列的一致收敛概念

1.讨论下列函数序列在所示区域的一致收敛性：

（1）$f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$， $x\in(-\infty,+\infty)$；

（2）$f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$；

i ）$x\in(-l,l)$， ii ）$x\in(-\infty,+\infty)$；

（3）$f_n(x)=\frac{nx}{1+nx}$, $x\in(0,1)$；

（4）$f_n(x)=\frac{1}{1+nx}$，

i ） $x \in [a, +\infty)$， $a > 0$， ii ） $x \in (0, +\infty)$；

（5） $f_n(x) = \dfrac{n^2 x^2}{1 + n^3 x^3}$，

i ） $x \in [a, +\infty)$， $a > 0$， ii ） $x \in (0,+\infty)$；

（6） $f_n(x) = \dfrac{nx}{x + n + 1}$， $x \in [0, 1]$；

（7） $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n}$，

i ） $x \in [0, b]$， $b > 0$， ii ） $x \in [0, 1]$， iii） $x \in [a, +\infty)$， $a > 0$；

（8） $f_n(x) = x^n - x^{2n}$， $x \in [0, 1]$；

（9） $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$， $x \in [0, 1]$；

（10） $f_n(x) = \dfrac{x}{n} \ln \dfrac{x}{n}$， $x \in (0, 1)$；

（11） $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \ln\left(1 + e^{-nx}\right)$， $x \in (-\infty, +\infty)$；

（12） $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$，

i ） $x \in [-l, l]$， ii ） $x \in (-\infty, +\infty)$.

解 （1） $\forall x \in (-\infty, +\infty)$，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{x^2} = |x| = f(x) .$$

$\forall \varepsilon > 0$，要使

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right| = \frac{1}{n^2\left(\sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}} + |x|\right)} \le \frac{1}{n^2} n = \frac{1}{n} < \varepsilon ,$$

只须 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$，取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$，则当 $n > N$ 时，对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$，有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$，因此 $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 一致收敛于 $f(x) = |x|$.

（2） $\forall x \in (-\infty, +\infty)$， $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{x}{n} = 0 = f(x)$， i ）$\forall \varepsilon > 0$，由于

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|\sin\frac{x}{n}\right| \le \frac{|x|}{n} < \frac{l}{n},$$

知只要 $\frac{l}{n} < \varepsilon$，故 $\exists N = \left[\frac{l}{\varepsilon}\right] + 1$，当 $n > N$ 时，有 $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$，因此 $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$ 在 $(-l, l)$ 一致收敛于 $f(x) = 0$.

ii ）$\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$，$\forall N, \exists n = N + 1 > 1, x_n = \frac{n}{2}\pi \in (-\infty, +\infty)$，但

$$\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| = \sin\frac{\pi}{2} = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon_0,$$

所以 $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 不一致收敛到 $f(x) = 0$.

（3）$\forall x \in (0, 1)$，

$$f_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{n} + x} \to 1 = f(x)\ (n \to \infty).$$

$\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0, \forall N, \exists n = N + 1 > N$，$x_n = \frac{1}{n} \in (0, 1)$，但

$$\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| = \left|\frac{nx_n}{1 + nx} - 1\right| = \left|\frac{1}{1+1} - 1\right| = \frac{1}{2} = \varepsilon_0,$$

所以 $f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}$ 在 $(0, 1)$ 不一致收敛到 $f(x) = 1$.

（4） $\forall x \in (0, +\infty)$，$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx} \to 0 = f(x)\ (n \to \infty)$.

i ）$\forall \varepsilon > 0$，要使

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \frac{1}{1 + nx} \le \frac{1}{1 + na} < \frac{1}{na} < \varepsilon \quad ,$$

只须 $n > \frac{1}{a\varepsilon}$，取 $N = \left[\frac{1}{a\varepsilon}\right] + 1$，则当 $n > N$ 时，有 $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$，对 $x \in [a, +\infty)$ 一致地成立，故 $f_n(x) = \frac{1}{1 + nx}$ 在 $[a, +\infty)\ (a > 0)$ 一致收敛于 $f(x) = 0$.

ii ）$\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0, \forall N$，$\exists n = N + 1 > N$，$x_n = \frac{1}{n} \in (0, +\infty)$，但

$$\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| = \frac{1}{1 + n\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0,$$

所以 $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛于 $f(x)=0$.

（5） $\forall x\in(0,+\infty)$， $f_n(x)=\dfrac{n^2x^2}{1+n^3x^3}=\dfrac{\frac{x^2}{n}}{\frac{1}{n^3}+x^3}\to 0=f(x)\ (n\to\infty)$.

i ）$\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|=<\frac{n^2x^2}{n^3x^3}=\frac{1}{nx}\le\frac{1}{na}<\varepsilon,$$

只须 $n>\dfrac{1}{a\varepsilon}$，取 $N=\left[\dfrac{1}{a\varepsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，有 $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$，对 $x\in[a,+\infty)$ 一致地成立，故 $f_n(x)=\dfrac{n^2x^2}{1+n^3x^3}$ 在 $[a,+\infty)\ (a>0)$ 一致收敛于 $f(x)=0$.

ii ）$\exists\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}>0,\forall N$， $\exists n=N+1>N$， $x_n=\dfrac{1}{n}\in(0,+\infty)$，而

$$\left|f_n(x_n)-f(x_n)\right|=\frac{n^2\frac{1}{n^2}}{1+n^3\frac{1}{n^3}}=\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

即 $f_n(x)=\dfrac{n^2x^2}{1+n^3x^3}$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛于 $f(x)=0$.

（6） $f_n(x)=\dfrac{nx}{x+n+1}=\dfrac{x}{\frac{1+x}{n}+1}\to x=f(x)$（$n\to\infty$）， $x\in[0,1]$.

$\forall\varepsilon>0$，由于

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|=\left|\frac{nx}{1+n+x}-x\right|=\frac{x+x^2}{1+n+x}<\frac{2}{n},$$

取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]+1$， 则当 $n>N$ 时， 有 $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$ 对 $x\in[0,1]$ 一致地成立， 所以， $f_n(x)=\dfrac{nx}{x+n+1}$ 在 $[0,1]$ 一致收敛于函数 $f(x)=x$.

$i)x\in[0,b],(b<1)$ $\quad ii)x\in[0,1]$ $\quad iii)x\in[a,+\infty),a>1$.

（7） $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}\to\begin{cases}0\,,\,0\le x<1\,,\\ \dfrac{1}{2},\,x=1\,,\\ 1,\ \ x>1\,,\end{cases}=f(x)\ (n\to\infty)$.

i ） $\forall\varepsilon>0$，由

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|=\frac{x^n}{1+x^n}\le x^n\le b^n\,,\,x\in[0\,,b]\,(b<1)\,,$$

取 $N=[\log_b\varepsilon]+1$，则当 $n>N$ 时，有 $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$ 对 $x\in[0\,,b]\,(b<1)$ 一致地成立，故 $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$ 在 $[0\,,b]\,(b<1)$ 一致收敛于 $f(x)=0$.

ii ） $\exists\varepsilon_0=\dfrac{1}{3}>0,\forall N$， $\exists n=N+1>N$， $x_n=\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\in[0\,,1]$，但

$$\left|f_n(x_n)-f(x_n)\right|=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}=\varepsilon_0\,,$$

所以 $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$ 在 $[0\,,1]$ 不一致收敛于 $f(x)=\begin{cases}0,\,0\le x<1\,,\\ \dfrac{1}{2},\,x=1\,.\end{cases}$

iii） $\forall\varepsilon>0$，由

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|=\left|\frac{x^n}{1+x^n}-1\right|\le\frac{1}{1+x^n}<\frac{1}{a^n},\,x\in[a\,,+\infty]\,(a>1)\,,$$

取 $N=\left[-\log_a\varepsilon\right]+1$，则当 $n>N$ 时，$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$，所以 $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$ 在 $[a\,,+\infty]\,(a>1)$ 一致收敛于 $f(x)=0$.

（8） 显然，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(x^n-x^{2n})=0=f(x)$， $x\in[0\,,1]$.

$\exists\varepsilon_0=\dfrac{1}{4}>0,\forall N$， $\exists n=N+1>N$， $x_n=\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\in[0\,,1]$，但

$$\left|f_n(x_n)-f(x_n)\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}\right|=\frac{1}{4}=\varepsilon_0\,,$$

所以， $f_n(x)=x^n-x^{2n}$ 在 $[0\,,1]$ 不一致收敛于 $f(x)=0$.

（9）显然，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(x^n-x^{n+1})=0=f(x)$，$x\in[0,1]$.

$|f_n(x)-f(x)|=x^n-x^{n+1}\equiv g(x)$，由于 $g'(x)=x^{n-1}[n-(n+1)x]$，令 $g'(x)=0$，$\Rightarrow x=\dfrac{n}{n+1}$，且 $0<x<\dfrac{n}{n+1}$ 时，$g'(x)>0$，当 $\dfrac{n}{n+1}<x<1$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $x=\dfrac{n}{n+1}$ 达到 $[0,1]$ 上的最大值，于是 $\forall x\in[0,1]$， 有

$$g(x)\le\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n},$$

$\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 对 $[0,1]$ 上一切 x 一致地成立，故 $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$ 在 $[0,1]$ 一致收敛于 $f(x)=0$.

（10）$\forall x\in(0,1)$，$f_n(x)=\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}\to 0=f(x)\ (n\to\infty)$.

这里使用了lim=0这个条件来对这个函数进行分析

$\forall\varepsilon>0$，当 $0<x<1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}=0$，故 $\exists\delta>0$，使当 $0<\dfrac{x}{n}<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}\right|<\varepsilon$，故取 $N=\left[\dfrac{1}{\delta}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，有 $0<\dfrac{x}{n}<\dfrac{1}{n}<\delta$，从而，$\left|\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}\right|<\varepsilon$ 对 $x\in(0,1)$ 一致地成立，故 $f_n(x)=\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}$ 在 $(0,1)$ 一致收敛于 $f(x)=0$.

（11）当 $x>0$ 时，$f_n(x)=\dfrac{1}{n}\ln(1+e^{-nx})\to 0\ (n\to\infty)$，

当 $x=0$ 时，$f_n(0)=\dfrac{1}{n}\ln 2\to 0\ (n\to\infty)$，

当 $x<0$ 时，由于 $-x=\dfrac{1}{n}\ln e^{-nx}<\dfrac{1}{n}\ln(1+e^{-nx})<\dfrac{1}{n}\ln(e^{-nx}+e^{-nx})=\dfrac{1}{n}\ln 2-x$，而 $\dfrac{1}{n}\ln 2-x\to -x\ (n\to\infty)$，故得 $f_n(x)\to -x\ (n\to\infty)$.

所以 $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\ln(1+e^{-nx})$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 的极限函数为 $f(x)=\begin{cases}0, x\ge 0,\\ -x, x<0.\end{cases}$

且 $\forall\varepsilon>0$，由于 $|f_n(x)-f(x)|<\dfrac{1}{n}\ln 2<\dfrac{1}{n}$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 对 $x\in(-\infty,+\infty)$ 一致地成立．所以 $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\ln(1+e^{-nx})$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛于 $f(x)$.

（12）显然 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty} e^{-(x-n)^2}=0=f(x)$．

ⅰ）$\forall\varepsilon>0$，由于当 $x\in[-l,l]$ 时，$\left|f_n(x)-f(x)\right|=e^{-(x-n)^2}$，

当 $n>l$ 后，由于 $e^{-(x-n)^2}\le e^{-(x-l)^2}$，故当 $n>l$ 时，有 $\left|f_n(x)-f(x)\right|=e^{-(x-l)^2}$，要使 $\left|f_n(x)-f(x)\right|=e^{-(x-l)^2}<\varepsilon$，只须 $n>\sqrt{-\ln\varepsilon}+l$，取 $N=\left[\sqrt{-\ln\varepsilon}+l\right]+1$，则当 $n>N$ 时，有 $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$ 对 $x\in[-l,l]$ 一致地成立，故 $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$ 在 $[-l,l]$ 上一致收敛于 $f(x)=0$．

ⅱ）$\exists\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}>0,\forall N$，取 $n=N+1>N$，$x_n=n$，但 $\left|f_n(x_n)-f(x_n)\right|=1>\dfrac{1}{2}=\varepsilon_0$，所以，$f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不一致收敛于 $f(x)=0$．

2．设 $f_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上有界，并且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，求证：$f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致有界．

证明　由于 $f_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上有界，故 $\forall n\in N,\exists M_n>0$，使得 $\forall x\in[a,b]$，有 $\left|f_n(x)\right|\le M_n$，又 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，设极限函数为 $f(x)$，则对 $\varepsilon=1>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $\left|f_n(x)-f(x)\right|<1$，显然 $\left|f_{N+1}(x)-f(x)\right|<1$，由此推出

$$\left|f(x)\right|\le\left|f_{N+1}(x)\right|+1\le M_{N+1}+1,$$

从而 $\left|f_n(x)\right|\le\left|f(x)\right|+1\le M_{N+1}+2$ 对一切 $n>N$ 成立．

取 $M=\max\{M_1,M_2,\cdots,M_N,M_{N+1}+2\}>0$，则 $\forall x\in[a,b]$，$\forall n$，有

$$\left|f_n(x)\right|\le M,$$

即 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致有界．

3．设 $f(x)$ 定义于 (a,b)，令

$$f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

求证：$f_n(x)$ 在 (a,b) 一致收敛于 $f(x)$．

证明　由于 $nf(x)-1<[nf(x)]\le nf(x)$，所以，

$$f(x)-\frac{1}{n}<f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n}\le f(x)$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，$x\in(a,b)$．$\forall\varepsilon>0$，由于$-\frac{1}{n}<f_n(x)-f(x)\le 0$，故

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{1}{n},$$

$\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，$\forall n>N$，有$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$对$(a,b)$中一切$x$成立，故$f_n(x)$在$(a,b)$一致收敛于$f(x)$.

4. 设$f(x)$在(a,b)内有连续的导数$f'(x)$，且

$$f_n(x)=n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)],$$

求证：在闭区间$[\alpha,\beta]$ $(a<\alpha<\beta<b)$上，$f_n(x)$一致收敛于$f'(x)$.

证明 $f_n(x)=n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)]=\dfrac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}\to f'(x)\ (n\to\infty)$.

$\forall\varepsilon>0$，由于$f'(x)$在(a,b)连续，故$f'(x)$在$[\alpha,\beta]$ $(a<\alpha<\beta<b)$连续，因而一致连续，故$\exists\delta>0$，$\forall x',x''\in[\alpha,\beta]$，当 $\left|x'-x''\right|<\delta$时，$\left|f'(x')-f'(x'')\right|<\varepsilon$．而

$$\left|f_n(x)-f'(x)\right|=\left|n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)]-f'(x)\right|=\left|f'(x+\frac{1}{n}\theta)-f'(x)\right|,\quad 0<\theta<1,$$

故只要$\frac{\theta}{n}<\frac{1}{n}<\delta$，即$n>\frac{1}{\delta}$，就有$\left|f_n(x)-f'(x)\right|<\varepsilon$，取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当$n>N$时，就有$\left|f_n(x)-f'(x)\right|<\varepsilon$对$x\in[\alpha,\beta]\subset(a,b)$一致地成立，故$f_n(x)$一致收敛于$f'(x)$.

5. 设$f_1(x)$在$[a,b]$上Riemann可积，定义函数列

$$f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(t)dt\quad(n=1,2,\cdots),$$

求证：$f_n(x)$在$[a,b]$一致收敛于0.

证明 由于$f_1(x)$在$[a,b]$上Riemann可积，故必有界，即$\exists M>0,\forall x\in[a,b]$，有$\left|f_1(x)\right|\le M$．所以，

$$|f_2(x)| = \left|\int_a^x f_1(t)dt\right| \le \int_a^x |f_1(t)|dt \le M(x-a),$$

$$|f_3(x)| = \left|\int_a^x f_2(t)dt\right| \le \int_a^x |f_2(t)|dt \le \int_a^x M(t-a)dt = \frac{1}{2}M(x-a)^2,$$

如此，用数学归纳法，易证

$$|f_{n+1}(x)| \le \frac{1}{n!}M(x-a)^n \text{ , } n = 1, 2, \cdots,$$

故 $\forall x \in [a, b]$，有

$$|f_{n+1}(x)| \le \frac{1}{n!}M(x-a)^n \le \frac{1}{n!}M(b-a)^n \to 0 \ (n \to \infty),$$

所以，$f_{n+1}(x) \to 0 \ (n \to \infty)$．即 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$，$x \in [a, b]$．

同样，$\forall n \in N$，由 $|f_{n+1}(x) - 0| \le \dfrac{1}{n!}M(b-a)^n \to 0 \ (n \to \infty)$，故 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，有 $|f_{n+1}(x) - 0| < \varepsilon$，所以 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 一致收敛于 0.

6．问参数 α 取什么值时，

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

在闭区间 $[0, 1]$ 收敛？在闭区间 $[0, 1]$ 一致收敛？使 $\lim\limits_{n\to} \int_0^1 f_n(x)dx$ 可在积分号下取极限？

解 $\forall \alpha$，当 $x = 0$ 时，$f_n(x) = 0, n = 1, 2, \cdots$，当 $0 < x \le 1$ 时，

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx} = \frac{n^\alpha x}{e^{nx}} \to 0 \ (n \to \infty),$$

故不论参数 α 取何值，$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ 在闭区间 $[0, 1]$ 收敛于函数 $f(x) = 0$．因为

$$f_n'(x) = n^\alpha [e^{-nx} + e^{-nx}(-n) = n^\alpha e^{-nx}(1 - nx),$$

所以 $f_n(x)$ 在 $x = \dfrac{1}{n}$ 取最大值 $f_n(\dfrac{1}{n}) = n^\alpha \dfrac{1}{n} e^{-n\frac{1}{n}} = n^{\alpha-1}e^{-1}$，即

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) \le n^{\alpha-1}e^{-1}.$$

故当 $\alpha < 1$ 时，因为 $n^{\alpha-1}e^{-1} \to 0 \ (n \to \infty)$，所以 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 一致收敛于 $f(x) = 0$.

当 $\alpha \ge 1$ 时，$\exists \varepsilon_0 = e^{-1} > 0$，$\forall N$，$\exists n = N + 1 > n$，$x_n = \dfrac{1}{n} \in [0, 1]$，但

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = n^\alpha \frac{1}{n} e^{-n\frac{1}{n}} = n^{\alpha-1}e^{-1} \ge e^{-1} = \varepsilon_0,$$

故 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 不一致收敛.

由于

$$\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 n^{\alpha}xe^{-nx}dx=-n^{\alpha-1}\int_0^1 xd(e^{-nx})=-n^{\alpha-1}[e^{-n}-\int_0^1 e^{-nx}dx]$$

$$=-n^{\alpha-1}[e^{-n}+\frac{1}{n}e^{-n}-\frac{1}{n}]=-n^{\alpha-2}e^{-n}(n+1)+n^{\alpha-2},$$

所以，当 $\alpha<2$ 时，$\lim\limits_{n\to}\int_0^1 f_n(x)dx=0$，$\alpha=2$ 时，$\lim\limits_{n\to}\int_0^1 f_n(x)dx=1$，$\alpha>2$ 时，$\lim\limits_{n\to}\int_0^1 f_n(x)dx=+\infty$，而$\int_0^1 f(x)dx=0$，因此当$\alpha<2$ 时，$\lim\limits_{n\to}\int_0^1 f_n(x)dx$可在积分号下取极限.

7．证明序列$f_n(x)=nxe^{-nx^2}$ $(n=1,2,\cdots)$在闭区间$[0,1]$上收敛，但

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty}f_n(x)dx\neq\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx.$$

证明 当$0<x\le 1$时，$f_n(x)=nxe^{-nx^2}\to 0\ (n\to\infty)$，当$x=0$时，$f_n(x)=0$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$，$x\in[0,1]$．故$\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)dx=\int_0^1 0dx=0$，而

$$\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-nx^2}d(nx^2)=\frac{1}{2}(1-e^{-n}),$$

所以，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-e^{-n})=\frac{1}{2}\neq 0=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx.$$

8. 设 $f_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$在$(-\infty,+\infty)$一致连续，且$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$一致收敛于$f(x)$．求证：$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

证明 由于$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$一致收敛于$f(x)$，故$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3},\ \forall x\in(-\infty,+\infty)\text{成立}.$$

又由$f_{N+1}(x)$在$(-\infty,+\infty)$一致连续，故对上述$\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，只要$|x_1-x_2|<\delta$，就有

$$|f_{N+1}(x_1)-f_{N+1}(x_2)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

从而$\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，只要$|x_1-x_2|<\delta$，就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)-f_{N+1}(x_1)+f_{N+1}(x_1)-f_{N+1}(x_2)+f_{N+1}(x_2)-f(x_2)|$$

$$\le|f(x_1)-f_{N+1}(x_1)|+|f_{N+1}(x_1)-f_{N+1}(x_2)|+|f_{N+1}(x_2)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

9．设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数序列，且 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$；又 $x_n\in[a,b]\,(n=1,2,\cdots)$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x_0)$.

证明 由已知 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，因而 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in[a,b]$ 且 $|x-x_0|<\delta$ 时，就有

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$x_n\in[a,b]$，故对上述 $\delta>0$，$\exists N_1$，当 $n>N_1$ 时，有 $|x_n-x_0|<\delta$，因而当 $n>N_1$ 时，

$$\left|f(x_n)-f(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

而 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，故对上述 $\varepsilon>0$，$\exists N_2$，当 $n>N_2$ 时，

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对 $x\in[a,b]$ 一致地成立.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，同时成立

$$\left|f_n(x_n)-f(x_n)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\ ,\qquad \left|f(x_n)-f(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

所以，当 $n>N$ 时，

$$\begin{aligned}\left|f_n(x_n)-f(x_0)\right|&=\left|f_n(x_n)-f(x_n)+f(x_n)-f(x_0)\right|\\&\le\left|f_n(x_n)-f(x_n)\right|+\left|f(x_n)-f(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x_0)$.

10. 设 $\{f_n(x)\}$ 是在 (a,b) 内一致收敛于 $f(x)$，$x_0\in(a,b)$ 且

$$\lim_{x\to x_0}f_n(x)=a_n\ (n=1,2,\cdots).$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在且相等，即

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x)=\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}f_n(x).$$

证明 由于 $\{f_n(x)\}$ 是在 (a,b) 内一致收敛于 $f(x)$，故由函数列 Cauchy 收敛准则，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n,m>N$ 时，有

$$\left|f_n(x)-f_m(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对 $x\in(a,b)$ 一致地成立．注意到 $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)=a_n\ (n=1,2,\cdots)$， 在上式中令 $x\to x_0$ 左右取极限，就有 $\left|a_n-a_m\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ ，由数列的 Cauchy 收敛准则，知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，设极限值为 a，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1$，当 $n>N_1$ 时，有 $\left|a_n-a\right|<\frac{\varepsilon}{3}$.

又 $\{f_n(x)\}$ 是在 (a,b) 内一致收敛于 $f(x)$，故对上述 $\varepsilon>0$，$\exists N_2$，当 $n>N_2$ 时，对 $x\in(a,b)$ 一致地有 $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则以下两式同时成立

$$\left|f_{N+1}(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3},\qquad \left|a_{N+1}-a\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

又 $\lim\limits_{x\to x_0} f_{N+1}(x)=a_{N+1}$，故 $\exists\delta>0$，当 $x\in(a,b)$ 且 $\left|x-x_0\right|<\delta$ 时，有

$$\left|f_{N+1}(x)-a_{N+1}\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

故当 $x\in(a,b)$ 且 $\left|x-x_0\right|<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|f(x)-a\right|&=\left|f(x)-f_{N+1}(x)+f_{N+1}(x)-a_{N+1}+a_{N+1}-a\right|\\&\le\left|f_{N+1}(x)-f(x)\right|+\left|f_{N+1}(x)-a_{N+1}\right|+\left|a_{N+1}-a\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$， 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

11. 设 $f_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ Riemann 可积，且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于 $f(x)$，证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ Riemann 可积.

证明 由于 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于 $f(x)$，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

对 $x\in[a,b]$ 一致地成立，所以，

$$\left|f_{N+1}(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

对 $x\in[a,b]$ 一致地成立，因而

$$f_{N+1}(x)-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}<f(x)<f_{N+1}(x)+\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

对 $x\in[a,b]$ 一致地成立.

由于 $f_{N+1}(x)$ 在 $[a,b]$ Riemann 可积，故对上述 $\varepsilon>0,\exists\delta>0$，对一切分划 Δ，当分划的小区间的最大长度 $\lambda<\delta$ 时，就有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(N+1)}\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2},$$

其中 $\omega_i^{(N+1)}=M_i^{(N+1)}-m_i^{(N+1)}=\sup\limits_{x_{i-1}\le x\le x_i}f_{N+1}(x)-\inf\limits_{x_{i-1}\le x\le x_i}f_{N+1}(x)\ (i=1,2,\cdots,n)$.

若设 $M_i=\sup\limits_{x_{i-1}\le x\le x_i}f(x)$，而 $m_i=\inf\limits_{x_{i-1}\le x\le x_i}f(x)$，$\omega_i=M_i-m_i$，则

$$M_i\le M_i^{(N+1)}+\frac{\varepsilon}{4(b-a)}\quad,\quad m_i\ge m_i^{(N+1)}-\frac{\varepsilon}{4(b-a)},$$

所以，

$$\omega_i\le\omega_i^{(N+1)}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)},\ (i=1,2,\cdots,n).$$

故当 $\lambda<\delta$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_1\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}(\omega_i^{(N+1)}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)})\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(N+1)}\Delta x_i+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\varepsilon,$$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ Riemann 可积.

§12.2 函数项级数的一致收敛性及其判别法

1．求出下列函数项级数的收敛区域（绝对的和条件的）：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$；

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1+a^{2n}x^n}$.

解（1）由于$|x|<1$时，

$$\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|=\frac{|x|^n}{1+x^{2n}}<|x|^n,$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}|x|^n$ 当$|x|<1$时收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$在$|x|<1$时绝对收敛；

当$|x|>1$时，

$$\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|=\frac{|x|^n}{1+x^{2n}}<\frac{1}{|x|^n}=\left(\frac{1}{|x|}\right)^n,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|x|}\right)^n$ 当$|x|>1$时收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$在$|x|>1$时绝对收敛；

$x=\pm1$ 时，级数的一般项分别为$\frac{1}{2}$和$\frac{(-1)^n}{2}$，故发散．所以，函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ 的绝对收敛区域为$(-\infty,+\infty)\setminus\{-1,1\}$.

（2）解不等式$\left|\frac{x}{2x+1}\right|\geq1$，得$-1\leq x<-\frac{1}{2}$或$-\frac{1}{2}<x\leq-\frac{1}{3}$，因而当$-1\leq x<-\frac{1}{2}$或$-\frac{1}{2}<x\leq-\frac{1}{3}$时，级数的一般项$\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$当$n\to\infty$时不趋向于零，故这时级数发散；而当$x<-1$或$x>-\frac{1}{3}$时，由于$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$绝对收敛，$\frac{n}{n+1}$单调上升且有界，由 Abel 判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left|\frac{x}{2x+1}\right|^n$收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$绝对收敛．所以绝对收敛域为$(-\infty,-1)\cup(-\frac{1}{3},+\infty)$.

（3）由$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|>1$，得$x<-1$或$-1<x<0$，因而当$x<-1$或$-1<x<0$时，$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\to+\infty$，且$\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\to\infty\ (n\to\infty)$，故级数发散；

当 $x=0$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ 条件收敛；

当 $x>0$ 时，由于 $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$，因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 绝对收敛，而 $\frac{1}{2n-1}$ 单调递减有界，由 Abel 判别法，这时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 绝对收敛；

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 绝对收敛域 $(0,+\infty)$，条件收敛域 $x=\{0\}$，收敛域 $[0,+\infty)$.

（4）当 $|a|>1$ 时，由于 $\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{1+a^{2n}x^2}<\frac{1}{\sqrt{n}x^2}\left(\frac{1}{a^2}\right)^n$，由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}x^2}\left(\frac{1}{a^2}\right)^n$ 对一切 $x\neq 0$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1+a^{2n}x^n}$ 对一切 $x\neq 0$ 收敛，而当 $x=0$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

当 $|a|\le 1$ 时，由于 $\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{1+a^{2n}x^2}\ge\frac{1}{\sqrt{n}(1+x^2)}$ ，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(1+x^2)}$ 对一切 x 发散，因而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1+a^{2n}x^n}$ 对一切 x 发散.

综上，当 $|a|>1$ 时，收敛域也是绝对收敛域为 $R\setminus\{0\}$，当 $|a|\le 1$ 时，收敛域为 ϕ.

2．按定义讨论下列函数项级数的一致收敛性：

（1） $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$， $x\in[0,1]$；

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$， $x\in(-\infty,+\infty)$.

解（1） $s_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)x^k=1-x^n\to s(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$ （$n\to\infty$）.

$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$， $\forall N$， $\exists n=N+1>N$， $x_n=\sqrt[n]{\frac{3}{4}}\in[0,1]$，但

$$|s_n(x_n)-s(x_n)|=\left|1-\left(\sqrt[n]{\frac{3}{4}}\right)^n-1\right|=\frac{3}{4}>\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 不一致收敛.

（2） $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^2}{(1+x^2)^k}=-x^2\sum_{n=1}^{n}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)^k=-x^2\frac{-\frac{1}{1+x^2}\left[1-\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}$

$$=\frac{x^2}{2+x^2}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{(1+x^2)^n}\right]\to s(x)=\frac{x^2}{2+x^2}\ (n\to\infty).$$

由于$\left|s_n(x)-s(x)\right|=\frac{x^2}{2+x^2}\frac{1}{(1+x^2)^n}\equiv f(x)$，则

$$f'(x)=\frac{-2x(x^2+n-1+\sqrt{n^2+1})(x^2+n-1-\sqrt{n^2+1})}{(2+x^2)^2(1+x^2)^{n+1}},$$

求得 $f(x)$ 的稳定点 $x=0$， $x=\pm\sqrt{\sqrt{n^2+1}-n+1}$ ，可判定 $x=0$ 为极小值点 $f(0)=0$ ，又 $f(x)\ge 0$，故 $f(0)=0$ 为最小值，而 $x=\pm\sqrt{\sqrt{n^2+1}-n+1}$ 为极大值点，也是最大值点，最大值为

$$f(\pm\sqrt{\sqrt{n^2+1}-n+1})=\frac{\sqrt{n^2+1}-n+1}{\sqrt{n^2+1}-n+3}\cdot\frac{1}{(\sqrt{n^2+1}-n+2)^2}$$

$$=\frac{2n}{3n-4}\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}+n-3}{\sqrt{n^2+1}+n-1}\cdot\frac{\left(\sqrt{n^2+1}+n-2\right)^n}{(4n-3)^n}<\left(\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)^n \text{（当} n>1 \text{时）}$$

$$\to 0\ (n\to\infty),$$

所以，

$$\left|s_n(x)-s(x)\right|=f(x)\le f(\pm\sqrt{\sqrt{n^2+1}-n+1})<\left(\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)^n\ (n>1),$$

故$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>1$，$\forall n>N$ 时，$\left|s_n(x)-s(x)\right|<\varepsilon$ 对 $x\in(-\infty,+\infty)$ 一致地成立，因而$\{s_n(x)\}$在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛于 $s(x)$ ，因此函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛于和函数 $s(x)=\frac{x^2}{2+x^2}$.

3．讨论下列函数项级数的一致收敛性：

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$， $x\in(-\infty,+\infty)$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$， $x\in(-\infty,+\infty)$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-e^{-nx})}{n^2+x^2}$， $x\in[0,+\infty)$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{x+2^n}$， $x\in(-2,+\infty)$；

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$， $x\in(-\infty,+\infty)$；

（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$， $\frac{1}{2}\le|x|\le 2$；

（7）$\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$，$x\in[0,+\infty)$；

（8）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\ln^n x}{n!}$， $x\in[0,1]$；

（9）$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{x^2+\frac{1}{(n-1)^2}}\right)$， $x\in(-\infty,+\infty)$；

（10）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$， $|x|\ge r>1$；

（11）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$， $x\in[a,+\infty), a>1$.

解（1）因为$\left|\frac{\sin nx}{n^4+x^4}\right|\le\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$对一切$x\in(-\infty,+\infty)$成立，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$收敛，由M判别法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$在$(-\infty,+\infty)$一致收敛.

（2）由于$\frac{|x|}{1+n^4x^2}\le\frac{|x|}{2\sqrt{n^4x^2}}=\frac{1}{2n^2}$对一切$x\in(-\infty,+\infty)$成立，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$在$(-\infty,+\infty)$一致收敛.

（3）因为$\left|\frac{(-1)^n(1-e^{-nx})}{n^2+x^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$对一切$x\in[0,+\infty)$成立，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-e^{-nx})}{n^2+x^2}$在$[0,+\infty)$一

致收敛.

（4）由于 $\left|\dfrac{\sin nx}{x+2^n}\right|<\dfrac{1}{2^n-2}\le\dfrac{1}{2^n-2^{n-1}}=\dfrac{1}{2^{n-1}}\,(n\ge 2)$ 对一切 $x\in(-2,+\infty)$ 成立，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}$ 收敛，因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{x+2^n}$ 在 $(-2,+\infty)$ 一致收敛.

（5）由 $\left|\dfrac{nx}{1+n^5x^2}\right|\le\dfrac{n|x|}{2n^{\frac{5}{2}}|x|}=\dfrac{1}{2n^{\frac{5}{2}}}$ 对 $x\in(-\infty,+\infty)$ 一致地成立，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx}{1+n^5x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致的收敛.

（6）由 $\left|\dfrac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})\right|\le\dfrac{n^2}{\sqrt{n!}}(|x|^n+|x|^{-n})\le\dfrac{n^2\,2^{n+1}}{\sqrt{n!}}$ 对于 $\dfrac{1}{2}\le|x|\le 2$ 一致地成立，且由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2\,2^{(n+1)+1}}{\sqrt{(n+1)!}}\Big/\dfrac{n^2\,2^{n+1}}{\sqrt{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)^2}{n^2\sqrt{n+1}}=0$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2\,2^{n+1}}{\sqrt{n!}}$ 收敛，因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$ 在 $\dfrac{1}{2}\le|x|\le 2$ 一致收敛.

（7）当 $x>0$ 时，$e^{nx}>1+nx+\dfrac{1}{2}n^2x^2>\dfrac{1}{2}n^2x^2$，所以 $e^{-nx}<\dfrac{2}{n^2x^2}$，故 $x>0$ 时，$x^2e^{-nx}<\dfrac{2}{n^2}$，该式对 $x=0$ 显然也成立，故由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^2}$ 收敛，用 M 判别法，知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛.

（8）设 $f(x)=-x\ln x$，则 $f'(x)=-\ln x-1$，求得稳定点 $x=\dfrac{1}{e}$，且在 $x=\dfrac{1}{e}$ 取极大值 $\dfrac{1}{e}$. 又 $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$，$f(1)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x\in[0,1]$ 上最大值为 $\dfrac{1}{e}$（补充定义 $f(0)=0$. 因而 $\forall x\in[0,1]$，$f(x)\le\dfrac{1}{e}$.

所以 $\dfrac{|x^n\ln^n x|}{n!}=\dfrac{(-x\ln x)^n}{n!}\le\dfrac{1}{e^n n!}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{e^n n!}$ 由 D′ Alembert 判别法知其收敛，故由 M 判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n\ln^n x}{n!}$ 在 $[0,1]$ 一致收敛.

（9）因为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{x^2+\dfrac{1}{(n-1)^2}}\right)$

$$\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{x^2+\frac{1}{(n-1)^2}}\right|=\frac{\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{x^2+\frac{1}{(n-1)^2}}}\le\frac{(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}$$

$$=\frac{1}{n(n-1)}<\frac{1}{(n-1)^2},\quad \forall x\in(-\infty,+\infty),$$

而 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2}$ 收敛，故原级数在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛.

（10） $\left|\frac{n}{x^n}\right|=\frac{n}{|x|^n}\le\frac{n}{r^n}$，而 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{r^{n+1}}\Big/\frac{n}{r^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{rn}=\frac{1}{r}<1$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{r^n}$ 收敛，因而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$ 在 $|x|\ge r>1$ 一致收敛.

（11）由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+nx)}{n}=\lim_{n\to\infty}[\ln(1+(n+1)x)-\ln(1+nx)]=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{x}{1+nx}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x}+n}\right)=0,$$

对 $x\in[a,+\infty)$ $(a>1)$ 一致地成立，故 $\exists N$，当 $n>N$ 时，$\frac{\ln(1+nx)}{n}\le 1$，从而当 $n>N$ 时，

$$\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}\le\frac{1}{x^n}\le\frac{1}{a^n},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ 收敛，因而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ 在 $[a,+\infty)$ $(a>1)$ 一致收敛.

4．讨论下列函数项级数的一致收敛性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}$，$x\in[0,2\pi]$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$，$x\in(-1,+\infty)$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$，$x\in(0,+\infty)$；

（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$，$|x|\le a$；

（7）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$，$x\in[-1,0]$；

（8）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，$x\in[-1,1]$.

解（1）由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2n\pi}{3}$的部分和序列

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{3}\right\}=\left\{\frac{\sin\pi-\sin\frac{(2n+1)\pi}{3}}{2\sin\frac{\pi}{3}}\right\}$$

有界$\frac{2}{\sqrt{3}}$，因而在$(-\infty,+\infty)$一致有界，对每一固定的$x\in(-\infty,+\infty)$，数列$\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}\right\}$是单调下降的，且当$n\to\infty$时，函数序列$\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}\right\}$一致趋向于 0，因而有 Dirichlet 判别法，知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$在$(-\infty,+\infty)$一致收敛.

（2）由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin x\sin nx$的部分和序列

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx\right\}=\left\{\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi}{2}\left(2\sin\frac{x}{2}\sin kx\right)\right\}=\left\{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2n+1)}{2}x\right)\right\}$$

有界 2，因而在$[0,2\pi]$一致有界，对每个固定的$x\in[0,2\pi]$，数列$\left\{\frac{1}{\sqrt{n+x}}\right\}$单调递减且当$n\to\infty$时，函数序列$\left\{\frac{1}{\sqrt{n+x}}\right\}$一致趋向于 0，由 Dirichlet 判别法，知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}$在$[0,2\pi]$一致收敛.

（3）级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$的部分和序列$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$有界 1，因而在$(-1,+\infty)$一致有界，而序列$\left\{\frac{1}{x+n}\right\}$对每个$x\in(-1,+\infty)$单调递减且一致趋向于 0，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$在$(-1,+\infty)$一致收敛.

（4）取$b_n(x)=(-1)^n$，$a_n(x)=\frac{1}{n+\sin x}$，则显然$\left|\sum_{k=2}^{n+1}b_x(x)\right|=\left|\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^k\right|\le 1$，而$a_n(x)=\frac{1}{n+\sin x}$对每个$x\in(-\infty,+\infty)$单调递减，且对所有$x\in(-\infty,+\infty)$，有$\left|\frac{1}{n+\sin x}\right|\le\frac{1}{n-1}\to 0$，因此$a_n(x)=\frac{1}{n+\sin x}$在$(-\infty,+\infty)$一致趋向于 0，据 Dirichlet 判别法，知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$在$(-\infty,+\infty)$一致收敛.

（5）$\left|2^n\sin\frac{1}{3^n x}\right|\le 2^n\frac{1}{3^n x}=\frac{1}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^n$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^n$收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$在$x\in(0,+\infty)$绝对收敛，从而收敛．但由于$\exists\varepsilon_0=1>0$，$\forall N$，$\exists n=N+1>N$，$x_n=\frac{2}{3^n\pi}\in(0,+\infty)$，而

$$\left|2^n\sin\frac{1}{3^n x_n}\right|=\left|2^n\sin\frac{1}{3^n\frac{2}{3^n\pi}}\right|=\left|2^n\sin\frac{\pi}{2}\right|=2^n>1,$$

因而级数的一般项$2^n\sin\frac{1}{3^n x}$在$x\in(0,+\infty)$不一致趋于 0，因而$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$在$(0,+\infty)$不一致收敛.

（6）取$b_n(x)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$，$a_n(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$．则显然

$$\left|\sum_{k=1}^{n}b_k(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\right|\le 2\quad(\forall n),$$

$a_n(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$对每一个$x:|x|\le a$单调递减，且

$$|a_n(x)|=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}<\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\to 0\ (n\to\infty),$$

因此数列 $\{a_n(x)\}=\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}\right\}$ 在 $|x|\le a$ 一致趋于 0，因此，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$ 在 $|x|\le a$ 一致收敛.

（7）取 $a_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}$，$b_n(x)=x^n$，则 $\forall n$，有 $\left|\sum_{k=1}^{n}b_k(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}x^k\right|=\left|\frac{x(1-x^n)}{1-x}\right|\le 2$，而 $a_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}$ 单调下降且趋于 0，因此在 $[-1,0]$ 一致趋于零，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ 在 $[-1,0]$ 一致收敛.

（8）取 $b_n(x)=(-1)^n x^{2n+1}$，$a_n(x)=\frac{1}{2n+1}$，则 $\{a_n(x)\}$ 单调下降且在 $[-1,1]$ 一致趋于零，显然，$\forall n$ 有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}b_k(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k x^{2k+1}\right|=\frac{\left|x^3(1-(-x^2)^n)\right|}{1+x^2}\le 2,$$

由 Dirichlet 判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 在 $[-1,1]$ 一致收敛.

5．证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+x^2}$ 关于 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为一致收敛，但对任何 x 并非绝对收敛；而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 虽在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对收敛，但并不一致收敛.

证明 取 $b_n(x)=(-1)^{n-1}$，$a_n(x)=\frac{1}{n+x^2}$，则 $\forall n$，$\left|\sum_{k=1}^{n}b_k(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\right|\le 1$，而 $a_n(x)=\frac{1}{n+x^2}$ 对每个 x 单调递减，且由于 $|a_n(x)|\le\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$，故 $\{a_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致趋于 0，由 Dirichlet 判断法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+x^2}$ 关于 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛．但 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$\exists N$，当 $n\ge N$ 时，有 $n\ge x^2$，所以，当 $n\ge N$ 时，有

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n+x^2}\right|=\frac{1}{n+x^2}\ge\frac{1}{2n},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n+x^2}\right|$ 发散，即 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+x^2}$ 对任何 x 并非绝对收敛.

而对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$，若 $x=0$，则显然收敛；若 $x\ne 0$，则由于，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\Bigg/\frac{x^2}{(1+x^2)^n}=\frac{1}{1+x^2}<1,$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$对一切$x\in(-\infty,+\infty)$绝对收敛．而由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}=\frac{x^2}{1+x^2}\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1=s(x),$$

所以，

$$|s_n(x)-s(x)|=\left|\left(1-\frac{1}{(1+x^2)^n}\right)-1\right|=\frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e<3$，故$\exists N_1$，当$n>N_1$时，有$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$．$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{3}>0$，$\forall N$，$\exists n=\max\{N+1,N_1\}>N$，$x_n=\sqrt{\frac{1}{n}}\in(-\infty,+\infty)$，但

$$|s_n(x_n)-s(x_n)|=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>\frac{1}{3}=\varepsilon_0,$$

因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$在$(-\infty,+\infty)$不一致收敛．

6．设每一项$\varphi_n(x)$都是$[a,b]$上的单调函数，如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$在$[a,b]$的端点为绝对收敛，那么这级数在$[a,b]$上一致收敛．

证明 由于$\varphi_n(x)$都是$[a,b]$上的单调函数，不妨设为单调增函数，则$\forall x\in[a,b]$，有$\varphi_n(a)\le\varphi_n(x)\le\varphi_n(b)$，因此$\forall x\in[a,b]$，有$|\varphi_n(x)|\le\max\{|\varphi_n(a)|,|\varphi_n(b)|\}$，由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$在$[a,b]$的端点为绝对收敛，因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\max\{|\varphi_n(a)|,|\varphi_n(b)|\}$收敛，由M判别法，知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$在$[a,b]$一致收敛．

7．若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的一般项$|u_n(x)|\le c_n(x)$，$x\in X$，并且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(x)$在$X$上一致收敛，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$

在 X 上也一致收敛且绝对收敛.

证明 由于$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)$在 X 上一致收敛，由 $Cauchy$ 原理，$\forall \varepsilon > 0$，存在与 x 无关的 N，只要 $n > N$，$\forall p$，$\forall x \in [a, b]$，都有$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k(x)\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k(x) < \varepsilon$，因此当 $n > N$ 时，$\forall p$，$\forall x \in [a, b]$，都有$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k(x) < \varepsilon$，同样由 $Cauchy$ 原理，知级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在 X 上一致收敛；又由于 $\forall x \in X$，$|u_n(x)| \le c_n(x)$，而$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)$收敛，因而$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$绝对收敛.

§12.3 和函数的分析性质

1．研究下列级数所表示的函数在指定区间上的连续性：

（1）$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$，$\quad -1 < x < 1$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$，$\quad -1 \le x < 1$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$，$\quad |x| \le 1$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$，$\quad 0 < x < +\infty$；

（5）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$，$\quad |x| > 0$；

（6）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$，$\quad |x| < \infty$；

（7）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^4x^2}$，$\quad |x| > 0$；

（8）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$，$\quad |x| < \infty$.

解（1）$\forall x_0 \in (-1, 1)$，有$|x_0| < 1$，取$|x_0| < r < 1$，则级数在$|x| \le r$一致收敛于和函数 $s(x)$，而每一项函数 x^n 在$|x| \le r$连续，由和函数的连续性知 $s(x)$ 在$|x| \le r$连续，因而在 x_0 连续，由

$x_0 \in (-1, 1)$ 的任意性知级数所表示的函数在 $(-1, 1)$ 连续.

（2） $\forall x_0 \in [-1, 1)$ ，取 $r > 0$，使 $x_0 < r < 1$ ，则在 $[-1, 1)$，取 $b_n(x) = x^n$ ， $a_n(x) = \frac{1}{n}$，则 $\forall n$，有 $\left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} x^k\right| \le \frac{2}{1-r}$ ，而 $\{a_n(x)\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ 单调递减趋于 0，因而在 $[-1, r)$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 一致收敛于其和函数 $s(x)$，又级数的每一项函数 $\frac{x^n}{n}$ 在 $[-1, r)$ 连续，因而 $s(x)$ 在 $[-1, r)$ 连续，特别地 $s(x)$ 在 $x_0 \in [-1, r)$ 连续，由 $x_0 \in [-1, 1)$ 的任意性知级数所表示的函数在 $[-1, 1)$ 上连续.

（3）由于 $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{|x^n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$ ， $\forall x \in [-1, 1]$ 成立， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，故由 M 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 在区间 $[-1, 1]$ 一致收敛，而级数的每一项 $\frac{x^2}{n^2}$ 在 $[-1, 1]$ 连续，因而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 所表示的函数在 $|x| \le 1$ 连续.

（4） $\forall x \in (0, +\infty)$ ，有 $\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} < \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$ ，而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ 在 $(0, +\infty)$ 一致收敛，级数的每一项 $\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ 在 $(0, +\infty)$ 连续，由连续性定理，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ 所表示的函数在 $(0, +\infty)$ 连续.

（5） $\forall x_0$： $|x_0| > 0$， $\exists \delta > 0$，满足 $|x_0| > \delta$，在 $|x| \ge \delta$ 上考虑问题．由于 $|x| \ge \delta$ 时，有 $\frac{1}{1+n^2x^2} \le \frac{1}{1+n^2\delta^2} < \frac{1}{n^2\delta^2}$，因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\delta^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$ 在 $|x| \ge \delta$ 一致收敛，又级数每一项在 $|x| \ge \delta$ 连续，因而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$ 在 $|x| \ge \delta$ 上连续，特别在 x_0： $|x_0| > 0$ 连续．由 x_0： $|x_0| > 0$ 的任意性，知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$ 所表示的函数在 $|x| > 0$ 连续.

（6）级数的每一项 $\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续，又 $\left|\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}\right| \le \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ $(\forall n)$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛，因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ 所表示的函数在 $(-\infty, +\infty)$ 连续.

（7）$\forall x_0$，满足$|x_0|>0$，$\exists\delta>0$，使$0<\delta<|x_0|$，当$|x|\ge\delta$时，有

$$\frac{|nx|}{1+n^4x^2}\le\frac{n|x|}{n^4x^2}=\frac{1}{n^3|x|}\le\frac{1}{n^3\delta},$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\delta}$收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^4x^2}$在$|x|\ge\delta$一致收敛，又级数的每一项$\frac{nx}{1+n^4x^2}$在$|x|\ge\delta$连续，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^4x^2}$所表示的函数在$|x|\ge\delta$连续，特别地在$x_0$连续，由$x_0$：$|x_0|>0$的任意性知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^4x^2}$所表示的函数在$|x|>0$连续.

（8）和函数为$s(x)=\frac{x^2}{1+x^2}\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1$，$x\ne0$；而$x=0$时，和为$s(0)=0$，显然$s(x)$在$x\ne0$连续,在$x=0$间断,且为可去间断点,即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$所表示的函数在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$连续，在$x=0$间断，且为可间断点.

2．求证$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty,+\infty)$内连续，并有连续导函数.

证明 由于级数的每一项$\frac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\frac{|\sin nx|}{n^3}\le\frac{1}{n^3}.$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$收敛，使用M判别法，知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛，因而函数$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty,+\infty)$内连续.

又$\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)'=\frac{1}{n^3}n\cos nx=\frac{1}{n^2}\cos nx$，同样，$\frac{1}{n^2}\cos nx$对每一个$n$在$(-\infty,+\infty)$连续，$\left|\frac{1}{n^2}\cos nx\right|\le\frac{1}{n^2}$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$一致收敛，因此$f(x)$可导，且$f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos x$连续.

3．设$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$，求证：

（1） $f(x)$ 在 $x\ge 0$ 上连续；

（2） $f(x)$ 在 $x>0$ 内无穷次可微.

证明（1）当 $x\ge 0$ 时，$e^{-nx}\le 1$，故 $\forall n$，

$$\frac{e^{-nx}}{1+n^2}\le\frac{1}{1+n^2}<\frac{1}{n^2},$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛及 M 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛，级数的每一项 $\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 都在 $[0,+\infty)$ 连续，因此 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 连续.

(2) $\forall x_0\in(0,+\infty)$，$\exists r$，满足 $0<r<x_0$，而 $\left(\frac{e^{-nx}}{1+n^2}\right)'=\frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$，由于 $\forall n$，当 $x\in[r,+\infty)$ 时，$\left|\frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}\right|=\frac{ne^{-nx}}{1+n^2}\le\frac{n}{1+n^2}e^{-nr}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-(n+1)r}}{1+(n+1)^2}\Big/\frac{ne^{-nr}}{1+n^2}=e^{-r}<1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}e^{-nr}$ 收敛，由 M 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-nx}}{1+n^2}\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[r,+\infty)$ 一致收敛，所以 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[r,+\infty)$ 连续，特别在 x_0 连续，由 $x_0\in(0,+\infty)$ 的任意性知 $f'(x)$ 在 $x>0$ 可微.

若设 $f^{(k)}(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k n^k e^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $x>0$ 存在，即 $f(x)$ 在 $x>0$ k 次可微，则 $\forall x_0\in(0,+\infty)$，同样 $\exists\delta>0$，使 $0<r<x_0$，而 $\left(\frac{(-1)^k n^k e^{-nx}}{1+n^2}\right)'=\frac{(-1)^{k+1}n^{k+1}e^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[r,+\infty)$ 连续，且由 $\forall n$，当 $x\in[r,+\infty)$ 时，

$$\left|\frac{(-1)^{k+1}n^{k+1}e^{-nx}}{1+n^2}\right|\le\frac{n^{k+1}}{1+n^2}e^{-nr},$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{k+1}e^{-(n+1)r}}{1+(n+1)^2}\Big/\frac{n^k e^{-nr}}{1+n^2}=e^{-r}<1,$$

知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k+1}}{1+n^2}e^{-nr}$ 收敛，由 M 判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}n^{k+1}e^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[r,+\infty)$ 一致收敛，因此有

$\left[f^{(k)}(x)\right]' = f^{(k+1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}n^{k+1}e^{-nx}}{1+n^2}$ 存在且连续于 $[r,+\infty)$，特别地在点 $x_0 \in (0,+\infty)$，$f(x)$ 的 $k+1$ 阶导数存在且连续，由 $x_0 \in (0,+\infty)$ 的任意性，知 $f(x)$ 的 $k+1$ 阶导数存在且连续，由归纳法原理，$f(x)$ 在 $x>0$ 任意次可微.

4. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续.

证明 $\forall x_0>0$，$\exists\delta>0$，使 $\delta<x_0$，在 $x\in[\delta,+\infty)$ 时级数的项 ne^{-nx} 连续，且 $ne^{-nx}\le ne^{-n\delta}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n\delta}$ 收敛，因而用 M 判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 一致收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 连续，特别地在 $x_0\in(\delta,+\infty)$ 连续，由 $x_0>0$ 的任意性，知 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续.

5. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 内一致收敛， $u_n(x)$（$n=1,2,\cdots$）在 $[a,b]$ 上连续，求证：

（1） $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛；

（2） $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证明（1） $\forall\varepsilon>0$，由于 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 内一致收敛，$\exists N$ 与 x 无关，$\forall n>N$，$\forall p$，在 $x\in(a,b)$ 一致地有

$$\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

由于 $u_n(x)$（$n=1,2,\cdots$）在 $[a,b]$ 上连续，在上式两边分别令 $x\to a^+$， $x\to b^-$ 取极限就有

$$\left|u_{n+1}(a)+u_{n+2}(a)+\cdots+u_{n+p}(a)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$
$$\left|u_{n+1}(b)+u_{n+2}(b)+\cdots+u_{n+p}(b)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon \quad ,$$

因而，当 $n>N$ 时，$\forall p\in N$，有 $\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)\right|<\varepsilon$ 对一切 $x\in[a,b]$ 成立，故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

（2）由和函数的连续性定理，立知 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

6．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明 $\lim_{x\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

证明 $\forall x>0$，当 n 增加时 $\frac{1}{n^x}$ 减少，且都小于 1，由 Abel 判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛，设 $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^x}$，则 $s_n(x)\to s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$，$x\in(0,+\infty)$，又 $\lim_{x\to0^+}s_n(x)=\lim_{x\to0^+}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^x}=\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to0^+}\frac{a_k}{k^x}=\sum_{k=1}^{n}a_k$，由 § 12.2 习题 10 知 $\lim_{x\to0^+}s(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$，即 $\lim_{x\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

7．证明

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx$$

当 $|r|<1$ 时成立，从而证明

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx=2\pi \quad （|r|<1）.$$

证明 由 § 10.1 习题 1（6）知 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx=\frac{r\cos x-r^2}{1-2r\cos x+r^2}$，$|r|<1$，所以

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx=1+\frac{2(r\cos x-r^2)}{1-2r\cos x+r^2}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}$$

当 $|r|<1$ 时成立.

又 $|r|<1$ 时，$\forall n$ 有 $|2r^n\cos nx|\le 2|r|^n$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}2|r|^n$ 收敛，由 M 判别法级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2r^n\cos nx$ 当 $|r|<1$ 时在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛，因而级数 $1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx$ 当 $|r|<1$ 时在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛，且级数的每一项 $1,2r^2\cos 2x,\cdots,2r^n\cos nx,\cdots$ 均在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，因此在 $(-\infty,+\infty)$ 的任一闭子区间上可逐项积分，因而得到，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx + 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} r^n \cos nx dx = 2\pi .$$

8．用有限覆盖定理证明 Dini 定理.

证明 Dini 定理 若在闭区间$[a, b]$上，$u_n(x) \ge 0$（$n = 1, 2, \cdots$）且在$[a, b]$连续，函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a, b]$逐点收敛到$s(x)$，$s(x)$在$[a, b]$连续，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a, b]$一致收敛.

由于$u_n(x) \ge 0$，知级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的部分和序列$\{s_n(x)\} = \left\{\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right\}$是单调上升的，令$r_n(x) = s(x) - s_n(x)$，则$r_n(x)$单调下降趋于零，故$\forall n$，$\forall x \in [a, b]$，有$r_n(x) \ge 0$，且$\forall x_0 \in [a, b]$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N(x_0, \varepsilon) > 0$，$n > N(x_0, \varepsilon)$时，有$0 \le r_n(x_0) < \varepsilon$.

固定$n = N_0 + 1 = N(x_0, \varepsilon) + 1$，由于$r_n(x)$在$[a, b]$连续，既然$r_n(x_0) < \varepsilon$，故$\exists \delta_0 > 0$，当$x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta)$时，$r_n(x) < \varepsilon$，从而$n > N_0$时更有$r_n(x) < \varepsilon$，即

$$|r_n(x)| < \varepsilon \text{（} x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta) \cap [a, b] \text{），}$$

如上所述，对每一个点$x_\lambda \in [a, b]$，可找到相应的邻域$(x_\lambda - \delta_\lambda, x_\lambda + \delta_\lambda)$以及对应的$N_\lambda$，使得当$n > N_\lambda$时，对$x \in (x_\lambda - \delta_\lambda, x_\lambda + \delta_\lambda) \cap [a, b]$，恒有$|r_n(x)| < \varepsilon$．如此开区间集合$\{(x_\lambda - \delta_\lambda, x_\lambda + \delta_\lambda) : x_\lambda \in [a, b]\}$构成了$[a, b]$的一个开覆盖，从而由有限覆盖定理，必存在子覆盖．不妨设子覆盖为

$$\{(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1), (x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2), \cdots, (x_r - \delta_r, x_r + \delta_r)\}.$$

于是$\forall x \in [a, b]$，$\exists i\ (1 \le i \le r)$，使得$x \in (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i)$，取$N = \max_{1 \le i \le r}\{N_i\}$，则当$n > N$时，就有$|r_n(x)| < \varepsilon$，因此$r_n(x)$在$[a, b]$上一致收敛于 0，因此证得了$s_n(x)$在$[a, b]$上一致收敛于$s(x)$，即级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a, b]$一致收敛于$s(x)$.

9．设$\{x_n\}$是$(0, 1)$内的一个数列，即$0 < x_n < 1$，且$x_i \ne x_j\ (i \ne j)$．试讨论函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x - x_n)}{2^n}$$

在$(0, 1)$中的连续性.

解 因为$\left|\dfrac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}\right| \le \dfrac{1}{2^n}$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$收敛，由 M 判别法，知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$ 在$(0,1)$一致收敛.

设$x_0 \ne x_n$（$n=1,2,\cdots$）为$(0,1)$内任意一点，则通项$u_n(x)=\dfrac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$ 在x_0连续，应用和函数连续性定理，知$f(x)$在x_0连续．设 $x_k \in \{x_n\}$任意，因

$$f(x)=\sum_{n\ne k}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}+\frac{\operatorname{sgn}(x-x_k)}{2^k},$$

右边第一项在$x=x_k$处连续，第二项在$x=x_k$处间断，因此$f(x)$在$x=x_k$处间断（$k=1,2,\cdots$）.

第十三章 幂级数

§13.1 幂级数的收敛半径与收敛域

1．求下列各幂级数的收敛域：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2x)^n}{n!}$；

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}$；

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n x\right]^n$；

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n^2}}{2^n}$；

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3+(-1)^n)^n}{n}x^n$；

（6）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$；

（7）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$；

（8）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}x^n$；

（9）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^n\sqrt[n]{n}}x^n$；

（10）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n+7^n}$；

（11）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$；

（12）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$；

（13）$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$；

（14）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$；

（15）$\sum_{n=1}^{\infty}a^{n^2}x^n,(0<a<1)$；

（16）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$.

解（1）由 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)}\Big/\frac{2^n}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0$，故收敛半径 $R=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

（2）由 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+2)}{n+2}\Big/\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+2)}\cdot\frac{n+1}{n+2}=1$，故收敛半径 $R=1$.

在 $x=1$，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$，发散；在 $x=-1$，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$，由交错级数的 Leibniz 判别法，知其收敛，因而收敛域为 $[-1,1)$.

（3）$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$，所以收敛半径 $R=\frac{1}{e}$. 由于

$$\left|\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(\pm\frac{1}{e}\right)\right)^n\right|\to\frac{1}{\sqrt{e}}\neq 0\ (n\to\infty),$$

故在 $x=\pm\frac{1}{e}$ 级数发散，因此收敛域为 $(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$.

（4）由 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=1$，知收敛半径 $R=1$.

在 $|x|=1$，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^{n^2}}{2^n}$ 绝对收敛，故收敛域为 $[-1,1]$.

（5）由 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{3+(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}=4$，故收敛半径 $R=\frac{1}{4}$.

在 $x=\frac{1}{4}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[3+(-1)^n\right]^n}{n4^n}$，将其奇偶项分开，拆成两个部分，分别为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)2^{2k-1}}$，前一项级数发散，后一项级数收敛，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[3+(-1)^n\right]^n}{n4^n}$ 发散；

同样，$x=-\frac{1}{4}$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[3+(-1)^n\right]^n}{n4^n}(-1)^n$，也可拆成两部分，前一部分为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$，另一部分 $-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k-1}}{(2k-1)2^{2k-1}}$，前者发散，后者绝对收敛，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[3+(-1)^n\right]^n}{n4^n}(-1)^n$ 发散，所以收敛区域是 $(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.

（6）$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1}\Big/\frac{3^n+(-2)^n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n+1}\frac{3+(-2)\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}\right]=3$，所以级数的收敛半径是 $R=\frac{1}{3}$.

当 $x+1=\frac{1}{3}$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ 发散；当 $x+1=-\frac{1}{3}$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ 收敛.

因此，收敛域为 $-\frac{1}{3}\le x+1\le\frac{1}{3}$ 即 $\left[-\frac{3}{4},-\frac{2}{3}\right]$.

（7） $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2(n+1)!!}{(2n+3)!!}\Big/\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{2n+3}=1$，所以收敛半径 $R=1$.

当 $x=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$，由于 $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+3}{2n+2}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+3}=\frac{1}{2}<1$，故由 Raabe 判别法，知级数发散；

当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}(-1)^n$（实际上，由其绝对收敛立知其收敛），这是交错级数，由于

$$\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}=\frac{2n+2}{2n+3}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

故 $\left\{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right\}$ 单调下降，且由 $0<\frac{2}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}<\frac{1}{\sqrt{2n}}$（用数学归纳法证之）及夹迫性知 $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=0$，由 Leibniz 判别法，知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}(-1)^n$ 收敛，所以收敛域为 $[-1,1)$．

（8）$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=e^{-1}$，所以收敛半径 $R=e$．

由于 $\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}(\pm e)^n\right|\to\sqrt{e}\neq 0\ (n\to\infty)$，故级数在 $x=\pm e$ 发散，因而收敛域为 $(-e,e)$．

（9）$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1^{n+1}\sqrt{n+1}}\Big/\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}\right|=1$，所以 $R=1$．

在 $x=1$，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$，由 Leibniz 判别法，知其收敛；在 $x=-1$，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 发散，故收敛域 $(-1,1]$．

（10）$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5^{n+1}+7^{n+1}}\Big/\frac{1}{5^n+7^n}\right)=\frac{1}{7}$，所以 $R=7$．

在 $x=\pm\frac{1}{7}$，由于 $\left|\frac{(\pm 7)^n}{5^n+7^n}\right|\to 1\ (n\to\infty)$，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm 7)^n}{5^n+7^n}$ 一般项 $\frac{(\pm 7)^n}{5^n+7^n}$ 当 $n\to\infty$ 时不趋于 0，因此级数发散，故收敛域 $(-7,7)$．

（11）$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}\Big/\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)}=\frac{1}{4}$，因此 $R=4$．

在 $x=\pm 4$，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n$，因为级数一般项的绝对值为

$$\left|\frac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n\right| = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} > 1$$

对一切 n 成立，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n \neq 0$，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n$ 发散，因此收敛域为 $(-4, 4)$.

（12） 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}) \Big/ (1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n})\right) = 1$，所以 $R = 1$.

而在 $x = \pm 1$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(\pm 1)^n = \infty \neq 0$，故级数在 $x = \pm 1$ 均发散，因而收敛区间为 $(-1, 1)$.

（13）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$，所以 $R = 1$.

又在 $x = \pm 1$，显然级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(\pm 1)^n$ 均发散，故收敛域为 $(-1, 1)$.

（14） 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n+1)!} \Big/ \frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(x-2)^2}{2n(2n+1)} = 0 < 1$， 故 $\forall x \in (-\infty, \infty)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ 均绝对收敛，因而收敛半径 $R = +\infty$，收敛域 $(-\infty, \infty)$.

（15）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$（$0 < a < 1$），所以 $R = +\infty$，收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

（16）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^p} \Big/ \frac{1}{n^p}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p} = 1$，所以 $R = 1$.

在 $x = \pm 1$，级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^n}{n^p}$，故当 $p > 1$ 时都收敛；$0 < p \leq 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散， $p \leq 0$ 时一般项不趋于 0，均发散．因此，当 $p > 1$ 时，收敛域 $[-1, 1]$；$0 < p \leq 1$ 时，收敛域为 $[-1, 1)$；而当 $p \leq 0$ 时，收敛域为 $(-1, 1)$.

2．设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 Q，讨论下列级数的收敛半径：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$ ；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n)x^n$．

解（1）由题设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{R}$，所以 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{2(n+1)}}{a_n x^{2n}}\right|=\frac{1}{R}x^2$，故当 $\frac{1}{R}x^2<1$，即 $|x|<\sqrt{R}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{2n}$ 绝对收敛，而当 $\frac{1}{R}x^2>1$，即 $|x|>\sqrt{R}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{2n}$ 发散，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{2n}$ 的收敛半径为 $\sqrt{R}$．

（2）收敛半径必 $\geq\min\{R,Q\}$，而不定，需给出 a_n，b_n 的具体表达式才可确定，可以举出例子．

（3）$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_n b_n}\right|=\frac{1}{RQ}$，所以收敛半径为 RQ，只有当 R,Q 中一个为 0，另一个为 $+\infty$ 时，不能确定，需看具体 a_n，b_n 来确定，可以是 $[0,+\infty)$ 中任一数．

3．设 $\left|\sum_{k=0}^{\infty}a_k x_1^k\right|\leq M\ (n=1,2,\cdots,x_1>0)$，求证：当 $0<x<x_1$ 时，有

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 收敛；

（2）$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right|\leq M$．

证明（1）$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_1^n\left(\frac{x}{x_1}\right)^n$，而由于 $0<x<x_1$，故数列 $\left\{\left(\frac{x}{x_1}\right)^n\right\}$ 单调递减趋于 0，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_1^n$ 的部分和数列 $\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right|\leq M$ 有界，由 Dirichlet 判别法，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 收敛．

(2) 设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的部分和为 $s_n(x)$，则由 Abel 变换，有

$$|s_n(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_k x^k\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_k x_1^k\left(\frac{x}{x_1}\right)^k\right|$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\left[\left(\frac{x}{x_1}\right)^k-\left(\frac{x}{x_1}\right)^{k+1}\right]\sum_{i=1}^{k}a_i x_1^i\right\}+\left(\frac{x}{x_1}\right)^n\sum_{k=1}^{n}a_k x_1^k\right|$$

$$\le M\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\frac{x}{x_1}\right)^k-\left(\frac{x}{x_1}\right)^{k+1}\right]+\left(\frac{x}{x_1}\right)^n\right\}=M\frac{x}{x_1}<M\text{ ,}$$

所以，$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right|\left|\lim_{n\to\infty}s_n(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\left|s_n(x)\right|\le M$.

§13.2 幂级数的性质

1．设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 当 $|x|<r$ 时收敛，那么当 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ 收敛时有

$$\int_0^r f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}\text{ ,}$$

不论 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 当 $x=r$ 时是否收敛.

证明　由于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ 的收敛半径至少不小于 r，且该幂级数在 $x=r$ 收敛，因而该幂级数在 $[0,r]$ 一致收敛（Abel 第二定理），因此该幂级数的和函数 $s(x)$ 在 $x=r$ 连续，即 $\lim_{x\to r^-}s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$. 又 $\forall 0<x<r$ ，由于 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 当 $|x|<r$ 时收敛，故可逐项积分，即 $\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}=s(x)$ ，即 $\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to r^-}s(x)$ ，令 $x\to r^-$ 取极限即有 $\int_0^r f(x)dx=\lim_{x\to r^-}s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$.

2．利用上题证明 $\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}dx=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

证明　$\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ ，$|x|<1$ ，故 $\frac{\ln(1-x)}{x}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n-1}$ ，$|x|<1$ ，而级数 $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(n-1)+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2}$ 是收敛的，利用上题结论，就有 $\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}dx=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

3. 用逐项微分或逐项积分求下列级数的和：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ ；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$ ；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$ ；

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!2^n}x^n$ ；

（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$；

（7）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n+1}$；

（8）$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)x^n$ ；

（9）$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ ；

（10）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^2}{n!}x^{2n+1}$.

解 （1）因为 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1},|x|<1$，所以当 $|x|<1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}dt=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$，且当 $x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，由 Abel 第二定理，有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),-1\le x<1$.

（2）设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$，则 $\frac{s(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1},|x|<1$，逐项积分，有

$$\int_0^x \frac{s(t)}{t}dt = \sum_{n=1}^{\infty} n\int_0^x t^{n-1}dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}\ , |x|<1\ ,$$

所以，$\dfrac{s(x)}{x} = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$，即 $s(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}\ , |x|<1$.

（3）设 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ ，$|x|<1$，则有

$$\int_0^x s(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\int_0^x t^n dt = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x^2}{(1-x)^2}\ , |x|<1\ ,$$

所以，$s(x) = \left(\dfrac{x^2}{(1-x)^2}\right)' = \dfrac{2x}{(1-x)^3}$，$|x|<1$.

（4）设 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(2n-1)}x^{2n}$ ，$|x|\le 1$，则

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2(2n-1)}x^{2n-1}\ ,\ -1<x\le 1\ ,$$

$$s''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2}x^{2n-2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-x^2\right)^{n-1} = \frac{1}{2\left(1+x^2\right)},\ |x|<1\ ,$$

所以，

$$s'(x) = \int_0^x \frac{1}{2\left(1+t^2\right)}dt = \frac{1}{2}\arctan x\ ,\ -1<x\le 1\ ,$$

$$s(x) = \int_0^x \frac{1}{2}\arctan t dt = \frac{1}{2}x\arctan x - \frac{1}{4}\ln(1+x^2)\ ,\ |x|\le 1\ .$$

（5） 设 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n!2^n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!2^n}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!2^n}x^n = \sigma(x) + e^{\frac{x}{2}} - 1$，$|x|<+\infty$.

由于 $\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!2^n}x^n \Rightarrow \int_0^x \dfrac{\sigma(t)}{t}dt = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n!2^n}x^n = \dfrac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}$ ，所以，

$\sigma(x) = \dfrac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{4}x^2e^{\frac{x}{2}}$，故 $s(x) = \left(\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x + 1\right)e^{\frac{x}{2}} - 1$.

（6）设 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$ ，$|x|<+\infty$，则 $[xs(x)]' = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{n!}(-x)^n$ ，所以，

$$\int_0^x \frac{1}{t}[ts(t)]'dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}(-x)^n = \left(x^2-x\right)e^{-x} \Rightarrow [xs(x)]' = -xe^{-x}\left(x^2-3x+1\right),$$

$$xs(x)=\left(x^3+x+1\right)e^{-x}-1,$$

则 $s(x)=\left(x^2+1\right)e^{-x}+\dfrac{e^{-x}-1}{x}$（在 $x=0$ 理解为极限值）.

（7）令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n-1}}{4n+1}$， 则 $x^2s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1},|x|<1$，所以，

$$\left[x^2s(x)\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^4\right)^n=\frac{x^4}{1-x^4},$$

故 $x^2s(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x-x$，因此 $s(x)=\dfrac{1}{4x^2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{\arctan x-2x}{2x^2}$（在 $x=0$ 理解为极限值）.

（8）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{n+1}-1}=\lim\limits_{n\to\infty}2\sqrt[n]{2-\dfrac{1}{2^n}}=2$，收敛半径 $R=\dfrac{1}{2}$，在 $x=\pm\dfrac{1}{2}$，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)\left(\pm\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\pm1)^n\left(2-\frac{1}{2^n}\right),$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(\pm1)^n\left(2-\dfrac{1}{2^n}\right)\neq0$，故级数发散．可得

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=2\frac{1}{1-2x}-\frac{1}{1-x}=\frac{1}{(1-x)(1-2x)},\quad |x|<\frac{1}{2}.$$

（9）设 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1},|x|<1$，则有

$$\int_0^x s(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\Rightarrow\int_0^x\left(\frac{1}{u}\int_0^u s(t)dt\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},$$

所以，

$$\frac{1}{x}\int_0^x s(t)dt=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},$$

即 $\int_0^x s(t)dt=\dfrac{x}{(1-x)^2}$，所以 $s(x)=\left(\dfrac{x}{(1-x)^2}\right)'=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$，$|x|<1$.

（10）设 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+1)^2}{n!}x^{2n+1},|x|<+\infty$，则有（逐项积分），

$$\int_0^x \frac{s(t)}{t}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n+1}\Rightarrow\int_0^x\left(\frac{1}{t}\int_0^t\frac{s(u)}{u}du\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}=x\left(e^{x^2}-1\right)$$

所以，

$$\frac{1}{x}\int_0^x\frac{s(u)}{u}du=\left(2x^2+1\right)e^{x^2}-1,\quad \int_0^x\frac{s(u)}{u}du=\left(2x^3+x\right)e^{x^2}-x,$$

$$\frac{s(x)}{x}=\left(4x^4+2x^2+6x+1\right)e^{x^2}-1,$$

则 $s(x)=\left(4x^5+2x^3+6x^2+x\right)e^{x^2}-x$.

4.求下列级数的和：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(2n+1\right)}$.

解 （1）考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n-1\right)x^{2n}=s(x)$，$|x|<1$．由于 $\frac{s(x)}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n-1\right)x^{2n-2}$，逐项积分，

$\int_0^x\frac{s(t)}{t^2}dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^2\right)^{n-1}=\frac{x}{1-x^2}$，所以，

$$\frac{s(x)}{x^2}=\frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}\Rightarrow s(x)=\frac{x^2\left(1+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2},\quad |x|<1.$$

故有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n-1\right)\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{2n}=s\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3.$$

（2）设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n+1\right)n}x^{2n+1}$，则级数在 $|x|\le 1$ 绝对收敛，所以，

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n},\quad s''(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}=\frac{2x}{1-x^2},\quad |x|<1.$$

因此，

$$s'(x)=\int_0^x\frac{2t}{1-t^2}dt=-\ln(1-x^2),$$

$$s(x)=-\int_0^x\ln(1-x^2)dx=-x\ln(1-x^2)+2x+\ln\frac{1-x}{1+x},\quad |x|\le 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n+1\right)n}=s(1)=\lim_{x\to 1^-}s(x)$$

$$=\lim_{x\to1^-}\left[(1-x)\ln(1-x)+2x-(1+x)\ln(1+x)\right]=2-2\ln2\,.$$

5．证明：

（1）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$满足方程$y^{(4)}=y$；

（2）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n!)^2}$满足方程$xy''+y'-y=0$.

解（1）对级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$，由$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{[4(n+1)]!}\Big/\frac{1}{(4n)!}\right)=0$，故收敛半径$R=+\infty$，收敛域为$(-\infty,+\infty)$，而采取用逐项求导得，

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}\right)^{(4)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4(n-1)}}{[4(n-1)]!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!},$$

即$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$满足方程$y^{(4)}=y$.

（2）级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n!)^2}$收敛域为$(-\infty,+\infty)$，设$y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n!)^2}$，通过逐项求导得，

$$y'=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n!)^2}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n!)^2},\qquad y''=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n!)^2}\right)''=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{(n!)^2},$$

所以，

$$xy''+y'-y=x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{(n!)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n!)^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n!)^2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)x^{n}}{[(n+1)!]^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^{n}}{[(n+1)!]^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n!)^2}=0,$$

即$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n!)^2}$满足方程$xy''+y'-y=0$.

6．设$f(x)$是幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$(-R,R)$上的和函数，若$f(x)$为奇函数，则级数中仅出现奇次幂的项；若$f(x)$为偶函数，则级数中仅出现偶次幂的项.

证明　由于$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$x\in(-R,R)$.

$\forall x \in (-R, R)$，由 $f(x)$ 是奇函数，即 $f(-x) = -f(x)$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-x)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n + 1] a_n x^n = 0,$$

故 $\forall n \in \{0\} \cup N$，有 $[(-1)^n + 1] a_n = 0$，故当 n 为偶数时 $2a_n = 0 \Rightarrow a_n = 0$，即级数中偶次幂系数均为 0，因此级数中仅出现奇次幂的项.

同样，若 $f(x)$ 为偶函数，即 $f(-x) = f(x)$，得 $\sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n - 1] a_n x^n = 0$，故 $\forall n$，有 $[(-1)^n - 1] a_n = 0$，当 n 为奇数时，有 $-2a_n = 0 \Rightarrow a_n = 0$，即级数中奇次幂的系数均为 0，因此级数中仅出现偶次幂的项.

7．设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2 \ln(1+n)}$．求证：

（1） $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 连续， $f'(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内连续；

（2） $f(x)$ 在点 $x = -1$ 可导；

（3） $\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = +\infty$；

（4） $f(x)$ 在点 $x = 1$ 不可导；

证明（1）由于 $\left| \dfrac{x^n}{n^2 \ln(1+n)} \right| \le \dfrac{1}{n^2 \ln(1+n)}, |x| \le 1$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 \ln(1+n)}$ 收敛，由 M 判别法，知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2 \ln(1+n)}$ 在 $[-1, 1]$ 一致收敛，而级数的每一项为幂函数在 $[-1, 1]$ 连续，故和函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2 \ln(1+n)}$ 在 $[-1, 1]$ 连续.

又级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{x^n}{n^2 \ln(1+n)} \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{n \ln(1+n)}$ 的收敛半径为 $R = 1$，因此在 $(-1, 1)$ 内，其和函数 $f'(x)$ 连续.

（2）幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{n \ln(1+n)}$ 在 $x = -1$ 成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n \ln(1+n)}$，由 Leibniz 判别法，知级数收敛，由 Abel 第二定理，幂级数在 $[-1, 0]$ 一致收敛，因而其和函数 $f'(x)$ 在 $x = -1$ 右连续，因此 $\lim\limits_{x \to -1^+} f'(x)$

存在，且 $f'(-1)=\lim\limits_{x\to -1^{+}} f'(x)$.

（3） $\lim\limits_{x\to 1^{-}} f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(1+n)}=+\infty$.

（4）因为 $\lim\limits_{x\to 1^{-}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^{-}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x^{n}-1)/(x-1)}{n^{2}\ln(1+n)}$

$$=\lim_{x\to 1^{-}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1}{n^{2}\ln(1+n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(1+n)}=+\infty,$$

故 $f(x)$ 在点 $x=1$ 不可导.

§13.3 函数的幂级数展式

1．利用基本初等函数的展式，将下列函数展开为 Maclaurin 级数，并说明收敛区间.

（1） $\dfrac{1}{a-x}, a\neq 0$；

（2） $\dfrac{1}{(1+x)^{2}}$；

（3） $\dfrac{1}{(1+x)^{3}}$；

（4） $\cos^{2}x$；

（5） $\sin^{3}x$；

（6） $\dfrac{x}{\sqrt{1-3x}}$；

（7） $(1+x)e^{-x}$；

（8） $\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)$；

（9） $\dfrac{1}{1-3x+2x^{2}}$；

（10） $\arcsin x$；

（11） $\ln\left(1+x+x^{2}\right)$；

（12） $x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^{2}}$ ；

（13）$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$；

（14）$\int_0^x \cos t^2 dt$.

解（1）$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n$ （$\left|\frac{x}{a}\right| < 1$）

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^{n+1}}x^n \quad （|x| < |a|）.$$

（2）$\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2}$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)(-3)\cdots(-2-n+1)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n，\ |x| < 1.$$

（3）$\frac{1}{(1+x)^3} = (1+x)^{-3} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)(-4)\cdots(-3-n+1)}{n!}x^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}(n+1)(n+2)x^2，\ |x| < 1.$$

（4）$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}，\ |x| < +\infty.$$

（5）$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} = \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(3x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$$= \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(1-3^{2k})x^{2k+1}}{(2k+1)!}，\ |x| < +\infty.$$

（6）$\frac{x}{\sqrt{1-3x}} = x(1-3x)^{-\frac{1}{2}}$

$$= x\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-3x)^n\right) \quad （|3x| < 1）$$

$$= x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}\left(\frac{3}{2}\right)^{n}x^{n}\right),\quad |x|<\frac{1}{3}.$$

（7） $(1+x)e^{-x}=(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x)^{n}$ （$|-x|<+\infty$）

$$=(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}x^{n}\quad（|x|<+\infty）$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}x^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}x^{n+1}\quad（|x|<+\infty）$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right](-1)^{n-1}x^{n},\quad |x|<+\infty.$$

（8） $\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)\right)'=\left(1+x^{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}\left(x^{2}\right)^{n}\quad（|x^{2}|<1）$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(2n-1)!!}{2^{n}n!}x^{2n},\quad |x|<1,$$

所以，

$$\int_{0}^{x}\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)\right)'dx=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(2n-1)!!}{2^{n}n!(2n+1)}x^{2n+1},\quad |x|\le 1,$$

即 $\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(2n-1)!!}{2^{n}n!(2n+1)}x^{2n+1}$.

（9） $\frac{1}{1-3x+2x^{2}}=\frac{1}{(1-x)(1-2x)}=\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x}$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}\quad（|2x|<1\text{ 且 }|x|<1）$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)x^{n},\quad |x|<\frac{1}{2}.$$

（10） $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}\left(-x^{2}\right)^{n}$ （$|-x^{2}|<1$）

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n}\ ,\quad |x|<1\ ,$$

所以，

$$\arcsin x = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}\ ,\quad |x|<1\ .$$

在 $x=\pm1$，由于

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}\bigg/\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}(n+1)!(2n+3)}-1\right)=\frac{3}{2}>1\ ,$$

用 Raabe 判别法知右端级数收敛，因而收敛区间为 $[-1,1]$.

（11）$\ln\left(1+x+x^2\right)=\ln\frac{1-x^3}{1-x}=\ln\left(1-x^3\right)-\ln(1-x)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(-x^3\right)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{3n}\ ,\quad -1\le x<1\ .$$

（12）$x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}=x\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}-\int_0^x\frac{xdx}{1+x^2}dx$

$$=x\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)dx-\int_0^x x\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n$$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2(2n+1)(n+1)}x^{2(n+1)}\ ,\quad |x|\le1\ .$$

（13）$\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^x\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)!}t^{2k+1}dt=\int_0^x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}t^{2k}dt$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!}x^{2k+1}\ ,\quad |x|<+\infty\ .$$

（14）$\int_0^x\cos t^2dt=\int_0^x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(t^2\right)^{2k}dt=\int_0^x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}t^{4k}dt$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!(4k+1)}x^{4k+1}\ ,\quad |x|<+\infty\ .$$

2．利用幂级数相乘求下列函数的 Maclaurin 展开式：

（1）$\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$；

（2）$(\arctan x)^2$；

（3）$\ln^2(1-x)$．

解（1）$\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}=\ln(1+x)\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-n)^{n-1}}{n}x^n\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k(-1)^{n-k}x^{n-k}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\right)x^n，\quad |x|<1\text{ .}$$

（2）$(\arctan x)^2=\left[\int_0^x\dfrac{1}{1+t^2}dt\right]^2=\left[\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt\right]^2$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}\frac{(-1)^{n-k}}{2(n-k)+1}x^{2(n-k)+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2(n-k)+1)}x^{2n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}x^{2(n+1)}，\quad |x|\le 1\text{ .}$$

（3）$\ln^2(1-x)=\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n\right]^2=\left(-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}\right)^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x^k}{k}\dfrac{x^{n+1-k}}{n+1-k}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(n+1-k)}\right)x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^{n+1}，\quad -1\le x\le 1\text{ .}$$

3．将下列函数在指定点 x_0 展开为 Taylor 级数：

（1）$\dfrac{1}{a-x}$， $x_0=b\ (\ne a)$；

（2）$\ln\dfrac{1}{2+2x+x^2}$， $x_0=-1$；

（3）$\ln x$， $x_0=2$；

（4）e^x， $x_0=1$．

解（1）$\dfrac{1}{a-x}=\dfrac{1}{(a-b)-(x-b)}=\dfrac{1}{(a-b)}\dfrac{1}{1-\dfrac{x-b}{a-b}}$

$$=\frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n-1}}，\ |x-b|<|a-b|.$$

（2）$\ln\frac{1}{2+2x+x^2}=-\ln\left[1+(x+1)^2\right]$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[(x+1)^2\right]^n=\sum_{n}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x+1)^{2n}，\ -2\le x\le 0.$$

（3）$\ln x=\ln(2+x-2)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n$ （$-1<\frac{x-2}{2}\le 1$）

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(x-2)^n，\ 0<x\le 4.$$

（4）$e^x=e^{1+(x-1)}=ee^{x-1}=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{n!}(x-1)^n$，$-\infty<x<+\infty$.

4．展开 $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ 为 x 的幂级数，并推出 $1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$.

解 $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n-1\right)\right]=\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}x^{n-2}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^{n=1}，\ |x|<+\infty，$$

所以，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\bigg|_{x=1}=\frac{e^x(x-1)+1}{x^2}\bigg|_{x=1}=1$.

5．试将 $f(x)=\ln x$ 展开成 $\frac{x-1}{x+1}$ 的幂级数.

解 令 $t=\frac{x-1}{x+1}$，则 $x=\frac{1+t}{1-t}$，因而有

$$f(x)=\ln x=\ln\frac{1+t}{1-t}=\ln(1+t)-\ln(1-t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-t)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n}t^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}，\ x>0.$$

6．函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的各阶导数一致有界，即 $\exists M>0$，对一切 $x\in(a,b)$，有

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M，\quad n=1,2,\cdots,$$

证明：对(a,b)内任意点x与x_0，有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n .$$

证明 由 Taylor 公式，$\forall x\in(a,b)$，$x_0\in(a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中$|R_n(x)|=\dfrac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\le\dfrac{M}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\to 0\ (n\to\infty)$，$\forall x\in(a,b)$，其中$\xi$在$x$与$x_0$之间．故$f(x)$在区间$(a,b)$可以展成$(x-x_0)$的幂级数，即$\forall x\in(a,b)$，$x_0\in(a,b)$，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n .$$

第十四章　傅里叶级数

§1　三角级数与傅里叶级数

1．证明：

（1）$\sin x,\sin 2x,\cdots,\sin nx,\cdots$是$[0,\pi]$上的正交系；

（2）$\sin x,\sin 3x,\cdots,\sin(2n+1)x,\cdots$是$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上的正交系；

（3）$1,\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos nx,\cdots$是$[0,\pi]$上的正交系；

（4）$1,\sin x,\sin 2x,\cdots,\sin nx,\cdots$不是$[0,\pi]$上的正交系.

证明　（1）$\forall m,n\in N,m\ne n$，有

$$\int_0^{\pi}\sin mx\sin nxdx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x]dx$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\Big|_0^{\pi}]=0,$$

所以，$\sin x,\sin 2x,\cdots,\sin nx,\cdots$是$[0,\pi]$上的正交系.

（2）$\forall k,n\in N,k\neq n$，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2k-1)x\sin(2n-1)xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos 2(k-n)x-\cos 2(k+n-1)x]dx$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2(k-n)}\sin 2(k-n)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2(k+n-1)}\sin 2(k+n-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}]=0,$$

所以，$\sin x,\sin 3x,\cdots,\sin(2n+1)x,\cdots$是$[0,\frac{\pi}{2}]$上的正交系.

（3）由于$\forall m,n\in N,m\neq n$，有

$$\int_0^{\pi}\cos mx\cos nxdx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]dx$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\Big|_0^{\pi}]=0,$$

又，$\forall n\in N$，有

$$\int_0^{\pi}\cos nxdx=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}=0,$$

故$1,\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos nx,\cdots$是$[0,\pi]$上的正交系.

（4）因为$\int_0^{\pi}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=2\neq 0$，因此$1,\sin x,\sin 2x,\cdots,\sin nx,\cdots$不是$[0,\pi]$上的正交系.

2．求下列周期为2π的函数的 Fourier 级数：

（1）三角多项式 $P_n(x)=\sum_{i=1}^{n}(a_i\cos ix+b_i\sin ix)$；

（2）$f(x)=x^3\quad(-\pi<x<\pi)$；

（3）$f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$；

（4）$f(x)=e^{ax}\quad(-\pi<x<\pi)$；

（5）$f(x)=|\sin x|\quad(-\pi<x<\pi)$；

（6）$f(x)=x\cos x\quad(-\pi<x<\pi)$；

（7）$f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x<0,\\ 0, & 0\le x<\pi;\end{cases}$

（8）$f(x)=\pi^2-x^2\quad(-\pi<x<\pi)$；

（9）$f(x)=\operatorname{sgn}\cos x$；

（10）$f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}\quad(0<x<2\pi)$.

解　（1）利用三角函数系的正交性，极易得到

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_n(x)dx=\frac{1}{\pi}a_0\cdot 2\pi=2a_0,$$

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_n(x)\cos kxdx=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}a_k\cos^2 kxdx=a_k, & 0<k\le n,\\ 0, & k>n,\end{cases}$$

$$\beta_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_n(x)\cos kxdx=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}b_k\sin^2 kxdx=b_k, & 0<k\le n,\\ 0, & k>n,\end{cases}$$

可得三角多项式 $P_n(x)$ 的 Fourier 级数为

$$P_n(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\ .$$

（2）$a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos kx dx = 0$，$k = 0, 1, 2, \cdots$，

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin kx dx = \frac{2\pi}{k}(-1)^{k-1}(\pi^2 - \frac{6}{k^2})，\ k = 1, 2, \cdots,$$

所以，$f(x) = x^3 \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi}{n}(-1)^{n-1}(\pi^2 - \frac{6}{n^2})\sin nx \quad (-\pi < x < \pi)$.

（3）$f(x)$ 是偶函数，故 $b_n = 0$，$n = 1, 2, \cdots$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx = \frac{4}{\pi}\ ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx dx = \frac{(-1)^{n-1}4}{(4n^2-1)\pi}，\ n = 1, 2, \cdots,$$

因此，$f(x) = \cos\dfrac{x}{2} \sim \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos nx$.

（4）$a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}dx = \begin{cases} \dfrac{2}{a\pi}(e^{a\pi} - e^{-a\pi}), & a \neq 0, \\ 2, & a = 0, \end{cases}$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos kx dx = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k a}{(a^2+k^2)\pi}(e^{a\pi} - e^{-a\pi}), & a \neq 0, \\ 0, & a = 0, \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin kx dx = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k k}{(a^2+k^2)\pi}(e^{a\pi} - e^{-a\pi}), & a \neq 0, \\ 0, & a = 0, \end{cases}$$

$$k = 1, 2, \cdots.$$

所以，当$-\pi < x < \pi$时，

$$f(x) = e^{ax} \sim \begin{cases} \dfrac{2}{a\pi} sh(a\pi) + \dfrac{2}{\pi} sh(a\pi) \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 + k^2} (a\cos kx - k\sin kx), & a \neq 0, \\ 1, & a = 0. \end{cases}$$

（5）$f(x)$是偶函数，故$b_n = 0$，$n = 1, 2, \cdots$，

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & n = 1, \\ \dfrac{2[(-1)^{n-1} - 1]}{(n^2 - 1)\pi}, & n > 1, \end{cases}$$

所以，

$$f(x) = |\sin x| \sim \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\cos x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^2 - 1} \cos nx. \quad (-\pi < x < \pi)$$

（6）$f(x)$是奇函数，故$a_n = 0$，$n = 0, 1, 2, \cdots$，

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x\cos x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x[\sin(n+1)x + \sin(n-1)x] dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}, & n = 1, \\ \dfrac{2(-1)^n n}{n^2 - 1}, & n \geq 2, \end{cases}$$

$$n = 1, 2, \cdots.$$

所以，$f(x) = x\cos x \sim -\dfrac{1}{2}\sin x + 2\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 - 1} \sin nx. \quad (-\pi < x < \pi)$

（7）$a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}$，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

因此，$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi \end{cases} \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos nx + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx)$.

（8）$f(x)$ 为偶函数，故 $b_n = 0$，$n = 1, 2, \cdots$，

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)dx = \frac{3}{4}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cos nx dx = \frac{4(-1)^{n-1}}{n^2},$$

故有，$f(x) = \pi^2 - x^2 \sim \frac{3}{8}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx$.　$(-\pi < x < \pi)$

（9）$f(x) = \operatorname{sgn}\cos x$ 为偶函数，故 $b_n = 0$，$n = 1, 2, \cdots$，

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sgn}\cos x dx = \frac{2}{\pi}(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-1)dx) = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sgn}\cos x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-1)\cos nx dx) = -\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{(2k-1)\pi}(-1)^k, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k, \end{cases} (k = 1, 2, \cdots),$$

所以，$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}\cos(2k-1)x$.

（10）$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}dx = 0$，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nxdx=0\text{，}\quad n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nxdx=\frac{1}{n}\text{，}\quad n=1,2,\cdots,$$

所以，$f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin nx\quad(0<x<2\pi)$.

3．设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 绝对可积，证明：

（1）如果函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi)=f(x)$，则 $a_{2m-1}=b_{2m-1}=0$，$m=1,2,\cdots$；

（2）如果函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi)=-f(x)$，则 $a_{2m}=b_{2m}=0$，$m=1,2,\cdots$.

证明 （1）$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\dfrac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nxdx+\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx)$

$$=\frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nxdx+\int_{-\pi}^{0}f(t+\pi)\cos n(t+\pi)dt)$$

$$=\frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nxdx+(-1)^n\int_{-\pi}^{0}f(t)\cos ntdt)$$

$$=\frac{1}{\pi}[1+(-1)^n]\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nxdx,$$

因此，当 $n=2m-1$ 时，有

$$a_{2m-1}=\frac{1}{\pi}[1+(-1)^{2m-1}]\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(2m-1)xdx=0\text{，}\quad m=1,2,\cdots.$$

同样，

$$b_n=\frac{1}{\pi}[1+(-1)^n]\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nxdx,$$

所以，当 $n=2m-1$ 时，有

$$b_{2m-1}=\frac{1}{\pi}[1+(-1)^{2m-1}]\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin(2m-1)xdx=0\text{，}\quad m=1,2,\cdots.$$

（2）$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\dfrac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nxdx+\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx)$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nxdx+\int_{-\pi}^{0} f(t+\pi)\cos n(t+\pi)dt\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nxdx-(-1)^n\int_{-\pi}^{0} f(t)\cos ntdt\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}[1-(-1)^n]\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nxdx\text{，}$$

故当$n=2m$时，

$$a_{2m}=\frac{1}{\pi}[1-(-1)^{2m}]\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos 2mxdx=0\text{，}\quad m=1,2,\cdots.$$

同样，

$$b_n=\frac{1}{\pi}[1-(-1)^n]\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nxdx\text{，}$$

因此，当$n=2m$时，得$b_{2m}=\dfrac{1}{\pi}[1-(-1)^{2m}]\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin 2mxdx=0$，$m=1,2,\cdots$.

§2　傅里叶级数的收敛性

1．将下列函数展开成 Fourier 级数，并讨论收敛性：

（1）$f(x)=x\sin x$，$x\in[-\pi,\pi]$；

（2）$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0,\pi],\\ 1, & x\in[-\pi,0).\end{cases}$

解　（1）由于$f(x)$在$(-\pi,\pi)$可微，而在$(-\infty,\infty)$处处连续，故在$[-\pi,\pi]$，$f(x)$收敛于其 Fourier 级数，由于$f(x)$是偶函数，因此，$b_n=0$，$n=1,2,\cdots$，

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin xdx=2\text{，}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos nxdx$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2xdx\,, & n=1\,,\\ \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]dx\,, & n>1\end{cases}=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\,, & n=1\,,\\ \dfrac{2(-1)^{n-1}}{n^2-1}\,, & n\geq 2\,,\end{cases}$$

所以，$f(x)=x\sin x=1-\dfrac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2-1}\cos nx$，$x\in[-\pi,\pi]$.

（2）$a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\dfrac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}dx+\int_0^{\pi}x^2dx)=1+\dfrac{1}{3}\pi^2$，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx+\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx)=\frac{2(-1)^n}{n^2}\,,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx+\int_0^{\pi}x^2\sin nxdx)$$

$$=\frac{(-1)^n}{n\pi}[1-(-1)^n-\pi^2+\frac{2}{n^2}(1-(-1)^n)]\,,\qquad n=1,2,\cdots,$$

所以，

$$f(x)\sim\frac{\pi^2+1}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx+\frac{(-1)^n}{n\pi}[1-(-1)^n-\pi^2+\frac{2}{n^2}((-1)^n-1)]\sin nx\}\,.$$

由于 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 逐段可微，而

$$\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{1}{2}\neq 0=f(0)\,,\quad \frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\frac{1+\pi^2}{2}\,,$$

因此，

$$f(x)=\frac{\pi^2+1}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx+\frac{(-1)^n}{n\pi}[1-(-1)^n-\pi^2+\frac{2}{n^2}((-1)^n-1)]\sin nx\}\,,$$

$x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$.

2．由展开式

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi),$$

（1）用逐项积分法求 x^2， x^3， x^4 在 $(-\pi, \pi)$ 中的 Fourier 展开式；

（2）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的和.

解 （1） $\frac{1}{2}x^2 = \int_0^x xdx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\int_0^x \sin nxdx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx + \frac{\pi^2}{6}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

所以，

$$x^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx + \frac{\pi^2}{3}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

$$\frac{1}{3}x^3 = \int_0^x x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}x + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\int_0^x \cos nxdx = \frac{\pi^2}{3}x + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx$$

$$= \frac{2\pi^2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{2}{n^2}\right)\sin nx, \quad x \in (-\pi, \pi),$$

$$\Rightarrow x^3 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}\left(\pi^2 - \frac{6}{n^2}\right)\sin nx, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

$$\frac{1}{4}x^4 = \int_0^x x^3 dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}\left(\pi^2 - \frac{6}{n^2}\right)\int_0^x \sin nxdx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2}(\pi^2-\frac{6}{n^2})\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n^2}(\pi^2-\frac{6}{n^2}),\quad x\in[-\pi,\pi],$$

所以，

$$x^4=\frac{2}{3}\pi^4+48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(\pi^2-\frac{6}{n^2})\cos nx,\quad x\in[-\pi,\pi].$$

（2）由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}=\frac{7}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$，故只须求出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 即可．在（1）中最后一式，令 $x=\pi$，得到

$$\pi^4=\frac{2}{3}\pi^4+48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\pi^2-\frac{6}{n^2})=\frac{2}{3}\pi^4-90\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，就有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90},$$

由此而得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}=\frac{7}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{7\pi^4}{720}.$$

3．（1）在 $(-\pi,\pi)$ 内，求 $f(x)=e^x$ 的 Fourier 展开式；

（2）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ 的和．

解 （1）$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x dx=\frac{1}{\pi}(e^{\pi}-e^{-\pi})$，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\cos nx dx=\frac{(-1)^n}{1+n^2}(e^{\pi}-e^{-\pi}),\quad n=1,2,\cdots,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nxdx = \frac{n(-1)^{n-1}}{1+n^2}(e^{\pi} - e^{-\pi})\text{，}\quad n = 1, 2, \cdots\text{，}$$

所以，$f(x) = e^x \sim \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi}) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(e^{\pi} - e^{-\pi})(\cos nx - n\sin nx)$

由于 $f(x) = e^x$ 在 $(-\pi, \pi)$ 可微，故有

$$f(x) = e^x = \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi}) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(e^{\pi} - e^{-\pi})(\cos nx - n\sin nx)\text{，}\quad x \in (-\pi, \pi)\,.$$

（2）在上式中令 $x = 0$，得

$$1 = e^0 = \frac{1}{\pi} sh\pi + 2sh\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}\,,$$

故有，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{sh\pi} - \frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{e^{\pi} - e^{-\pi}} - \frac{1}{2\pi}\,.$$

4．设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上逐段可微，且 $f(-\pi) = f(\pi)$，a_n, b_n 为 $f(x)$ 的 Fourier 系数，a_n', b_n' 是 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的 Fourier 系数，证明：

$$a_0' = 0, a_n' = nb_n, b_n' = -na_n \quad (n = 1, 2, \cdots)\,.$$

证明 $a_0' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{1}{\pi} f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$，

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdf(x)$$

$$= \frac{1}{\pi} f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = nb_n\,,$$

$$b_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx df(x)$$

$$= \frac{1}{\pi} f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = -n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = -na_n ,$$

$$(n = 1, 2, \cdots) .$$

5．证明：若三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

中的系数 a_n, b_n 满足关系

$$\max\{ \left|n^3 a_n\right|, \left|n^3 b_n\right| \} \le M ,$$

M 为常数，则上述三角级数收敛，且其和数具有连续的导函数．

证明　因为 $\max\{ \left|n^3 a_n\right|, \left|n^3 b_n\right| \} \le M$，故 $\left|n^3 a_n\right| \le M$ 且 $\left|n^3 b_n\right| \le M$，对一切 n 成立，因而 $\left|a_n\right| \le \frac{M}{n^3}$，$\left|b_n\right| \le \frac{M}{n^3}$ 对一切 n 成立，三角级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 中一般项 $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ 满足，对 $x \in (-\infty, \infty)$，

$$\left|a_n \cos nx + b_n \sin nx\right| \le \left|a_n\right| + \left|b_n\right| \le \frac{2M}{n^3} .$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2M}{n^3}$ 收敛，用 M 判别法，三角级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 绝对收敛，设其和函数为 $f(x)$，则由于逐次求导后的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-na_n \sin nx + nb_n \cos nx)$ 满足

$$\left|-na_n \sin nx + nb_n \cos nx\right| \le n(\left|a_n\right| + \left|b_n\right|) \le \frac{2M}{n^2}，\quad x \in (-\infty, \infty) ,$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2M}{n^2}$收敛，由$M$判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin nx+nb_n\cos nx)$在$(-\infty,\infty)$一致收敛，因此由函数项级数逐项求导定理，知$f(x)$在$(-\infty,\infty)$可导，且

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin nx+nb_n\cos nx),$$

而且由于对一切n，$-na_n\sin nx+nb_n\cos nx$在$(-\infty,\infty)$连续，因而由和函数的连续性知$f'(x)$在$(-\infty,\infty)$连续.

6．设$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ ，求证：

$$T_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt.$$

证明 象§14.1 习题 2（1）类似地计算可得$T_n(x)$的 Fourier 系数为

$$a_0'=a_0,\quad a_k'=\begin{cases}a_k, & k\le n,\\ 0, & k>n,\end{cases}\quad b_k'=\begin{cases}b_k, & k\le n,\\ 0, & k>n,\end{cases}\quad n=1,2,\cdots,$$

因而$T_n(x)$的 Fourier 级数为

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

而$T_n(x)$同时也是其 Fourier 系数的前n项部分和，因而有

$$T_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt.$$

7．设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $(0, 2\pi)$ 上单调递减，且有界，求证：$b_n \ge 0(n>0)$.

证明 由 $f(x)$ 的假设知道，$\forall n>0$，$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$ 存在．将 $[-\pi, \pi]$ n 等份，则有

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi+(k-1)\frac{2\pi}{n}}^{-\pi+k\frac{2\pi}{n}} f(x)\sin nxdx$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}[\int_{-\pi+(k-1)\frac{2\pi}{n}}^{-\pi+(k-\frac{1}{2})\frac{2\pi}{n}} f(x)\sin nxdx + \int_{-\pi+(k-\frac{1}{2})\frac{2\pi}{n}}^{-\pi+k\frac{2\pi}{n}} f(x)\sin nxdx]$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}[\int_{-\pi+(k-1)\frac{2\pi}{n}}^{-\pi+(k-\frac{1}{2})\frac{2\pi}{n}} f(x)\sin nxdx - \int_{-\pi+(k-1)\frac{2\pi}{n}}^{-\pi+(k-\frac{1}{2})\frac{2\pi}{n}} f(t+\frac{\pi}{n}x)\sin ntdt],$$

这是在和号中后一积分中令 $x = t+\frac{\pi}{n}$ 换元后得到的．由此得

$$b_n = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi+(k-1)\frac{2\pi}{n}}^{-\pi+(k-\frac{1}{2})\frac{2\pi}{n}}[f(x)-f(x+\frac{\pi}{n})]\sin nxdx,$$

由于 $f(x)$ 在以 2π 为周期，在 $(0, 2\pi)$ 上单调递减，故 $f(x)-f(x+\frac{\pi}{n})\ge 0$，又在区间 $[-\pi+(k-1)\frac{2\pi}{n}, -\pi+(k-\frac{1}{2})\frac{2\pi}{n}]$ 上 $\sin nx \ge 0$，因此以上等式右端和号中每一个积分都非负，因而 $b_n \ge 0(n>0)$.

8．设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $(0, 2\pi)$ 上导数 $f'(x)$ 单调上升有界，求证：$a_n \ge 0(n>0)$.

证明 $\forall n>0$，有

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f(x)d\sin nx$$

$$= \frac{1}{n\pi}(f(x)\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x)\sin nxdx) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}[-f'(x)]\sin nxdx,$$

由于 $f'(x)$ 以 2π 为周期，在 $(0, 2\pi)$ 上单调上升有界，故 $-f'(x)$ 以 2π 为周期，在 $(0, 2\pi)$ 上单调减少有界，直接由上题结论，即知 $a_n \ge 0(n>0)$.

9．证明：若 $f(x)$ 在 x_0 点满足 α 阶的 Lipschitz 条件，则 $f(x)$ 在 x_0 点连续．给出一个表明这论断的逆命题不成立的例子．$(\alpha>0)$

证明 由于 $f(x)$ 在 x_0 点满足 α 阶 $(\alpha>0)$ 的 Lipschitz 条件，故 $\exists\delta_0>0$，常数 $M>0$，使得当 $|x-x_0|\le\delta_0$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|\le M|x-x_0|^{\alpha},$$

因此，不妨设 $|x-x_0|\le\delta_0$．$\forall\varepsilon>0$，要使 $|f(x)-f(x_0)|\le M|x-x_0|^{\alpha}<\varepsilon$，只须 $|x-x_0|<\left(\dfrac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$，取 $\delta=\min\{\delta_0,\left(\dfrac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\}>0$，则当 $|x-x_0|\le\delta$ 时，就有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

因此 $f(x)$ 在 x_0 点连续．

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln|x|}, & x\ne0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则由于 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\ln|x|}=0=f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续．但 $\forall\alpha>0$，由于 $\lim\limits_{x\to0}|x|^{\alpha}\ln|x|=0$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{|x|^{\alpha}\ln|x|}=\infty$，故 $\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x|<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{1}{|x|^{\alpha}\ln|x|}\right|>M$，即 $\left|\dfrac{1}{\ln|x|}-0\right|>M|x-0|^{\alpha}$ 或 $|f(x)-f(0)|>M|x-0|^{\alpha}$ 对一切 $0<|x|<\delta$ 成立．即 $f(x)$ 在 $x=0$ 点不满足任意阶的 Lipschitz 条件．

10．设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，在 $[-\pi,\pi]$ 绝对可积，又设 $S_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 级数的前 n 项部分和

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

则 $$S_n(x)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}D_n(2t)dt\text{，}$$

其中 $D_n(t)$ 是 Dirichlet 核.

证明 $$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)dt$$

$$\overset{t=2u}{=}\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x+2u)+f(x-2u)]D_n(2u)2du$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}D_n(2t)dt\text{.}$$

11．设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $(-\infty,\infty)$ 连续，它的 Fourier 级数在 x_0 点收敛．求证：$S_n(x_0)\to f(x_0)\ (n\to\infty)$.

证明 由于 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，它的 Fourier 级数在 x_0 点收敛，故可设其 Fourier 级数在 x_0 点收敛于 S ．则必有

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=S\text{，}$$

由此可得，

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(x_0)=S\text{，}$$

但由 Fejer 定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(x_0)=f(x_0)$，因此 $S=f(x_0)$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x_0)=f(x_0)$.

12．设 $f(x)$ 以 2π 为周期、连续，其 Fourier 系数全为 0，则 $f(x)=0$.

证明　$\forall x_0 \in (-\infty, \infty)$，由 $f(x)$ 的 Fourier 系数全为 0，因而其 Fourier 级数在 x_0 点收敛于 0，由上题结论知其 Fourier 级数在 x_0 点又收敛于 $f(x_0)$，因此 $f(x_0)=0$，由 $x_0 \in (-\infty, \infty)$ 的任意性，知 $f(x)=0$.

13．设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi, \pi]$ 绝对可积，又设 $x_0 \in (-\pi, \pi)$ 满足

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2} = L$$

存在．证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x_0) = L$．进一步，若 $f(x)$ 在 x_0 连续，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x_0) = f(x_0)$，其中 $\sigma_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} S_k(x)$.

证明　类似于 Fejer 定理的证明，有

$$\sigma_n(x_0) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(x_0) = \frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt$$

$$= \frac{1}{2(n+1)\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x_0+t)\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt + \int_{0}^{\pi} f(x_0+t)\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt\right)$$

$$= \frac{1}{2(n+1)\pi}\left(-\int_{\pi}^{0} f(x_0-u)\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}\right]^2 du + \int_{0}^{\pi} f(x_0+t)\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt\right)$$

$$= \frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{0}^{\pi} \left[f(x_0+t)+f(x_0-t)\right]\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt\ .$$

由 Fejer 核的性质，$\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt=1$，得到$\frac{L}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt=L$，所以，

$$\sigma_n(x_0)-L=\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}-L\right]\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt\ .$$

$\forall\varepsilon>0$，由于$\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}=L$，知$\exists\delta>0$（不妨设$\delta<\pi$），使得只要$0<t<\delta$，就有$\left|\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}-L\right|<\frac{\varepsilon}{2}$．因此，

$$\left|\sigma_n(x_0)-L\right|\le\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}-L\right|\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt$$

$$=\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\delta}\left|\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}-L\right|\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt$$

$$+\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left|\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}-L\right|\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt$$

$$=\mathrm{I}+\mathrm{II},$$

而 $\mathrm{I}<\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{(n+1)\pi}\int_0^{\delta}\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt\le\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt=\frac{\varepsilon}{2}$.

为估计 II，首先容易证明，当 $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 时，$|\sin t|\ge\frac{2}{\pi}|t|$，因而当 $t\in[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$ 时，$\frac{1}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\le\frac{\pi}{2}\frac{2}{|t|}=\frac{\pi}{|t|}$，由此得到当 $\delta\le t\le\pi$ 时，$\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\le\frac{\pi}{t}$．因此，

$$\mathrm{II}\le\frac{1}{(n+1)\pi}\int\left|\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}-L\right|\left(\frac{\pi}{t}\right)^2dt$$

$$\le\frac{\pi}{n+1}\left(\int_\delta^\pi\left|\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}-L\right|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\delta^\pi\frac{1}{t^4}dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

由于 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 绝对可积，因而 $\exists M>0$，使得

$$\left(\int_\delta^\pi\left|\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}-L\right|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\le M\ .$$

所以，

$$\mathrm{II}\le\frac{\pi M}{n+1}\left(\int_\delta^\pi\frac{1}{t^4}dt\right)^{\frac{1}{2}}\le\frac{\pi M}{(n+1)\delta^{3/2}\sqrt{3}}<\frac{\pi M}{(n+1)\delta^{3/2}}\ .$$

取 $N=\left[\frac{2\pi M}{\varepsilon\delta^{3/2}}\right]$，则当 $n>N$ 时，有 $\mathrm{II}<\frac{\varepsilon}{2}$，从而当 $n>N$ 时，有

$$|\sigma_n(x_0)-L|\le\mathrm{I}+\mathrm{II}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\ ,$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(x_0)=L$．进一步，若 $f(x)$ 在 x_0 连续，则 $L=f(x_0)$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(x_0)=f(x_0)$．

§3 任意区间上的傅里叶级数

1．将下列函数在指定区间上展开为 Fourier 级数，并讨论其收敛性：

（1）在区间 $(0, 2l)$ 展开

$$f(x)=\begin{cases}A, 0<x<l,\\ 0, l\le x<2l;\end{cases}$$

（2）$f(x)=x\cos x$，$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$；

（3）$f(x)=x$，$(0,l)$；

（4）$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1<x<2,\\ 3-x, & 2\le x\le 3.\end{cases}$

解　（1）$a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^{2l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{1}{l}\int_0^{l}A\cos\frac{n\pi}{l}xdx=\begin{cases}A, n=0,\\ 0, n=1,2,\cdots,\end{cases}$

$b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^{2l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{1}{l}\int_0^{l}A\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{A}{n\pi}(1-(-1)^n)$，$n=1,2,\cdots$，

所以，

$$f(x)\sim\frac{A}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{n\pi}(1-(-1)^n)\sin\frac{n\pi}{l}x=\frac{A}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A}{(2n-1)\pi}\sin\frac{(2n-1)\pi}{l}x.$$

由于 $f(x)$ 在 $(0,2l)$ 逐段可微，故有

$$f(x)=\frac{A}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A}{(2n-1)\pi}\sin\frac{(2n-1)\pi}{l}x,\quad x\in(0,l)\cup(l,2l).$$

（2）由于 $f(x)=x\cos x$ 是 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 的奇函数，因此 $a_n=0$，$n=0,1,2,\cdots$.

$$b_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin 2nxdx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\sin 2nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x[\sin(2n+1)x+\sin(2n-1)x]dx=\frac{16n(-1)^{n-1}}{(4n^2-1)^2},\quad n=1,2,\cdots,$$

且 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 可微，因此

$$f(x)=\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx\,,\quad x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\,.$$

（3）$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\frac{2}{l}\int_0^l xdx=l$，

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{2n\pi}{l}xdx=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{2n\pi}{l}xdx=0\,,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{2n\pi}{l}xdx=\frac{2}{l}\int_0^l x\sin\frac{2n\pi}{l}xdx=-\frac{l}{n\pi}\,,\quad n=1,2,\cdots,$$

由于 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 可微，故

$$f(x)=\frac{l}{2}-\frac{l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi}{l}x\,,\quad x\in(0,l)\,.$$

（4）$a_0=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)dx=\frac{2}{3}(\int_0^1 xdx+\int_1^2 1dx+\int_2^3(3-x)dx)=\frac{4}{3}$，

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\frac{2n\pi}{3}xdx\\&=\frac{2}{3}(\int_0^1 x\cos\frac{2n\pi}{3}xdx+\int_1^2\cos\frac{2n\pi}{3}xdx+\int_2^3(3-x)\cos\frac{2n\pi}{3}xdx)\\&=-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}+\frac{3}{n^2\pi^2}(\cos\frac{2n\pi}{3}-1)\,,\qquad n=1,2,\cdots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\sin\frac{2n\pi}{3}xdx\\&=\frac{2}{3}(\int_0^1 x\sin\frac{2n\pi}{3}xdx+\int_1^2\sin\frac{2n\pi}{3}xdx+\int_2^3(3-x)\sin\frac{2n\pi}{3}xdx)\\&=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{3}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}\,,\qquad n=1,2,\cdots,\end{aligned}$$

且 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上逐段可微，连续，故

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\{[-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}+\frac{3}{n^2\pi^2}(\cos\frac{2n\pi}{3}-1)]\cos\frac{2n\pi}{3}x\\&\qquad+(-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{3}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3})\sin\frac{2n\pi}{3}x\}\\&=\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}[-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}(x+1)+\frac{3}{n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi}{3}(x-1)-\frac{3}{n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi}{3}x]\,,\\&\qquad\qquad x\in[0,3]\,.\end{aligned}$$

2．求下列周期函数的 Fourier 级数：

（1）$f(x)=|\cos x|$；

（2） $f(x)=x-[x]$.

解 （1）这是周期为π的函数，且$f(x)$在$(-\infty,\infty)$连续，逐段可微，又是偶函数，故$b_n=0$，$n=1,2,\cdots$.

$$a_0=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x|dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\frac{4}{\pi},$$

$$a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nxdx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(2n+1)x+\cos(2n-1)x]dx=\frac{4(-1)^{n-1}}{(4n^2-1)\pi},\quad n=1,2,\cdots,$$

所以，

$$f(x)=|\cos x|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos 2nx,\quad x\in(-\infty,\infty).$$

（2）该函数周期为 1，逐段可微，所有整数点是第一类间断点.

$$a_0=2\int_0^1(x-[x])dx=2\int_0^1 xdx=1$$

$$a_n=2\int_0^1(x-[x])\cos 2n\pi xdx=2\int_0^1 x\cos 2n\pi xdx=0,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=2\int_0^1(x-[x])\sin 2n\pi xdx=2\int_0^1 x\sin 2n\pi xdx=-\frac{1}{n\pi},\quad n=1,2,\cdots$$

所以，

$$f(x)=x-[x]=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2n\pi x,\quad x\in(-\infty,\infty)\text{且}x\notin Z.$$

3．把下列函数在指定区间上展开为余弦函数：

（1） $f(x)=\sin x$，$0\le x\le\pi$；

（2） $f(x)=\begin{cases}1-x, & 0<x\le 2,\\ x-3, & 2<x<4.\end{cases}$

解 根据偶延拓计算 Fourier 系数.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx=\frac{4}{\pi},$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nxdx=\begin{cases}0, & n=1,\\ \dfrac{2}{\pi(n^2-1)}[(-1)^{n-1}-1], & n>1,\end{cases}\quad n=1,2,\cdots,$$

因此，

$$f(x)=\sin x=\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}-1}{n^2-1}\cos nx=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx\text{，}\quad x\in[0,\pi]\text{.}$$

（2）根据偶延拓计算 Fourier 系数.

$$a_0=\frac{2}{4}\int_0^4 f(x)dx=\frac{1}{2}(\int_0^2(1-x)dx+\int_2^4(x-3)dx)=0\text{，}$$

$$a_n=\frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi}{4}xdx=\frac{1}{2}(\int_0^2(1-x)\cos\frac{n\pi}{4}xdx+\int_2^4(x-3)\cos\frac{n\pi}{4}xdx)$$

$$=\frac{8}{n^2\pi^2}[1+(-1)^n]\text{，}\qquad n=1,2,\cdots\text{，}$$

所以，

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2\pi^2}[1+(-1)^n]\cos\frac{n\pi}{4}x=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}x\text{，}\quad x\in(0,4)\text{.}$$

4．把下列函数在指定区间上展开为正弦级数：

（1）$f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$，$0\le x\le\pi$；

（2）$f(x)=x^2$，$0\le x\le 2$.

解　（1）根据奇延拓计算 Fourier 系数，

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(n+\frac{1}{2})x+\sin(n-\frac{1}{2})x]dx$$

$$=\frac{4}{\pi(4n^2-1)}\text{，}\qquad n=1,2,\cdots\text{，}$$

所以，

$$f(x)=\cos\frac{x}{2}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\sin nx\text{，}\quad 0<x\le\pi\text{ .}$$

（2）根据奇延拓计算 Fourier 系数，

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi}{2}xdx=\int_0^2 x^2\sin\frac{n\pi}{2}xdx=\frac{8}{n\pi}(-1)^{n-1}+\frac{16}{n^3\pi^3}[(-1)^n-1]\text{，}$$

$$n=1,2,\cdots\text{，}$$

得到，

$$f(x)=x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{8}{n\pi}(-1)^{n-1}+\frac{16}{n^3\pi^3}[(-1)^n-1]\}\sin\frac{n\pi}{2}x$$

$$=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}[n^2\pi^2(-1)^{n-1}+2(-1)^n-2]\sin\frac{n\pi}{2}x\text{，}\quad 0\le x<2\text{ .}$$

5．把函数 $f(x)=(x-1)^2$ 在 $(0,1)$ 上展开成余弦级数，并推出

$$\pi^2 = 6(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots).$$

解 按偶延拓计算 Fourier 系数，

$a_0 = 2\int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{2}{3}$，

$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx = 2\int_0^1 (x-1)^2 \cos n\pi x dx = \frac{4}{n^2\pi^2}$，$n=1,2,\cdots$，

所以，

$$f(x) = (x-1)^2 = \frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos n\pi x，(0,1).$$

既使扩充 $f(x)$ 的定义于 $(-\infty,\infty)$ 成为偶延拓后的周期为 2 的函数 $F(x)$，亦有其 Fourier 级数收敛于 $F(x)$，而在所有点 $F(x)$ 均连续，而 $F(0)=f(0)=1$，在上式中令 $x=0$，就有 $1=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，即 $\pi^2 = 6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

6．将函数 $f(x)$ 分别做奇延拓和偶延拓后，求函数的 Fourier 级数，其中

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}, & x=\frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2}<x\le\pi.\end{cases}$$

解 根据奇延拓计算 Fourier 系数.

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nx dx = \frac{2}{n\pi}(1-\cos\frac{n\pi}{2})$，$n=1,2,\cdots$，

所以，Fourier 级数为正弦级数

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-\cos\frac{n\pi}{2})\sin nx，x\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi).$$

根据偶延拓计算 Fourier 系数为

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = 1$，

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx dx = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$，$n=1,2,\cdots$，

因此，余弦级数为

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\cos nx\text{，}\quad x\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]\,.$$

7．应当如何把给定的区间$(0,\frac{\pi}{2})$的可积函数延拓到区间$(-\pi,\pi)$内，使得他在$(-\pi,\pi)$中对应的 Fourier 级数为：

（1）$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\cos(2n-1)x$；

（2）$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}\sin(2n-1)x$.

解　（1）先进行偶延拓至$(-\frac{\pi}{2},0)$，再由§14·1 习题 3 知按$f(x+\pi)=-f(x)$进行延拓至$(-\pi,-\frac{\pi}{2})$，$(\frac{\pi}{2},\pi)$，最后进行周期延拓，则$f(x)$在$(-\pi,\pi)$的 Fourier 系数$b_n=0$，$n=1,2,\cdots$，而由§14·1 习题 3 知$a_{2n}=0$，$n=0,1,2,\cdots$，所以，

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\cos(2n-1)x\,.$$

（2）先进行奇延拓至$(-\frac{\pi}{2},0)$，再由§14·1 习题 3 知按$f(x+\pi)=-f(x)$进行延拓至$(-\pi,-\frac{\pi}{2})$，$(\frac{\pi}{2},\pi)$，最后进行周期延拓，则$f(x)$在$(-\pi,\pi)$的 Fourier 系数$a_n=0$，$n=1,2,\cdots$，而由§14·1 习题 3 知$b_{2n}=0$，$n=1,2,\cdots$，所以，

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}\sin(2n-1)x\,.$$

§4　傅里叶级数的平均收敛性

1．若$f(x)$，$g(x)$以2π为周期，在$[-\pi,\pi]$平方可积，

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,,$$

$$g(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)\,,$$

则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)g(x)\right|dx=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)\,.$$

证明 由于$f(x)$，$g(x)$以2π为周期，在$[-\pi,\pi]$平方可积，故$f(x)\pm g(x)$均以2π为周期，在$[-\pi,\pi]$平方可积，由 Paseval 等式，有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)\pm g(x)\right|dx=\frac{(a_0\pm\alpha_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[(a_n\pm\alpha_n)^2+(b_n\pm\beta_n)^2]，$$

二式相减得

$$\frac{4}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)g(x)\right|dx=2a_0\alpha_0+4\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)，$$

即，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)g(x)\right|dx=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)．$$

2．设$f(x)$在$[0,l]$平方可积，求证：

$$\frac{2}{l}\int_0^l f^2(x)dx=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2，$$

其中

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx．$$

证明 对$f(x)$作偶延拓，延拓后的函数$F(x)$在$[-l,l]$平方可积．令$x=\frac{l}{\pi}t$，则$F(x)=F(\frac{l}{\pi}t)=G(t)$在$[-\pi,\pi]$平方可积，且为$[-\pi,\pi]$上的偶函数，其 *Fourier* 级数为$G(t)\sim$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}，$$

其中

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}G(t)\cos nt dt=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx．$$

由 Paseval 等式，有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G^2(t)dt=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2，$$

上式左边作积分变换$t=\frac{\pi}{l}x$，并注意到是偶函数在对称区间上的积分即得

$$\frac{2}{l}\int_0^l f^2(x)dx=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2．$$

第十六章　偏导数与全微分

§1 偏导数与全微分的概念

1．求下列函数的偏导数：

（1）$u = x^2 \ln(x^2 + y^2)$；

（2）$u = (x+y)\cos(xy)$；

（3）$u = \arctan\dfrac{y}{x}$；

（4）$u = xy + \dfrac{x}{y}$；

（5）$u = xye^{\sin(xy)}$；

（6）$u = x^y + y^x$．

解（1）$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x\ln(x^2 + y^2) + x^2\dfrac{2x}{x^2 + y^2} = 2x[\ln(x^2 + y^2) + \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}]$；

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2\frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

（2）$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \cos(xy) + (x+y)(-\sin(xy))y = \cos(xy) - y(x+y)\sin(xy)$；由 x， y 的对称性，$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \cos(xy) - x(x+y)\sin(xy)$．

（3）$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{1+(\dfrac{y}{x})^2}(-\dfrac{y}{x^2}) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$；　　$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{1+(\dfrac{y}{x})^2}\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$．

（4）$\dfrac{\partial u}{\partial x} = y + \dfrac{1}{y}$，　$\dfrac{\partial u}{\partial y} = x - \dfrac{x}{y^2}$．

（5）$\dfrac{\partial u}{\partial x} = ye^{\sin(xy)} + xye^{\sin(xy)}\cos(xy)y = y(1 + xy\cos(xy))e^{\sin(xy)}$，根据 x， y 的对称性，$\dfrac{\partial u}{\partial y} = x(1 + xy\cos(xy))e^{\sin(xy)}$．

（6）$\dfrac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1} + y^x \ln y$；　$\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x + xy^{x-1}$．

2．设

$$f(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

考察函数在 $(0,0)$ 点的偏导数.

解 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$，即 $f_x(0,0)=0$，而

$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta y\sin\frac{1}{\Delta y^2}-0}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\sin\dfrac{1}{(\Delta y)^2}$ 不存在，$f_y(0,0)$ 不存在.

3．证明函数 $u=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 点连续但偏导数不存在.

证明 显然 $u=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 点连续，但

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

不存在，由对称性 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y u(0,0)}{\Delta y}$ 不存在，因而 $u=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 点的两个偏导数均不存在.

4．求下列函数的全微分：

（1）$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；

（2）$u=xe^{yz}+e^{-x}+y$.

解（1）$du=d\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}d(x^2+y^2+z^2)$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(xdx+ydy+zdz)$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dy+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz.$$

（2）$du=d(xe^{yz}+e^{-x}+y)=e^{yz}dx+xe^{yz}(zdy+ydz)-e^{-x}dx+dy$

$$=(e^{yz}-e^{-x})dx+(xze^{yz}+1)dy+xye^{yz}dz.$$

5．求下列函数在给定点的全微分：

（1）$u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在点 $(1,0)$ 和 $(0,1)$；

（2）$u=\ln(x+y^2)$ 在点 $(0,1)$ 和 $(1,1)$；

（3）$u=\sqrt[z]{\dfrac{x}{y}}$ 在点 $(1,1,1)$；

（4）$u=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ 在点 $(0,1)$.

解（1）$du=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+xd(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}-x\dfrac{1}{2(\sqrt{x^2+y^2})^3}d(x^2+y^2)$

$$=\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}(xdx+ydy)=\frac{y^2dx-xydy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}},$$

所以，在点 $(1,0)$，$du=0$，在点 $(0,1)$，$du=dx$.

（2）$du=\dfrac{1}{x+y^2}(dx+2ydy)=\dfrac{1}{x+y^2}dx+\dfrac{2y}{x+y^2}dy$，在点 $(0,1)$，$du=dx+2dy$；在点 $(1,1)$，$du=\dfrac{1}{2}dx+dy$.

（3）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{yz}(\dfrac{x}{y})^{\frac{1}{z}-1}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2z}(\dfrac{x}{y})^{\frac{1}{z}-1}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{1}{z^2}(\dfrac{x}{y})^{\frac{1}{z}}\ln\dfrac{x}{y}$，所以，

$$du=\frac{1}{yz}(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}-1}dx-\frac{x}{y^2z}(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}-1}dy-\frac{1}{z^2}(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}}\ln\frac{x}{y}dz,$$

故在 $(1,1,1)$ 有，$du=dx-dy$.

（4）函数的定义域为 $\{(x,y):0\le x\le y\ \ or\ \ 0\le y\le x\}$. 当 $x\ne 0$ 时，有

$$du=dx+\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}dy+(y-1)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\frac{ydx-xdy}{y^2}$$

$$=(1+\frac{(y-1)\operatorname{sgn}y}{2\sqrt{xy-x^2}})dx+(\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}+\frac{x(1-y)\operatorname{sgn}y}{2y\sqrt{xy-x^2}})dy,$$

而当 $x=0$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}(1+\dfrac{y-1}{\sqrt{x}\sqrt{y}}\dfrac{\arcsin\sqrt{x/y}}{\sqrt{x/y}})$ 不存在，所以在 $(0,y)$，

$f_x(0,y)$不存在，虽然$f_y(0,y)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,y+\Delta y)-f(0,y)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{0}{\Delta y}=0$，但在点$(0,y)$，$du$不存在，因而$u=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$在点$(0,1)$不可微.

6．考虑函数$f(x,y)$在$(0,0)$点的可微性，其中

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

解 因为$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$，所以$f_x(0,0)=0$，由对称性，$f_y(0,0)=0$．若函数$f(x,y)$在$(0,0)$可微，则按可微的定义，应有

$$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\Delta x\Delta y\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

是比$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$更高阶的无穷小，为此考察极限

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

由于

$$\left|\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}\right|\le\frac{|\Delta x||\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\le\frac{\frac{1}{2}(\Delta x^2+\Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}},$$

所以，$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=0$，故$f(x,y)$在$(0,0)$可微.

7．证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

在$(0,0)$点连续且偏导数存在，但在此点不可微.

证明 因为$\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=|x|\cdot\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right|\le\dfrac{1}{2}|x|$，所以$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，即$f(x,y)$在点

$(0,0)$ 点连续，又

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0\,,$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to o}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0\,,$$

所以，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

若函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微，则应有

$$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\frac{\Delta x^2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

是比 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 更高阶的无穷小量，为此考察极限

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{1}{\rho}\frac{\Delta x^2\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x^2\Delta y}{(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})^3}\,,$$

令 $\Delta y=\Delta x$ ，当 $(\Delta x,\Delta y)$ 沿直线 $\Delta y=\Delta x$ 趋于 $(0,0)$ 时，$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\dfrac{\Delta x^2\Delta y}{(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})^3}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{|\Delta x|}$ 不存在，即

$\dfrac{\Delta x^2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 不是比 ρ 更高阶的无穷小量，因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微.

8．证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\,, & x^2+y^2\neq 0\,,\\ 0\,, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的偏导数存在，但偏导数在 $(0,0)$ 点不连续，且在 $(0,0)$ 点的任何邻域中无界，而 f 在原点 $(0,0)$ 可微.

证明
$$f_x(x,y)=\begin{cases}2x(\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{1}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2})\,, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0\,, & x^2+y^2=0\,,\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}2y(\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{1}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f_x(x,y)$ 不存在，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f_y(x,y)$ 也不存在，因而 $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点均不连续.

$\forall \delta > 0, \forall M > 0, \exists n$，使$\frac{1}{\sqrt{2n\pi}} < \delta$且$2\sqrt{2n\pi} > M$，但$P_n(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},0) \in \mathrm{O}(P,\delta)$，

$P_n'(0,\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}) \in \mathrm{O}(P,\delta)$时，而由于

$$\left|f_x(P_n)\right| = \left|f_x(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},0)\right| = 2\sqrt{2n\pi} > M,$$

$$\left|f_y(P_n')\right| = \left|f_x(0,\frac{1}{\sqrt{2n\pi}})\right| = 2\sqrt{2n\pi} > M,$$

所以，$f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$在$(0,0)$点的任何邻域中均无界.

但由于

$$\frac{f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0) - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}$$

$$= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\sin\frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0\ ((\Delta x,\Delta y) \to (0,0)),$$

所以，$f(x,y)$在$(0,0)$可微，且在$(0,0)$的微分$df(0,0) = 0$.

9．设

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^4}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

证明$\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial f}{\partial y}$在$(0,0)$点连续.

证明 $\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$

因为$\frac{\left|2xy^4\right|}{\left|x^2+y^2\right|^2} \le \frac{|y|^3}{x^2+y^2} \le |y|$，所以$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = f_x(0,0)$，即$f_x(x,y)$在$(0,0)$连续，

由对称性，$\frac{\partial f}{\partial y}$亦在$(0,0)$点连续.

10．设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微，并求 $df(0,0)$.

证明 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1-e^{\Delta x^3}}{\Delta x^3}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-\Delta x^3+o(\Delta x^3)}{\Delta x^3}=-1$， $f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}0=0$，

$$\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}$$

$$=\frac{1}{\rho}\left(\frac{1-e^{\Delta x(\Delta x^2+\Delta y^2)}}{\Delta x^2+\Delta y^2}+\Delta x\right)=\frac{1+\Delta x(\Delta x^2+\Delta y^2)-e^{\Delta x(\Delta x^2=\Delta y^2)}}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}\Delta x^2(\Delta x^2+\Delta y^2)^2+o(\Delta x^2(\Delta x^2+\Delta y^2)^2}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{1}{2}\Delta x^2(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{1}{2}}+o(\Delta x^2(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{1}{2}})\to 0\ ((\Delta x,\Delta y)\to(0,0)),$$

所以， $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微，且 $df(0,0)=-\Delta x=-dx$.

11．设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

（1） $x=x(t),\ y=y(t)$ 是通过原点的任意可微曲线（即 $x^2(0)+y^2(0)=0,\ t\neq 0$ 时，$x^2(t)+y^2(t)\neq 0,\ x(t),\ y(t)$ 可微）．求证 $f(x(t),y(t))$ 可微；

（2） $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微．

证明（1）设 $\varphi(t)=f(x(t),y(t))=\begin{cases}\dfrac{x^3(t)}{x^2(t)+y^2(t)}, & t\neq 0,\\ 0, & t=0,\end{cases}$，所以

$$\varphi'(t)=\frac{x^2(t)[x^2(t)x'(t)+3y^2(t)x'(t)-2x(t)y(t)y'(t)]}{[x^2(t)+y^2(t)]^2},\ t\neq 0,$$

而在 $t=0$ ，由于 $\varphi'(0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{x^3(t)}{t(x^2(t)+y^2(t))}$ ，若 $x'(0)\neq 0,$ 则

$$\varphi'(0)=\lim_{t\to 0}(\frac{x(t)}{t})^3\frac{1}{(\frac{x(t)}{t})^2+(\frac{y(t)}{t})^2}=[x'(0)]^3\frac{1}{[x'(0)]^2+[y'(0)]^2},$$

若 $x'(0)=0,$ 则由于 $\left|\frac{x^3(t)}{t(x^3(t)+y^2(t))}\right|\le\left|\frac{x(t)}{t}\right|$，而 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{x(t)}{t}=x'(0)=0$，

所以，$\lim\limits_{t\to 0}\frac{x^3(t)}{t(x^2(t)+y^2(t))}=0$，即 $\varphi'(0)=0$．故 $f(x(t),y(t))$ 可微.

（2）$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=1$；

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0,$$

若函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微，则按可微的定义，应有

$$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-(f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y)$$

$$=\frac{\Delta x^3}{\Delta x^2+\Delta y^2}-\Delta x=-\frac{\Delta x\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

是比 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 更高阶的无穷小，为此考察极限

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{1}{\rho}(-\frac{\Delta x\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2})=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{-\Delta x\Delta y^2}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

设 $\Delta y=\Delta x$，则有

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{-\Delta x\Delta y^2}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x^3}{(2\Delta x^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{|\Delta x|},$$

该极限不存在，因而 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{1}{\rho}(\frac{-\Delta x\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2})$ 不是比 ρ 更高阶的无穷小量，因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微.

12．设 $|x|,|y|$ 很小，利用全微分推出下列各式的近似公式：

（1）$(1+x)^m(1+y)^n$；

（2）$\arctan\frac{x+y}{1+xy}$.

解（1）$f_x(x,y)=m(1+x)^{m-1}(1+y)^n$，$f_y(x,y)=n(1+x)^m(1+y)^{n-1}$，因而，

$$f_x(0,0)=m\text{，}\quad f_y(0,0)=n\text{，}$$

$$(1+x)^m(1+y)^n=f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+o(\rho)=1+mx+ny+o(\sqrt{x^2+y^2})\text{，}$$

因此，当$|x|,|y|$很小时，$(1+x)^m(1+y)^n\approx 1+mx+ny$．

（2）$f_x(x,y)=\dfrac{1}{1+(\frac{x+y}{1+xy})^2}\dfrac{1-y^2}{(1+xy)^2}=\dfrac{1-y^2}{(1+xy)^2+(x+y)^2}$，由对称性，

$$f_y(x,y)=\frac{1-x^2}{(1+xy)^2+(x+y)^2}\text{，}$$

所以，$f_x(0,0)=1=f_y(0,0)$，而$f(0,0)=\arctan 0=0$，故$\arctan\dfrac{x+y}{1+xy}=x+y+o(\rho)$，因此，当$|x|,|y|$很小时，$\arctan\dfrac{x+y}{1+xy}\approx x+y$．

13．设$u=f(x,y)$在矩形：$a<x<b,c<y<d$内可微，且全微分du恒为零，问$f(x,y)$在该矩形内是否应取常数值？证明你的结论．

解　$f(x,y)$在该矩形内应取常数值．证明如下：

由于$u=f(x,y)$在矩形内可微，故$\forall(x,y)\in(a,b)\times(c,d)$，因为

$$du=f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy\equiv 0\text{，}$$

所以，

$$f_x(x,y)\equiv 0\text{，}\quad f_y(x,y)\equiv 0\text{，}$$

故取定$P_0(x_0,y_0)\in$该矩形，有

这里是采用了构造差分的方法

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=[f(x,y)-f(x_0,y)]+[f(x_0,y)-f(x_0,y_0)]$$

$$=f_x(x_0+\theta_1(x-x_0),y)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0+\theta_2(y-y_0))(y-y_0)$$

$$=0\quad(0<\theta_1<1,0<\theta_2<1)\text{，}$$

所以，$f(x,y)=f(x_0,y_0)\equiv C$，即$f(x,y)$取常数值$C=f(x_0,y_0)$．

14．设$\dfrac{\partial f}{\partial x}$在$(x_0,y_0)$存在，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$在$(x_0,y_0)$连续，求证$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$可微．

证明 $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$

$$=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x, y_0)+f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0),$$

由于$\dfrac{\partial f}{\partial y}$在$(x_0, y_0)$连续，因而在$P_0(x_0, y_0)$存在，由一元函数的 Lagrange 中值定理，知$\exists\theta: 0<\theta<1$，使得

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x, y_0)=f_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y,$$

由于$\dfrac{\partial f}{\partial y}$在$(x_0, y_0)$连续，故$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta\Delta y)=f_y(x_0, y_0)$，所以

$$f_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta\Delta y)=f_y(x_0, y_0)+\beta，其中\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta=0.$$

而对$f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)$，设$\Phi(x)=f(x, y_0)$,则

$$f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)=\Phi(x_0+\Delta x)-\Phi(x_0),$$

由于$\Phi'(x_0)=f_x(x_0, y_0)$，故$\Phi(x)$在x_0可导，因而可微，即

$$\begin{aligned}f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)&=\Phi(x_0+\Delta x)-\Phi(x_0)\\&=\Phi'(x_0)\Delta x+\alpha=f_x(x_0, y_0)\Delta x+\alpha,\end{aligned}$$

其中$\alpha=o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$，所以，

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=f_y(x_0, y_0)\Delta y+f_x(x_0, y_0)\Delta x+\beta\Delta y+\alpha,$$

其中$|\beta\Delta y+\alpha|/\rho\le|\beta|+|\alpha/\rho|\to 0\ (\rho\to 0)$，所以$f(x, y)$在$(x_0, y_0)$可微.

15. 求下列函数的所有二阶偏导数：

（1）$u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$；

（2）$u=xy+\dfrac{y}{x}$；

（3）$u=x\sin(x+y)+y\cos(x+y)$；

（4）$u=e^{xy}$；

解 $u=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，由对称性，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)},$$

由对称性，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

（2）$\frac{\partial u}{\partial x}=y-\frac{y}{x^2}$，$\frac{\partial u}{\partial x}=x+\frac{1}{x}$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1-\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=1-\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

（3）$\frac{\partial u}{\partial x}=\sin(x+y)+x\cos(x+y)-y\sin(x+y)$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\cos(x+y)+\cos(x+y)-y\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\cos(x+y)-x\sin(x+y)-y\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\cos(x+y)-x\sin(x+y)-\sin(x+y)-y\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\cos(x+y)-x\sin(x+y)-\sin(x+y)-y\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-x\sin(x+y)-2\sin(x+y)-y\cos(x+y).$$

（4）$\frac{\partial u}{\partial x}=ye^{xy}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=xe^{xy}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2e^{xy}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=e^{xy}+xye^{xy}$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2e^{xy}.$$

16．求下列函数指定阶的偏导数：

（1）$u=x^3\sin y+y^3\sin x$，求 $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3\partial y^3}$；

（2）$u=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$，求所有三阶偏导数；

（3）$u=\sin(x^2+y^2)$，求$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$；

（4）$u = xyze^{x+y+z}$，求 $\dfrac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^r \partial y^q \partial z^r}$；

（5）$u = \dfrac{x+y}{x-y}(x \neq y)$，求 $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$；

（6）$u = \ln(ax+by)$，求 $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$.

解（1）$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 \sin y + y^3 \cos x$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x\sin y - y^3 \sin x$，

$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 6\sin y - y^3 \cos x$，$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} = 6\cos y - 3y^2 \cos x$，

$\dfrac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} = -6\sin y - 6y\cos x$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^3 \partial y^3} = -6\cos y - 6\cos x$.

（2）$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2}\dfrac{1+y^2}{(1-xy)^2} = \dfrac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2} = \dfrac{1}{1+x^2}$；

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{1+y^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{2y}{(1+y^2)^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$，

$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \dfrac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$，$\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \dfrac{2(3y^2-1)}{(1+y^2)^3}$，$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0$.

（3）$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x\cos(x^2+y^2)$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\cos(x^2+y^2) - 4x^2 \sin(x^2+y^2)$，

$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -12x\sin(x^2+y^2) - 8x^3 \cos(x^2+y^2)$，

由对称性，$\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} = -12y\sin(x^2+y^2) - 8y^3 \cos(x^2+y^2)$.

（4）$\dfrac{\partial u}{\partial x} = yze^{x+y+z} + xyze^{x+y+z} = (x+1)yze^{x+y+z}$，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = yze^{x+y+z} + (x+1)yze^{x+y+z} = (x+2)yze^{x+y+z}$，

由归纳法不难知道，$\dfrac{\partial^p u}{\partial x^p} = (x+p)yze^{x+y+z}$.

$$\frac{\partial^{p+1}u}{\partial x^p\partial y}=(x+p)ze^{x+y+z}+(x+p)yze^{x+y+z}=(x+p)(y+1)ze^{x+y+z},$$

不难用归纳法知道， $\dfrac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}=(x+p)(y+q)ze^{x+y+z}$.

$$\frac{\partial^{p+q+1}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z}=(x+p)(y+q)e^{x+y+z}+(x+p)(y+q)ze^{x+y+z}$$

$$=(x+p)(y+q)(z+1)e^{x+y+z},$$

同样用归纳法不难知道， $\dfrac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}=(x+p)(y+q)(z+r)e^{x+y+z}$.

（5） $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{2y}{(x-y)^2}\Rightarrow\dfrac{\partial^m u}{\partial x^m}=\dfrac{2(-1)^m m!y}{(x-y)^{m+1}}$（使用数学归纳法），

$$\frac{\partial^{m+1}u}{\partial x^m\partial y}=2(-1)^m m!\frac{x+my}{(x-y)^{m+2}},$$

$$\frac{\partial^{m+2}u}{\partial x^m\partial y^2}=2(-1)^m m!\frac{(m+1)(2x+my)}{(x-y)^{m+3}},$$

$$\frac{\partial^{m+3}u}{\partial x^m\partial y^3}=2(-1)^m m!\frac{(m+1)(m+2)(3x+my)}{(x-y)^{m+4}},$$

用归纳法，不难计算，

$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}=2(-1)^m(m+n-1)!\frac{nx+my}{(x-y)^{m+n+1}}.$$

（6） $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{a}{ax+by}=\dfrac{1}{x+(b/a)y}\ (a\neq 0)$,

$$\frac{\partial x^m u}{\partial x^m}=\frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{(x+\frac{b}{a}y)^m}=\frac{(-1)^{m-1}(m-1)!a^m}{(ax+by)^m}=\frac{(-1)^{m-1}(m-1)!a^m}{b^m(y+\frac{a}{b}x)^m}\ (b\neq 0)$$

$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}=\frac{(-1)^{m-1}(m-1)!a^m m(m+1)\cdots(m+n-1)(-1)^n}{b^m(y+\frac{a}{b}x)^{m+n}}$$

$$=\frac{(-1)^{m+n-1}(m+n-1)!a^m b^n}{(ax+by)^{m+n}}.$$

17．验证下列函数满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ .$$

（1） $u=\ln(x^2+y^2)$；

（2） $u=x^2-y^2$；

（3） $u=e^x\cos y$；

（4） $u=\arctan\dfrac{y}{x}$.

证明（1）由 15（1），知 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$， $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$，所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

（2） $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$， $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2$， $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y$， $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$ 所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

（3） $\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y$， $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^x\cos y$， $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y$， $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^x\cos y$，所以， $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

（4） $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(-\dfrac{y}{x^2})=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$， $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}，\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}，$$

所以， $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

18．设函数 $u=\varphi(x+\psi(y))$，证明

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ .$$

证明 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+\psi(y)),\dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+\psi(y))\psi'(y).$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+\psi(y)),\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''(x+\psi(y))\psi'(y)；$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi'(x+\psi(y))\varphi''(x+\psi(y))\psi'(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi'(x+\psi(y))\varphi'(y)\varphi''(x+\psi(y));$$

即 $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

19．设 f_x, f_y 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内存在且在点 (x_0, y_0) 点可微，则有

$$f_{xy}(x_0, y_0)=f_{yx}(x_0, y_0).$$

证明 像定理 16.4 的证明过程中一样计算，知 $f_{xy}(x_0, y_0)$ 与 $f_{yx}(x_0, y_0)$ 是函数

$$\frac{W}{\Delta x\Delta y}=\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x, y_0)+f(x_0, y_0)}{\Delta x\Delta y}$$

的两个累次极限．我们利用 f'_x, f'_y 在 (x_0, y_0) 处的可微性，下面证明 $\frac{W}{\Delta x\Delta y}$ 可改写成

$$\frac{W}{\Delta x\Delta y}=f''_{yx}(x_0, y_0)+\varepsilon_1+\varepsilon_2\theta\frac{\Delta y}{\Delta x}-\varepsilon_3\theta\frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad (*)$$

和 $$\frac{W}{\Delta x\Delta y}=f''_{xy}(x_0, y_0)+\varepsilon_4+\varepsilon_5\theta_1\frac{\Delta x}{\Delta y}-\varepsilon_6\theta_1\frac{\Delta x}{\Delta y}, \qquad (**)$$

二者对充分小的 $\Delta x, \Delta y$ 同时成立，且当 $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$ 时，$\varepsilon_i\to 0\ (i=1,\cdots,6)$，$0<\theta, \theta_1<1$．于是令 $\Delta x=\Delta y\to 0$ 可得，

$$f''_{yx}(x_0, y_0)=f''_{xy}(x_0, y_0). \qquad (\#)$$

可见，问题归结为证明（*），（**）成立．为此取 $\Delta x, \Delta y$ 充分小，引入辅助函数

$$\varphi(y)=f(x_0+\Delta x, y)-f(x_0, y),$$

式 $\frac{W}{\Delta x\Delta y}$ 可改写为

$$\frac{W}{\Delta x\Delta y}=\frac{1}{\Delta x\Delta y}[\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)]=\frac{1}{\Delta x}\varphi'_y(y_0+\theta\Delta y)$$

$$=\frac{1}{\Delta x}[f_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta\Delta y)-f_y(x_0, y_0+\theta\Delta y)]\text{，（}0<\theta_1<1\text{），}$$

由于 f_y 在 (x_0, y_0) 处可微，故

$$f_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta\Delta y)=f_y(x_0, y_0)+f_{yx}(x_0, y_0)\Delta x+f_{yy}(x_0, y_0)\theta\Delta y$$

$$+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\theta\Delta y\text{，}$$

其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$（当 $\Delta x, \Delta y \to 0$ 时），

$$f_y(x_0, y_0+\theta\Delta y)=f_y(x_0, y_0)+f_{yy}(x_0, y_0)\theta\Delta y+\varepsilon_3\theta\Delta y\text{，}$$

其中 $\varepsilon_3 \to 0$（当 $\Delta y \to 0$ 时），因此得

$$\frac{W}{\Delta x\Delta y}=\frac{1}{\Delta x}\{f_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta\Delta y)-f_y(x_0, y_0+\theta\Delta y)\}$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\{f_y(x_0, y_0)+f_{yx}(x_0, y_0)\Delta x+f_{yy}(x_0, y_0)\theta\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\theta\Delta y$$

$$-f_y(x_0, y_0)-f_{yy}(x_0, y_0)\theta\Delta y-\varepsilon_3\theta\Delta y\}$$

$$=f_{yx}(x_0, y_0)+\varepsilon_1+\varepsilon_2\theta\frac{\Delta y}{\Delta x}-\varepsilon_3\theta\frac{\Delta y}{\Delta x}\text{，}$$

这正是（*）式．同样，令 $\psi(x)=f(x, y_0+\Delta y)-f(x, y_0)$，则

$$\frac{W}{\Delta x\Delta y}=\frac{1}{\Delta x\Delta y}[\psi(x_0+\Delta x)-\psi(x_0)]=\frac{1}{\Delta y}\psi'(x_0+\theta_1\Delta x)$$

$$=\frac{1}{\Delta y}\{f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\}\text{，（}0<\theta_1<1\text{），}$$

因 f_x 在 (x_0, y_0) 处可微，故

$$f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)=f_x(x_0, y_0)+f_{xx}(x_0, y_0)\theta_1\Delta x+f_{xy}(x_0, y_0)\Delta y$$

$$+\varepsilon_4\theta_1\Delta x+\varepsilon_5\Delta y\text{，}$$

其中 $\varepsilon_4, \varepsilon_5 \to 0$（当 $\Delta x, \Delta y \to 0$ 时），

$$f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)=f_x(x_0, y_0)+f_{xx}(x_0, y_0)\theta_1\Delta x+\varepsilon_6\theta_1\Delta x\text{，}$$

所以

$$\frac{W}{\Delta x\Delta y}=\frac{1}{\Delta y}\{f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)\}$$

$$=\frac{1}{\Delta y}\{f_x(x_0,y_0)+f_{xx}(x_0,y_0)\theta_1\Delta x+f_{xy}(x_0,y_0)\Delta y+\varepsilon_4\theta_1\Delta x+\varepsilon_5\Delta y$$

$$-f_x(x_0,y_0)-f_{xx}(x_0,y_0)\theta_1\Delta x-\varepsilon_6\theta_1\Delta x\}$$

$$=f_{xy}(x_0,y_0)+\varepsilon_4\theta_1\frac{\Delta x}{\Delta y}+\varepsilon_5-\varepsilon_6\theta_1\frac{\Delta x}{\Delta y},$$

这正是（**）式.

§2 复合函数与隐函数微分法

1．求下列函数的所有二阶偏导数：

（1）$u=f(ax,by)$；

（2）$u=f(x+y,x-y)$；

（3）$u=f(xy^2,x^2y)$；

（4）$u=f(\frac{x}{y},\frac{y}{z})$；

（5）　$u=f(x^2+y^2+z^2)$；

（6）$u=f(x+y,xy,\frac{x}{y})$.

解（1）$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1(ax,by)\cdot a=af_1(ax,by)$，$\frac{\partial u}{\partial y}=f_2(ax,by)\cdot b=bf_2(ax,by)$；

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2f_{11}(ax,by)$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=abf_{12}(ax,by)$，

$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=abf_{21}(ax,by)$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=b^2f_{22}(ax,by)$.

（2）$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1(x+y,x-y)+f_2(x+y,x-y)$，

$\frac{\partial u}{\partial y}=f_1(x+y,x-y)-f_2(x+y,x-y)$；

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f_{11}(x+y,x-y)+f_{12}(x+y,x-y)+f_{21}(x+y,x-y)+f_{22}(x+y,x-y)$$

$$=f_{11}(x+y,x-y)+2f_{12}(x+y,x-y)+f_{22}(x+y,x-y)\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f_{11}(x+y,x-y)-f_{12}(x+y,x-y)+f_{21}(x+y,x-y)-f_{22}(x+y,x-y)$$

$$=f_{11}(x+y,x-y)-f_{22}(x+y,x-y)\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=f_{11}(x+y,x-y)+f_{12}(x+y,x-y)-f_{21}(x+y,x-y)-f_{22}(x+y,x-y)$$

$$=f_{11}(x+y,x-y)-f_{22}(x+y,x-y)\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f_{11}(x+y,x-y)-f_{12}(x+y,x-y)-f_{21}(x+y,x-y)+f_{22}(x+y,x-y)$$

$$=f_{11}(x+y,x-y)-2f_{12}(x+y,x-y)+f_{22}(x+y,x-y)\text{．}$$

（3）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2f_1(xy^2,x^2y)+2xyf_2(xy^2,x^2y)$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2xyf_1(xy^2,x^2y)+x^2f_2(xy^2,x^2y)\text{；}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2[y^2f_{11}(xy^2,x^2y)+2xyf_{12}(xy^2,x^2y)]+2yf_2(xy^2,x^2y)$$

$$+2xy[y^2f_{21}(xy^2,x^2y)+2xyf_{22}(xy^2,x^2y)]$$

$$=y^4f_{11}(xy^2,x^2y)+4xy^3f_{12}(xy^2,x^2y)+4x^2y^2f_{22}(xy^2,x^2y)+2yf_2(xy^2,x^2y)\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2yf_1(xy^2,x^2y)+y^2[2xyf_{11}(xy^2,x^2y)+x^2f_{12}(xy^2,x^2y)]$$

$$+2xf_2(xy^2,x^2y)+2xy[2xyf_{21}(xy^2,x^2y)+x^2f_{22}(xy^2,x^2y)]$$

$$=2xy^3f_{11}(xy^2,x^2y)+5x^2y^2f_{12}(xy^2,x_2y)+2x^3yf_{22}(xy^2,x^2y)$$

$$+2yf_1(xy^2,x^2y)+2xf_2(xy^2,x^2y)\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=2yf_1(xy^2,x^2y)+2xy[y^2f_{11}(xy^2,x^2y)+2xyf_{12}(xy^2,x^2y)]$$

$$+2xf_2(xy^2,x^2y)+x^2[y^2f_{21}(xy^2,x^2y)+2xyf_{22}(xy^2,x^2y)]$$

$$=2xy^3f_{11}(xy^2,x^2y)+5x^2y^2f_{12}(xy^2,x_2y)+2x^3yf_{22}(xy^2,x^2y)$$

$$+2yf_1(xy^2,x^2y)+2xf_2(xy^2,x^2y)，$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=2xf_1(xy^2,x^2y)+2xy[2xyf_{11}(xy^2,x^2y)+x^2f_{12}(xy^2,x^2y)]$$

$$+x^2[2xyf_{21}(xy^2,x^2y)+x^2f_{22}(xy^2,x^2y)]$$

$$=4x^2y^2f_{11}(xy^2,x^2y)+4x^3yf_{12}(xy^2,x^2y)+x^4f_{22}(xy^2,x^2y)+2xf_1(xy^2,x^2y).$$

（4）$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}f_1(\frac{x}{y},\frac{y}{z})$， $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_1(\frac{x}{y},\frac{y}{z})+\frac{1}{z}f_2(\frac{x}{y},\frac{y}{z})$， $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}f_2(\frac{x}{y},\frac{y}{z})$；

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{1}{y^2}f_{11}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})，$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{y^2}f_1(\frac{x}{y},\frac{y}{z})+\frac{1}{y}[-\frac{x}{y^2}f_{11}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})+\frac{1}{z}f_{12}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})]$$

$$=-\frac{1}{y^2}f_1(\frac{x}{y},\frac{y}{z})+-\frac{x}{y^3}f_{11}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})+\frac{1}{yz}f_{12}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})，$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial z}=\frac{1}{y}(-\frac{y}{z^2})f_{12}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})=-\frac{1}{z^2}f_{12}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})，$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}=-\frac{1}{y^2}f_1(\frac{x}{y},\frac{y}{z})-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{1}{y}f_{11}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{y}f_{21}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})$$

$$=-\frac{1}{y^2}f_1(\frac{x}{y},\frac{y}{z})-\frac{x}{y^3}f_{11}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})+\frac{1}{yz}f_{12}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})，$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}f_1(\frac{x}{y},\frac{y}{z})-\frac{x}{y^2}[-\frac{x}{y^2}f_{11}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})+\frac{1}{z}f_{12}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})]$$

$$+\frac{1}{z}[-\frac{x}{y^2}f_{21}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})+\frac{1}{z}f_{22}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})]$$

$$=\frac{2x}{y^3}f_1(\frac{x}{y},\frac{y}{z})+\frac{x^2}{y^4}f_{11}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})-\frac{2x}{y^2z}f_{12}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})+\frac{1}{z^2}f_{22}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})，$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}=-\frac{x}{y^2}f_{12}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})\cdot(-\frac{y}{z^2})+(-\frac{1}{z^2})f_2(\frac{x}{y},\frac{y}{z})+\frac{1}{z}f_{22}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})\cdot(-\frac{y}{z^2})$$

$$=\frac{x}{yz^2}f_{12}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})-\frac{1}{z^2}f_2(\frac{x}{y},\frac{y}{z})-\frac{y}{z^3}f_{22}(\frac{x}{y},\frac{y}{z}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}=-\frac{y}{z^2}\cdot\frac{1}{y}f_{21}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})=-\frac{1}{z^2}f_{12}(\frac{x}{y},\frac{y}{z}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}=-\frac{1}{z^2}f_2(\frac{x}{y},\frac{y}{z})-\frac{y}{z^2}[-\frac{x}{y^2}f_{21}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})+\frac{1}{z}f_{22}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})]$$

$$=-\frac{1}{z^2}f_2(\frac{x}{y},\frac{y}{z})+\frac{x}{yz^2}f_{12}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})-\frac{y}{z^3}f_{22}(\frac{x}{y},\frac{y}{z}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2y}{z^3}f_2(\frac{x}{y},\frac{y}{z})-\frac{y}{z^2}f_{22}(\frac{x}{y},\frac{y}{z})\cdot(-\frac{y}{z^2})=\frac{2z}{y^3}f_2(\frac{x}{y},\frac{y}{z})+\frac{y^2}{z^4}f_{22}(\frac{x}{y},\frac{y}{z}).$$

（5）$\frac{\partial u}{\partial x}=2xf'(x^2+y^2+z^2)$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2yf'(x^2+y^2+z^2)$，$\frac{\partial u}{\partial z}=2zf'(x^2+y^2+z^2)$；

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2f'(x^2+y^2+z^2)+4x^2f''(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}=4xyf''(x^2+y^2+z^2),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}=4xzf''(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2f'(x^2+y^2+z^2)+4y^2f''(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}=4yzf''(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2f'(x^2+y^2+z^2)+4z^2f''(x^2+y^2+z^2).$$

（6）$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1(x+y,xy,\frac{x}{y})+yf_2(x+y,xy,\frac{x}{y})+\frac{1}{y}f_3(x+y,xy,\frac{x}{y})$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_1(x+y,xy,\frac{x}{y})+xf_2(x+y,xy,\frac{x}{y})-\frac{x}{y^2}f_3(x+y,xy,\frac{x}{y}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f_{11}(x+y,xy,\frac{x}{y})+yf_{12}9x+y,xy,\frac{x}{y})+\frac{1}{y}f_{13}(x+y,xy,\frac{x}{y})$$

$$+ y[f_{21}(x+y,xy,\frac{x}{y}) + yf_{22}(x+y,xy,\frac{x}{y}) + \frac{1}{y} f_{23}(x+y,xy,\frac{x}{y})]$$

$$+ \frac{1}{y}[f_{31}(x+y,xy,\frac{x}{y}) + yf_{32}(x+y,xy,\frac{x}{y}) + \frac{1}{y} f_{33}(x+y,xy,\frac{x}{y})]$$

$$= f_{11}(x+y,xy,\frac{x}{y}) + 2yf_{12}(x+y,xy,\frac{x}{y}) + \frac{2}{y} f_{13}(x+y,xy,\frac{x}{y})$$

$$+ y^2 f_{22}(x+y,xy,\frac{x}{y}) + 2f_{23}(x+y,xy,\frac{x}{y}) + \frac{1}{y^2} f_{33}(x+y,xy,\frac{x}{y}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = f_{11}(x+y,xy,\frac{x}{y}) + xf_{12}(x+y,xy,\frac{x}{y}) - \frac{x}{y^2} f_{13}(x+y,xy,\frac{x}{y})$$

$$+ f_2(x+y,xy,\frac{x}{y}) + y[f_{21}(x+y,xy,\frac{x}{y}) + xf_{22}(x+y,xy,\frac{x}{y})$$

$$- \frac{x}{y^2} f_{23}(x+y,xy,\frac{x}{y})] + (-\frac{1}{y^2}) f_3(x+y,xy,\frac{x}{y}) + \frac{1}{y}[f_{31}(x+y,xy,\frac{x}{y})$$

$$+ xf_{32}(x+y,xy,\frac{x}{y}) - \frac{x}{y^2} f_{33}(x+y,xy,\frac{x}{y})]$$

$$= f_2(x+y,xy,\frac{x}{y}) - \frac{1}{y^2} f_3(x+y,xy,\frac{x}{y}) + f_{11}(x+y,xy,\frac{x}{y})$$

$$+ (x+y) f_{12}(x+y,xy,\frac{x}{y}) + \frac{y-x}{y^2} f_{13}(x+y,xy,\frac{x}{y})$$

$$+ xyf_{22}(x+y,xy,\frac{x}{y}) - \frac{x}{y^3} f_{33}(x+y,xy,\frac{x}{y}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_{11}(x+y,xy,\frac{x}{y}) + xf_{12}(x+y,xy,\frac{x}{y}) - \frac{x}{y^2} f_{13}(x+y,xy,\frac{x}{y})$$

$$+ x[f_{21}(x+y,xy,\frac{x}{y}) + xf_{22}(x+y,xy,\frac{x}{y}) - \frac{x}{y^2} f_{23}(x+y,xy,\frac{x}{y})]$$

$$+ \frac{2x}{y^3} f_3(x+y,xy,\frac{x}{y}) - \frac{x}{y^2}[f_{31}(x+y,xy,\frac{x}{y}) + xf_{32}(x+y,xy,\frac{x}{y})$$

$$- \frac{x}{y^2} f_{33}(x+y,xy,\frac{x}{y})]$$

$$=\frac{2x}{y^3}f_3(x+y,xy,\frac{x}{y})+f_{11}(x+y,xy,\frac{x}{y})+2xf_{12}(x+y,xy,\frac{x}{y})$$

$$-\frac{2x}{y^2}f_{13}(x+y,xy,\frac{x}{y})+x^2f_{22}(x+y,xy,\frac{x}{y})-\frac{2x^2}{y^2}f_{23}(x+y,xy,\frac{x}{y})$$

$$+\frac{x^4}{y^4}f_{33}(x+y,xy,\frac{x}{y}).$$

（在以上各题中，都假设 f 对各自变量的二阶混合偏导数与求导次序无关）.

2．设 $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 f 是可微函数，验证

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

证明 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-y}{f^2(x^2-y^2)}f'(x^2-y^2)\cdot 2x=-\dfrac{2xyf'(x^2-y^2)}{f^2(x^2-y^2)}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{f^2(x^2-y^2)}f'(x^2-y^2)(-2y)+\frac{1}{f(x^2-y^2)}$$

$$=\frac{2y^2f'(x^2-y^2)}{f^2(x^2-y^2)}+\frac{1}{f(x^2-y^2)},$$

所以，

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2yf(x^2-y^2)}{f^2(x^2+y^2)}+\frac{2yf'(x^2+y^2)}{f^2(x^2+y^2)}+\frac{1}{yf(x^2-y^2)}$$

$$=\frac{1}{y^2}\frac{y}{f(x^2-y^2)}=\frac{z}{y^2}.$$

3．设 $v=\dfrac{1}{r}g(t-\dfrac{r}{c})$，$c$ 为常数，函数 g 二阶可导，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$．证明

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

证明 $\dfrac{\partial v}{\partial t}=\dfrac{1}{r}g'(t-\dfrac{r}{c})$，$\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\dfrac{1}{r}g''(t-\dfrac{r}{c})$，

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}g(t-\frac{r}{c})+\frac{1}{r}g'(t-\frac{r}{c})(-\frac{1}{c}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$$

$$=-\frac{x}{r^3}g(t-\frac{r}{c})-\frac{x}{cr^2}g'(t-\frac{r}{c}),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{-r^3+x\cdot 3r^2\cdot\frac{x}{r}}{r^6}g(t-\frac{r}{c})-\frac{r^2-x\cdot 2r\cdot\frac{x}{r}}{cr^4}g'(t-\frac{r}{c})$$

$$-\frac{x}{r^3}g'(t-\frac{r}{c})\cdot(-\frac{x}{cr})-\frac{x}{cr^2}g''(t-\frac{r}{c})\cdot(-\frac{x}{cr})$$

$$=\frac{3x^2-r^2}{r^5}g(t-\frac{r}{c})+\frac{3x^2-r^2}{cr^4}g'(t-\frac{r}{c})+\frac{x^2}{c^2r^3}g''(t-\frac{r}{c}),$$

由函数v关于x,y,z的对称性知，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{3y^2-r^2}{r^5}g(t-\frac{r}{c})+\frac{3y^2-r^2}{cr^4}g'(t-\frac{r}{c})+\frac{y^2}{c^2r^3}g''(t-\frac{r}{c}),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{3z^2-r^2}{r^5}g(t-\frac{r}{c})+\frac{3z^2-r^2}{cr^4}g'(t-\frac{r}{c})+\frac{z^2}{c^2r^3}g''(t-\frac{r}{c}),$$

所以，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{3(x^2+y^2+z^2)-3r^2}{r^5}g(t-\frac{r}{c})$$

$$+\frac{3(x^2+y^2+z^2)-3r^2}{cr^4}g'(t-\frac{r}{c})+\frac{x^2+y^2+z^2}{cr^3}g''(t-\frac{r}{c})$$

$$=\frac{1}{c^2r}g''(t-\frac{r}{c})=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

4．若函数$f(x,y,z)$对任意的正实数 t 满足关系

$$f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z),$$

则称$f(x,y,z)$为n次齐次函数．设$f(x,y,z)$可微，试证明$f(x,y)$为n次齐次函数的充要条件是

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf(x,y,z).$$

证明　必要性．由于$f(x,y)$为n次齐次函数，因此$f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$，两边对t求导，有

$$xf_1(tx,ty,tz)+yf_2(tx,ty,tz)+zf_3(tx,ty,tz)=nt^{n-1}f(x,y,z),$$

令$tx=\xi, ty=\eta, tz=\zeta$，则有

$$\frac{\xi}{t}f_1(\xi,\eta,\zeta)+\frac{\eta}{t}f_2(\xi,\eta,\zeta)+\frac{\zeta}{t}f_3(\xi,\eta,\zeta)=nt^{n-1}f(\frac{\xi}{t},\frac{\eta}{t},\frac{\zeta}{t})=\frac{nt^{n-1}}{t^n}f(\xi,\eta,\zeta),$$

再把ξ,η,ζ用x,y,z替代，就有$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf(x,y,z)$.

充分性．设$f(x,y,z)$满足$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf(x,y,z)$，任意固定定义域中一点$(x,y,z)$，考察下面的$t$的函数$F(t)=\frac{f(tx,ty,tz)}{t^n}$，$(t>0)$．

它在$t>0$时有定义且是可微的，对t求导，得

$$\begin{aligned}F'(t)&=\frac{1}{t^n}\{xf_x(tx,ty,tz)+yf_y(tx,ty,tz)+zf_z(tx,ty,tz)\}-\frac{n}{t^{n+1}}f(tx,ty,tz)\\&=\frac{1}{t^{n+1}}\{txf_x(tx,ty,tz)+tyf_y(tx,ty,tz)+tzf_z(tx,ty,tz)-nf(tx,ty,tz)\}\\&=0,\end{aligned}$$

从而当$t>0$时，$F(t)=c$（与t无关的常数）．在函数$F(t)$的等式中令$t=1$，得

$$c=F(1)=f(x,y,z),$$

于是，

$$F(t)=\frac{f(tx,ty,tz)}{t^n}=f(x,y,z),$$

即$f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$，从而$f(x,y,z)$为n次齐次函数.

5．验证下列各式：

（1）$u=\varphi(x^2+y^2)$，则$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0$；

（2）$u=y\varphi(x^2-y^2)$，则$y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xu}{y}$；

（3）$u=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$，则$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$；

（4）$u=x\varphi(\frac{y}{x})+\psi(\frac{y}{x})$，则$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

解（1）$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x^2+y^2)\cdot 2x=2x\varphi'(x^2+y^2)$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2y\varphi'(x^2+y^2)$，所以，

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=2xy\varphi'(x^2+y^2)-2xy\varphi'(x^2+y^2)=0.$$

（2）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xy\varphi'(x^2-y^2)$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi(x^2-y^2)-2y^2\varphi'(x^2-y^2)$，所以，

$$y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=2xy^2\varphi'(x^2-y^2)+x\varphi(x^2-y^2)-2xy^2\varphi'(x^2-y^2)=\frac{xu}{y}.$$

（3）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi(x+y)+x\varphi'(x+y)+y\psi'(x+y)$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\varphi'(x+y)+\psi(x+y)+y\psi'(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\varphi'(x+y)+x\varphi''(x+y)+y\psi''(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi'(x+y)+x\varphi''(x+y)+\psi'(x+y)+y\psi''(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x\varphi''(x+y)+2\psi'(x+y)+y\psi''(x+y),$$

所以，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=(2\varphi'(x+y)+x\varphi''(x+y)+y\psi''(x+y))\\&\quad-2(\varphi'(x+y)+x\varphi''(x+y)+\psi'(x+y)+y\psi'(x+y))\\&\quad+(x\varphi''(x+y)+2\psi'(x+y)+y\psi''(x+y)\\&=0.\end{aligned}$$

（4）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi(\dfrac{y}{x})+x\varphi'(\dfrac{y}{x})(-\dfrac{y}{x^2})+\psi'(\dfrac{y}{x})(-\dfrac{y}{x^2})=\varphi(\dfrac{y}{x})-\dfrac{y}{x}\varphi'(\dfrac{y}{x})-\dfrac{y}{x^2}\psi'(\dfrac{y}{x})$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(\frac{y}{x})+\frac{1}{x}\varphi'(\frac{y}{x}),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=-\frac{y}{x^2}\varphi'(\frac{y}{x})+\frac{y}{x^2}\varphi'(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^3}\varphi''(\frac{y}{x})+\frac{2y}{x^3}\psi'(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^4}\psi''(\frac{y}{x})\\&=\frac{y^2}{x^3}\varphi''(\frac{y}{x})+\frac{2y}{x^3}\psi'(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^4}\psi''(\frac{y}{x}),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{y}{x^2}\varphi''(\frac{y}{x})-\frac{1}{x^2}\psi'(\frac{y}{x})-\frac{y}{x^3}\psi''(\frac{y}{x}),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{x}\varphi''(\frac{y}{x})+\frac{1}{x^2}\psi''(\frac{y}{x}),$$

所以，

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2}{x}\varphi''(\frac{y}{x})+\frac{2y}{x}\psi'(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^2}\psi''(\frac{y}{x})$$

$$-\frac{2y^2}{x}\varphi''(\frac{y}{x})-\frac{2y}{x}\psi'(\frac{y}{x})-\frac{2y^2}{x^2}\psi''(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x}\varphi''(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^2}\psi''(\frac{y}{x})=0\,.$$

6．设$u=f(x,y)$可微，在坐标变换

$$x=r\cos\theta\,,\quad y=r\sin\theta\,,$$

下，证明

$$(\frac{\partial u}{\partial r})^2+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial u}{\partial \theta})^2=(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,.$$

证明 $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$，

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot(-r\sin\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta)=-\frac{\partial f}{\partial x}r\sin\theta+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\,,$$

所以，

$$(\frac{\partial u}{\partial r})^2+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial u}{\partial \theta})^2=(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta)^2+\frac{1}{r^2}(-\frac{\partial f}{\partial x}r\sin\theta+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y})^2$$

$$=(\frac{\partial f}{\partial x})^2\cos^2\theta+(\frac{\partial f}{\partial y})^2\sin^2\theta+2\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\cos\theta$$

$$+(\frac{\partial f}{\partial x})^2\sin^2\theta-2\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\cos\theta+(\frac{\partial f}{\partial y})^2\cos^2\theta$$

$$=(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2=(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2\,.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sin\theta)\cos\theta+(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\cos\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin\theta)\sin\theta$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\theta+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\theta\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-r\sin\theta)+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}r\cos\theta](-r\sin\theta)+\frac{\partial f}{\partial x}(-r\cos\theta)$$

$$+[\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}r\cos\theta]r\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}(-r\sin\theta)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}r^2\sin^2\theta-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}r^2\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}r^2\cos^2\theta$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x}r\cos\theta-\frac{\partial f}{\partial y}r\sin\theta,$$

因此，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\theta+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sin^2\theta-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cos^2\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

7．设 $z=f(x,y)$ 可微，在坐标旋转变换

$$x=u\cos\theta-v\sin\theta,\quad y=u\sin\theta+v\cos\theta$$

下（其中旋转角 θ 是常数），证明：

$$(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2=(\frac{\partial z}{\partial u})^2+(\frac{\partial z}{\partial v})^2.$$

这时称 $(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2$ 是一个形式不变量.

证明 $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$，$\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta$，

所以，

$$(\frac{\partial z}{\partial u})^2+(\frac{\partial z}{\partial x})^2=(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta)^2+(-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta)^2$$

$$=(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2=(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2.$$

8．设函数 $u=f(x,y)$ 满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

证明在下列变换下形式保持不变，即仍有$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$.

（1）$x=\frac{s}{s^2+t^2}$， $y=\frac{t}{s^2+t^2}$；

（2）$x=e^s\cos t$， $y=e^s\sin t$；

（3）$x=\varphi(s,t)$，$y=\psi(s,t)$满足$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\frac{\partial\psi}{\partial t}$ ，$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{\partial\psi}{\partial s}$. 这组方程称为Cauchy-Riemann方程.

解（1）$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{t^2-s^2}{(s^2+t^2)^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{-2st}{(s^2+t^2)^2}$， $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{-2st}{(s^2+t^2)^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{s^2-t^2}{(s^2+t^2)^2}$，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}&=[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{t^2-s^2}{(t^2+s^2)^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{-2st}{(s^2+t^2)^2}]\frac{t^2-s^2}{(s^2+t^2)^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{2s(s^2-3t^2)}{(s^2+t^2)^3}\\&\quad+[\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{t^2-s^2}{(t^2+s^2)^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{-2st}{(s^2+t^2)^2}]\frac{-2st}{(s^2+t^2)^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{2t(3s^2-t^2)}{(s^2+t^2)^3}\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{(t^2-s^2)^2}{(t^2+s^2)^4}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{4st(t^2-s^2)}{(s^2+t^2)^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{4s^2t^2}{(s^2+t^2)^2}\\&\quad+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{2s(s^2-3t^2)}{(s^2+t^2)^3}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{2t(3s^2-t^2)}{(s^2+t^2)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{-2st}{(s^2+t^2)^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{s^2-t^2}{(s^2+t^2)^2}]\frac{-2st}{(s^2+t^2)^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{2s(3t^2-s^2)}{(s^2+t^2)^3}\\&\quad+[\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{-2st}{(s^2+t^2)^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{s^2-t^2}{(s^2+t^2)^2}]\frac{s^2-t^2}{(s^2+t^2)^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{2t(t^2-3s^2)}{(s^2+t^2)^2}\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{4s^2t^2}{(s^2+t^2)^4}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{4st(s^2-t^2)}{(s^2+t^2)^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{(s^2-t^2)}{(s^2+t^2)^2}\\&\quad+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{2s(3t^2-s^2)}{(s^2+t^2)^3}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{2t(t^2-3s^2)}{(s^2+t^2)^3},\end{aligned}$$

所以，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{(t^2-s^2)^2+4s^2t^2}{(t^2+s^2)^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{4s^2t^2+(s^2-t^2)^2}{(s^2+t^2)^2}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

（2）$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}e^s\cos t+\frac{\partial u}{\partial y}e^s\sin t$，$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial u}{\partial x}e^s\sin t+\frac{\partial u}{\partial y}e^s\cos t$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^s\cos t+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}e^s\sin t]e^s\cos t+\frac{\partial u}{\partial x}e^s\cos t$$

$$+[\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}e^s\cos t+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}e^s\sin t]e^s\sin t+\frac{\partial u}{\partial y}e^s\sin t$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{2s}\cos^2 t+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}e^{2s}\sin t\cos t+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}e^{2s}\sin^2 t$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x}e^s\cos t+\frac{\partial u}{\partial y}e^s\sin t$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^s\sin t+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}e^s\cos t)e^s\sin t-\frac{\partial u}{\partial x}e^s\cos t$$

$$+(-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}e^s\sin t+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}e^s\cos t)e^s\cos t-\frac{\partial u}{\partial y}e^s\sin t$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{2s}\sin^2 t-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}e^{2s}\sin t\cos t+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}e^{2s}\cos^2 t$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x}e^s\cos t-\frac{\partial u}{\partial y}e^s\sin t,$$

所以，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})e^{2s}=0.$$

（3）$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial t}=-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial s},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial \varphi}{\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial s})\frac{\partial \psi}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t\partial s}-(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial \psi}{\partial s})\frac{\partial \varphi}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\partial s},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial t})\frac{\partial\psi}{\partial s}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial t}+(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial\psi}{\partial t})\frac{\partial\varphi}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial t},$$

所以，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})[(\frac{\partial\varphi}{\partial s})^2+(\frac{\partial\varphi}{\partial t})^2]=0.$$

9．作自变量的变换，取ξ,η,ζ为新的自变量：

（1）$\xi=x,\eta=x^2+y^2$，变换方程$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$；

（2）$\xi=x,\eta=y-x,\zeta=z-x$，变换方程$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

解（1）$z=f(x,y)=g(\xi,\eta)$，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial\xi}+2x\frac{\partial z}{\partial\eta},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=2y\frac{\partial z}{\partial\eta},$$

所以，

$$0=y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=y(\frac{\partial z}{\partial\xi}+2x\frac{\partial z}{\partial\eta})-x(2y\frac{\partial z}{\partial\eta})=y\frac{\partial z}{\partial\xi},$$

即$\frac{\partial z}{\partial\xi}=0$，所以解出$z=\varphi(\eta),\varphi$是可微函数，亦即$z=\varphi(x^2+y^2)$.

（2）$u=f(x,y,z)=g(\xi,\eta,\zeta)$，则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\zeta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial\zeta},$$

所以$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$，即$\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$．故$u=\varphi(\eta,\zeta)=\varphi(y-x,z-x),\varphi$是可微函数.

10．作自变量和因变量的变换，取u,v为新的自变量，$w=w(u,v)$为新的自变量：

（1）$u=x+y, v=\dfrac{y}{x}, w=\dfrac{z}{x}$，变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\text{；}$$

（2）设$u=\dfrac{x}{y}$， $v=x, \omega=xz-y$，变换方程

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{x}\text{．}$$

解（1）由于$w=\dfrac{z}{x}$，因此$z=wx$，函数关系可由下图表示

$$z\begin{cases} w\begin{cases} u\begin{cases}x\\ y\end{cases}\\ v\begin{cases}x\\ y\end{cases}\end{cases}\\ x\end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=w+x(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})=w+x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}\text{，}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y})=x\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial u}+x(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}(-\frac{y}{x^2}))$$

$$+\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{y}{x}(\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}(-\frac{y}{x^2}))$$

$$=2\frac{\partial w}{\partial u}+x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{2y}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{y^2}{x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{1}{x}+x(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\frac{1}{x})-\frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{y}{x}(\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{1}{x})$$

$$=\frac{\partial w}{\partial u}+x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+(1-\frac{y}{x})\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\frac{1}{x})+(\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{1}{x})=x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\text{，}$$

所以，

$$0=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(\frac{1}{x}+\frac{2y}{x^2}+\frac{y^3}{x^3})\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

即 $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$．解得，$\frac{\partial w}{\partial v}=\varphi(u)$，$\varphi$ 是可微函数，于是 $w=\varphi(u)v+\psi(u)$，ψ 是可微函数，所以，

$z=xw=x\varphi(x+y)\frac{y}{x}+\psi(x+y)=y\varphi(x+y)+\psi(x+y)$，其中 φ、ψ 均为任意可微函数.

（2）设 $u=\frac{x}{y},v=x,\omega=xz-y,$ 变换方程 $y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{x}$

$w=xz-y\Rightarrow z=\frac{w+y}{x}$，函数关系可由下图表示

$$z\begin{cases} w\begin{cases} u\begin{cases} x\\ y\end{cases}\\ v\ \to x\end{cases}\\ x\\ y\end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\left(-\frac{x}{y^2}\right)+1\right)=-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2}{y^3}\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right)=\frac{2}{y^3}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{x}{y^4}\frac{\partial^2 w}{\partial u^4},$$

所以，

$$\frac{2}{x}=y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{x}{y^3}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{2}{x}=\frac{x}{y^3}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{2}{x},$$

即 $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0$．解得 $\frac{\partial w}{\partial u}=\varphi(v)$，$\varphi$ 是任意可微函数 $\Rightarrow w=u\varphi(v)+\psi(v)$，$\psi$ 是任意可微函数，所以，

$$z=\frac{w+y}{x}=\frac{1}{x}\left(\frac{x}{y}\varphi(x)+\psi(x)\right)+\frac{y}{x}=\frac{1}{y}\varphi(x)+\frac{1}{x}\psi(x)+\frac{y}{x},$$

其中 φ、ψ 是任意可微函数.

11．求下列方程所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的一阶和二阶偏导数：

（1）$e^{-xy}-2z+e^z=0$；

（2）$x+y+z=e^{x+y+z}$；

（3） $xyz = z + y + z$；

（4） $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 5 = 0$.

解（1）方程两边分别对 x 和 y 求偏导数，得

$$-ye^{-xy} - 2\frac{\partial z}{\partial x} + e^z\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad -xe^{-xy} - 2\frac{\partial z}{\partial y} + e^z\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

于是 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{ye^{-xy}}{e^z - 2}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{xe^{-xy}}{e^z - 2}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-y^2e^{-xy}(e^z - 2) - ye^{-xy}e^z\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(e^z - 2)^2} = -\frac{y^2(e^{2z} - 4e^z + 4 + e^{z-xy})}{e^{xy}(e^z - 2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{(e^{-xy} - xye^{-xy})(e^z - 2) - ye^{-xy}e^z\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(e^z - 2)^2} = \frac{(1 + xy)(e^z - 2)^2 - xye^{z-xy}}{(e^z - 2)^3e^{xy}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2(e^{2z} - 4e^z + 4 + e^{z-xy})}{e^{xy}(e^z - 2)^2}.$$

（2）方程两边分别对 x 和 y 求偏导数，得

$$1 + \frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+y+z}\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad 1 + \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+y+z}\left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

解得，$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$， $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -1$，由此得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

（3）方程两边分别对 x 和 y 求偏导数，得

$$yz + xy\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + \frac{\partial z}{\partial x}, \quad xz + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 1 + \frac{\partial z}{\partial y},$$

解得，$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1 - yz}{xy - 1}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1 - xy}{xy - 1}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-y\dfrac{\partial z}{\partial x}(xy - 1) - (1 - yz)y}{(xy - 1)^2} = \frac{2y(yz - 1)}{(xy - 1)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\left(-z - y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)(xy - 1) - (1 - yz)x}{(xy - 1)^2} = \frac{2z}{(xy - 1)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2x(xz-1)}{(xy-1)^2}.$$

（4）方程两边分别对 x 和 y 求偏导数，得

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-2-4\frac{\partial z}{\partial x}=0，\ 2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}+2-4\frac{\partial z}{\partial y}=0，$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-x}{z-2}，\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-1-y}{z-2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-(z-2)-(1-x)\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(z-2)^2}=-\frac{(z-2)^2+(1-x)^2}{(z-2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{(1-x)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(z-2)^2}=-\frac{(1-x)(1+y)}{(z-2)^3}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-(z-2)-(1+y)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(z-2)^2}=-\frac{(z-2)^2+(1+y)^2}{(z-2)^3}.$$

12．求由下列方程所确定的函数的全微分 dz：

（1）$z=f(xz,z-y)$；

（2）$F(x-y,y-z,z-x)=0$；

（3）$f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)=0$；

（4）$f(x,y)+g(y,z)=0$.

解（1）$dz=f_1(xz,z-y)d(xz)+f_2(xz,z-y)d(z-y)$

$$=f_1(xz,z-y)(zdx+xdz)+f_2(xz,z-y)(dz-dy)$$

移项后，解得 $dz=\dfrac{zf_1(xz,z-y)dx-f_2(xz,z-y)dy}{1-xf_1(xz,z-y)-f_2(xz,z-y)}$.

（2）$F_1(x-y,y-z,z-x)(dx-dy)+F_2(x-y,y-z,z-x)(dy-dz)$

$$+F_3(x-y,y-z,z-x)(dz-dx)=0$$

$$\Rightarrow dz=\frac{F_3(x-y,y-z,z-x)-F_1(x-y,y-z,z-x)}{F_3(x-y,y-z,z-x)-F_2(x-y,y-z,z-x)}dx$$

$$+\frac{F_1(x-y,y-z,z-x)-F_2(x-y,y-z,z-x)}{F_3(x-y,y-z,z-x)-F_2(x-y,y-z,z-x)}dy\,.$$

（3） $f_1(x+y+z,x^2+y^2+z^2)(dx+dy+dz)$

$$+f_2(x+y+z,x^2+y^2+z^2)(2xdx+2ydy+2zdz)=0$$

$$\Rightarrow\quad dz=-\frac{f_1(x+y+z,x^2+y^2+z^2)+2xf_2(x+y+z,x^2+y^2+z^2)}{f_1(x+y+z,x^2+y^2+z^2)+2zf_2(x+y+z,x^2+y^2+z^2)}dx$$

$$-\frac{f_1(x+y+z,x^2+y^2+z^2)+2yf_2(x+y+z,x^2+y^2+z^2)}{f_1(x+y+z,x^2+y^2+z^2)+2zf_2(x+y+z,x^2+y^2+z^2)}dy\,.$$

（4） $f_1(x,y)dx+f_2(x,y)dy+g_1(y,z)dy+g_2(y,z)dz=0$，所以，

$$dz=-\frac{f_1(x,y)}{g_2(y,z)}dx-\frac{f_2(x,y)+g_1(y,z)}{g_2(y,z)}dy\,.$$

13．设 $z=z(x,y)$ 由方程

$$x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$$

所确定，证明

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz\,.$$

证明 方程 $x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$ 两边分别对 x,y 求偏导数，得

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=yf'\left(\frac{z}{y}\right)\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x},\qquad 2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=f\left(\frac{z}{y}\right)+yf'\left(\frac{z}{y}\right)\frac{\frac{\partial z}{\partial y}y-z}{y^2},$$

所以，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y+\frac{z}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right)-f\left(\frac{z}{y}\right)}{f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z}$，

因此有，

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$=(x^2-y^2-z^2)\frac{2x}{f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z}+2xy\frac{2y+\frac{z}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right)-f\left(\frac{z}{y}\right)}{f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z}$$

$$=\frac{2xzf'\left(\frac{z}{y}\right)-4xz^2}{f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z}=2xz.$$

14．设 $z=x^2+y^2$，其中 $y=f(x)$ 为由方程 $x^2-xy+y^2=1$ 所确定的隐函数，求 $\frac{dz}{dx}$ 和 $\frac{d^2z}{dx^2}$．

解 $\frac{dz}{dx}=2x+2y\frac{dy}{dx}$,又在方程 $x^2-xy+y^2=1$ 两边对 x 求导，得

$$2x-y-x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x-2y},$$

所以，$\frac{dz}{dx}=2x+2y\frac{2x-y}{x-2y}=\frac{2(x^2-y^2)}{x-2y}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2\left(2x-2y\frac{dy}{dx}\right)(x-2y)-2(x^2-y^2)\left(1-2\frac{dy}{dx}\right)}{(x-2y)^2}$$

$$=\frac{2(5x^3-8x^2y+15xy^2-8y^3)}{(x-2y)^3}.$$

15.设 $u=x^2+y^2+z^2$,其中 $z=f(x,y)$ 为由方程 $x^3+y^3+z^3=3xyz$ 所确定的隐函数,求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$．

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}$，而由 $x^3+y^3+z^3=3xyz$ 两边对 x 求导，得

$$3x^2+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}=3yz+3xy\frac{\partial z}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-x^2}{z^2-xy},$$

代入有，$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2z\frac{yz-x^2}{z^2-xy}=\frac{2(xy^2-x^2y+yz^2-x^2z)}{z^2-xy}$．所以，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2\left(z^2+2xz\frac{\partial z}{\partial x}-2xy+2yz\frac{\partial z}{\partial x}-2xz-x^2\frac{\partial z}{\partial x}\right)(z^2-xy)}{(z^2-xy)^2}$$

$$-\frac{2(xz^2-x^2y+yz^2+x^2y)\left(2z\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\right)}{(z^2-xy)^2}$$

$$=-\frac{2(x^5y+x^3y^3-2x^3y^2z+x^4z^2-3x^2y^2z^2+3xy^3z^2-4x^2yz^3+3xyz^4)}{(z^2-xy)^3}$$

$$-\frac{2(y^2z^4+2xz^5-z^6)}{(z^2-xy)^3}.$$

16．求下列方程组所确定的函数的导数或偏导数：

（1）$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x^2+y^2=ax,\end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{dz}{dx}$；

（2）$\begin{cases}x-u^2-yv=0,\\ y-v^2-xu=0,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$；

（3）$\begin{cases}u^2-v=3x+y,\\ u-2v^2=x-2y,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$；

（4）$\begin{cases}u=xyz,\\ x^2+y^2+z^2=1,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

解（1）$\begin{cases}2x+2yy'+2zz'=0,\\ 2x+2yy'=a,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a-2x}{2y},\\ \dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{a}{2y}.\end{cases}$

（2）方程组两边对 x 求偏导数，有

$$\begin{cases}1-2u\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ -2v\dfrac{\partial v}{\partial x}-u-x\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2v+yu}{4uv-xy},\quad\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{2u^2+x}{4uv-xy};$$

两边对 y 求偏导数，有

$$\begin{cases}-2u\dfrac{\partial u}{\partial y}-v-y\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\ 1-2v\dfrac{\partial v}{\partial y}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2v^2+y}{4uv-xy},\quad\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2u+xv}{4uv-xy}.$$

（3）方程组两边对 x 求偏导数，有

$$\begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial x}=3, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}-4v\dfrac{\partial v}{\partial x}=1, \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{12v-1}{8uv-1},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{3-2u}{8uv-1};$$

两边对 y 求偏导数，有

$$\begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}-4v\dfrac{\partial v}{\partial y}=-2, \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{4v+2}{8uv-1},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{4u+1}{8uv-1}.$$

（4）方程组两边对 x 求偏导数，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=yz+xy\dfrac{\partial z}{\partial x}, \\ 2x+2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0, \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{yz^2-x^2y}{z};$$

两边对 y 求偏导数，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y}=xz+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}, \\ 2y+2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0, \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xz^2-xy^2}{z},$$

所以，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{(2yz\dfrac{\partial z}{\partial x}-2xy)z-(yz^2-x^2y)\dfrac{\partial z}{\partial x}}{z^2}=-\dfrac{xy(x^2+3z^2)}{z^3}$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{(z^2+2yz\dfrac{\partial z}{\partial y}-x^2)z-(yz^2-x^2y)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{z^2}=\frac{z^4-x^2z^2-y^2z^2-x^2y^2}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{(2xz\dfrac{\partial z}{\partial y}-2xy)z-(xz^2-xy^2)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{z^2}=-\frac{xy(y^2+3z^2)}{z^3}.$$

17．下列方程组定义 z 为 x,y 的函数，求 $\dfrac{dz}{dx}$，$\dfrac{dz}{dy}$．

（1）$\begin{cases} x=\cos\theta\cos\varphi, \\ y=\cos\theta\sin\varphi, \\ z=\sin\theta; \end{cases}$ （2）$\begin{cases} x=u+v, \\ y=u^2+v^2, \\ z=u^3+v^3. \end{cases}$

解（1）方程组两边对 x 求偏导数，有

$$\begin{cases} 1=-\sin\theta\cos\varphi\dfrac{\partial\theta}{\partial x}-\cos\theta\sin\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ 0=-\sin\theta\sin\varphi\dfrac{\partial\theta}{\partial x}+\cos\theta\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial x}, \end{cases}$$

从前两个方程解出 $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=-\dfrac{\cos\varphi}{\sin\theta}$， $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=-\dfrac{\sin\varphi}{\cos\theta}$，代入第三个方程得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\cos\varphi\cot\theta$.

方程组两边对 y 求偏导数，有

$$\begin{cases} 0=-\sin\theta\cos\varphi\dfrac{\partial\theta}{\partial y}-\cos\theta\sin\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ 1=-\sin\theta\sin\varphi\dfrac{\partial\theta}{\partial y}+\cos\theta\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial y}, \end{cases}$$

从前两个方程解出 $\dfrac{\partial\theta}{\partial y}=-\dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}$， $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=-\dfrac{\cos\varphi}{\cos\theta}$，代入第三个方程得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin\varphi\cot\theta$.

（2）方程组两边对 x 求偏导数，有

$$\begin{cases} 1=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ 0=2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=3u^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+3v^2\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{v}{v-u}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{u}{v-u}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=-3uv=\dfrac{3}{2}(y-x^2). \end{cases}$$

同样，方程组两边对 y 求导，有

$$\begin{cases} 0=\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ 1=2u\dfrac{\partial u}{\partial y}+2v\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=3u^2\dfrac{\partial u}{\partial y}+3v^2\dfrac{\partial v}{\partial y}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{2(v-u)}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{1}{2(v-u)}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{3}{2}(u+v)=\dfrac{3}{2}x. \end{cases}$$

§3 几何应用

1．求下列曲线在所示点处的切线方程和法平面方程：

（1） $x=a\sin^2 t$, $y=b\sin t\cos t$, $z=c\cos^2 t$, 在点 $t=\dfrac{\pi}{4}$ ；

（2） $2x^2+3y^2+z^2=9$ ， $z^2=3x^2+y^2$ ，在点 $(1,-1,2)$ ；

（3） $x^2+y^2+z^2=6$， $x+y+z=0$，在点 $(1,-2,1)$；

（4） $x=t-\cos t$， $y=3+\sin^2 t$， $z=1+\cos t$，在点 $t=\dfrac{\pi}{2}$.

解（1） $t=\dfrac{\pi}{4}$，对应的点为 $(\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2},\dfrac{c}{2})$，

$x'(\dfrac{\pi}{4})=2a\sin t\cos t\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=a$， $y'(\dfrac{\pi}{4})=b(\cos^2 t-\sin^2 t)\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=0$，

$z'(\dfrac{\pi}{4})=-2c\cos t\sin t\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-c$，

因此曲线在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 对应的点 $(\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2},\dfrac{c}{2})$ 处的切线方程为

$$\frac{x-\frac{a}{2}}{a}=\frac{y-\frac{b}{2}}{0}=\frac{z-\frac{c}{2}}{-c},$$

法平面方程为： $ax-cz=\dfrac{1}{2}(a^2-c^2)$.

（2）令 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-9$， $G(x,y,z)=3x^2+y^2-z^2$，这时曲线方程为

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0,\end{cases}$$

由 $\begin{pmatrix}F_x & F_y & F_z\\ G_x & G_y & G_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x & 6y & 2z\\ 6x & 2y & -2z\end{pmatrix}$ 知

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}6y & 2z\\ 2y & -2z\end{vmatrix}=-16yz,\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=\begin{vmatrix}2z & 4x\\ -2z & 6x\end{vmatrix}=20xz,$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}4x & 6y\\ 6x & 2y\end{vmatrix}=-28xy,$$

因此，曲线在点 $(1,-1,2)$ 处的切向量为

$$\bar{\tau}=(-16yz,20xz,-28xy)\Big|_{(1,-1,2)}=4(8,10,7),$$

故曲线在点 $(1,-1,2)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-2}{7},$$

法平面方程为 $8(x-1)+10(y+1)+7(z-2)=0$，即 $8x+10y+7z=12$.

（3）令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$， $G(x,y,z)=x+y+z$，

由$\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，知

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(y-z)\text{，}\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} = \begin{vmatrix} 2z & 2x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(z-x)\text{，}$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x-y)\text{，}$$

因此曲线在$(1,-2,1)$处的切向量为$\vec{\tau} = 2(-3,0,3) = 6(-1,0,1)$，故曲线在$(1,-2,1)$处的切线方程为

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{1}\text{，}$$

法平面方程为：$-1(x-1)+(z-1)=0$，即$x-z=0$．

（4）$t=\frac{\pi}{2}$对应点为$(\frac{\pi}{2},4,1)$，$x'(\frac{\pi}{2}) = (1+\sin t)\big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 2$，

$y'(\frac{\pi}{2}) = 2\sin t\cos t\big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 0$，　$z'(\frac{\pi}{2}) = -3\sin 3t\big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 3$，

切向量为$\vec{\tau} = (2,0,3)$，切线方程

$$\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-1}{3}\text{，}$$

法平面方程为：$2(x-\frac{\pi}{2})+3(z-1)=0$，即$2x+3z=\pi+3$．

2．求下列曲面在所示点处的切平面方程和法线方程：

（1）$y-e^{2x-z}=0$，在点$(1,1,2)$；

（2）$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$在点$(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$；

（3）$z=2x^2+4y^2$在点$(2,1,12)$；

（4）$x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=av$在点$p_0(u_0,v_0)$．

解（1）令$F(x,y,z)=y-e^{2x-z}$，则法向量

$$\vec{n} = (F_x,F_y,F_z)\big|_{(1,1,2)} = (-2e^{2x-z},1,e^{2x-z})\big|_{(1,1,2)} = (-2,1,1)\text{，}$$

故所求的切平面方程为：$-2(x-1)+(y-1)+(z-2)=0$　即$-2x+y+z=1$，法线方程为：

$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}$.

（2）令 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$，就有法向量

$$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)\Big|_{(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})}=(\frac{2x}{a^2},\frac{2x}{b^2},\frac{2z}{c^2})\Big|_{(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})}=\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}),$$

所求的切平面方程 $\frac{1}{a}(x-\frac{a}{\sqrt{3}})+\frac{1}{b}(y-\frac{b}{\sqrt{3}})+\frac{1}{c}(z-\frac{c}{\sqrt{3}})=0$，即 $\frac{1}{a}x+\frac{1}{b}y+\frac{1}{c}z=\sqrt{3}$，法线方程为 $\frac{x-\frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{a}}=\frac{y-\frac{b}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{b}}=\frac{z-\frac{c}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{c}}$.

（3）设 $F(x,y,z)=2x^2+4y^2-z$，则法向量 $\vec{n}=(4x,8y,-1)\big|_{(2,1,12)}=(8,8,-1)$，所求的切平面方程为 $8(x-2)+8(y-1)-(z-12)=0$，即 $8x+8y-z=12$ $8x+8y-z=12$，法线方程为 $\frac{x-2}{8}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-12}{-1}$.

（4）由 $\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos v & \sin v & 0\\ -u\sin v & u\cos v & a\end{pmatrix}$，知

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\Big|_{p_0}=\begin{vmatrix}\sin v & 0\\ u\cos v & a\end{vmatrix}_{p_0}=a\sin v_0,\quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\Big|_{p_0}=\begin{vmatrix}0 & \cos v\\ a & -u\sin v\end{vmatrix}_{p_0}=-a\cos v_0,$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\Big|_{p_0}=\begin{vmatrix}\cos v & \sin v\\ -u\sin v & u\cos v\end{vmatrix}_{p_0}=u_0,$$

从而 $\vec{n}=(a\sin v_0,-a\cos v_0,u_0)$，又 $p_0(u_0,v_0)$ 对应的点

$$(x,y,z)=(u_0\cos v_0,u_0\sin v_0,av_0),$$

故所求的切平面方程为：

$$a\sin v_0(x-u_0\cos v_0)-a\cos v_0(y-u_0\sin v_0)+u_0(z-av_0)=0,$$

即 $ax\sin v_0-ay\cos v_0+u_0z=au_0v_0$，法线方程为：

$$\frac{x-u_0\cos v_0}{a\sin v_0}=\frac{y-u_0\sin v_0}{a\cos v_0}=\frac{z-av_0}{u_0}.$$

3．证明由曲线 $x = ae^t\cos t$ ，$y = ae^t\sin t$ ，$z = ae^t$ 与锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 的母线相交成同一角度．

证明　圆锥 $x^2 + y^2 = z^2$ 的顶点在原点，过圆锥上任一点 $P(x,y,z)$ 的母线也过原点，因此，母线的方向向量为 $\bar\tau_1 = (x,y,z)$，曲线在点 P 的切向量

$$\bar\tau_2 = (x'(t),y'(t),z'(t)) = (ae^t(\cos t - \sin t), ae^t(\sin t - \cos t), ae^t) = (x-y, x+y, z),$$

注意到 $x^2 + y^2 = z^2$，得

$$\cos(\bar\tau_1,\bar\tau_2) = \frac{\bar\tau_1\cdot\bar\tau_2}{|\bar\tau_1||\bar\tau_2|} = \frac{x(x-y)+y(x+y)+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{(x-y)^2+(x+y)^2+z^2}} = \frac{2z^2}{\sqrt{2z^2}\sqrt{3z^2}} = \frac{\sqrt6}{3},$$

即交角相同．

4．求平面曲线 $x^{\frac23} + y^{\frac23} = a^{\frac23}$ $(a>0)$ 上任一点处的切线方程，并证明这些切线被坐标轴所截取的线段等长．

解　在 $x^{\frac23} + y^{\frac23} = a^{\frac23}$ $(a>0)$ 两边对 x 求导，有 $\frac23 x^{-\frac13} + \frac23 y^{-\frac13}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$，在曲线上任一点 (x_0,y_0)，有切线斜率 $k = -\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}$ $(x_0 \ne 0)$，切线方程

$$y - y_0 = -\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}(x - x_0).$$

切线与两坐标轴交点为 $A(x_0^{\frac13}a^{\frac23}, 0)$，$B(0, y_0^{\frac13}a^{\frac23})$，故

$$d_{AB} = (x_0^{\frac23}a^{\frac43} + y_0^{\frac23}a^{\frac43})^{\frac12} = (a^{\frac43}a^{\frac23})^{\frac12} = a,$$

即这些切线被坐标轴所截取的线段等长为 a .

5．求曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 的切平面，使它平行于平面 $x + 4y + 6z = 0$.

解　曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 上任一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面的法向量为

$$\vec n = (2x_0, 4y_0, 6z_0),$$

要使它平行于平面 $x + 4y + 6z = 0$，即有 $\frac{2x_0}{1} = \frac{4y_0}{4} = \frac{6z_0}{6}$，即：$2x_0 = y_0 = z_0$，

又 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 在曲面上，故 $x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21$，得到 $P_0(\pm1,\pm2,\pm2)$，故所求切平面方程为

$$1\cdot(x\mp1) + 4(y\mp2) + 6(z\mp2) = 0,$$

或$x+4y+6z=\pm 21$为所求切平面方程.

6．证明：曲面$F(x-az,y-bz)=0$的切平面与某一定直线平行，其中a, b为常数.

证明 $G(x,y,z)=F(x-az,y-bz)$，则曲面为$G(x,y,z)=0$，曲面上任意一点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面的法向量为$\vec{n}=(G_x,G_y,G_z)\big|_{P_0}=(F_1,F_2,-aF_1-bF_2)\big|_{P_0}$.

由于$\vec{n}\cdot(a,b,1)=0$，故$\vec{n}\perp(a,b,1)$，故曲面过P_0点的切平面平行于方向向量为$\vec{\tau}=(a,b,1)$的直线，因而曲面$F(x-az,y-bz)=0$的切平面与一方向向量为$\vec{\tau}=(a,b,1)$的直线平行.

7．证明曲面$z=xe^{\frac{x}{y}}$的每一切平面都通过原点.

证明 设$F(x,y,z)=xe^{\frac{x}{y}}-z$，则曲面在任一点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面的法向量为

$$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)\big|_{P_0}=(e^{\frac{x}{y}}+xe^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y},xe^{\frac{x}{y}}(-\frac{x}{y^2}),-1)\bigg|_{P_0}=(e^{\frac{x_0}{y_0}}+\frac{x_0}{y_0}e^{\frac{x_0}{y_0}},-\frac{x_0^2}{y_0^2}e^{\frac{x_0}{y_0}},-1),$$

切平面为

$$e^{\frac{x_0}{y_0}}(1+\frac{x_0}{y_0})(x-x_0)-\frac{x_0^2}{y_0^2}e^{\frac{x_0}{y_0}}(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

注意到$z_0=x_0e^{\frac{x_0}{y_0}}$，化简即得，

$$(1+\frac{x_0}{y_0})e^{\frac{x_0}{y_0}}x-\frac{x_0^2}{y_0^2}e^{\frac{x_0}{y_0}}y-z=0,$$

所以切平面都通过原点.

8．求两曲面

$$F(x,y,z)=0,\quad G(x,y,z)=0$$

的交线在Oxy平面上的投影曲线的切线方程.

解 空间曲线$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$在任一点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程为：

$$\frac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}},$$

因此，两曲面$F(x,y,z)=0$，$G(x,y,z)=0$的交线在Oxy平面上的投影曲线的切线方程为

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}} = \dfrac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0}}, \\ z=0. \end{cases}$$

§4 方向导数

1．设 $f(x,y,z)=x+y^2+z^3$，求 f 在点 $P_0(1,1,1)$ 沿方向 $l=(2,-2,1)$ 的方向导数．

解 由于 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=1$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y$，$\dfrac{\partial f}{\partial z}=3z^2$，故 $\left.(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z})\right|_{P_0}=(1,2,3)$，$l_0=\dfrac{1}{|l|}l=\dfrac{1}{3}(2,-2,1)$，

所以 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0(1,1,1)}=(1,2,3)\cdot\dfrac{1}{3}(2,-2,1)=\dfrac{1}{3}$．

2．求函数 $u=xyz$ 在点 $A(5,1,2)$ 处沿点 $B(9,4,14)$ 的方向 $\overrightarrow{AB}$ 上的方向导数．

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yz$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=xz$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=xy$，故

$$\left.(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})\right|_A=(2,10,5),\quad l_0=\frac{1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{13}(4,3,12),$$

所以，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{AB}}\right|_{A(5,1,2)}=(2,10,5)\cdot\dfrac{1}{13}(4,3,12)=\dfrac{98}{13}$．

3．求 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$：

（1）$u=\ln(x^2+y^2),(x_0,y_0)=(1,1)$，$l$ 与 x 轴正向的夹角为 60^0；

（2）$u=xe^{xy}$, $(x_0,y_0)=(1,1)$，l 与向量 $(1,1)$ 同向．

解（1）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$，所以，

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}=\left(\frac{2x}{x^2+y^2},\frac{2y}{x^2+y^2}\right)_{(x_0,y_0)}=(1,1),$$

$$l_0=(\cos 60^0,\sin 60^0)=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),$$

所以，

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(1,1)}\cdot l_0=(1,1)\cdot(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

（2）$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{xy}(1+xy)$，$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2e^{xy}$，因此，

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}=\left(e^{xy}(1+xy),x^2e^{xy}\right)_{(1,1)}=(2e,e),$$

$$l_0=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),$$

所以，

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1)}=(2e,e)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)=\frac{3\sqrt{2}}{2}e.$$

4．设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，单位向量 $l_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),l_2=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$，$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l_1}=1,\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l_2}=0$，确定 l 使得：$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=\frac{7}{5\sqrt{2}}$.

解　由于

$$\begin{cases}1=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l_1}=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ 0=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l_2}=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(-\dfrac{1}{\sqrt{2}})+\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\dfrac{1}{\sqrt{2}},\end{cases},$$

解出，$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由 $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=\frac{7}{5\sqrt{2}}$，即 $\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\beta=\frac{7}{5\sqrt{2}}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{7}{5}$，再由 $\alpha^2+\beta^2=1$，推出 $(\alpha,\beta)=(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$ 或 $(\alpha,\beta)=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$，即 $l=(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$ 或 $l=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$.

5．设 f 在 $P_0(2,0)$ 可微，$f(x,y)$ 在 P_0 指向 $P_1=(2,-2)$ 的方向导数是 1，指向原点的方向导数是 -3，试回答：

（1）指向 $P_2=(2,1)$ 方向导数是多少？

（2）指向 $P_3=(3,2)$ 方向导数是多少？

解 由$\begin{cases}1=\dfrac{\partial f(2,0)}{\partial x}\cdot 0+\dfrac{\partial f(2,0)}{\partial y}\cdot(-1)\,, \\ -3=\dfrac{\partial f(2,0)}{\partial x}\cdot(-1)+\dfrac{\partial f(2,0)}{\partial y}\cdot 0\,,\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f(2,0)}{\partial x}=3\,, \\ \dfrac{\partial f(2,0)}{\partial y}=-1\,.\end{cases}$

（1）指向$P_2=(2,1)$方向导数为

$$\frac{\partial f(2,0)}{\partial x}\cdot 0+\frac{\partial f(2,0)}{\partial y}\cdot 1=-1\,.$$

（2）指向$P_3=(3,2)$方向导数为

$$\frac{\partial f(2,0)}{\partial x}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{\partial f(2,0)}{\partial y}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\,.$$

§5 Taylor 公式

1．写出下列函数在指定点的 Taylor 公式：

（1） $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ 在$(1,-2)$点；

（2） $f(x,y)=x^2+xy+y^2+3x-2y+4$ 在$(-1,1)$点.

解（1） $\dfrac{\partial f}{\partial x}=4x-y-6$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=-x-2y-3$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2$，高于二阶偏导数均为$0$．在$(1,-2)$点，$f(1,-2)=5$，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2$，所以，

$$f(x,y)=2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2+5\,.$$

（2） $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x+y+3$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=x+2y-2$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$，高于二阶偏导数均为$0$．在点$(-1,1)$，有 $f(-1,1)=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=2$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=-1$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$，所以，

$$f(x,y)=2(x+1)-(y-1)+(x+1)^2+(x+1)(y-1)+(y-1)^2\,.$$

2．求函数$f(x,y)=\dfrac{x}{y}$在$(1,1)$点邻域的n阶带 Lagrange 余项的 Taylor 公式.

解 $f(x,y)=x\dfrac{1}{1+(y-1)}=[(x-1)+1]\dfrac{1}{1+(y-1)}$

$$=[(x-1)+1]\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(y-1)^k+(-1)^{n+1}\frac{1}{[1+\theta(y-1)]^{n+2}}(y-1)^{n+1}\}.$$

3．求函数 $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2}$ 在 $(1,-1)$ 点邻域的二阶 Taylor 公式，并写出 Lagrange 余项.

解 $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2}=[(y+1)-1]^2\dfrac{1}{[1+(x-1)]^2}$

$$=[(y+1)-1]^2\{1-2(x-1)+3(x-1)^2-4[1+\theta(x-1)]^{-5}(x-1)^3\},$$

$$0<\theta<1.$$

4．求下列函数在 $(0,0)$ 点邻域的四阶 Taylor 公式：

（1）$f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$；

（2）$f(x,y)=e^x\ln(1+y)$；

（3）$f(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2}$；

（4）$f(x,y)=e^x\cos y$.

解（1）$f(x,y)=(x^2+y^2)-\dfrac{\cos[\theta(x^2+y^2)]}{3!}(x^2+y^2)^3$ ，$0<\theta<1$.

（2）$f(x,y)=(1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^3))(y-\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{y^3}{3}-\dfrac{y^4}{4}+o(y^4))$

$$=y+(xy-\frac{y^2}{2})+(\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{2}xy^2+\frac{y^3}{3})+(\frac{1}{6}x^3y-\frac{1}{4}x^2y^2+\frac{1}{3}xy^3-\frac{1}{4}y^4)$$

$$+o(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^2+y^4).$$

（3）$f(x,y)=(1+x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)+\dfrac{3}{8}(x^2+y^2)^2+o((x^2+y^2)^2)$.

（4）$f(x,y)=(1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{4!}x^4+o(x^4))(1-\dfrac{y^2}{2!}+\dfrac{y^4}{4!}+o(y^4))$

$$=1+x+(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2)+(\frac{1}{6}x^3-\frac{xy^2}{2})+(\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{4}x^2y^2+\frac{1}{24}y^4)$$

数.

$$+o(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4).$$

5．证明 Taylor 公式的唯一性：若

$$\sum_{i+j=0}^{n}A_{ij}x^iy^j+o(\rho^n)\ (\rho\to 0),$$

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$．求证 $A_{ij}=0$（i, j 为非负数，$i+j=0,1,\cdots,n$），并利用唯一性求 $f(x,y)=\ln(1+x+y)$ 带 Lagrange 余项的 n 阶 Taylor 展开式.

证明　$f(x,y)=0$，则 $\dfrac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i\partial y^j}=0$（$i, j$ 为非负数，$i+j=0,1,\cdots,n$），故

$$0=f(x,y)=\sum_{i+j=0}^{n}\frac{\partial^{i+j}f(0,0)}{\partial x^i\partial y^j}x^iy^j+o(\rho^n)=\sum_{i+j=0}^{n}A_{ij}x^ix^j+o(\rho^n),$$

所以 $A_{ij}=0$（i, j 为非负数，$i+j=0,1,\cdots,n$），因而 Taylor 公式是唯一的.

$$f(x,y)=\ln(1+x+y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x+y)^k+o(\rho^n)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum_{i=1}^{k}C_k^ix^{k-i}y^i+\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{(x+y)^{n+1}}{[1+\theta(x+y)]^{n+1}},\quad 0<\theta<1.$$

6．通过对 $f(x,y)=\sin x\cos y$ 用中值定理，证明存在 $\theta\in(0,1)$，使

$$\frac{3}{4}=\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi\theta}{3}\cos\frac{\pi\theta}{6}-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi\theta}{3}\sin\frac{\pi\theta}{6}.$$

证明　$f(0,0)=0$，$f_x(x,y)=\cos x\cos y$，$f_y(x,y)=-\sin x\sin y$，

$$f(x,y)=\sin x\cos y=f(0,0)+f_x(\theta x,\theta y)x+f_y(\theta x,\theta y)y$$

$$=x\cos\theta x\cos\theta y-y\sin\theta x\sin\theta y\ (0<\theta<1),$$

因而当 $x=\dfrac{\pi}{3}$，$y=\dfrac{\pi}{6}$ 时，有 $f(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6})=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{4}$，从而存在 $\theta\in(0,1)$，使

$$\frac{3}{4}=\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi\theta}{3}\cos\frac{\pi\theta}{6}-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi\theta}{3}\sin\frac{\pi\theta}{6}.$$

7．设 $f(x,y)$ 在区域 D 内有偏导数存在，且 $f_x(x,y)=f_y(x,y)\equiv 0$．证明 $f(x,y)$ 在 D 内为常数.

证明　对 $f(x,y)$ 用中值定理有（$(x_0,y_0)\in D$ 是固定的一点），

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))(x-x_0)$$

$$+f_y(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))(y-y_0)\text{，}\ 0<\theta<1$$

对一切$(x_0,y_0)\in D$成立，显然对不同的$(x,y)\in D$，θ与(x,y)有关，所以，

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)\text{，}\ \forall(x,y)\in D\text{，}$$

因而$f(x,y)$在D内为常数.

8．若$|x|$，$|y|$是很小的量，导出下列函数准确到二次项的近似公式：

（1）$\dfrac{\cos x}{\cos y}$；　　（2）$\arctan\dfrac{1+x+y}{1-xy}$.

解（1）$f(x,y)=\dfrac{\cos x}{\cos y}$，$f(0,0)=1$，$f_x(x,y)=-\dfrac{\sin x}{\cos y}$，$f_x(0,0)=0$，

$f_y(x,y)=-\dfrac{\cos x\sin y}{\cos^2 y}$，$f_y(0,0)=0$，$f_{x^2}(x,y)=-\dfrac{\cos x}{\cos y}$，$f_{x^2}(0,0)=-1$，

$f_{xy}(x,y)=-\dfrac{\sin x\sin y}{\cos^2 y}$，$f_{xy}(0,0)=0$，$f_{y^2}(x,y)=-\dfrac{\cos x(1+\sin^2 y)}{\cos^3 y}$，$f_{y^2}(0,0)=1$，

所以当$|x|$，$|y|$很小时，有

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\frac{\cos x}{\cos y}\\&\approx f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+\frac{1}{2}[f_{x^2}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{y^2}(0,0)y^2]\\&=1+\frac{1}{2}(-x^2+y^2)\ .\end{aligned}$$

（2）令$f(x,y)=\arctan\dfrac{1+x+y}{1-xy}$，则$f(0,0)=\dfrac{\pi}{4}$，

$f_x(x,y)=\dfrac{1+y+y^2}{2+2x+2y+x^2+y^2+x^2y^2}$，$f_x(0,0)=\dfrac{1}{2}$，

$f_y(x,y)=\dfrac{1+x+x^2}{2+2x+2y+x^2+y^2+x^2y^2}$，$f_y(0,0)=\dfrac{1}{2}$，

$f_{x^2}(x,y)=-\dfrac{2(1+2y+y^2)(1+x+xy^2)}{2+2x+2y+x^2+y^2+x^2y^2}$，$f_{x^2}(0,0)=-\dfrac{1}{2}$，

$$f_{xy}(x,y)=\frac{(1+2y)(2+2x+2y+x^2+y^2+x^2y^2)-(1+y+y^2)(2+2y+2x^2y)}{(2+2x+2y+x^2+y^2+x^2y^2)^2},$$

$$f_{xy}(0,0)=0，\quad f_{y^2}(x,y)=-\frac{2(1+x+x^2)(1+yx^2y)}{(2+2x+2y+x^2+y^2+x^2y^2)^2}，\quad f_{y^2}(0,0)=-\frac{1}{2}.$$

所以当$|x|$，$|y|$很小时，有

$$f(x,y)=\arctan\frac{1+x+y}{1-xy}$$

$$\approx f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+\frac{1}{2!}[f_{x^2}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{y^2}(0,0)y^2]$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2)=\frac{\pi}{4}+\frac{x+y}{2}-\frac{x^2+y^2}{2}.$$

9．设函数$f(x,y)$有直到n阶连续偏导数，试证$u(t)=f(a+ht,b+kt)$的n阶导数

$$u^{(n)}(t)=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^n f(a+ht,b+kt).$$

证明 $u'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(x+ht,y+kt)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x+ht,y+kt)k$

$$=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^1 f(x+ht,y+kt),$$

假设$u^{(n)}(t)=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^n f(x+ht,y+kt)$，则

$$u^{(n+1)}(t)=[u^{(n)}(t)]'=[(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^n f(x+ht,y+kt)]'$$

$$=\left[\sum_{m=0}^{n}C_n^m\frac{\partial^n f(a+ht,b+kt)}{\partial x^{n-m}\partial y^m}h^{n-m}k^m\right]'$$

$$=\sum_{m=0}^{n}C_n^m[\frac{\partial^{n+1}f(a+ht,b+kt)}{\partial x^{n-m+1}\partial y^m}h+\frac{\partial^{n+1}f(a+ht,b+kt)}{\partial x^{n-m}\partial y^{m+1}}k]h^{n-m}k^m$$

$$=\sum_{m=0}^{n}C_n^m\frac{\partial^{n+1}f(a+ht,b+kt)}{\partial x^{n-m+1}\partial y^m}h^{n-m+1}k^m+\sum_{m=0}^{n}\frac{\partial^{n+1}f(a+ht,b+kt)}{\partial x^{n-m}\partial y^{m+1}}h^{n-m}k^{m+1}$$

$$=C_n^0\frac{\partial^{n+1}f(a+ht,b+kt)}{\partial x^{n+1}}h^{n+1}+\sum_{m=1}^{n}(C_n^m+C_n^{m-1})\frac{\partial^{n+1}f(a+ht,b+kt)}{\partial x^{n+1-m}\partial y^m}h^{n+1-m}k^m$$

$$+C_n^n\frac{\partial^{n+1}f(a+ht,b+kt)}{\partial y^{n+1}}k^{n+1}$$

$$=C_{n+1}^0\frac{\partial^{n+1}f(a+ht,b+kt)}{\partial x^{n+1}}h^{n+1}+\sum_{m=1}^{n}C_{n+1}^m\frac{\partial^{n+1}f(a+ht,b+kt)}{\partial x^{n+1-m}\partial y^m}h^{n+1-m}k^m$$

$$+C_{n+1}^{n+1}\frac{\partial^{n+1}f(a+ht,b+kt)}{\partial y^{n+1}}k^{n+1}$$

$$=\sum_{m=0}^{n+1}C_{n+1}^m\frac{\partial^{n+1}f(a+ht,b+kt)}{\partial x^{n+1-m}\partial y^m}h^{n+1-m}k^m=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1}f(a+ht,b+kt)\text{，}$$

由归纳法原理，知所证等式成立.

10．设 $f(x,y)$ 为 n 次齐次函数，证明

$$(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^m f=n(n-1)\cdots(n-m+1)f\ .$$

证明 设 $f(x,y)$ 为 n 次齐次函数，则 $\forall t\in R^+$，有 $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$．两边求对 t 求导，有

$$\frac{\partial}{\partial x}f(tx,ty)x+\frac{\partial}{\partial y}f(tx,ty)y=nt^{n-1}f(x,y)\text{，}$$

上式两边再对 t 求导，有

$$(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^2 f(tx,ty)=n(n-1)t^{n-2}f(x,y)\ .$$

假设 $(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^k f(tx,ty)=n(n-1)\cdots(n-k+1)t^{n-k}f(x,y)$，则该式两边再对 t 求导，有

$$(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^{k+1} f(tx,ty)=n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)t^{n-k}f(x,y)\text{，}$$

令 $t=1$，对一切 $m=0,1,2,\cdots,n$，有

$$(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^m f=n(n-1)\cdots(n-m+1)f\ .$$

11. 设 $f(x,y)=\psi(ax+by)$，其中 a,b 为常数，在包含原点的某邻域内，ψ 有 q 阶连续导数. 求证：在 $(0,0)$ 点邻域的 Taylor 公式是

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{q-1}\frac{\psi^{(k)}(0)}{k!}\sum_{j=0}^{k}C_k^j(ax)^j(by)^{k-j}+R_q(x,y)\ .$$

证明 $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^j \partial y^{k-j}} = \psi^{(k)}(ax+by)a^j b^{k-j}$， $j = 0, 1, 2, \cdots, k$， $k = 0, 1, 2, \cdots, q-1$，所以

$\dfrac{\partial^k f(0,0)}{\partial x^i \partial y^{k-j}} = \psi^{(k)}(0)a^j b^{k-j}$， $j = 0, 1, 2, \cdots, k$， $k = 0, 1, 2, \cdots, q-1$.

因而 $f(x,y) = \psi(ax+by)$ 在 $(0,0)$ 点邻域的 Taylor 公式是

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} (\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y)^k f(0,0) + R_q(x,y) \\
&= \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} C_k^j \frac{\partial^k f(0,0)}{\partial x^j y^{k-j}} x^j y^{k-j} + R_q(x,y) \\
&= \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} C_k^j \psi^{(k)}(0) a^j b^{k-j} x^j y^{k-j} + R_q(x,y) \\
&= \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} \sum_{j=0}^{k} C_k^j (ax)^j (by)^{k-j} + R_q(x,y) .
\end{aligned}
$$

第十七章　隐函数存在定理

§1　单个方程的情形

1．设函数 $F(x,y)$ 满足

(1) 在区域 $D: x_0 - a \le x \le x_0 + a,\ y_0 - b \le x \le y_0 + b$ 上连续；

(2) $F(x_0, y_0) = 0$；

(3) 当 x 固定时，函数 $F(x,y)$ 是 y 的严格单调函数；

则可得到什么结论？试证明之.

解 由已知条件，可得结论

(i)存在函数 $y = f(x)$ 定义在 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 内，满足 $F(x, f(x)) \equiv 0$，且 $y_0 = f(x_0)$；

(ii) 函数 $y = f(x)$ 在 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 内连续.

下面进行证明

(i) 由条件(3),当 x 固定时，函数 $F(x,y)$ 是 y 的严格单调函数，不妨设 $F(x,y)$ 关于 y 严格单调递.

固定 $x = x_0$，由条件(2)知 $F(x_0, y_0) = 0$，从而

$$F(x_0, y_0 - b) < 0 \text{，} \ F(x_0, y_0 + b) > 0$$

在 $F(x,y)$ 中分别固定 $y = y_0 - b$ 和 $y = y_0 + b$，由一元函数 $F(x, y_0 - b)$ 和 $F(x, y_0 + b)$ 在 x_0 连续，以及连续函数的保号性，知 $\exists \alpha_1 > 0\ (\alpha_1 < a)$，使得当 $x \in (x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_1)$ 时有

$$F(x, y_0 - b) < 0 \tag{1}$$

$\exists \alpha_2 > 0\ (\alpha_2 < a)$，使得当 $x \in (x_0 - \alpha_2, x_0 + \alpha_2)$ 时有

$$F(x, y_0 + b) > 0 \tag{2}$$

取 $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$，则当 $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 时，（1）（2）两式同时成立，对任意 $\overline{x} \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$，一元函数 $F(\overline{x}, y)$ 在 $y \in (y_0 - b, y_0 + b)$ 连续，并且

$$F(\overline{x}, y_0 - b) < 0 \text{，} \ F(\overline{x}, y_0 + b) > 0$$

根据一元函数的介值定理，$\exists \overline{y} \in (y_0 - b, y_0 + b)$，使得 $F(\overline{x}, \overline{y}) = 0$.

又因为 $F(\overline{x}, y)$ 关于 y 在 $\left[y_0 - b, y_0 + b\right]$ 严格单调上升，故上述 $\overline{y}$ 是唯一的，这样就确定了一个定义在区间 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 上的隐函数 $y = f(x)$，特别地 $y_0 = f(x_0)$，这样就证明了结论(i)；

（ii）任给 $\overline{x} \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$，记 $\overline{y} = f(\overline{x})$，下证 $f(x)$ 在 $\overline{x}$ 连续.

对 $\forall \varepsilon > 0$，不妨让 ε 充分小使得 $\left[\overline{y} - \varepsilon, \overline{y} + \varepsilon\right] \subset \left[y_0 - b, y_0 + b\right]$，因为 y 的一元函数 $F(\overline{x}, y)$ 在 $\left[\overline{y} - \varepsilon, \overline{y} + \varepsilon\right]$ 上严格单调上升且 $F(\overline{x}, \overline{y}) = 0$，所以

$$F(\overline{x}, \overline{y} - \varepsilon) < 0, F(\overline{x}, \overline{y} + \varepsilon) > 0$$

而 x 的一元函数 $F(x, \overline{y} - \varepsilon)$ 和 $F(x, \overline{y} + \varepsilon)$ 在 $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 连续，故 $\exists \delta_1 > 0$，满足 $(\overline{x} - \delta_1, \overline{x} + \delta_1) \subset (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$，而且当 $x \in (\overline{x} - \delta_1, \overline{x} + \delta_1)$ 时，有

$$F(x, \overline{y} - \varepsilon) < 0 \tag{3}$$

$\exists \delta_2 > 0$，满足 $(\overline{x} - \delta_2, \overline{x} + \delta_2) \subset (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$，而且当 $x \in (\overline{x} - \delta_2, \overline{x} + \delta_2)$ 时，有

$$F(x, \overline{y} + \varepsilon) > 0 \tag{4}$$

取 $\delta = \min\left\{\delta_1, \delta_2\right\} > 0$，则当 $x \in (\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta)$ 时，(3)(4) 两式同时成立．因此只要

$x \in (\overline{x}-\delta, \overline{x}+\delta)$，$F(x,y)$ 作为 y 的函数在 $(\overline{y}-\varepsilon, \overline{y}+\varepsilon)$ 就严格单调上升，且有唯一的零点 $y=f(x)$，显然满足 $y \in (\overline{y}-\varepsilon, \overline{y}+\varepsilon)$，即 $\left|f(x)-f(\overline{x})\right|<\varepsilon$，从而结论（ii）得证.

2．方程 $x^2+y+\sin(xy)=0$ 在原点附近能否用形如 $y=f(x)$ 的隐函数表示？又能否用形如 $x=g(y)$ 的隐函数表示？

解 令 $F(x)=x^2+y+\sin(xy)$，则 $F(0,0)=0$ 并且

$$F_x=2x+y\cos(xy),\ F_y=1+x\cos(xy)$$

它们都在全平面上连续，而且 $F_y(0,0)=1$，因而方程在 $(0,0)$ 点的邻域内可唯一地确定可微函数的隐函数 $y=f(x)$，但由于 $F_x(0,0)=0$，因而据此无法判定是否在 $(0,0)$ 点的某邻域内有隐函数 $x=g(y)$ 存在.

3. 方程 $F\left(x,y\right)=y^2-x^2\left(1-x^2\right)=0$ 在哪些点的附近可以唯一地确定单值、连续且有连续导数的函数 $y=f\left(x\right)$.

解 $F_x\left(x,y\right)=4x^3-2x, F_y(x,y)=2y$ 均在全平面连续，而且 $F_y(x,y)\big|_{y\neq 0}\neq 0$，因而在方程 $F\left(x,y\right)=0$ 的除去 $\left(0,0\right)$，$\left(\pm 1,0\right)$ 的解点处，均可唯一地确定单值、连续、且有连续导数的函数 $y=f\left(x\right)$.

4. 证明有唯一可导函数 $y=y\left(x\right)$ 满足方程 $\sin y+\sinh y=x$，并求出导数 $y'\left(x\right)$，其中 $\sinh y=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$.

证明 设 $F\left(x,y\right)=\sin y+\sinh y-x$，则 $F_x\left(x,y\right)=-1$ 和 $F_y\left(x,y\right)=\cos y+\cosh y$ 在全平面连续．显然当 $y=0$ 时 $F_y\left(x,y\right)=\cos y+\cosh y>0$；当 $y\neq 0$ 时，根据平均值不等式 $\cosh y=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\geq\sqrt{e^y e^{-y}}=1$，也可以得到 $F_y\left(x,y\right)=\cos y+\cosh y>0$．因而在方程 $F\left(x,y\right)=\sin y+\sinh y-x=0$ 的任一解点附近可确定唯一的可导的函数 $y=y\left(x\right)$，且

$$y'\left(x\right)=-\frac{F_x\left(x,y\right)}{F_y\left(x,y\right)}=\frac{1}{\cos y+\cosh y}$$

5. 方程 $xy+z\ln y+e^{xz}=1$ 在点 $P_0\left(0,1,1\right)$ 的某邻域内能否确定出某一个变量是另外两个变量的函数.

解 设 $F\left(x,y,z\right)=xy+z\ln y+e^{xz}-1$，则 $F\left(0,1,1\right)=0$，而且

$$F_x\left(x,y,z\right)=y+ze^{xz},F_y\left(x,y,z\right)=x+\frac{z}{y},F_z\left(x,y,z\right)=\ln y+xe^{xz}$$

均在全平面连续，又 $F_x\left(0,1,1\right)=2\neq 0$，$F_y\left(0,1,1\right)=1\neq 0$，$F_z\left(0,1,1\right)=0$，因此在点 $P_0\left(0,1,1\right)$ 的某邻域内，可以确定出 $x=x\left(y,z\right)$，亦可确定出 $y=\left(x,z\right)$，但由于 $F_z\left(0,1,1\right)=0$，据此无法确定是否在 $P_0\left(0,1,1\right)$ 点的某邻域内有隐函数 $z=z\left(x,y\right)$ 存在.

6. 设 f 是一元函数，试问 f 应满足什么条件，方程 $2f\left(xy\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$ 在点 $\left(1,1\right)$ 的邻域内能否确定出唯一的 y 是 x 的函数.

解 设 $F\left(x,y\right)=2f\left(xy\right)-f\left(x\right)-f\left(y\right)$，则 $F\left(1,1\right)=0$，且当 f 连续可导时，有

$$F_x\left(x,y\right)=2yf'\left(xy\right)-f'\left(x\right)，\quad F_y\left(x,y\right)=2xf'\left(xy\right)-f'\left(y\right)$$

它们在 $\left(1,1\right)$ 邻域内连续，而且 $F_x\left(1,1\right)=2f'\left(1\right)-f'\left(1\right)=f'\left(1\right)$，$F_y\left(1,1\right)=f'\left(1\right)$，因而只要 $f'\left(1\right)\neq 0$ 时，就有 $F_y\left(1,1\right)\neq 0$，这时方程 $2f\left(xy\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$ 在点 $\left(1,1\right)$ 的邻域内能确定出唯一的 y 为 x 的函数.

通过上述分析知，当 f 在 $x_0=1$ 的某邻域内有连续的一阶导数且 $f'\left(1\right)\neq 0$ 时，方程 $2f\left(x,y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$ 在点 $\left(1,1\right)$ 的邻域内能确定出唯一的 y 为 x 的函数.

7. 设有方程 $x=y+\varphi\left(y\right)$，其中 $\varphi\left(0\right)=0$，且当 $-a<y<a$ 时，$\left|\varphi'\left(y\right)\right|\leq k<1$. 证明：存在 $\delta>0$，当 $-\delta<x<\delta$ 时，存在唯一的可微函数 $y=y\left(x\right)$ 满足方程 $x=y+\varphi\left(y\right)$ 且 $y\left(0\right)=0$.

证明 设 $F\left(x,y\right)=x-y-\varphi\left(y\right)$，则 $F\left(0,0\right)=0$，且

$$F_x\left(x,y\right)=1，\quad F_y\left(x,y\right)=-1-\varphi'\left(y\right)\neq 0$$

由 $F_y\left(x,y\right)=-1-\varphi'\left(y\right)\neq 0$ 知函数 $F\left(x,y\right)$ 关于 y 在 $(0,0)$ 的某领域内严格单调，因而由本节习题 1 知 $\exists\delta>0$，当 $-\delta<x<\delta$ 时，存在唯一的可微函数 $y=y\left(x\right)$，满足方程 $x=y+\varphi\left(y\right)$ 且 $y\left(0\right)=0$.

§2 方程组的情形

1. 试讨论方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2 \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

在点 $P_0\left(1,-1,2\right)$ 的附近能否确定形如 $x=f\left(z\right)$， $y=g\left(z\right)$ 的隐函数组.

解 令

$$\begin{cases} F(x,y,z)=x^2+y^2-\frac{1}{2}z^2 \\ G(x,y,z)=x+y+z-2 \end{cases}$$

显然 $F(x,y,z)$ 和 $G(x,y,z)$ 在全平面有连续的偏导数，故它们在点 $P_0\left(1,-1,2\right)$ 的附近固然也有连续偏导数，而且 $F\left(1,-1,2\right)=0$， $G\left(1,-1,2\right)=0$，又因为

$$\left.\frac{\partial\left(F,G\right)}{\partial\left(x,y\right)}\right|_{P_0}=\left.\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\right|_{P_0}=\left.\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right|_{P_0}=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=4\neq 0$$

因此在点 $P_0\left(1,-1,2\right)$ 的某邻域内方程组可唯一地确定形如 $x=f\left(z\right)$， $y=g\left(z\right)$ 隐函数组.

2. 求下列函数组的反函数组的偏导数：

（1）设 $u=x\cos\frac{y}{x}, v=x\sin\frac{y}{x}$，求 $\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial v}$；

（2）设 $u=e^x+x\sin y, v=e^x-x\cos y$，求 $\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial v}$.

解 (1) 由于 $u=x\cos\frac{y}{x}, v=x\sin\frac{y}{x}$，故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}，\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\sin\frac{y}{x}，\ \frac{\partial v}{\partial x}=\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}，\ \frac{\partial v}{\partial y}=\cos\frac{y}{x}$$

即函数组 $u=x\cos\frac{y}{x}, v=x\sin\frac{y}{x}$ 在 $x\neq 0$ 处对 x,y 的偏导数是连续的，又由于

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x} & -\sin\frac{y}{x} \\ \sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} & \cos\frac{y}{x} \end{vmatrix}=1\neq 0$$

因而由反函数组定理得

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial y}=\cos\frac{y}{x}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial y}=\sin\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}-\sin\frac{y}{x}，\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}+\cos\frac{y}{x}.$$

（2） 由 $u=e^x+x\sin y, v=e^x-x\cos y$ 的表达式知它们在全平面存在对 x, y 的连续偏导数，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x+\sin y，\ \frac{\partial u}{\partial y}=x\cos y，\ \frac{\partial v}{\partial x}=e^x-\cos y，\ \frac{\partial v}{\partial y}=x\sin y$$

又由于

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^x+\sin y & x\cos y\\ e^x-\cos y & x\sin y\end{vmatrix}=x\left(e^x(\sin y-\cos y)+1\right)$$

故在 $J\neq 0$ 的任何点的邻域内，都有

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\sin y}{e^x\left(\sin y-\cos y\right)+1}，\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\cos y}{e^x\left(\sin y-\cos y\right)+1}，$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos y-e^x}{x\left[e^x(\sin y-\cos y)+1\right]}，\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{e^x+\sin y}{x\left[e^x(\sin y-\cos y)+1\right]}.$$

3. 设 $u=\frac{x}{r^2}, v=\frac{y}{r^2}, w=\frac{z}{r^2}$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

（1） 试求以 u, v, w 为自变量的反函数组;

（2） 计算 $\frac{\partial\left(u,v,w\right)}{\partial\left(x,y,z\right)}$.

解 (1) 根据已知条件 $u=\frac{x}{r^2}, v=\frac{y}{r^2}, w=\frac{z}{r^2}$ 可得 $x=ur^2, y=vr^2, z=wr^2$，将其代入公式 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 知 $r^2=u^2r^4+v^2r^4+w^2r^4$，化简得

$$r^2=\frac{1}{u^2+v^2+w^2}$$

因而

$$\begin{cases} x=ur^2=\dfrac{u}{u^2+v^2+w^2}\\ y=vr^2=\dfrac{v}{u^2+v^2+w^2}\\ z=wr^2=\dfrac{w}{u^2+v^2+w^2}\end{cases}$$

(2)根据 u, v, w 的表达式可得它们对 x, y, z 的各个偏导数，从而有

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{r^2}-\frac{2x^2}{r^4} & -\frac{2xy}{r^4} & -\frac{2xz}{r^4} \\ -\frac{2xy}{r^4} & \frac{1}{r^2}-\frac{2y^2}{r^4} & -\frac{2yz}{r^4} \\ -\frac{2xz}{r^4} & -\frac{2yz}{r^4} & \frac{1}{r^2}-\frac{2z^2}{r^4} \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{r^{12}}\begin{vmatrix} 2x^2-r^2 & 2xy & 2xz \\ 2xy & 2y^2-r^2 & 2yz \\ 2xz & 2yz & 2z^2-r^2 \end{vmatrix}=-\frac{1}{r^6}$$

4. 设 f_i，φ_i 连续可微，且

$$F_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_i(\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_2),\cdots,\varphi_n(x_n))\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

求 $\frac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$.

解 将 $\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_2),\cdots,\varphi_n(x_n)$ 看作中间变量，根据复合函数求导法则有

$$\frac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dx_1} & \frac{\partial f_1}{\partial\varphi_2}\frac{d\varphi_2}{dx_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial\varphi_n}\frac{d\varphi_n}{dx_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dx_1} & \frac{\partial f_2}{\partial\varphi_2}\frac{d\varphi_2}{dx_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial\varphi_n}\frac{d\varphi_n}{dx_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dx_1} & \frac{\partial f_n}{\partial\varphi_2}\frac{d\varphi_2}{dx_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial\varphi_n}\frac{d\varphi_n}{dx_n} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{d\varphi_1}{dx_1}\cdot\frac{d\varphi_2}{dx_2}\cdot\cdots\cdot\frac{d\varphi_n}{dx_n}\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial\varphi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial\varphi_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial\varphi_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial\varphi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial\varphi_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial\varphi_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial\varphi_1} & \frac{\partial f_n}{\partial\varphi_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial\varphi_n} \end{vmatrix}$$

$$=\varphi_1'(x_1)\varphi_2'(x_2)\cdots\varphi_n'(x_n)\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)}$$

5. 据理说明：在点 $(0,1)$ 附近是否存在连续可微函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 满足 $f(0,1)=1$，$g(0,1)=-1$，且

$$\left[f\left(x,y\right)\right]^{3}+xg\left(x,y\right)-y=0\ ,$$

$$\left[g\left(x,y\right)\right]^{3}+yf\left(x,y\right)-x=0\ .$$

分析 令

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=u^{3}+xv-y\\G(x,y,u,v)=v^{3}+yu-x\end{cases}$$

则F,G关于各个变元在$P_0(0,1,1,-1)$附近有连续偏导数，又

$$F\left(0,1,1,-1\right)=0\ ,\ \ G\left(0,1,1,-1\right)=0\ ,$$

且$\left.\dfrac{\partial\left(F,G\right)}{\partial\left(u,v\right)}\right|_{(0,1,1,-1)}=\left.\begin{vmatrix}3u^{2}&x\\y&3v^{2}\end{vmatrix}\right|_{(0,1,1,-1)}=9\neq0$，因而由隐函数存在定理，在点$\left(0,1\right)$附近存在连续可微函数$u=f\left(x,y\right)$和$v=g\left(x,y\right)$满足$f\left(0,1\right)=1$，$g\left(0,1\right)=-1$，且

$$\left[f\left(x,y\right)\right]^{3}+xg\left(x,y\right)-y=0,$$
$$\left[g\left(x,y\right)\right]^{3}+yf\left(x,y\right)-x=0.$$

6. 设

$$\begin{cases}u=f(x,y,z,t),\\g(y,z,t)=0,\\h(z,t)=0.\end{cases}$$

在什么条件下u是x,y的函数？求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解 考虑$\begin{cases}g\left(y,z,t\right)=0\\h\left(z,t\right)=0\end{cases}$，若$g\left(y,z,t\right)$，$h\left(z,t\right)$满足：

(1) 在某一点$p_0=\left(y_0,z_0,t_0\right)$附近对各变量有一阶连续偏导数；

(2) $g\left(p_0\right)=h\left(p_0\right)=0$；

(3) $J=\dfrac{\partial\left(g,h\right)}{\partial\left(z,t\right)}\Big|_{p_0}\neq0$.

则在y_0点附近以上方程组唯一地确定一组函数$z=z\left(y\right)$，$t=t\left(y\right)$，且这组函数在y_0点附近连续可微，从而$u=f(x,y,u,v)=f\left(x,y,z\left(y\right),t\left(y\right)\right)$就是关于$x,y$的函数. 并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dy}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dy}=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{1}{J}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,t)}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{1}{J}\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,y)}$$，其中 $J=\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}$.

7. 设函数 $u=u(x)$ 由方程组

$$\begin{cases}u=f(x,y,z),\\ g(x,y,z)=0,\\ h(x,y,z)=0\end{cases}$$

所确定，求 $\dfrac{du}{dx}$，$\dfrac{d^2u}{dx^2}$.

解 由于原方程组能确定函数 $u=u(x)$，根据方程组中 u 的表达式可知 $g(x,y,z)=0$ 和 $h(x,y,z)=0$ 能确定 y,z 是 x 的函数，从而

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,z)}\Big/\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)},\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,x)}\Big/\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)} \qquad (*)$$

因此

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,z)}\Big/\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}-\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,x)}\Big/\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}$$

再对 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{dz}{dx}$ 左右两边关于 x 求导，有

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}\right)\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\\&\quad+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\cdot\frac{dz}{dx}\right)\frac{dz}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\end{aligned}$$

其中 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$ 由（*）式给出，而且根据（*）式知 $\dfrac{d^2u}{dx^2}$ 的表达式中

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,z)}\right)\cdot\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,z)}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}\right)\right]\Big/\left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}\right)^2,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,x)}\right)\cdot\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,x)}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}\right)\right]\Bigg/\left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}\right)^2 .$$

8. 设$z=z(x,y)$满足方程组

$$\begin{cases}f(x,y,z,t)=0,\\ g(x,y,z,t)=0.\end{cases}$$

求dz.

解 由已知条件知方程组能确定函数组$z=z(x,y),t=t(x,y)$，故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,t)}\Big/\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,t)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,t)}\Big/\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,t)}$$

因而$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left[-\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,t)}\Big/\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,t)}\right]dx+\left[-\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,t)}\Big/\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,t)}\right]dy$.

9. 设

$$\begin{cases}u=f(x-ut,y-ut,z-ut),\\ g(x,y,z)=0.\end{cases}$$

求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$. 这时$t$是自变量还是因变量?

解 在$g(x,y,z)=0$两边对x,y求导，有$g_1+g_3\frac{\partial z}{\partial x}=0$，$g_2+g_3\frac{\partial z}{\partial y}=0$，从而得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{g_1}{g_3},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{g_2}{g_3}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=f_1\left(1-t\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f_2\left(-t\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f_3\left(\frac{\partial z}{\partial x}-t\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\&=f_1-f_1t\frac{\partial u}{\partial x}-f_2t\frac{\partial u}{\partial x}-f_3t\frac{\partial u}{\partial x}+f_3\left(-\frac{g_1}{g_3}\right)\end{aligned}$$

从中解出$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{f_1g_3-f_3g_1}{g_3\left[1+t\left(f_1+f_2+f_3\right)\right]}$，同样由对称性得$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{f_2g_3-f_3g_2}{g_3\left[1+t\left(f_1+f_2+f_3\right)\right]}$，其中$t$是自变量.

10. 设(x_0,y_0,z_0,u_0)满足方程组

$$\begin{cases} f(x)+f(y)+f(z)=F(u), \\ g(x)+g(y)+g(z)=G(u), \\ h(x)+h(y)+h(z)=H(u), \end{cases}$$

这里假定所有的函数有连续的导数.

(1) 说出一个能在该点领域内确定 x,y,z 作为 u 的函数的充分条件；

(2) 在 $f(x)=x, g(x)=x^2, h(x)=x^3$ 的情形下，上述条件相当于什么？

解（1）设 $P_0=(x_0,y_0,z_0,u_0)$，则根据已知条件可知，当条件

(i) $\begin{cases} f(x_0)+f(y_0)+f(z_0)=F(u_0), \\ g(x_0)+g(y_0)+g(z_0)=G(u_0), \\ h(x_0)+h(y_0)+h(z_0)=H(u_0); \end{cases}$

(ii) $J|_{p_0}=\begin{vmatrix} f'(x) & f'(y) & f'(z) \\ g'(x) & g'(y) & g'(z) \\ h'(x) & h'(y) & h'(z) \end{vmatrix}\Bigg|_{p_0}=\begin{vmatrix} f'(x_0) & f'(y_0) & f'(z_0) \\ g'(x_0) & g'(y_0) & g'(z_0) \\ h'(x_0) & h'(y_0) & h'(z_0) \end{vmatrix}\neq 0$.

同时成立时，方程组就能在 P_0 的邻域内确定 x,y,z 作为 u 的函数.

（2）在 $f(x)=x, g(x)=x^2, h(x)=x^3$ 的情形下，上述条件相当于

(i) $x_0+y_0+z_0=F(u_0), {x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2=G(u_0), {x_0}^3+{y_0}^3+{z_0}^3=H(u_0)$.

(ii) $J=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x_0 & 2y_0 & 2z_0 \\ 3{x_0}^2 & 3{y_0}^2 & 3{z_0}^2 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ {x_0}^2 & {y_0}^2 & {z_0}^2 \end{vmatrix}=6(y_0-x_0)(z_0-x_0)(z_0-y_0)\neq 0$. 即

x_0,y_0,z_0 两两不等.

11. 设 $x=u, y=\dfrac{u}{1+uv}, z=\dfrac{u}{1+uw}$，取 u,v 为新的自变量，w 为新的因变量，变换方程

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2 .$$

解 由 $x=u, y=\dfrac{u}{1+uv}$ 可得

$$\begin{cases} u=u(x,y)=x, \\ v=v(x,y)=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

由于取 u,v 为新的自变量，w 为新的因变量，因而

$$z=\frac{u}{1+uw}=z(u,w)=z(u,w(u,v))=z(u(x,y),w(u(x,y),v(x,y)))$$

因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{1+uw}\right)\cdot 1+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{u}{1+uw}\right)\cdot\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 1+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{u}{1+uw}\right)\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{(1+uw)^2}\left(1-u^2\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)$$

同理

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0+0+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{u}{1+uw}\right)\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

$$=\frac{u^2}{(1+uw)^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{1}{y^2}$$

代入方程 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$ 得

$$\frac{u^2}{(1+uw)^2}\left(1-u^2\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{u^2}{(1+uw)^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}=\left(\frac{u}{1+uw}\right)^2$$

化简后得到 $u^2\frac{\partial w}{\partial u}=0$，这就是方程 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$ 用 $w=w(u,v)$ 表示的新形式.

第十八章　极值与条件极值

§1 极值与最小二乘法

1．求下列函数的极大值点和极小值点：

（1） $f(x,y)=(x-y+1)^2$；

（2） $f(x,y)=3axy-x^3-y^3\ (a>0)$；

（3） $f(x,y)=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$；

（4） $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$；

（5） $f(x,y)=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$ （$0\le x,\ y\le\frac{\pi}{2}$）；

（6） $f(x,y)=(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2$.

解（1）由 $\begin{cases}f_x(x,y)=2(x-y+1)=0,\\ f_y(x,y)=-2(x-y+1)=0,\end{cases}$ 解得稳定点为 $y=x+1$.

而 $f_{xx}=2$，$f_{xy}=-2$，$f_{yy}=2$．

由于 $D=0$，故不能用极值的充分条件判断 f 是否在稳定点取极值，但由于当 $y=x+1$ 时，$f(x,y)=0$，而 $y\neq x+1$ 时 $f(x,y)>0$，因而在 $y=x+1$ 的点处，$f(x,y)$ 取极小值也是最小值 0．

（2）由 $\begin{cases} f_x(x,y)=3ay-3x^2=0, \\ f_y(x,y)=3ax-3y^2=0, \end{cases}$ 解出稳定点为 $(0,0),(a,a)$．

在点 $(0,0)$，$a_{11}=f_{xx}(0,0)=0$，$a_{12}=f_{xy}(0,0)=3a$，$a_{22}=f_{yy}(0,0)=0$，这时，

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=-9a^2<0,$$

故 $(0,0)$ 不是极值点．在点 (a,a)，

$$a_{11}=f_{xx}(a,a)=-6a,\quad a_{12}=f_{xy}(a,a)=3a,\quad a_{22}=f_{yy}(a,a)=-6a,$$

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=27a^2>0,\quad a_{11}=-6a<0,$$

故 $f(x,y)$ 在 (a,a) 取极大值 $f(a,a)=a^3$．

（3）令 $\begin{cases} f_x(x,y)=x(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2})\Big/\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}=0, \\ f_y(x,y)=y(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2})\Big/\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}=0, \end{cases}$ 解得稳定点为

$$P_1=(0,0),\quad P_2=(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad P_3=(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad P_4=(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad P_5=(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}).$$

在点 $P_1=(0,0)$，$f_{xx}(0,0)=f_{yy}(0,0)=0, f_{xy}(0,0)=1$ 且 $D<0$，故 $f(x,y)$ 在点 $P_1=(0,0)$ 不取极值．

在点 $P_2=(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}})$，有

$$a_{11}=\frac{-4a}{\sqrt{3}a}<0, a_{12}=-\frac{2}{\sqrt{3}}, a_{22}=\frac{-4b}{\sqrt{3}a} \text{ 且 } D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=4>0,$$

故 $f(x,y)$ 在点 $P_2=(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}})$ 取极大值 $\frac{\sqrt{3}}{9}ab$．

在点 $P_3=(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}})$，有

$$a_{11}=\frac{4a}{\sqrt{3a}}>0,\ a_{12}=-\frac{2}{\sqrt{3}},\ a_{22}=\frac{4b}{\sqrt{3a}}\text{ 且 }D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=4>0,$$

故 $f(x,y)$ 在点 $P_3=(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}})$ 取极小值 $-\frac{\sqrt{3}}{9}ab$.

在点 $P_4=(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}})$ ，有

$$a_{11}=\frac{-4a}{\sqrt{3a}}<0,\ a_{12}=\frac{2}{\sqrt{3}},\ a_{22}=\frac{-4b}{\sqrt{3a}}\text{ 且 }D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=4>0,$$

故 $f(x,y)$ 在点 $P_4=(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}})$ 取极小值 $-\frac{\sqrt{3}}{9}ab$.

在点 $P_5=(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}})$ ，有

$$a_{11}=\frac{-4a}{\sqrt{3a}}<0,\ a_{12}=-\frac{2}{\sqrt{3}},\ a_{22}=\frac{-4b}{\sqrt{3a}}<0\text{ 且 }D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=4>0,$$

故 $f(x,y)$ 在点 $P_5=(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}})$ 取极大值 $\frac{\sqrt{3}}{9}ab$.

（4）令 $\begin{cases}f_x(x,y)=e^{2x}(1+2x+4y+2y^2)=0,\\ f_y(x,y)=2e^{2x}(1+y)=0,\end{cases}$ 解得稳定点 $(\frac{1}{2},-1)$. 而

$$a_{11}=f_{xx}(\frac{1}{2},-1)=2e>0,\ a_{22}=f_{yy}(\frac{1}{2},-1)=2e>0,\ a_{12}=f_{xy}(\frac{1}{2},-1)=0,$$

且 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=4e^2>0$ ，所以， $f(x,y)$ 在 $(\frac{1}{2},-1)$ 取极小值为 $-\frac{1}{2}e$.

（5）令 $\begin{cases}f_x(x,y)=\cos x-\sin(x-y)=0,\\ f_y(x,y)=-\sin y+\sin(x-y)=0,\end{cases}$ 解得稳定点为 $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$.

$$a_{11}=f_{xx}(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})=-\sqrt{3}<0,\ a_{22}=f_{yy}(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})=-\sqrt{3}<0,\ a_{12}=f_{xy}(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

且 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=\frac{9}{4}>0$ ，故 $f(x,y)$ 在 $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$ 取极大值为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

（6）令 $\begin{cases}f_x(x,y)=2x(\sqrt{x^2+y^2}-1)\big/\sqrt{x^2+y^2}=0,\\ f_y(x,y)=2y(\sqrt{x^2+y^2}-1)\big/\sqrt{x^2+y^2}=0,\end{cases}$ 解得稳定点为 $x^2+y^2=1$ 上的所有点，

而 $P_1(0,0)$ 是导数不存在的点.

由于 $f(x,y)$ 在圆周 $x^2+y^2=1$ 上的点取值 0，而 $f(x,y)\geq 0$，故 $f(x,y)$ 在圆周 $x^2+y^2=1$ 上的点取极小值也是最小值 0，而在 $P_1(0,0)$，

$$f(x,y)=(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2\leq 1=f(0,0)，\ \forall\sqrt{x^2+y^2}<2，$$

因而 $P_1(0,0)$ 是极大值点，极大值为 1.

2．已知 $y=ax^2+bx+c$，观测得一组数据 $(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,n$，利用最小二乘法，求系数 a,b,c 所满足的三元一次方程组.

解 记 $f(a,b,c)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2$，为求其最小值，分别对 a,b,c 求偏导数，并令它们等于 0，即

$$\frac{\partial f}{\partial a}=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i^2=0，$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i=0，$$

$$\frac{\partial f}{\partial c}=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)=0，$$

即系数 a,b,c 所满足的三元一次方程组为

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^4+b\sum_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i\ , \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^3+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\ , \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i+cn=\sum_{i=1}^{n}y_i\ . \end{cases}$$

3．已知平面上 n 个点的坐标分别是

$$A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),\cdots,A_n(x_n,y_n)，$$

试求一点，使它与这 n 个点距离的平方和最小.

解 设平面点为 $P(x,y)$，则它到 n 个点距离的平方和为

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]，$$

由函数极值的条件得，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2\sum_{i=1}^{n}(y-y_i)=0,$$

得稳定点$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i)=(\bar{x},\bar{y})$．由于实际问题有最小值，而稳定点又唯一，故稳定点即为最小值点．因而点$(\bar{x},\bar{y})$与这n个点距离的平方和最小．

4．求下列函数在指定范围D内的最大值和最小值：

（1）$f(x,y)=x^2-y^2,D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4\}$；

（2）$f(x,y)=x^2-xy+y^2,D=\{(x,y)||x|+|y|\le 1\}$；

（3）$f(x,y,z)=(ax+by+cz)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$，其中$a^2+b^2+c^2>0$，$D=R^3$．

解（1）令$\begin{cases}f_x(x,y)=2x=0,\\ f_y(x,y)=2y=0,\end{cases}$ 解得D内的唯一稳定点$(0,0)$．又因为，

$$a_{11}=f_{xx}(0,0)=2>0,a_{22}=f_{yy}(0,0)=-2<0,a_{12}=f_{xy}(0,0)=0,$$

且$D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=-4<0$，故在$(0,0)$点，$f(x,y)$达不到极值，在边界$x^2+y^2=4$上，

$$f(x,y)=x^2-y^2=x^2-(4-x^2)=2(x^2-2)=\varphi(x),|x|\le 2,$$

令$\varphi'(x)=4x=0$，得唯一的稳定点$x=0$，且$\varphi''(x)=4>0$，故$\varphi(x)$在$x=0$取极小值，这就是函数$f(x,y)$的最小值，其值为$f(0,\pm 2)=-4$，在边界点$x=\pm 2$时$y=0$，$f(\pm 2,0)=4$，即函数在$(\pm 2,0)$取最大值4．

（2）令 $\begin{cases}f_x(x,y)=2x-y=0,\\ f_y(x,y)=2y-x=0,\end{cases}$ 解得唯一的稳定点$(0,0)$，从而由

$$a_{11}=f_{xx}(0,0)=2>0,a_{22}=f_{yy}(0,0)=2>0,a_{12}=f_{xy}(0,0)=-1,$$

且$D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=5>0$故$(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点，也是最小值点，最小值为$f(0,0)=0$．而在边界$|x|+|y|\le 1$上，在$y=1-x,0\le x\le 1$，

$$f(x,y)=(1-\frac{3}{2}x)^2+\frac{3}{4}x^2,$$

在$x=0$或$x=1$取最大值$f(1,0)=f(0,1)=1$，在$x=\frac{1}{2}$取最小值$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$．

在$y=1+x,-1\le x\le 0$，

$$f(x,y)=x^2+x+1,$$

在 $x=0$ 或 $x=-1$ 取最大值 $f(-1,0)=f(0,1)=1$，在 $x=\frac{1}{2}$ 取最小值 $f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$.

在 $y=-1-x,\ 0\le x\le 1$，

$$f(x,y)=x^2-x+1,$$

在 $x=0$ 或 $x=-1$ 取最大值 $f(-1,0)=f(0,-1)=1$，在 $x=-\frac{1}{2}$ 取最小值 $f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$.

总之，在 D 上，$f(x,y)$ 取最小值 $f(0,0)=0$，取最大值1.

（3）令

$$\begin{cases}f_x(x,y,z)=[a-2x(ax+by+cz)]e^{-(x^2+y^2+z^2)}=0,\\ f_y(x,y,z)=[b-2y(ax+by+cz)]e^{-(x^2+y^2+z^2)}=0,\\ f_z(x,y,z)=[c-2z(ax+by+cz)]e^{-(x^2+y^2+z^2)}=0,\end{cases}$$

解得稳定点为

$$P_1(\frac{a}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}},\frac{b}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}},\frac{c}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}}),$$

$$P_2(-\frac{a}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}},-\frac{b}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}},-\frac{c}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}}).$$

可以通过求在每一个稳定点的 Hesse 矩阵，知 $f(x,y,z)$ 在 P_1 取极大值，在 P_2 取极小值. 由于极大值点与极小值点均唯一，故极大值点与极小值就是最大值点与最小值点，最大值为 $f(P_1)=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}e^{-\frac{1}{2}}$，最小值为 $f(P_2)=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}e^{-\frac{1}{2}}$.

5．求证：

（1）$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F$ 在 R^2 有最小值，无最大值. 其中 $A>0,B^2<AC$；

（2）$f(x,y)=xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 在 $0<x,\ y<+\infty$ 有最小值，无最大值.

证明（1）令 $\begin{cases}f_x(x,y)=2Ax+2By+2D=0,\\ f_y(x,y)=2Bx+2Cy+2E=0,\end{cases}$

由于

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0,$$

故以上方程组有唯一一组解，即有唯一稳定点 $P_0(x_0, y_0)$．又因为

$$a_{11} = f_{xx}(P_0) = 2A > 0, a_{22} = f_{yy}(P_0) = 2C, a_{12} = f_{xy}(P_0) = 2B,$$

且 $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 4B^2 - 4AC < 0$，故 $f(x,y)$ 在 P_0 取极小值．由于极小值点唯一，因而就是最小值点，所以 $f(x,y)$ 在 R^2 有最小值，无最大值.

（2）令

$$\begin{cases} f_x(x,y) = y - \dfrac{1}{x^2} = 0, \\ f_y(x,y) = x - \dfrac{1}{y^2} = 0, \end{cases}$$

解得唯一稳定点 $P_0(1,1)$，又因为

$$a_{11} = f_{xx}(P_0) = 2 > 0, a_{22} = f_{yy}(P_0) = 2 > 0, a_{12} = f_{xy}(P_0) = 1,$$

且 $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 3 > 0$，所以 $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ 在 $P_0(1,1)$ 取极小值，又极小值点唯一，故就是最小值点，即 $f(x,y)$ 在 $0 < x, y < +\infty$ 有最小值，无最大值.

6．设 $F(x,y,z)$ 有二阶连续偏导数，并且

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

讨论由 $F(x,y,z) = 0$ 确定的隐函数 $z = f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 取得极值的必要和充分条件，再由

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$$

所确定的 $z = f(x,y)$ 的极值.

解　取极值的必要条件为在 (x_0, y_0)，有

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = -\dfrac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = -\dfrac{F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)} = 0, \end{cases}$$

即$F_x(x_0,y_0,z_0)=0$且$F_y(x_0,y_0,z_0)=0$为在(x_0,y_0)取得极值的必要条件.

在$F(x,y,z)=0$两边对x，y二次求导，有

$$\begin{cases} F_x+F_z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0, \\ F_y+F_z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{xx}+F_{xy}\dfrac{\partial z}{\partial x}+F_{zx}\dfrac{\partial z}{\partial x}+F_{zz}(\dfrac{\partial z}{\partial x})^2+F_z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, \\ F_{xy}+F_{xz}\dfrac{\partial z}{\partial y}+F_{zy}\dfrac{\partial z}{\partial x}+F_{zz}\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}+F_z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0, \\ F_{yy}+F_{yz}\dfrac{\partial z}{\partial y}+F_{zy}\dfrac{\partial z}{\partial y}+F_{zz}(\dfrac{\partial z}{\partial y})^2+F_z\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \end{cases}$$

并利用在(x_0,y_0)有，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，就有

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}=-\frac{F_{xx}(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)},\quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=-\frac{F_{xy}(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)},$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}=-\frac{F_{yy}(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)},$$

因此在(x_0,y_0)，隐函数$z=f(x,y)$取极值的充分条件为

$$(-\frac{F_{xx}(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)})(-\frac{F_{yy}(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)})-(-\frac{F_{xy}(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)})^2$$

$$=\frac{F_{xx}(x_0,y_0,z_0)F_{yy}(x_0,y_0,z_0)-F_{xy}^2(x_0,y_0,z_0)}{F_z^2(x_0,y_0,z_0)}>0,$$

即 $F_{xx}(x_0,y_0,z_0)F_{yy}(x_0,y_0,z_0)-F_{xy}^2(x_0,y_0,z_0)>0$. 且当 $-\dfrac{F_{xx}(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}>0$ （或 $-\dfrac{F_{yy}(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}>0$）时，取极小值， 当$-\dfrac{F_{xx}(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}<0$（或$-\dfrac{F_{yy}(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}<0$）时，取极大值.

即当$F_{xx}(x_0,y_0,z_0)F_{yy}(x_0,y_0,z_0)-F_{xy}^2(x_0,y_0,z_0)>0$时取极值，当上式为负时，不取极值，为0时不定.

设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10$，则令

$$\begin{cases}F_x(x,y,z)=2x-2=0\,,\\ F_y(x,y,z)=2y+2=0\,,\end{cases}$$

解出稳定点 $(1,-1)$，对应空间中的点为 $P_1(1,-1,6)$ 与 $P_2(1,-1,-2)$，且

$$F_{xx}=2,\,F_{xy}=0,\,F_{yy}=2\,,$$

因为 $D=F_{xx}F_{yy}-F_{xy}^2=4>0$（在 P_1 与 P_2），且 $F_z(P_1)=(2z-4)|_{P_1}=8$，$F_z(P_2)=(2z-4)|_{P_2}=-8$，所以有：

由于 $-\dfrac{F_{xx}(P_1)}{F_z(P_1)}=-\dfrac{2}{8}<0$，故在 $P_1(1,-1,6)$ 取极大值 6；而 $-\dfrac{F_{xx}(P_2)}{F_z(P_2)}=\dfrac{2}{8}>0$，故在 $P_2(1,-1,-2)$ 取极小值 -2 .

7．求下列隐函数的极大值和极小值：

（1）$(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2=3$；

（2）$z^2+xyz-x^2-xy^2-9=0$.

解（1）设 $F(x,y,z)=(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2-3$．则由

$$\begin{cases}F_x(x,y,z)=2(x+y)+2(z+x)=0\,,\\ F_y(x,y,z)=2(x+y)+2(z+y)=0\,,\\ F(x,y,z)=0\,,\end{cases}$$

得到两个稳定点 $P_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$，$P_2(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$．因为 $F_{xx}=4,\,F_{xy}=2,\,F_{yy}=4$，所以 $D=F_{xx}F_{yy}-F_{xy}^2=12>0$，且

$$F_z(P_1)=[2(y+z)+2(z+x)]|_{P_1}=-4\,,\quad F_z(P_2)=[2(y+z)+2(z+x)]|_{P_2}=4\,,$$

因此，$-\dfrac{F_{xx}(P_1)}{F_z(P_1)}=1>0$，故在 $(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$ 取极小值 $-\dfrac{3}{2}$；$-\dfrac{F_{xx}(P_2)}{F_z(P_2)}=-1<0$，故在 $(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2})$ 取极大值 $-\dfrac{1}{2}$.

（2）设 $F(x,y,z)=z^2+xyz-x^2-xy^2-9$，由方程

$$\begin{cases} F_x(x,y,z) = yz - 2x - y^2 = 0, \\ F_y(x,y,z) = xz - 2xy = 0, \\ F(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

解得稳定点为 $P_{1,2}(0,0,\pm 3)$，$P_{3,4}(0,\pm 3,\pm 3)$，$P_{5,6}(1,\pm\sqrt{2},\pm 2\sqrt{2})$，且

$$F_{xx} = -2, F_{xy} = z - 2y, F_{yy} = -2x,$$

在点 $P_1(0,0,3)$，有 $F_{xx}(P_1) = -2, F_{xy}(P_1) = 3, F_{yy}(P_1) = 0$，$D = -9 < 0$，故函数在 $P_1(0,0,3)$ 不取极值；

在点 $P_2(0,0,-3)$，有 $F_{xx}(P_2) = -2, F_{xy}(P_2) = -3, F_{yy}(P_2) = 0$，$D = -9 < 0$，故函数在 $P_2(0,0,-3)$ 不取极值；

在点 $P_3(0,3,3)$，有 $F_{xx}(P_3) = -2, F_{xy}(P_3) = -3, F_{yy}(P_3) = 0$，$D = -9 < 0$，故函数在 $P_3(0,3,3)$ 不取极值；

在点 $P_4(0,-3,-3)$，有 $F_{xx}(P_4) = -2, F_{xy}(P_4) = 3, F_{yy}(P_4) = 0$，$D = -9 < 0$，故函数在 $P_4(0,-3,-3)$ 也不取极值；

在点 $P_5(1,\sqrt{2},2\sqrt{2})$，有 $F_{xx}(P_5) = -2, F_{xy}(P_5) = 0, F_{yy}(P_5) = -2$，$D = 4 > 0$，而且 $F_z(P_5) = (2z + xy)]|_{P_5} = 5\sqrt{2}$，因而

$$-\frac{F_{xx}(P_5)}{F_z(P_5)} = \frac{1}{5}\sqrt{2} > 0,$$

故函数在 $P_5(1,\sqrt{2},2\sqrt{2})$ 取极小值 $2\sqrt{2}$；

在点 $P_6(1,-\sqrt{2},-2\sqrt{2})$，有 $F_{xx}(P_6) = -2, F_{xy}(P_6) = 0, F_{yy}(P_6) = -2$，$D = 4 > 0$，而且 $F_z(P_6) = (2z + xy)|_{P_6} = -5\sqrt{2}$，因此

$$-\frac{F_{xx}(P_6)}{F_z(P_6)} = -\frac{1}{5}\sqrt{2} < 0,$$

所以，函数在 $P_6(1,-\sqrt{2},-2\sqrt{2})$ 取极大值 $-2\sqrt{2}$.

8．在已知周长为 $2p$ 的一切三角形中，求出面积为最大的三角形.

解　设三角形其中两边长为 x, y，则另一边长为 $2p - x - y$，面积为

$$s=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-(2p-x-y))}=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)},$$

由于s与s^2的最值点相同，而

$$s^2=p(p-x)(p-y)(x+y-p)\equiv F(x,y),$$

令

$$\begin{cases}F_x(x,y)=p(p-y)(2p-2x-y)=0,\\ F_y(x,y,z)=p(p-x)(2p-x-2y)=0,\end{cases}$$

解得稳定点$(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3})$. 由于驻点唯一，实际问题又有最大值，故最大值点为$(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3})$，这时$z=\frac{2p}{3}$，即在已知周长为$2p$的一切三角形中，面积最大的为等边三角形.

9．有一块铁皮，宽$b=24cm$，要把它的两边折起做成一个槽，使得容积最大，求两边的倾角α和折起的宽度x（见下图）.

解 要使容积最大，只要使折起的横截面积s最大．而

$$s=\frac{1}{2}x\sin\alpha(24-2x+24-2x+2x\cos\alpha).$$

由极值的必要条件

$$\begin{cases}s_x=(24-4x+2x\cos\alpha)\sin\alpha=0,\\ s_\alpha=24x\cos\alpha+x^2\cos2\alpha-2x^2\cos\alpha=0,\end{cases}$$

解得稳定点为$(8,\frac{\pi}{3})$，由于稳定点唯一，实际又有最大值，故最大值点为$(8,\frac{\pi}{3})$，即两边的倾角$\alpha=\frac{\pi}{3}$，折起的宽度$x=8cm$时，容积最大.

§2 条件极值

1．求下列函数在给定条件下的极值：

（1）$f=x+y$，若$x^2+y^2=1$；

（2）$f=x^2+y^2$，若$x+y-1=0$；

（3）$f=x-2y+2z$，若$x^2+y^2+z^2=1$；

（4）$f=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$，若$x+y=2$；

（5）$f=xyz$，若$x^2+y^2+z^2=1$， $x+y+z=0$；

（6）$f=ax^2+by^2+2hxy$，若$x^2+y^2=1$；

（7）$f=x^2+y^2+z^2$，若$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$，

$lx+my+nz=0$.

解（1）作 Lagrange 函数 $L(x,y)=x+y+\lambda(x^2+y^2-1)$，令

$$\begin{cases} L_x=1+2\lambda x=0, \\ L_y=1+2\lambda y=0, \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$$

由前两式得 $x=y$，代入最后一式解得稳定点 $P_1(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 与 $P_2(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

下面判别稳定点是极值点．记 $F(x,y)=x^2+y^2-1$，则 $F_y(x,y)=2y$，在 P_1,P_2 均不等于 0，故方程 $x^2+y^2=1$ 在稳定点 P_1 和 P_2 附近均可唯一地确定可微函数 $y=y(x)$．令 $g(x)=x+y(x)$，由约束条件得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$，再由复合函数的链式法则有

$$\frac{dg}{dx}=1+\frac{dy}{dx}=1-\frac{x}{y},\quad \frac{d^2g}{dx^2}=-\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}=-\frac{1}{y^3},$$

故函数 g 在 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 点有，$\left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\left.\frac{1}{y^3}\right|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=-2\sqrt{2}<0$，因此 $g(x)$ 在 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 处取极大值，这等价于 $f=x+y$ 在 $P_1(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 处取得条件极大值 $f(P_1)=\sqrt{2}$；

函数 g 在 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 点有，$\left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\left.\frac{1}{y^3}\right|_{x=-\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}>0$，因此 $g(x)$ 在 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 处取极小值，这等价于 $f=x+y$ 在 $P_2(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 处取得条件极小值 $f(P_2)=-\sqrt{2}$.

（2）作 Lagrange 函数 $L(x,y)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$，由

$$\begin{cases} L_x=2x+\lambda=0, \\ L_y=2y+\lambda=0, \\ x+y-1=0, \end{cases}$$

由前两式得 $x=y=-\frac{\lambda}{2}$，代入第三式得 $x=y=\frac{1}{2}$，即稳定点 $P_0(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

记 $F(x,y)=x+y-1$，则 $F_y(x,y)=1\neq 0$，故方程 $x+y-1=0$ 在稳定点附近可唯一地确定可

微函数 $y=y(x)$，令 $g(x)=x^2+y^2(x)$，由约束条件得 $\dfrac{dy}{dx}=-1$，所以

$$\frac{dg}{dx}=2x+2y\frac{dy}{dx}=2x-2y，\quad \frac{d^2g}{dx^2}=2-2\frac{dy}{dx}=4>0，$$

所以函数 g 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 取极小值，这等价于 $f=x^2+y^2$ 在 $P_0(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$ 处取得条件极小值 $f(P_0)=\dfrac{1}{2}$.

（3）作 Lagrange 函数 $L(x,y,z)=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$，由

$$\begin{cases} L_x=1+2\lambda x=0, \\ L_y=-2+2\lambda y=0, \\ L_z=2+2\lambda z=0, \\ x^2+y^2+z^2=1, \end{cases}$$

由前三式得 $y=-z=-2x$，代入第四个方程得稳定点 $P_1(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3})$，$P_2(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3})$.

记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$，则 $F_z(x,y,z)=2z$ 在 P_1，P_2 均不等于 0，故方程 $x^2+y^2+z^2=1$ 在稳定点 P_1，P_2 附近均可唯一地确定可微函数 $z=z(x,y)$，令

$$g(x,y)=x-2y+2z(x,y),$$

由约束条件得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x}{y}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{z}$，由复合函数链式法则，

$$\frac{\partial g}{\partial x}=1+2\frac{\partial z}{\partial x}=1-\frac{2x}{z}，\quad \frac{\partial g}{\partial y}=-2+2\frac{\partial z}{\partial y}=-2-\frac{2y}{z},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-\frac{2z-2x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{z^2}=-\frac{2(x^2+z^2)}{z^3}，\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=-\frac{-2x\dfrac{\partial z}{\partial y}}{z^2}=-\frac{2xy}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-\frac{2z-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}}{z^2}=-\frac{2(y^2+z^2)}{z^3},$$

故函数 g 在 $(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3})$ 点有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\dfrac{15}{4} & \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{3}{2} & -6 \end{vmatrix}=18>0,$$

且 $a_{11}=-\dfrac{15}{4}<0$，因此 $g(x,y)$ 在 $(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3})$ 处取极大值，这等价于 $f(x,y,z)$ 在 $P_1(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3})$ 处取得

条件极大值 $f(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})=3$；

函数 g 在 $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ 点有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{15}{4} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 6 \end{vmatrix}=18>0,$$

且 $a_{11}=\frac{15}{4}>0$，故 $g(x,y)$ 在 $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ 处取极小值，这等价于 $f(x,y,z)$ 在 $P_2(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$ 处取得条件极小值 $f(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})=-3$.

（4）作 Lagrange 函数 $L(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\lambda(x+y-2)$，由

$$\begin{cases} L_x=-\frac{1}{x^2}+\lambda=0, \\ L_y=-\frac{1}{y^2}+\lambda=0, \\ x+y-2=0, \end{cases}$$

由前两式得 $\lambda=\frac{1}{x^2}=\frac{1}{y^2}\Rightarrow x^2=y^2$，即 $y=\pm x$，再以最后一式得 $x=y=1$（当 $y=-x$ 时无解），得稳定点 $(1,1)$.

记 $F(x,y)=x+y-2$，则 $F_y(x,y)=1\neq 0$，故方程 $x+y-2=0$ 在稳定点附近可唯一确定可微函数 $y=y(x)$，令 $g(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y(x)}$，由约束条件得 $\frac{dy}{dx}=-1$，所以，

$$\frac{dg}{dx}=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2(x)}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2},\quad \frac{d^2g}{dx^2}=-\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x^3}=\frac{2}{y^3}+\frac{2}{x^3},$$

在 $x=1$ 有，$\left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=1}=4>0$，故函数 $g(x)$ 在 $x=1$ 取极小值，这等价于 $f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处取条件极小值 $f(1,1)=2$.

（5）作 Lagrange 函数 $L(x,y,z)=xyz+\lambda_1(x^2+y^2+z^2-1)+\lambda_2(x+y+z)$，由于

$$\begin{cases} L_x = yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0\,, \\ L_y = xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0\,, \\ L_z = xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0\,, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, \\ x + y + z = 0\,, \end{cases}$$

用前三式得 $x = y = z$，或 $x = y = 2\lambda_1$，或 $x = z = 2\lambda_1$，或 $y = z = 2\lambda_1$． $x = y = z$ 不适合后两式，故有 $x = y = 2\lambda_1$，或 $x = z = 2\lambda_1$，或 $y = z = 2\lambda_1$，这时，

$$x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\,,\quad z = \mp\frac{2}{\sqrt{6}}\,,$$

或

$$x = z = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\,,\quad y = \mp\frac{2}{\sqrt{6}}\,,$$

或

$$y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\,,\quad x = \mp\frac{2}{\sqrt{6}}\,,$$

由 $f(x,y,z) = xyz$,及 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$， $x + y + z = 0$ 关于 x, y, z 的对称性知，只须考虑两点 $P_1(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}.-\frac{2}{\sqrt{6}})$ 与 $P_2(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})$．下面判定稳定点是否极值点.

若记 $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$，$G(x,y,z) = x + y + z$，则

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(y - z)\,,$$

在 P_1 ,P_2 点均不等于 0 ,故方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在两个稳定点 P_1 ,P_2 附近可唯一的确定可微函数组 $y = y(x), z = z(x)$，令 $g(x) = xy(x)z(x)$，由约束条件得

$$\frac{dy}{dx} = yz + \frac{x - z}{z - y}\,,\quad \frac{dz}{dx} = \frac{y - x}{z - y}\,,$$

由复合函数链式法则得

$$\frac{dg}{dx} = yz + x\frac{dy}{dx}z + xy\frac{dz}{dx} = \frac{yz^2 - y^2 z + x^2 z - xz^2 + xy^2 - x^2 y}{z - y}\,,$$

$$\frac{d^2g}{dx^2}=\frac{4(xz^3+yz^3-y^3z-xy^3-x^2y^2)+2(y^4-z^4)+12xyz(y-z)}{(z-y)^3}.$$

在 $P_1(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})$ 对应的 $x=\frac{1}{\sqrt{6}}$，有 $\left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=\frac{1}{\sqrt{6}}}=\frac{83}{81}\sqrt{6}>0$，函数 g 在 $x=\frac{1}{\sqrt{6}}$ 取极小值，这等价于 $f(x,y,z)$ 在 P_1 点取条件极小值

$$f(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})=-\frac{\sqrt{6}}{18}.$$

在 $P_2(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})$ 对应 $x=-\frac{1}{\sqrt{6}}$，有 $\left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=-\frac{1}{\sqrt{6}}}=-\frac{83}{81}\sqrt{6}<0$，故函数 g 在 $x=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ 取极大值，这等价于 $f(x,y,z)$ 在 P_2 点取条件极大值

$$f(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})=\frac{\sqrt{6}}{18}.$$

同样函数 $f(x,y,z)$ 在 $(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$ 与 $(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$ 两点取条件极小值 $\frac{\sqrt{6}}{18}$，在 $(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}})$ 与 $(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}})$ 两点取条件极大值 $\frac{\sqrt{6}}{18}$.

（6）作 Lagrange 函数 $L(x,y)=ax^2+by^2+2hxy+\lambda(x^2+y^2-1)$，令

$$\begin{cases}L_x=2ax+2hy+2\lambda x=0,\\ L_y=2by+2hx+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$$

由 $x^2+y^2=1$ 知 x,y 不全为 0，故前两式构成的 x,y 的线性方程组的系数矩阵必等于 0，即

$$A=\begin{vmatrix}a+\lambda & h\\ h & b+\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+(a+b)\lambda+ab-h^2=0. \quad (*)$$

当 $(a-b)^2+4h^2=0$，即当 $a=b$ 且 $h=0$ 时，所研究的函数为常数 a，当 $(a-b)^2+4h^2>0$ 时方程（*）必有两个不等的实根，记为 λ_1,λ_2（$\lambda_1>\lambda_2$），由前面的方程组可解出

$$x_{1,2}=\frac{\pm(\lambda_1+b)}{\sqrt{h^2+(\lambda_1-b)^2}},\quad y_{1,2}=\frac{\pm(\lambda_1+a)}{\sqrt{h^2+(\lambda_1-a)^2}},$$

$$x_{3,4}=\frac{\pm(\lambda_2+b)}{\sqrt{h^2+(\lambda_2+b)^2}}\,,\quad y_{3,4}=\frac{\pm(\lambda_2+a)}{\sqrt{h^2+(\lambda_2+a)^2}}\,,$$

相应地，有 $f(x_1,y_1)=ax_1^2+by_1^2+2hx_1y_1=(ax_1+hy_1)x_1+(hx_1+by_1)y_1$，由方程可得

$$ax_1+hy_1=-\lambda_1x_1\,,\ hx_1+by_1=-\lambda_1y_1\,,$$

故得

$$f(x_1,y_1)=\lambda_1{x_1}^2+\lambda_1{y_1}^2=-\lambda_1\,.$$

同理可得 $f(x_2,y_2)=-\lambda_1$，而 $f(x_3,y_3)=f(x_4,y_4)=-\lambda_2$.

由于函数 f 在单位圆上连续且不为常数，故必取得最大值和最小值且不相等. 这里稳定点取四个 $(x_i,y_i)\ (i=1,2,3,4)$，而且

$$f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)=-\lambda_1\,,\quad f(x_3,y_3)=f(x_4,y_4)=-\lambda_2\,,$$

于是当 $x=x_{1,2}$，$y=y_{1,2}$ 时，函数 $f=ax^2+by^2+2hxy$ 取最小值 $-\lambda_1$，因而也是极小值；当 $x=x_{3,4}$，$y=y_{3,4}$ 时，函数 $f(x,y)$ 取最大值 $-\lambda_2$，因而也是极大值.

（7）照通常作 Lagrange 函数

$$L(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1[(x^2+y^2+z^2)^2-a^2x^2-b^2y^2-c^2z^2]$$
$$+\lambda_2(lx+my+nz)\,,$$

令

$$\begin{cases}L_x=2x+2\lambda_1[2(x^2+y^2+z^2)x-a^2x]+l\lambda_2=0\,,\\ L_y=2y+2\lambda_1[2(x^2+y^2+z^2)y-b^2y]+m\lambda_2=0\,,\\ L_z=2z+2\lambda_1[2(x^2+y^2+z^2)z-c^2z]+n\lambda_2=0\,,\\ (x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2\,,\\ lx+my+nz=0\,.\end{cases}$$

该方程组解起来颇难. 因此，采用如下方法先化去一个条件.

由条件 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$，得到

$$x^2+y^2+z^2=\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}\,,$$

求 $f=x^2+y^2+z^2$ 的极值可以看作求 $g=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$ 的极值.

作 Lagrange 函数 $L(x,y,z)=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+\lambda(lx+my+nz)$，令

$$\begin{cases} L_x = 2a^2x + \lambda l = 0, \\ L_y = 2b^2y + \lambda m = 0, \\ L_z = 2c^2z + \lambda n = 0, \\ lx + my + nz = 0, \end{cases}$$

得唯一稳定点$(0,0,0)$，很显然在点$(0,0,0)$处取得极小值$f(0,0,0) = 0$.

2. 求$f = x^m y^n z^p$在条件$x + y + z = a$，$a > 0$，$m > 0$，$n > 0$，$p > 0$，$x > 0$，$y > 0$，$z > 0$之下的最大值.

解 作 Lagrange 函数$L(x, y, z) = x^m y^n z^p + \lambda(x + y + z - a)$，令

$$\begin{cases} L_x = mx^{m-1}y^n z^p + \lambda = 0, \\ L_y = nx^m y^{n-1} z^p + \lambda = 0, \\ L_z = px^m y^n z^{p-1} + \lambda = 0, \\ x + y + z = a, \end{cases}$$

由前三个方程得$x^m y^n z^p = -\dfrac{\lambda x}{m} = -\dfrac{\lambda y}{n} = -\dfrac{\lambda z}{p}$. 设$\dfrac{x}{m} = \dfrac{y}{n} = \dfrac{z}{p} = k$，则由

$$a = x + y + z = k(m + n + p),$$

得到$k = \dfrac{a}{m + n + p}$，故$x = \dfrac{ma}{m + n + p}$，$y = \dfrac{na}{m + n + p}$，$z = \dfrac{pa}{m + n + p}$，记对应点为$P_0$，则$P_0$为稳定点. f定义在平面$x + y + z = a$于第一卦线的部分，边界由三条直线

$$\begin{cases} x + y = a, \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x + z = a, \\ y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y + z = a, \\ x = 0 \end{cases}$$

组成. 当点P趋于边界上的点时，显然$f \to 0$. 因此，函数f在区域内取得最大值. 由于稳定点仅一个P_0，故就是最大值点. 即当$x = \dfrac{ma}{m + n + p}$，$y = \dfrac{na}{m + n + p}$，$z = \dfrac{pa}{m + n + p}$时，函数$f$取最大值$f(P_0) = \dfrac{m^m n^n p^p a^{m+n+p}}{(m + n + p)^{m+n+p}}$.

3. 求函数$z = \dfrac{1}{2}(x^n + y^n)$在条件$x + y = l$（$l > 0$，$n \ge 1$）之下的极值，并证明：当$a \ge 0$，$b \ge 0$，$n \ge 1$时

$$(\frac{a+b}{2})^n \le \frac{a^n+b^n}{2}.$$

解 设$L(x,y)=\frac{1}{2}(x^n+y^n)+\lambda(x+y-l)$，令

$$\begin{cases} L_x = nx^{n-1}/2+\lambda=0, \\ L_y = ny^{n-1}/2+\lambda=0, \\ x+y=l, \end{cases} \Rightarrow x=y=\frac{l}{2}.$$

f 函数定义域显然有$x\ge 0$且$y\ge 0$，故而将点$(\frac{l}{2},\frac{l}{2})$与边界点$(0,l),(l,0)$的函数值进行比较

$$f(0,l)=f(l,0)=\frac{1}{2}l^n > (\frac{l}{2})^2 = f(\frac{l}{2},\frac{l}{2}) \text{（}n\ge 1\text{）},$$

即知函数$f=z(x,y)=\frac{1}{2}(x^n+y^n)$，当$x+y=l$时的最小值为$(\frac{l}{2})^n$，即有$\frac{x^n+y^n}{2}\ge(\frac{l}{2})^n$（在$x+y=l$，$x\ge 0$，$y\ge 0$时）.

下面证明$(\frac{a+b}{2})^n \le \frac{a^n+b^n}{2}$（$a\ge 0$，$b\ge 0$，$n\ge 1$时）.

$a=b=0$时，显然．$a\ge 0$，$b\ge 0$且a,b不同时为0时，令$a+b=l$,，则$l>0$，于是由前一步知$\frac{a^n+b^n}{2}\ge(\frac{l}{2})^n=(\frac{a+b}{2})^n$.

4．求表面积一定而体积最大的长方体．

解 设长方体的长、宽、高分别为x,y,z，则体积$V=xyz$，而设其表面积为s，则$2(xy+xz+yz)=s$（常数）．令$L(x,y,z)=xyz+\lambda[2(xy+xz+yz)-s]$，从方程组

$$\begin{cases} L_x = yz+2\lambda(y+z)=0, \\ L_y = xz+2\lambda(x+z)=0, \\ L_z = xy+2\lambda(x+y)=0, \\ 2(xy+xz+yz)=s, \end{cases}$$

解出

$$x=y=z=\sqrt{\frac{s}{6}}.$$

实际问题有最大值，稳定点又唯一，故稳定点就是最大值点．即表面积一定而体积最大的长方体是正方体．

5．求体积一定而表面积最小的长方体．

解 设长方体的三边长分别为x,y,z，则其表面积为

$$s = 2(xy + xz + yz)$$

其体积为V（常数），则 $xyz = V$.

作 Lagrange 函数

$$L(x, y, z) = 2(xy + xz + yz) + \lambda(xyz - V) ,$$

$$\begin{cases} L_x = 2(y+z) + \lambda yz = 0 , \\ L_y = 2(x+z) + \lambda xz = 0 , \\ L_z = 2(x+y) + \lambda xy = 0 , \\ xyz = V , \end{cases}$$

解出

$$x = y = z = \sqrt[3]{V} .$$

由于稳定点唯一，实际问题又有最小值，故稳定点就是最小值点．即体积一定而表面积最小的长方体为正方体．

6．求圆的外切三角形中面积最小者．

解　设未知量如图所示．圆的半径为r（常数），外切三角形面积为S，

$$S = r(x + y + z) ,$$

满足条件 $\arctan\frac{r}{x} + \arctan\frac{r}{y} + \arctan\frac{r}{z} = \frac{\pi}{2}$.

作 Lagrange 函数 $L(x, y, z) = r(x + y + z) + \lambda(\arctan\frac{r}{x} + \arctan\frac{r}{y} + \arctan\frac{r}{z} - \frac{\pi}{2})$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = r - \dfrac{r\lambda}{x^2 + r^2} = 0 , \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = r - \dfrac{r\lambda}{y^2 + r^2} = 0 , \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = r - \dfrac{r\lambda}{z^2 + r^2} = 0 , \\ \arctan\dfrac{r}{x} + \arctan\dfrac{r}{y} + \arctan\dfrac{r}{z} = \dfrac{\pi}{2} , \end{cases}$$

由前三个方程得 $x = y = z$ ，代入第四个方程解得 $x = y = z = \sqrt{3}r$.

由于稳定点唯一，且实际问题又有最小值．故稳定点就是最小值点．即圆的外切三角形中面积最小者是等边三角形．

7．长为a的铁丝切成两段，一段围成正方形，另一段围成圆．这两段的长各为多少时，它们所围正方形面积和圆面积之和最小．

解　设两段长为x, y，则 $x + y = a$ ，围成的正方形和圆面积之和为

$$A=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4\pi}.$$

作 Lagrange 函数

$$L(x,y)=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4\pi}+\lambda(x+y-a),$$

由方程组

$$\begin{cases} L_x=\dfrac{x}{8}+\lambda=0, \\ L_y=\dfrac{y}{2\pi}+\lambda=0, \\ x+y=a \end{cases}$$

解出 $x=\dfrac{4a}{4+\pi}$， $y=\dfrac{\pi a}{4+\pi}$.

$P_0(\dfrac{4a}{4+\pi},\dfrac{\pi a}{4+\pi})$ 为唯一稳定点，实际问题有最小值，因此稳定点就是最小值点．即当切成的两段的长度比为 $4:\pi$，且其中长是一段围成正方形，短的一段围成圆时，所围正方形和圆面积之和最小．

8．求原点到两平面 $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$， $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 的交线的最短距离．

解　设二平面交线上的点为 (x,y,z)，则原点到该点的距离为

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

d 在约束条件 $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$， $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 下的最小值点与 $\dfrac{d^2}{2}$ 在相同约束条件下的最小值点相等．作 Lagrange 函数

$$L(x,y,z)=\frac{x^2+y^2+z^2}{2}+\lambda_1(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda_2(a_2x+b_2y+c_2z+d_2),$$

令

$$\begin{cases} L_x=x+a_1\lambda_1+a_2\lambda_2=0, \\ L_y=y+b_1\lambda_1+b_2\lambda_2=0, \\ L_z=z+c_1\lambda_1+c_2\lambda_2=0, \\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0. \end{cases}$$

由前三个方程得出 x,y,z 代入后两个方程解出 λ_1,λ_2，因此得 x,y,z 的唯一值．

设 $a_1^2+b_1^2+c_1^2=A_1$，$a_2^2+b_2^2+c_2^2=A_2$，$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=B$，则有

$$x=\frac{(a_1d_2+a_2d_1)B-a_1d_1A_2-a_2d_2A_1}{A_1A_2-B^2}\equiv x_0,$$

$$y=\frac{(b_1d_2+b_2d_1)B-b_1d_1A_2-b_2d_2A_1}{A_1A_2-B^2}\equiv y_0,$$

$$z=\frac{(c_1d_2+c_2d_1)B-c_1d_1A_2-c_2d_2A_1}{A_1A_2-B^2}\equiv z_0,$$

由于稳定点唯一，实际问题又有最小值，故稳定点就是最小值点，最短距离为

$$d_{\min}=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\ .$$

9．求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x-y=1$ 间的最短距离.

解 设抛物线上的点为 (x_1,y_1)，直线上的点为 (x_2,y_2)，则 $y_1=x_1^2$，$x_2-y_2=1$，两点之间的距离为 $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

作 Lagrange 函数

$L(x_1,y_1,x_2,y_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}+\lambda_1(y_1-x_1^2)+\lambda_2(x_2-y_2-1)$，令

$$\begin{cases}L_{x_1}=\dfrac{x_1-x_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}-2\lambda_1x_1=0,\\ L_{y_1}=\dfrac{y_1-y_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}+\lambda_1=0,\\ L_{x_2}=\dfrac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}+\lambda_2=0,\\ L_{y_2}=\dfrac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}-\lambda_2=0,\\ y_1=x_1^2,\\ x_2-y_2=1,\end{cases}$$

解出 $x_1=\dfrac{1}{2}$，$y_1=\dfrac{1}{4}$，$x_2=\dfrac{7}{8}$，$y_2=-\dfrac{1}{8}$ 为唯一稳定点.

由于稳定点唯一，实际问题又有最小值，因此唯一的稳定点就是最小值点，即当抛物线上的点 $P_1(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4})$ 与直线上的点 $P_2(\dfrac{7}{8},-\dfrac{1}{8})$ 之间的距离 $d=\sqrt{(\dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{8})^2+(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8})^2}=\dfrac{3}{4}$ 为抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x-y=1$ 间的最短距离.

10．求 $x>0$，$y>0$，$z>0$ 时函数 $f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 上的极大值．证明 a,b,c 为正实数时，

$$ab^2c^3 \le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6 .$$

解 作 Lagrange 函数 $L(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-6r^2)$，令

$$\begin{cases} L_x=\dfrac{1}{x}+2\lambda x=0, \\ L_y=\dfrac{2}{y}+2\lambda y=0, \\ L_z=\dfrac{3}{z}+2\lambda z=0, \\ x^2+y^2+z^2=6r^2, \end{cases}$$

由前三个方程得 $-2\lambda=\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2}{y^2}=\dfrac{3}{z^2}$，由此得 $y^2=2x^2$，$z^2=3x^2$，代入第三个方程，解得 $x=r$，故 $y=\sqrt{2}r$，$z=\sqrt{3}r$．下面判定稳定点是极值点．

若记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6r^2$，则 $F_z(r,\sqrt{2}r,\sqrt{3}r)=2\sqrt{3}r>0$，故方程

$$x^2+y^2+z^2=6r^2$$

在稳定点的附近可唯一确定可微函数 $z=z(x,y)$．令 $g(x,y)=f(x,y,z(x,y))$，由约束条件得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x}{z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{z}$，由复合函数链式法则，

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{1}{x}+\frac{3}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}-\frac{3x}{z^2}，\quad \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{y}-\frac{3y}{z^2},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{z^2}+\frac{6x}{z^3}\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{z^2}-\frac{6x^2}{z^4}，\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=\frac{6x}{z^3}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{6xy}{z^4},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-\frac{2}{y^2}-\frac{3}{z^2}+\frac{6y}{z^3}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2}{y^2}-\frac{3}{z^2}-\frac{6y^2}{z^4},$$

故函数 g 在 $(r,\sqrt{2}r)$ 点有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{8}{3r^2} & -\dfrac{2\sqrt{2}}{3r^2} \\ -\dfrac{2\sqrt{2}}{3r^2} & -\dfrac{10}{3r^2} \end{vmatrix} = \frac{8}{r^4} > 0,$$

且 $a_{11} = -\dfrac{8}{3r^2} < 0$，因此 $g(x,y)$ 在 $(r,\sqrt{2}r)$ 处取极大值，这等价于 $f(x,y,z)$ 在 $(r,\sqrt{2}r,\sqrt{3}r)$ 处取条件极大值 $f(r,\sqrt{2}r,\sqrt{3}r) = \ln(6\sqrt{3}r^6)$.

分析约束集 $D = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2, x > 0, y > 0, z > 0\}$，它是一有界集，且当 $x \to 0^+$，或 $y \to 0^+$，或 $z \to 0^+$，或其中二者大于而趋于 0 时，函数 $f(x,y,z)$ 均趋于 $-\infty$，因此，函数 $f(x,y,z)$ 的唯一极大值点是函数的最大值点，即在 D 内有

$$f(x,y,z) = \ln x + 2\ln y + 3\ln z \le \ln(6\sqrt{3}r^6).$$

由于在 D 内有 $r^2 = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{6}$，代入上式即得

$$xy^2z^3 \le 6\sqrt{3}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{6}\right)^3,$$

两边平方，就有

$$x^2y^4z^6 \le 108\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{6}\right)^6,$$

令 $x^2 = a$， $y^2 = b$， $z^2 = c$，就有

$$ab^2c^3 \le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6,$$

其中 a,b,c 均为正实数.

11．设函数 $f(x,y,u,v)$， $F(x,y,u,v)$， $G(x,y,u,v)$ 二阶可微，Jacobbi 矩阵

$$\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_u & F_v \\ G_x & G_y & G_u & G_v \end{pmatrix}$$

的秩为 2．令

$$L(x,y,u,v) = f(x,y,u,v) + \lambda_1 F(x,y,u,v) + \lambda_2 G(x,y,u,v),$$

若 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 是函数 L 的稳定点，证明：当 $d^2L(P_0) > (<)\, 0$ 时， P_0 是在函数 f 在约束条件

$$F(x,y,u,v)=0,\quad G(x,y,u,v)=0$$

下的条件极小（大）值点.

证明

第十九章　含参变量的积分

§1　含参变量的正常积分

1．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}dx$；

（2）$\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{0}^{2}x^2\cos\alpha x dx$；

（3）$\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx$.

解（1）由于 $f(x,\alpha)=\sqrt{x^2+\alpha^2}$ 在 $[-1,1]\times[-1,1]$ 上连续，故 $I(\alpha)=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}dx$ 在 $[-1,1]$ 连续，所以，

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}dx=\lim_{\alpha\to 0}I(\alpha)=I(0)=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2}dx=2\int_0^1 xdx=1.$$

（2）由于 $f(x,\alpha)=x^2\cos\alpha x$ 在 $[0,2]\times[0,2]$ 上连续，故 $I(\alpha)=\int_0^2 x^2\cos\alpha x dx$ 在 $[0,2]$ 连续，所以，

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x dx=\lim_{\alpha\to 0}I(\alpha)=I(0)=\int_0^2 x^2 dx=\frac{8}{3}.$$

（3）$\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx-\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx+\int_1^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx$，

由于 $f(x,\alpha)=\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续，故 $I(\alpha)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx$ 在 $[0,1]$ 连续，所以，

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^1\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=\lim_{\alpha\to 0}I(\alpha)=I(0)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

而对 $\forall\alpha\in R$，$x\in R$ 有，$\left|\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx\right|\le|\alpha|$，$\left|\int_1^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx\right|\le|\alpha|$，因此

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=0,\quad \lim_{\alpha\to 0}\int_1^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=0,$$

因而，

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=\lim_{\alpha\to 0}\int_0^1\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx-\lim_{\alpha\to 0}\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx$$
$$-\lim_{\alpha\to 0}\int_1^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

2．求 $F'(x)$，其中：

（1）$F(x)=\int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy$；

（2）$F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x} e^{x\sqrt{1-y^2}} dy$；

（3）$F(x)=\int_{a+x}^{b+x}\frac{\sin(xy)}{y}dy$；

（4）$F(x)=\int_0^x[\int_{t^2}^{x^2} f(t,s)ds]dt$.

解（1）$F'(x)=-\int_x^{x^2} e^{-xy^2} y^2dy+e^{-x(x^2)^2}\cdot 2x-e^{-xx^2} =-\int_x^{x^2} e^{-xy^2} y^2dy+2xe^{-x^5} -e^{-x^3}$.

（2）$F'(x)=\int_{\sin x}^{\cos x} e^{x\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}dy+e^{x\sqrt{1-\cos^2 x}}(\cos x)'-e^{x\sqrt{1-\sin^2 x}}(\sin x)'$

$$=\int_{\sin x}^{\cos x} e^{x\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}dy-e^{x|\sin x|}\sin x-e^{x|\cos x|}\cos x .$$

（3）$F'(x)=\int\limits_{a+x}^{b+x}\cos(xy)dy+\frac{\sin(x(b+x))}{b+x}(b+x)'-\frac{\sin(x(a+x))}{z+x}(a+x)'$

$$=(\frac{1}{x}+\frac{1}{b+x})\sin[x(x+b)]-(\frac{1}{x}+\frac{1}{a+x})\sin[x(x+a)] .$$

（4）$F'(x)=\int_0^x(\frac{\partial}{\partial x}\int_{t^2}^{x^2} f(t,s)ds)dt+\int_{x^2}^{x^2} f(x,s)ds=\int_0^x 2xf(t,x^2)dt$.

3．设 $f(x)$ 为连续函数，

$$F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^x[\int_0^x f(x+\xi+\eta)d\eta]d\xi ,$$

求 $F''(x)$.

解　由于 $F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^x d\xi\int_0^x f(x+\xi+\eta)d\eta=\frac{1}{h^2}\int_0^x d\xi\int_{x+\xi}^{2x+\xi} f(u)du$，所以，

$$F'(x)=\frac{1}{h^2}[\int_{2x}^{3x} f(u)du+\int_0^x(\frac{\partial}{\partial x}\int_{x+\xi}^{2x+\xi} f(u)du)d\xi]$$

$$=\frac{1}{h^2}\{\int_{2x}^{3x} f(u)du+\int_0^x[2f(2x+\xi)-f(x+\xi)]d\xi\} ,$$

$$F''(x)=\frac{1}{h^2}[3f(3x)-2f(2x)+2f(3x)-f(2x)]=\frac{1}{h^2}[5f(3x)-3f(2x)] .$$

注记　该题的函数应为 $F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h[\int_0^h f(x+\xi+\eta)d\eta]d\xi$（这从该教材第二版亦可得到印证），则

$$F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h d\xi\int_0^h f(x+\xi+\eta)d\eta=\frac{1}{h^2}\int_0^x d\xi\int_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(u)du ,$$

所以，

$$F'(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^x[\frac{\partial}{\partial x}\int_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(u)du]d\xi=\frac{1}{h^2}\int_0^h[f(x+\xi+h)-f(x+\xi)]d\xi$$

$$=\frac{1}{h^2}[\int_{x+h}^{x+2h}f(u)du-\int_{x}^{x+h}f(u)du],$$

$$F''(x)=\frac{1}{h^2}[f(x+2h)-f(x+h)-f(x+h)+f(x)]=\frac{1}{h^2}[f(x+2h)-f(x+h)+f(x)].$$

4．研究函数 $F(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$ 的连续性，其中 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上连续且为正的函数.

解 当 $y\neq 0$ 时，被积函数在相应的闭矩形上是连续的，因此 $F(y)$ 在 $y\neq 0$ 连续．当 $y=0$ 时，$F(0)=0$.

而 $y>0$ 时，设 m 为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值，则 $m>0$ ．由于

$$F(y)\geq m\int_0^1\frac{y}{x^2+y^2}dx=m\arctan\frac{1}{y}\text{，而}\lim_{y\to 0^+}\arctan\frac{1}{y}=\frac{\pi}{2}\text{，}$$

故有 $\lim\limits_{y\to 0^+}F(y)$ 若存在，必然 $\lim\limits_{y\to 0^+}F(y)\geq\frac{m\pi}{2}>0=F(0)$ 或不存在，因而 $F(y)$ 在 $y=0$ 时间断.

5．应用积分号下求导法求下列积分：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2-\sin^2x)dx$ （ $a>1$)；

（2）$\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx\ (|a|<1)$ ；

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx\ (a,b\neq 0)$ ；

（4）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx\ (|a|<1)$.

解（1）设 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2-\sin^2x)dx$ ，则有

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{\partial}{\partial x}\ln(a^2-\sin^2x)]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a}{a^2-\sin^2x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{a+\sin x}+\frac{1}{a-\sin x})dx=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}(\arctan\frac{a+1}{\sqrt{a^2-1}}+\arctan\frac{a-1}{\sqrt{a^2-1}})$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

即

$$I(a)=\int\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}da=\pi\ln(a+\sqrt{a^2-1})+c\ .$$

c 的确定较为困难，可如下进行.

$$c=I(a)-\pi\ln(a+\sqrt{a^2-1})=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2-\sin^2x)dx-\pi\ln(a+\sqrt{a^2-1})$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln a^2+\ln(1-\frac{\sin^2x}{a^2})]dx-\pi\ln(a+\sqrt{a^2-1})$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1-\frac{\sin^2x}{a^2})dx-\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a},$$

令 $a\to+\infty$， $\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a}\to\pi\ln 2$，又 $0<1-\frac{1}{a^2}<1-\frac{\sin^2x}{a^2}\le 1$，所以，

$$\ln(1-\frac{1}{a^2})\le\ln(1-\frac{\sin^2x}{a^2})\le 0,$$

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1-\frac{\sin^2x}{a^2})dx\right|\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\ln(1-\frac{\sin^2x}{a^2})\right|dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\ln(1-\frac{1}{a^2})\right|dx=\frac{\pi}{2}\left|\ln(1-\frac{1}{a^2})\right|\to 0\ (a\to+\infty),$$

$\Rightarrow c=\pi\ln 2$，即 $I(a)=\pi\ln(a+\sqrt{a^2-1})-\pi\ln 2=\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}$.

（2）设 $I(a)=\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx$，则

$$I'(a)=\int_0^{\pi}\frac{2(a-\cos x)}{1-2a\cos x+a^2}dx=\frac{1}{a}\int_0^{\pi}\frac{a^2-1}{1-2a\cos x+a^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a}\int_0^{\pi}\frac{1}{(1+a^2)-2a\cos x}dx=\frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a(1+a^2)}\int_0^{\pi}\frac{1}{1-\frac{2a}{1+a^2}\cos x}dx$$

$$=\frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a(1+a^2)}\frac{2(1-a)}{(1-a)^2(1+a)}\arctan(\frac{1+a}{1-a}x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{a}-\frac{2}{(1+a^2)a}\frac{\pi}{2}=\frac{a\pi}{1+a^2},$$

所以，$I(a)=I(a)-I(0)=\int_0^{a}\frac{a\pi}{1+a^2}da=\frac{\pi}{2}\ln(1+a^2)$.

（3）将 a 看作参变量，b 认为是常数，记 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx$. 可先设 $a>0$，$b>0$，则

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{\partial}{\partial a}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}dx.$$

若 $a=b$，则 $I'(a)=\frac{2}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2xdx=\frac{\pi}{2b}$，若 $a\ne b$ 作代换 $t=\tan x$，得

$$I'(a)=\int_0^{+\infty}\frac{2at^2}{a^2t^2+b^2}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{2}{a}\int_0^{+\infty}\frac{t^2dt}{(1+t^2)(t^2+\frac{b^2}{a^2})}$$

$$=\frac{2}{a}\int_0^{+\infty}(\frac{a^2}{a^2-b^2}\frac{1}{1+t^2}-\frac{b^2}{a^2-b^2}\frac{1}{(t^2+\frac{b^2}{a^2})})dt=\frac{\pi a}{a^2-b^2}-\frac{\pi b}{a^2-b^2}=\frac{\pi}{\mathrm{a+b}},$$

所以，$I(a)=\int\frac{\pi}{a+b}da=\pi\ln(a+b)+c$，而 $I(b)=\pi\ln b=\pi\ln(2b)+c\Rightarrow c=-\pi\ln 2$，于是

$$I(a)=\pi\ln(a+b)-\pi\ln 2=\pi\ln\frac{a+b}{2}.$$

若 $a<0$ 或 $b<0$，则可以 $-a$ 或 $-b$ 代替 a 或 b，因而总有 $I(a)=I(|a|)=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$.

（4）记 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx$，令 $f(x,a)=\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}$，当 $x=0,\frac{\pi}{2}$ 时，f 无定义，但 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x,a)=a$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x,a)=0$，故补充定义 $f(0,a)=a$，$f(\frac{\pi}{2},a)=0$，则 f 在 $[0,2\pi]\times[-b,b]$ 连续（$0<b<1$），从而 $I(a)$ 在 $(-1,1)$ 连续.

$$f_a(x,a)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+a^2\tan^2 x}, & x\in(0,\dfrac{\pi}{2}),\\ 0, & x=0,\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

显然 $f_a(x,0)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 点不连续，但 $f_a(x,a)$ 分别在 $[0,2\pi]\times(-1,0)$ 和 $[0,2\pi]\times(0,1)$ 连续，故有

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_a(x,a)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+a^2\tan^2 x}dx,\quad a\in(-1,0)\text{ 或 }a\in(0,1).$$

令 $\tan x=t$，

$$I'(a)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}dt=\frac{1}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\frac{1+a^2t^2-a^2t^2-a^2}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}dt$$

$$=\frac{1}{1-a^2}\int_0^{+\infty}[\frac{1}{(1+t^2)}-\frac{a^2}{(1+a^2t^2)}]dt=\frac{\pi}{2(1+|a|)},\quad a\in(-1,0)\text{ 或 }a\in(0,1).$$

积分之

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)+c_1,\quad a\in(0,1);$$

$$I(a)=-\frac{\pi}{2}\ln(1-a)+c_2,\quad a\in(-1,0).$$

因为$I(a)$在$(-1,1)$连续，故$I(0)=\lim\limits_{a\to 0^+}I(a)=0=\lim\limits_{a\to 0^-}I(a)$，得$c_1=c_2=0$，从而得

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}a\ln(1+|a|),\quad |a|<1.$$

6．应用积分交换次序求下列积分：

（1）$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\ (a>0,b>0)$；

（2）$\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\ (a>0,b>0)$.

解（1）$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1 dx\int_a^b x^y dy=\int_a^b dx\int_0^1 x^y dx=\int_a^b\frac{1}{1+y}dy=\ln(1+y)\big|_a^b$

$$=\ln(1+b)-\ln(1+a)=\ln\frac{1+b}{1+a}.$$

（2）$\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1[\sin(\ln\frac{1}{x})\int_a^b x^y dy]dx=\int_a^b dy\int_0^1 x^y\sin(\ln\frac{1}{x})dx$.

记$I(y)=\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})x^y dx$，则

$$I(y)=\frac{1}{y+1}\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})dx^{y+1}=\frac{1}{y+1}[\sin(\ln\frac{1}{x})x^{y+1}\Big|_0^1-\int_0^1\cos(\ln\frac{1}{x})x^{y+1}(-\frac{1}{x})dx]$$

$$=\frac{1}{y+1}\int_0^1\cos(\ln\frac{1}{x})x^y dx=\frac{1}{(y+1)^2}[\cos(\ln\frac{1}{x})x^{y+1}\Big|_0^1-\int_0^1(-\sin(\ln\frac{1}{x})x^{y+1}(-\frac{1}{x})dx]$$

$$=\frac{1}{(y+1)^2}(1-\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})x^y dx)=\frac{1}{(y+1)^2}(1-I(y)),$$

所以，$I(y)=\frac{1}{(y+1)^2+1}$，因此，

$$\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_a^b I(y)dy=\int_a^b\frac{1}{(1+y)^2+1}dy=\arctan\frac{b-a}{1+(1+a)(1+b)}.$$

7．设f为可微函数，试求下列函数的二阶导数：

（1）$F(x)=\int_0^x(x+y)f(y)dy$；

（2）$F(x)=\int_a^b f(y)|x-y|dy\ (a<b)$.

解（1）$F'(x)=\int_0^x f(y)dy+2xf(x)$，$F''(x)=3f(x)+2xf'(x)$.

（2）$F(x)=\int_a^b f(y)|x-y|dy$

$$=\begin{cases}\int_a^b f(y)(y-x)dy, & x\le a,\\ \int_a^x f(y)(x-y)dy+\int_x^b f(y)(y-x)dy, & a<x<b,\\ \int_a^b f(y)(x-y)dy, & x\ge b,\end{cases}$$

$$F'(x)=\begin{cases}-\int_a^b f(y)dy, & x\le a,\\ \int_a^x f(y)dy-\int_x^b f(y)dy, & a<x<b,\\ \int_a^b f(y)dy, & x\ge b,\end{cases}$$

$$F''(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ 2f(x), & a<x<b,\\ 0, & x\ge b\end{cases}=\begin{cases}2f(x), & a<x<b,\\ 0, & x\le a \text{ or } x\ge b.\end{cases}$$

8．证明：$\int_0^1 dx\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\ne\int_0^1 dy\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx$.

证明 $\int_0^1 dx\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy=\int_0^1 dx[2x^2\int_0^1\frac{1}{(x^2+y^2)^2}dy-\int_0^1\frac{1}{x^2+y^2}dy]$

$$=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\arctan x\,|_0^1=\frac{\pi}{4},$$

$\int_0^1 dy\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx=\int_0^1 dy[\int_0^1\frac{1}{x^2+y^2}dx-2y^2\int_0^1\frac{1}{x^2+y^2}dx]$

$$=-\int_0^1\frac{1}{y^2+1}dy=-\arctan y\,|_0^1=-\frac{\pi}{4},$$

所以，$\int_0^1 dx\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\ne\int_0^1 dy\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx$.

9．设 $F(y)=\int_0^1\ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx$，问是否成立

$$F'(0)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{y=0}dx.$$

解 $F(0)=\int_0^1\ln|x|dx=\int_0^1\ln x dx=-1$，所以，

$$\frac{F(y)-F(0)}{y}=\frac{1}{y}(\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}dy+1)=\frac{1}{y}[\ln\sqrt{1+y^2}+\int_0^1\frac{y^2}{x^2+y^2}dx-\int_0^1 dx+1]$$

$$=\frac{1}{y}[\ln\sqrt{1+y^2}+y\arctan\frac{x}{y}\Big|_0^1]=\frac{\ln(1+y^2)}{2y}+\arctan\frac{1}{y}\to\frac{\pi}{2}\ (y\to 0^+)\text{，}$$

即 $F_+'(0)=\frac{\pi}{2}$，同样 $F_-'(0)=-\frac{\pi}{2}$，因此 $F'(0)$ 不存在，而

$$\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\bigg|_{y=0}dx=\int_0^1\frac{y}{x^2+y^2}\bigg|_{y=0}dx=\int_0^1 0dx=0\text{，}$$

因此，$F'(0)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\bigg|_{y=0}dx$ 不成立.

10．设

$$F(x)=\int_0^{2\pi}e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)d\theta\text{，}$$

求证 $F(x)\equiv 2\pi$.

证明　$\forall x_0\in R$，函数 $f(x,\theta)=e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)$ 在矩形域 $[-(|x_0|+1),|x_0|+1]\times[0,2\pi]$ 连续，

$$f_x(x,\theta)=e^{x\cos\theta}\cos\theta\cos(x\sin\theta)+e^{x\cos\theta}[-\sin(x\sin\theta)]\sin\theta$$

亦在矩形域 $[-(|x_0|+1),|x_0|+1]\times[0,2\pi]$ 连续，故由积分号下求导数可得

$$F'(x_0)=\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}f(x,\theta)\bigg|_{x=x_0}d\theta=\int_0^{2\pi}[e^{x\cos\theta}\cos\theta\cos(x\sin\theta)-e^{x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)\sin\theta]_{x=x_0}d\theta$$

$$=\frac{1}{x_0}\int_0^{2\pi}e^{x_0\cos\theta}d\sin(x_0\sin\theta)-\int_0^{2\pi}e^{x_0\cos\theta}\sin(x_0\sin\theta)\sin\theta d\theta\quad（x_0\neq 0）$$

$$=\frac{1}{x_0}e^{x_0\cos\theta}\sin(x_0\sin\theta)\big|_0^{2\pi}-\frac{1}{x_0}\int_0^{2\pi}\sin(x_0\sin\theta)e^{x_0\cos\theta}\cdot x_0(-\sin\theta)d\theta$$

$$-\int_0^{2\pi}e^{x_0\cos\theta}\sin(x_0\sin\theta)\sin\theta d\theta$$

$$=0\text{，}$$

当 $x_0=0$ 时，显然 $F'(0)=\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta=\sin\theta\big|_0^{2\pi}=0$.

由 $x_0\in R$ 的任意性，$F'(x)=0$，因此，$F(x)\equiv C$，而 $C=F(0)=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$，所以，

$$F(x)\equiv 2\pi\ .$$

11．设 $f(x)$ 为两次可微函数，$\varphi(x)$ 为可微函数，证明函数

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(z)dz$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

及初始条件

$$u(x,0)=f(x)，\ u_t(x,0)=\varphi(x).$$

证明 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{2}[f'(x-at)+f'(x+at)]+\dfrac{1}{2a}[\varphi(x+at)-\varphi(x-at)]$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]+\frac{1}{2a}[\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at)]，$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}[-af'(x-at)+af'(x+at)]+\frac{1}{2a}[a\varphi(x+at)+a\varphi(x-at)]$$

$$=\frac{a}{2}[-f'(x-at)+f'(x+at)]+\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]，$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{a^2}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]+\frac{a}{2}[\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at)]$$

所以，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{a^2}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]+\frac{a}{2}[\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at)]$$

$$=a^2\{\frac{1}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]+\frac{1}{2a}[\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at)]\}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}，$$

即满足弦振动方程．又

$$u(x,0)=\frac{1}{2}[f(x)+f(x)]+\frac{1}{2a}\int_x^x\varphi(z)dz=f(x)，$$

$$u_t(x,0)=\frac{a}{2}[-f'(x)+f'(x)]+\frac{1}{2}[\varphi(x)+\varphi(x)]=\varphi(x)，$$

即满足初始条件．

§2　含参变量的广义积分

1．证明下列积分在指定的区间内一致收敛：

（1）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{x^2+y^2}dy$（$x\ge a>0$）；

（2）$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{1+y^2}dy\ \ (-\infty<x<+\infty)$；

（3）$\int_1^{+\infty}y^x e^{-y}dy\ \ (a\le x\le b)$；

（4）$\int_1^{+\infty}e^{-xy}\frac{\cos y}{y^p}dy$（$p>0$，$x\ge 0$）；

（5）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx\ \ (p\ge 0)$.

证明（1）因为当$x\ge a>0$时，$\forall y\in[0,+\infty]$，有

$$\left|\frac{\cos(xy)}{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{x^2+y^2}\le\frac{1}{a^2+y^2},$$

而$\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2+y^2}dy$收敛，由M判别法，$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{x^2+y^2}dy$在$x\ge a>0$是一致收敛的.

（2）因为，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in[0,+\infty)$成立

$$\left|\frac{\cos(xy)}{1+y^2}\right|\le\frac{1}{1+y^2},$$

而$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}dy$收敛，由M判别法，$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{1+y^2}dy$在$-\infty<x<+\infty$一致收敛.

（3）因为$\forall x\in[a,b]$，$y\in[1,+\infty)$，成立

$$\left|y^x e^{-y}\right|\le y^{\max\{|a|,|b|\}}e^{-y}\le y^M e^{-y},$$

其中$M=\max\{|a|,|b|\}\ge 0$，而$\int_1^{+\infty}y^M e^{-y}dy$收敛，所以$\int_1^{+\infty}y^x e^{-y}dy$在$a\le x\le b$一致收敛.

（4）用Abel判别法．已知$\int_1^{+\infty}\frac{\cos y}{y^p}dy$收敛（见第十一章§3习题3（3）），又对每一个$x\in[0,+\infty)$，函数$e^{-xy}$关于$y$是单调函数，且$\forall x\in[0,+\infty)$，$y\in[1,+\infty)$，有$\left|e^{-xy}\right|\le 1$，由Abel判别法知

$$\int_1^{+\infty}e^{-xy}\frac{\cos y}{y^p}dy$$

在$[0,+\infty)$一致收敛.

（5）由于$\int_0^{+\infty}\sin x^2dx$收敛（见 p56−§11.1-例 10），又对每一个$p\in[0,+\infty)$，函数$\dfrac{1}{1+x^p}$是单调减函数，且$\forall x\in[0,+\infty)$，$p\in[0,+\infty)$，有$\left|\dfrac{1}{1+x^p}\right|\le 1$，由 Abel 判别法，$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x^2}{1+x^p}dx\ (p\ge 0)$在$[0,+\infty)$一致收敛.

2．讨论下列积分在指定区间上的一致收敛性：

（1）$\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx\quad (0<\alpha<+\infty)$；

（2）$\int_0^{+\infty}xe^{-xy}dy$，

（i）$x\in[a,b]\quad (a>0)$，　（ii）$x\in[0,b]$；

（3）$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$，

（i）$a<\alpha<b$，　（ii）$-\infty<\alpha<+\infty$；

（4）$\int_0^{+\infty}e^{-x^2(1+y^2)}\sin xdy\quad (0<x<+\infty)$.

解（1）$\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx=\int_0^{+\infty}e^{(-\sqrt{\alpha}x)^2}d(\sqrt{\alpha}x)\ \underline{\underline{\sqrt{\alpha}x=u}}\ \int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\ (\alpha>0)$，当$\alpha=0$时积分为$0$.

$\forall A>0$，由于$\lim\limits_{\alpha\to o^+}\int_A^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx=\lim\limits_{\alpha\to o^+}\int_{\sqrt{\alpha}A}^{+\infty}e^{-u^2}du=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，故$\exists\varepsilon_0$：$0<\varepsilon_0<\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，$\exists\alpha_0>0$，使得有$\int_A^{+\infty}\sqrt{\alpha_0}e^{-\alpha_0x^2}dx>\varepsilon_0$，因此积分非一致收敛.

（2）积分对于每一个定值$x\ge 0$是收敛的.

当$x=0$时，$\int_0^{+\infty}xe^{-xy}dy=0$；当$x>0$时$\int_0^{+\infty}xe^{-xy}dy=-e^{-xy}\ |_0^{+\infty}=1$.

（i）$x\in[a,b]\ (a>0)$，由于$0<\int_A^{+\infty}xe^{-xy}dy=e^{-xA}\le e^{-aA}$，故$\forall\varepsilon>0,\exists A_0=\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{1}{\varepsilon}$，使当$A>A_0$时，就有$\int_A^{+\infty}xe^{-xy}dy<e^{-aA_0}=\varepsilon$，于是，在区间$x\in[a,b]\ (a>0)$上积分一致收敛.

（ii）由于$x\to 0^+$时，$e^{-Ax}\to 1$，故$\exists\varepsilon_0:0<\varepsilon_0<1$，对于足够小的$x_0$值，$e^{-Ax_0}>\varepsilon_0$，故在$[0,b]$上，积分$\int_0^{+\infty}xe^{-xy}dy$不一致收敛.

（3）对任意固定的α，积分$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$都收敛，且（作代换$x-\alpha=t$）

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}\ .$$

（i）取正数 R 充分大，使得 $-R<a<b<R$，显然，当 $|x|\ge R$ 时，对一切 $a<\alpha<b$，有

$$0<e^{-(x-\alpha)^2}<e^{-(|x|-R)^2},$$

而积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(|x|-R)^2}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-(x-R)^2}dx$ 收敛，由 M 判别法，积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$ 在 $a<\alpha<b$ 一致收敛.

（ii）$\forall A>0$，有 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int_A^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int_{A-\alpha}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$，故当 α 充分大时，

$$\int_A^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx>\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\varepsilon_0,$$

由此可知 $\int_0^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$ 在 $-\infty<\alpha<+\infty$ 非一致收敛，因而 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$ 在 $-\infty<\alpha<+\infty$ 更非一致收敛.

（4）$\forall A>0$，有

$$\int_A^{+\infty}e^{-x^2(1+y^2)}\sin xdy=\frac{\sin x}{x}e^{-x^2}\int_{Ax}^{+\infty}e^{-t^2}dt\to\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt\quad(x\to0^+),$$

因此，积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2(1+y^2)}\sin xdy$ 在 $0<x<+\infty$ 非一致收敛.

3．设 $f(t)$ 在 $t>0$ 连续，$\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)dt$ 当 $\lambda=a$，$\lambda=b$ 时皆收敛，且 $a<b$．求证：$\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)dt$ 关于 λ 在 $[a,b]$ 一致收敛.

证明 $\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)dt=\int_0^1 t^{\lambda-a}t^a f(t)dt+\int_1^{+\infty}t^{\lambda-b}t^b f(t)dt$.

由于 $\int_0^1 t^a f(t)dt$ 收敛，因而，对 $\lambda\in[a,b]$ 一致收敛，$t^{\lambda-\alpha}$ 当 λ 固定时，对 t 在 $[0,1]$ 单调，且 $\left|t^{\lambda-\alpha}\right|\le1$，因此，由 Abel 判别法，积分 $\int_0^1 t^{\lambda-a}t^a f(t)dt=\int_0^1 t^\lambda f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 一致收敛.

又因为 $\int_1^{+\infty}t^b f(t)dt$ 收敛，故对 $\lambda\in[a,b]$ 亦一致收敛，$t^{\lambda-b}$ 当 λ 固定时，对 t 在 $[1,+\infty]$ 单调递减，且 $\left|t^{\lambda-b}\right|\le1$，由 Abel 判别法，积分 $\int_1^{+\infty}t^{\lambda-b}t^b f(t)dt=\int_1^{+\infty}t^\lambda f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 一致收敛.

因此，$\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

4．讨论下列函数在指定区间上的连续性：

（1）$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+y^2}dy$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

（2）$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{y^2}{1+y^x}dy$，$x>3$；

（3）$F(x)=\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{y^x(\pi-y)^{2-x}}dy$，$x\in(0,2)$.

解（1）当$x\neq 0$时，

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+y^2}dy=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}d(\frac{y}{x})=\arctan\frac{y}{x}\Big|_0^{+\infty}=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, & x<0,\\ \frac{\pi}{2}, & x>0,\end{cases}$$

而$F(0)=0$，因此，$F(x)$在$x\neq 0$连续，在$x=0$间断（第一类间断点）.

（2）因为

$$\frac{y^2}{1+y^x}=\frac{1}{y^{-2}+y^{x-2}}<\frac{1}{y^{x-2}}，(y\geq 1)，$$

而当$x>3$时，无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{y^{x-2}}dx$收敛，$F(x)=\int_0^1\frac{y^2}{1+y^x}dy$在$x>3$是常义积分，因而$F(x)$在$x>3$有意义.

$\forall x_0>3$，$\exists 3<b<x_0$，当$y\geq 1$时，$\forall x\in[b,+\infty)$，有

$$\frac{y^2}{1+y^x}=\frac{1}{y^{-2}+y^{x-2}}<\frac{1}{y^{x-2}}\leq\frac{1}{y^{b-2}},$$

而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{y^{b-2}}dy$收敛，因而$\int_0^{+\infty}\frac{y^2}{1+y^x}dy$在$[b,+\infty)$一致收敛，因此，$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{y^2}{1+y^x}dx$在$x_0\in[b,+\infty)$连续，由$x_0\in(3,+\infty)$的任意性可知，$F(x)$在$x>3$连续.

（3）$F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin y}{y^x(\pi-y)^{2-x}}dy+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin(\pi-y)}{y^x(\pi-y)^{2-x}}dy$，

所以，$\forall x_0\in(0,2)$，$\exists\delta>0$，使得$0<\delta<x_0<2-\delta$，当$x\in[\delta,2-\delta]$时，有

$$\left|\frac{\sin y}{y^x(\pi-y)^{2-x}}\right|\leq\frac{1}{y^{x-1}(\pi-y)^{2-x}}\leq\frac{1}{y^{1-\delta}(\pi-\frac{\pi}{2})^{\delta}}=\frac{1}{y^{1-\delta}(\frac{\pi}{2})^{\delta}},\quad y\in(0,1],$$

$$\left|\frac{\sin(\pi-y)}{y^x(\pi-y)^{2-x}}\right|\leq\frac{1}{y^x(\pi-y)^{1-x}}\leq\frac{1}{(\frac{\pi}{2})^{2-\delta}(\pi-y)^{1-\delta}},\quad y\in[\pi-1,\pi),$$

$\int_0^1 \frac{1}{y^{1-\delta}(\frac{\pi}{2})^{\delta}}dy$ 及 $\int_{\pi-1}^{\pi} \frac{1}{(\frac{\pi}{2})^{2-\delta}(\pi-y)^{1-\delta}}dy$ 均收敛，所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y^x(\pi-y)^{2-x}}dx$ 及 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin y}{y^x(\pi-y)^{2-x}}dx$ 均在 $x\in[\delta,2-\delta]$ 一致收敛，因而 $\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y^x(\pi-y)^{2-x}}dy$ 在 $x\in[\delta,2-\delta]$ 一致收敛.

因此，$F(x)$ 在 $x\in[\delta,2-\delta]$ 连续，因而在 $0<\delta<x_0<2-\delta$ 连续，由 $x_0\in(0,2)$ 的任意性，知 $F(x)$ 在 $(0,2)$ 连续.

5．若 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 上连续，含参变量广义积分

$$I(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$$

在 $[a,b)$ 收敛，在 $x=b$ 时发散，证明 $I(x)$ 在 $[a,b)$ 不一致收敛.

证明 目的在于证明：$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall A_0>c$，$\exists A''>A'>A_0$ 及 $x\in[a,b]$，使得

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)dy\right|\ge\varepsilon_0 . \tag{1}$$

因为

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)dy\right|=\left|\int_{A'}^{A''}[f(x,y)-f(b,y)]dy+\int_{A'}^{A''} f(b,y)dy\right|$$

$$\ge\left|\int_{A'}^{A''} f(b,y)dy\right|-\left|\int_{A'}^{A''}[f(x,y)-f(b,y)]dy\right|,$$

因此，若能证明 $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall A_0>c$，$\exists A''>A'>A_0$ 及 $x\in[a,b]$，

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(b,y)dy\right|\ge 2\varepsilon_0,\quad \left|\int_{A'}^{A''}[f(x,y)-f(b,y)dy\right|<\varepsilon_0, \tag{2}$$

则（1）式即可得到．剩下的问题在于证明（2）.

1^0 因 $\int_c^{+\infty} f(b,y)dy$ 发散，故 $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall A_0>c$，$\exists A''>A'>A_0$，使得

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(b,y)dy\right|\ge 2\varepsilon_0 .$$

2^0 但 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 连续，从而在有界闭区域 $a\le x\le b$，$A'\le y\le A''$ 上一致连续，于是对上述 1^0 中 $\varepsilon_0>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x'-x''|<\delta$，$|y'-y''|<\delta$ 且 x'，$x''\in[a,b]$，y'，$y''\in[A',A'']$

时，有

$$\left|f(x',y')-f(x'',y'')\right|<\frac{\varepsilon_0}{A''-A'},$$

从而$|x-b|<\delta$时，有$|f(x,y)-f(b,y)|<\dfrac{\varepsilon_0}{A''-A'}$，由此推得

$$\left|\int_{A'}^{A''}[f(x,y)-f(b,y)dy\right|<\varepsilon_0.$$

6. 含参变量的广义积分$I(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)dy$在$[a,b]$一致收敛的充要条件是：对任一趋于$+\infty$的递增数列$\{A_n\}$（其中$A_1=c$），函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,y)dy=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

在$[a,b]$上一致收敛.

证明 必要性．$I(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)dy$在$[a,b]$一致收敛，故$\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0>c$，当$A>A_0$时，有

$$\left|\int_A^{+\infty}f(x,y)dy\right|<\varepsilon,$$

对$x\in[a,b]$一致地成立.

对任意递增数列$\{A_n\}$：$A_n\to\infty\ (A_1=c)$，首先，

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,y)dy=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}^{A_{k+1}}f(x,y)dy$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_c^{A_{n+1}}f(x,y)dy=\int_c^{+\infty}f(x,y)dy=I(x),\quad \forall x\in[a,b]\text{成立}.$$

其次，由于$\{A_n\}$单调递减趋于$+\infty$，故对上述$A_0>c$，$\exists N$满足$A_N\ge A_0$，因此当$n>N$时，$A_n>A_N\ge A_0$，因此，有

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}u_k(x)\right|=\left|\sum_{k=n}^{\infty}\int_{A_k}^{A_{k+1}}f(x,y)dy\right|=\left|\int_{A_n}^{+\infty}f(x,y)dy\right|<\varepsilon,$$

$\forall x\in[a,b]$一致地成立，因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$I(x)$.

充分性．采用反证法．若不然，设对任一趋于$+\infty$的递增数列$\{A_n\}$（其中$A_1=c$），函数项级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，但广义积分 $I(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 不一致收敛，因此 $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall A_0>c$，$\exists A>A_0$，$\exists x_0\in[a,b]$，使得 $\left|\int_A^{+\infty}f(x_0,y)dy\right|\ge\varepsilon_0$.

取 $A_0^{(1)}=[c]+1>0$，$\exists A_2>A_0^{(1)}$，$\exists x_1\in[a,b]$，使得 $\left|\int_{A_2}^{+\infty}f(x_1,y)dy\right|\ge\varepsilon_0$；

取 $A_0^{(2)}=A_1+1$，$\exists A_3>A_0^{(2)}$，$\exists x_2\in[a,b]$，使得 $\left|\int_{A_3}^{+\infty}f(x_2,y)dy\right|\ge\varepsilon_0$；

取 $A_0^{(3)}=A_2+1$，$\exists A_4>A_0^{(3)}$，$\exists x_3\in[a,b]$，使得 $\left|\int_{A_4}^{+\infty}f(x_3,y)dy\right|\ge\varepsilon_0$；

如此一直下去．得到一列单调递增序列 $\{A_n\}$（令 $A_1=C$），且 $A_n\to+\infty\ (n\to\infty)$ 和一列 $\{x_n\}\subset[a,b]$，使得

$$\left|\int_{A_{n+1}}^{+\infty}f(x_n,y)dy\right|\ge\varepsilon_0,$$

即函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 非一致收敛，矛盾！

因此，$I(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 一致收敛.

7．用上题的结论证明含参变量广义积分 $I(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 的积分交换次序定理（定理 19．12）和积分号下求导数定理（定理 19．13）.

证明　积分交换次序定理　设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 上连续，且含参变量的广义积分

$$I(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)dy$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛，则

$$\int_a^b I(x)dx=\int_c^{+\infty}dy\int_a^b f(x,y)dx,$$

即
$$\int_a^b dx\int_c^{+\infty}f(x,y)dy=\int_c^{+\infty}dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

由于 $I(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 一致收敛 $\Rightarrow$ 对任意递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}$（$A_1=c$），函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,y)dy=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于 $I(x)$，由已知条件，$f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 上连续，因而亦在 $[a,b]\times[A_n,A_{n+1}]$ 上连续，故 $u_n(x)=\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 连续，因此利用函数项级数和函数的逐项积分定理，有

$$\int_a^b I(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b dx\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)dy=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} dy\int_a^b f(x,y)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}^{A_{k+1}} dy\int_a^b f(x,y)dx=\lim_{n\to\infty}\int_c^{A_{n+1}} dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_c^{+\infty} dy\int_a^b f(x,y)dx .$$

积分号下求导数定理　设 $f(x,y)$ 和 $f_x(x,y)$ 都在 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 上连续，若 $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上收敛，$\int_c^{+\infty} f_x(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则 $I(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 可导，且

$$I'(x)=\int_c^{+\infty} f_x(x,y)dy ,$$

即
$$\frac{d}{dx}\int_c^{+\infty} f_x(x,y)dy=\int_c^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)dy .$$

由于 $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上收敛，故对任意趋于 $+\infty$ 的递增函数列 $\{A_n\}$（$A_1=C$），级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)dy=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 $I(x)$，又 $\int_c^{+\infty} f_x(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，故函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f_x(x,y)dy=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，用函数项级数和函数的逐项求导定理，知

$$I'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f_x(x,y)dy=\int_c^{+\infty} f_x(x,y)dy .$$

8．利用微分交换次序计算下列积分：

（1）$I_n(a)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}$　（n 为正整数，$a>0$）；

（2）$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mxdx$（$a>0$，$b>0$）；

（3）$\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin bxdx$（$a>0$）.

解（1）由于积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}$ 对一切 $a_0>0$ 在 $a\ge a_0$ 上一致收敛，得

$$\frac{d}{da}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}(\frac{1}{x^2+a})dx=-\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^2}=-I_1(a),$$

由 $a_0>0$ 的任意性，知上式对一切 $a>0$ 成立．同理对积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}$ 逐次求导，得

$$\frac{d^n}{da^n}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=(-1)^n n!\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}=(-1)^n n!I_n(a),$$

但

$$\frac{d}{da}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{d}{da}(\frac{\pi}{2\sqrt{a}})=-\frac{\pi}{2^2}\frac{1}{\sqrt{a^3}},$$

$$\frac{d^2}{da^2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{d}{da}(-\frac{\pi}{2^2}\frac{1}{\sqrt{a^3}})=(-1)^2\frac{1\cdot 3\pi}{2^3}\frac{1}{\sqrt{a^5}},$$

用数学归纳法，可得

$$\frac{d^n}{da^n}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=(-1)^n\frac{(2n-1)!!\pi}{2^{n+1}}\frac{1}{\sqrt{a^{2n+1}}},$$

所以，

$$I_n(a)=\frac{(2n-1)!!\pi}{2^{n+1}\cdot n!}\cdot a^{-(n+\frac{1}{2})}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}a^{-(n+\frac{1}{2})}.$$

（2）当 $m=0$ 时，$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mxdx=0$，下设 $m\neq 0$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mx=0$，因此 $x=0$ 不是瑕点，从而当 $a>0$，$b>0$ 时，被积函数在 $0\le x<+\infty$ 内连续（$x=0$ 的函数值理解为极限值 0），又由于

$$\left|\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mx\right|\le\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\quad(x>0),$$

而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ 收敛，由比较判别法，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mxdx$ 收敛.

当 $a\ge a_0>0$ 时，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}(\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mx)dx=-\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin mxdx$ 是一致收敛的．事实上，由 $\left|e^{-ax}\sin mx\right|\le e^{-a_0x}$ $(x\ge 0)$ 立即得到此结论．于是 $I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mxdx$ 在 $a\ge a_0>0$ 时可以在积分号下求导数，得

$$I'(a)=-\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin mxdx=-\frac{m}{a^2+m^2},$$

由 $a_0>0$ 的任意性知，上式对一切 $a>0$ 均成立，从而

$$I(a)=-\int\frac{m}{a^2+m^2}da=-\arctan\frac{a}{m}+c,$$

其中 c 为待定常数，令 $a=b$，则得 $I(b)=0=-\arctan\frac{b}{m}+c\Rightarrow c=\arctan\frac{b}{m}$．所以，

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mxdx=\arctan\frac{b}{m}-\arctan\frac{a}{m}=\arctan\frac{m(b-a)}{m^2+ab}\quad (m\neq 0)\ .$$

（3）$\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin bxdx=-\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}\sin bxd(e^{-ax^2})=-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin bx\Big|_0^{+\infty}+\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bxdx$

$$=\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bxdx$$

设$I(b)=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bxdx$，由于$e^{-ax^2}\cos bx$与$\frac{\partial}{\partial b}(e^{-ax^2}\cos bx)=-xe^{-ax^2}\sin bx$都是$x\geq 0$，$-\infty<b<+\infty$上的连续函数，且此时

$$\left|e^{-ax^2}\cos bx\right|\leq e^{-ax^2}\ ,\quad \left|xe^{-ax^2}\sin bx\right|\leq xe^{-ax^2}\ ,$$

而积分$\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx$与$\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}dx$都收敛，因此积分$\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bxdx$与$\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin bxdx$均在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，从而可以在积分号下求导数．所以，

$$I'(b)=-\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin bxdx=-\frac{b}{2a}I(b)\ ,$$

解得，$I(b)=ce^{-\frac{b^2}{4a}}$，其中$c$是待定常数．但$I(0)=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，得

$$\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin bxdx=\frac{b}{2a}I(b)=\frac{b}{2a}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}=\frac{b\sqrt{a\pi}}{4a^2}e^{-\frac{b^2}{4a}}\ .$$

9．利用对参数的积分法计算下列积分：

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}dx$（$a>0$，$b>0$）；

（2）$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mxdx$（$a>0$，$b>0$）．

解（1）$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}dx=-\int_0^{+\infty}xdx\int_b^a e^{-tx^2}dt=\int_a^b dt\int_0^{+\infty}xe^{-tx^2}dx$

$$=-\int_a^b\frac{1}{2t}dt\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}d(-tx^2)=-\int_a^b\frac{1}{2t}e^{-tx^2}\Big|_0^{+\infty}dt$$

$$=\int_a^b\frac{1}{2t}dt=\frac{1}{2}\ln t\Big|_a^b=\frac{1}{2}(\ln b-\ln a)=\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}\ .$$

（2）$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mxdx=\int_0^{+\infty}\sin mxdx\int_a^b e^{-tx}dt=\int_a^b dt\int_0^{+\infty}e^{-tx}\sin mxdx$

$$=\int_a^b\frac{m}{t^2+m^2}dt=\arctan\frac{t}{m}\Big|_a^b=\arctan\frac{b}{m}-\arctan\frac{a}{m}=\arctan\frac{m(b-a)}{m^2+ab}\ （m\neq 0）,$$

而$m=0$时，$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mxdx=0$，这也可以归结到前面最终答案中$m=0$的情形，所以，

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mxdx=\arctan\frac{m(b-a)}{m^2+ab}.$$

10．利用$\frac{1}{1+x^2}=\int_0^{+\infty}e^{-y(1+x^2)}dy$计算 Laplace 积分

$$L=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$$

和

$$L_1=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx.$$

解 先计算$L=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$.

若$\alpha=0$，则$L=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$，故下设$\alpha\neq 0$.

$$L=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx=\int_0^{+\infty}(\int_0^{+\infty}e^{-y(1+x^2)}dy)\cos\alpha xdx=\int_0^{+\infty}e^{-y}dy\int_0^{+\infty}e^{-yx^2}\cos\alpha xdx$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-y}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}e^{-\frac{\alpha^2}{4y}}dy\ \underline{\underline{\sqrt{y}=t}}\ \int_0^{+\infty}\sqrt{\pi}e^{-(t^2+\frac{\alpha^2}{4t^2})}dt=\sqrt{\pi}e^{|\alpha|}\int_0^{+\infty}e^{-(t+\frac{|\alpha|}{2t})^2}dt,$$

其中第四个等号应用了 8（3）中$I(b)$的结果．下面计算

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-(t+\frac{|\alpha|}{2t})^2}dt.$$

设 $t-\frac{|\alpha|}{2t}=u$，则 $0<t<+\infty$ 时，$-\infty<u<+\infty$，

$t+\frac{|\alpha|}{2t}=\sqrt{u^2+2|\alpha|}\ \Rightarrow t=\frac{1}{2}(u+\sqrt{u^2+2|\alpha|})$，

从而有$dt=\frac{1}{2}(1+\frac{2u}{2\sqrt{u^2+2|\alpha|}})du=\frac{1}{2}\frac{u+\sqrt{u^2+2|\alpha|}}{\sqrt{u^2+2|\alpha|}}du$，代入得

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-(t+\frac{|\alpha|}{2t})^2}dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(u^2+2|\alpha|)}\frac{u+\sqrt{u^2+2|\alpha|}}{\sqrt{u^2+2|\alpha|}}du$$

$$=\frac{1}{2}(\int_{-\infty}^{0}e^{-(u^2+2|\alpha|)}\frac{u+\sqrt{u^2+2|\alpha|}}{\sqrt{u^2+2|\alpha|}}du+\int_0^{+\infty}e^{-(u^2+2|\alpha|)}\frac{u+\sqrt{u^2+2|\alpha|}}{\sqrt{u^2+2|\alpha|}}du)$$

$$=\frac{1}{2}(\int_0^{+\infty}e^{-(u^2+2|\alpha|)}\frac{\sqrt{u^2+2|\alpha|}-u}{\sqrt{u^2+2|\alpha|}}du+\int_0^{+\infty}e^{-(u^2+2|\alpha|)}\frac{u+\sqrt{u^2+2|\alpha|}}{\sqrt{u^2+2|\alpha|}}du)$$（前者作负代换）

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+2|\alpha|)}2du=\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+2|\alpha|)}du=e^{-2|\alpha|}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|\alpha|},$$

所以， $L=\sqrt{\pi}\cdot e^{|\alpha|}\int_0^{+\infty} e^{-(t+\frac{|\alpha|}{2t})^2}dt=\sqrt{\pi}\cdot e^{|\alpha|}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|\alpha|}=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$.

再计算 $L_1=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$. 显然

$$L_1=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{\alpha}\frac{\cos ux}{1+x^2}du=\int_0^{\alpha}du\int_0^{+\infty}\frac{\cos ux}{1+x^2}dx=\int_0^{\alpha}\frac{\pi}{2}e^{-|u|}du=\frac{\pi}{2}\int_0^{\alpha}e^{-|u|}du$$

$$=\frac{\pi}{2}\begin{cases}\int_0^{\alpha}e^{-u}du, & \alpha\ge 0,\\ \int_0^{\alpha}e^{u}du, & \alpha<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{\pi}{2}(1-e^{-\alpha}), & \alpha\ge 0,\\ \frac{\pi}{2}(e^{\alpha}-1), & \alpha<0\end{cases}=\frac{\pi}{2}(1-e^{-|\alpha|})\operatorname{sgn}\alpha.$$

11．利用 $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-xy^2}dy\ (x>0)$ 计算 Fresnel 积分

$$F=\int_0^{+\infty}\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx,$$

和
$$F_1=\int_0^{+\infty}\cos x^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx.$$

解 在积分 $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-xy^2}dy$ 的两端乘以 $\sin x$，再在 $0<x_0\le x\le x_1$ 上积分，则得

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x_0}^{x_1}dx\int_0^{+\infty}\sin xe^{-xy^2}dy.$$

由于 $\left|\sin x\cdot e^{-xy^2}\right|\le e^{-x_0y^2}$，而 $\int_0^{+\infty}e^{-x_0y^2}dy$ 收敛，故积分 $\int_0^{+\infty}\sin xe^{-xy^2}dy$ 对 $x_0\le x\le x_1$ 一致收敛，从而可以进行积分顺序的交换，得

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}dy\int_{x_0}^{x_1}\sin x\cdot e^{-xy^2}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}[-\frac{e^{-xy^2}(y^2\sin x+\cos x)}{1+y^4}]_{x_0}^{x_1}dy$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x_0\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_0y^2}y^2}{1+y^4}dy+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos x_0\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_0y^2}}{1+y^4}dy$$

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x_1\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_1y^2}y^2}{1+y^4}dy-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos x_1\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_1y^2}}{1+y^4}dy,$$

上述等式右端的诸积分分别对 $0\le x_0<+\infty$， $0\le x_1<+\infty$ 都是一致收敛的（$e^{-x_0y^2}\le 1$， $e^{-x_1y^2}\le 1$，

且 $\int_0^{+\infty}\frac{y^2}{1+y^4}dy$ 及 $\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^4}$ 均收敛)．于是，它们分别是 x_0, x_1（$0\le x_0<+\infty$，$0\le x_1<+\infty$）的连续函数，从而令 $x_0\to 0^+$，可在积分号下取极限，得

$$\int_0^{x_1}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^4}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x_1\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_1y^2}y^2}{1+y^4}dy-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos x_1\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_1y^2}}{1+y^4}dy,$$

且由于上式右端后两个积分均不超过积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x_1y^2}dy=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x_1}}\to 0\ (x_1\to+\infty)$．故

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_1y^2}y^2}{1+y^4}dy\to 0,\quad \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_1y^2}}{1+y^4}dy\to 0\ (x_1\to+\infty),$$

令 $x_1\to+\infty$ 取极限，

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^4}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

所以，$\int_0^{+\infty}\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$．

同理可得，$\int_0^{+\infty}\cos x^2dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$．

12．利用已知积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2},\quad \int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

计算下列积分：

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx$；

（2）$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y\cos yx}{y}dy$；

（3）$\int_0^{+\infty}x^2e^{-ax^2}dx$（$a>0$）；

（4）$\int_0^{+\infty}e^{-(ax^2+bx+c)}dx$（$a>0$）；

（5）$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})}dx$（$a>0$）．

解（1）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx=-\int_0^{+\infty}\sin^4 xd(\frac{1}{x})=-\frac{\sin^4 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{4\sin^3 x\cos x}{x}dx$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{(3\sin x-\sin 3x)\cos x}{x}dx$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 4x}{x}dx-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}d(2x)-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 4x}{4x}d(4x)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

（2）$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y\cos yx}{y}dy=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1+x)y+\sin(1-x)y}{y}dy$

$$=\frac{1}{\pi}[\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1+x)y}{y}dy+\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-x)y}{y}dy]$$

$$=\begin{cases}1, & -1<x<1,\\ \frac{1}{2}, & x=-1\ or\ x=1,\\ 0, & x<-1\ or\ x>1,\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ \frac{1}{2}, & |x|=1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

（3）由于$\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx=xe^{-ax^2}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}(-2ax)dx=2a\int_0^{+\infty}x^2e^{-ax^2}dx$，所以，

$$\int_0^{+\infty}x^2e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}=\frac{\sqrt{\pi a}}{4a^2}.$$

（4）$\int_0^{+\infty}e^{-(ax^2+bx+c)}dx=\int_0^{+\infty}e^{-a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{b^2-4ac}{4a}}dx=e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}\int_0^{+\infty}e^{-a(x+\frac{b}{2a})^2}dx=e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}\int_{\frac{b}{2a}}^{+\infty}e^{-at^2}dt$

$$=e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}(\int_0^{+\infty}e^{-at^2}dt-\int_0^{\frac{b}{2a}}e^{-at^2}dt)=e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}(\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\int_0^{\frac{b}{2\sqrt{a}}}e^{-u^2}du)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2}{4a}-c}(\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^{\frac{b}{2\sqrt{a}}}e^{-u^2}du).$$

（5）$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})}dx=2e^{2a}\int_0^{+\infty}e^{-(x+\frac{a}{x})^2}dx$，

设$I(a)=\int_0^{+\infty}e^{-(x+\frac{a}{x})^2}dx$，令$x-\frac{a}{x}=u$，则$0<x<+\infty$时，$-\infty<u<+\infty$．$x+\frac{a}{x}=\sqrt{u^2+4a}$，

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}(u+\sqrt{u^2+4a})$，$dx=\frac{1}{2}\frac{u+\sqrt{u^2+4a}}{\sqrt{u^2+4a}}du$，代入$I(a)$，得

$$I(a)=\int_0^{+\infty}e^{-(x+\frac{a}{x})^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(u^2+4a)}\cdot\frac{u+\sqrt{u^2+4a}}{\sqrt{u^2+4a}}du$$

$$=\frac{1}{2}(\int_{-\infty}^{0}e^{-(u^2+4a)}\cdot\frac{u+\sqrt{u^2+4a}}{\sqrt{u^2+4a}}du+\int_0^{+\infty}e^{-(u^2+4a)}\cdot\frac{u+\sqrt{u^2+4a}}{\sqrt{u^2+4a}}du)$$

$$=\frac{1}{2}(\int_0^{+\infty}e^{-(u^2+4a)}\cdot\frac{\sqrt{u^2+4a}-u}{\sqrt{u^2+4a}}du+\int_0^{+\infty}e^{-(u^2+4a)}\cdot\frac{u+\sqrt{u^2+4a}}{\sqrt{u^2+4a}}du)$$（前者作负代换）

$$=\int_0^{+\infty}e^{-(u^2+4a)}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-4a},$$

所以，$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})}dx=2e^{2a}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-4a}=\sqrt{\pi}e^{-2a}$.

13．求下列积分：

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-t}}{t}\cos tdt$；

（2）$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx$.

解（1）引入参变量$\alpha(>0)$，考虑含参变量的积分$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-\alpha t}}{t}\cos tdt$，则要求的积分为$I(1)$.

由于$\forall\alpha>0$，$\exists b>0$：$b<\alpha$，函数$\frac{1-e^{-\alpha t}}{t}\cos t$及$\frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{1-e^{-\alpha t}}{t}\cos t)=e^{-\alpha t}\cos t$均在$[b,+\infty)\times[0,+\infty)$上连续，且$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\cos tdt$在$[b,+\infty)$一致收敛，(M 判别法．$\left|e^{-\alpha t}\cos t\right|\le e^{-bt}$，$\forall\alpha\in[b,+\infty)$)，故在点$\alpha>0$，有

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\cos tdt=\frac{-\alpha\cos t+\sin t}{\alpha^2+1}e^{-\alpha t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\alpha}{\alpha^2+1},$$

由$\alpha>0$的任意性，上式$I'(\alpha)=\frac{\alpha}{\alpha^2+1}$对一切$\alpha>0$成立．所以，$I(\alpha)=\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+1)+c$，再由$0=I(0)=\lim_{\alpha\to0^+}I(\alpha)=c$，即知

$$I(\alpha)=\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+1),$$

因此，

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-t}}{t}\cos t dt = I(1)=\frac{1}{2}\ln 2 .$$

（2）引入参变量α：$0\le\alpha<\infty$，考虑含参变量的积分$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}dx$，则要求的积分为$I(1)$．由于$f(\alpha,x)=\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}$在$[0,\infty)\times[0,\infty)$连续，且当$0\le\alpha\le\alpha_1$（$\alpha_1>0$为任何有限正数)时一致收敛．事实上，当$0\le\alpha\le\alpha_1$时，

$$0\le\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}\le\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)}{1+x^2}\quad(0\le x<+\infty),$$

而$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)}{1+x^2}dx$收敛（$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)}{1+x^2}=0$），于是$I(\alpha)$是$0\le\alpha\le\alpha_1$上的连续函数．由$\alpha_1>0$的任意性知，$I(\alpha)$当$0\le\alpha<+\infty$时连续．而

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}]=\frac{2\alpha x^2}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)},$$

由于当$0<\alpha_0\le\alpha\le\alpha_1$时，有

$$0\le\frac{2\alpha x^2}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)}\le\frac{2\alpha_1x^2}{(1+x^2)(1+\alpha_0^2x^2)}\quad(0\le x<+\infty),$$

而积分$\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha_1x^2}{(1+x^2)(1+\alpha_0^2x^2)}dx$收敛，于是$\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha x^2}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)}dx$在$0<\alpha_0\le\alpha\le\alpha_1$时是一致收敛的．从而

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha_1x^2}{(1+x^2)(1+\alpha_0^2x^2)}dx=\frac{\pi}{\alpha+1},$$

由$\alpha_0>0$及$\alpha_1>\alpha_0$的任意性知，上式对一切$0<\alpha<+\infty$均成立．所以，

$$I(\alpha)=\pi\ln(\alpha+1)+c\quad（0<\alpha<+\infty）,$$

令$\alpha\to0^+$取极限，注意到$I(\alpha)$在$0\le\alpha<+\infty$连续，可得$0=I(0)=\lim\limits_{\alpha\to0^+}I(\alpha)=c$，所以，$I(\alpha)=\pi\ln(\alpha+1)$．因此，

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}dx=I(1)=\pi\ln 2 .$$

14．证明：

（1）$\int_0^1 \ln(xy)dy$ 在 $[\frac{1}{b},b]$（$b>1$）上一致收敛；

（2）$\int_0^1 \frac{dx}{x^y}$ 在 $(-\infty,b]$（$b<1$）上一致收敛.

证明（1）显然，$\forall x\in[\frac{1}{b},b]$，瑕积分 $I(x)=\int_0^1 \ln(xy)dy$ 是收敛的，且 $x\in[\frac{1}{b},b]$，$y\in[0,\frac{1}{b}]$ 时，$|\ln(xy)|\le|\ln(by)|$，而积分 $\int_0^1 \ln(by)dy$ 收敛，由 M 判别法，知 $\int_0^1 \ln(xy)dy$ 在 $[\frac{1}{b},b]$ 上一致收敛.

（2）$\forall y\in(-\infty,b]$ $(b<1)$，积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^y}$ 收敛（$y\in(-\infty,0]$ 时是常义积分，$y\in[0,b]$ $(b<1)$ 时是瑕点为 0 的 p 积分）. 且 $y\in(-\infty,b]$ 时，$\frac{1}{x^y}\le\frac{1}{x^b}$，而 $\int_0^1 \frac{dx}{x^b}$ $(b<1)$ 收敛，由 M 判别法知 $\int_0^1 \frac{dx}{x^y}$ 在 $(-\infty,b]$ $(b<1)$ 一致收敛.

§3 Euler 积分

1．利用 Euler 积分计算下列积分：

（1）$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{4}}}}$；

（2）$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx$；

（3）$\int_0^1 \sqrt{x^3(1-\sqrt{x})}dx$；

（4）$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$ $(a>0)$；

（5）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos^4 xdx$；

（6）$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$；

（7）$\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}dx$（$n$ 为正整数）;

（8）$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}$ ；

（9）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} xdx$（$n$ 为正整数）;

（10）$\int_0^1 x^m(\ln\frac{1}{x})^{n-1}dx$ （n 为正整数，$m>-1$）.

解（1）令 $x^{\frac{1}{4}}=t$，则 $x=t^4$，$dx=4t^3dt$，

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{4}}}} = 4\int_0^1 t^3(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt = 4\mathrm{B}(4,\frac{1}{2}) = 4\cdot\frac{4-1}{4+\frac{1}{2}-1}\mathrm{B}(3,\frac{1}{2}) = 4\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{2\frac{1}{2}}\mathrm{B}(2,\frac{1}{2})$$

$$= 4\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\mathrm{B}(1,\frac{1}{2}) = \frac{64}{35}\frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{128}{35}\Gamma(1) = \frac{128}{35}.$$

（2）$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx = \mathrm{B}(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) = \frac{1}{8}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \frac{1}{8}(\sqrt{\pi})^2 = \frac{\pi}{8}$.

（3）令 $x^{\frac{1}{2}} = t$，则 $x = t^2$， $dx = 2tdt$，

$$\int_0^1 \sqrt{x^3(1-\sqrt{x})}dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}dx = \int_0^1 t^3(1-t)^{\frac{1}{2}}2tdt = 2\int_0^1 t^4(1-t)^{\frac{1}{2}}dt = 2\mathrm{B}(5,\frac{3}{2})$$

$$= 2\frac{\Gamma(5)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(6\frac{1}{2})} = \frac{512}{3465}.$$

（4）令 $\frac{x^2}{a^2} = u$，则 $x = a\sqrt{u}$， $dx = \frac{a}{2\sqrt{u}}du$，所以，

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = \int_0^1 a^2u(a^2-a^2u)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{a}{2\sqrt{u}}du = \frac{a^4}{2}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}}du = \frac{a^4}{2}\mathrm{B}(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$$

$$= \frac{a^4}{4}\cdot\frac{1}{8}\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \frac{a^4}{32}(\sqrt{\pi})^2 = \frac{\pi}{32}a^4.$$

（5）令 $\sin^2 x = t$，则 $x = \frac{\pi}{2}$时， $t=1$； $x=0$时， $t=0$，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos^4 xdx = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{5}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}dt = \frac{1}{2}\mathrm{B}(\frac{7}{2},\frac{5}{2}) = \frac{3}{512}\pi.$$

（6）先作代换 $x^4 = t \Rightarrow x = t^{\frac{1}{4}}$， $dx = \frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}dt$， $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{3}{4}}dt}{1+t}$.

再令 $\frac{t}{1+t} = u$， $t = \frac{u}{1-u}$， $dt = \frac{1}{(1-u)^2}du$，因此，

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{3}{4}}dt}{1+t}=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{\left(\frac{u}{1-u}\right)^{-\frac{3}{4}}}{\frac{1}{1-u}}\cdot\frac{1}{(1-u)^2}du$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 u^{-\frac{3}{4}}(1-u)^{-\frac{1}{4}}du=\frac{1}{4}\mathrm{B}(\frac{1}{4},\frac{3}{4})=\frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\cdot\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

（这里用到了Γ函数的余元公式$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}$ $(0<x<1)$，参见陈纪修等《数学分析》（下册）P377-379，高等教育出版社 2000 年 4 月）.

（7）令$x^2=t$，则$x=\sqrt{t}$，$dx=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt$，有

$$\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}dx=\int_0^{+\infty}t^n e^{-t}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^{n-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}.$$

（8）$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}=\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{2+2\sin^2\frac{x}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{1+\sin^2\frac{x}{2}}}$

$$\underline{\underline{\sin\frac{x}{2}=t}}\ \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}dt=\sqrt{2}\int_0^1(1-t^4)^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$\underline{\underline{t^4=u}}\ \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1 u^{-\frac{3}{4}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du=\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{B}(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})}=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2(\frac{1}{4}).$$

（9）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}xdx\ \underline{\underline{\sin x=t}}\ \int_0^1 t^{2n}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}dt\ \underline{\underline{t^2=u}}\ \frac{1}{2}\int_0^1 u^{n-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2}\mathrm{B}(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}=\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

（10）$\displaystyle\int_0^1 x^m(\ln\frac{1}{x})^{n-1}dx\ \underline{\underline{x=e^{-u}}}\ \int_{+\infty}^0(e^{-u})^m u^{n-1}d(e^{-u})=\int_0^{+\infty}u^{n-1}e^{-(m+1)u}du$

$$\underline{\underline{(m+1)u=t}}\ \frac{1}{(m+1)^n}\int_0^{+\infty}t^{n-1}e^{-t}dt=\frac{1}{(m+1)^n}\Gamma(n)=\frac{(n-1)!}{(m+1)^n}.$$

2．将下列积分用 Euler 积分表示，并求出积分的存在域：

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{2+x^n}dx$；

（2）$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}$（$m>0$）；

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^n xdx$；

（4）$\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^p dx$；

（5）$\int_0^{+\infty}x^p e^{-\alpha x}\ln xdx \quad (\alpha>0)$.

解（1）当 $n>0$ 时，则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{2+x^n}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+\frac{x^n}{2}}dx \xlongequal{x^n=2t} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{(2t)^{\frac{m-1}{n}}}{1+t}\frac{2}{nt^{\frac{n-1}{n}}}dx$$

$$=\frac{2^{\frac{m}{n}-1}}{n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{1+t}dt \xlongequal{\frac{t}{1+t}=u} \frac{2^{\frac{m}{n}-1}}{n}\int_0^1 u^{\frac{m}{n}-1}(1-u)^{-\frac{m}{n}}du$$

$$=\frac{2^{\frac{m}{n}}}{2n}\mathrm{B}(\frac{m}{n},1-\frac{m}{n}),$$

要求 $\frac{m}{n}>0$ 且 $1-\frac{m}{n}>0$，即 $0<\frac{m}{n}<1$，也即 $0<m<n$.

当 $n=0$ 时，则积分为 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{3}dx$ 对一切的 x 发散.

当 $n<0$ 时，$x^n=2t$，则 $x=0$ 时 $t=+\infty$；$x=+\infty$ 时 $t=0$，所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{2+x^n}dx=-\frac{2^{\frac{m}{n}}}{2n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{1+t}dt=-\frac{2^{\frac{m}{n}}}{2n}\mathrm{B}(\frac{m}{n},1-\frac{m}{n}),$$

同样要求 $\frac{m}{n}>0$ 且 $1-\frac{m}{n}>0$，即 $0>m>n$.

积分的收敛域为：$0<m<n$ 或 $n<m<0$.

（2）$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} \xlongequal{x^m=t} \frac{1}{m}\int_0^1 t^{\frac{1}{m}-1}(1-t)^{-\frac{1}{n}}dt=\frac{1}{m}B(\frac{1}{m},1-\frac{1}{n})$,

存在域为 $1-\frac{1}{n}>0$，即 $n>1$ 或 $n<0$.

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^n xdx \underline{\underline{\sin x=t}} \int_0^1\frac{t^n}{(1-t^2)^{\frac{n+1}{2}}}dt \underline{\underline{t^2=u}} \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{n-1}{2}}(1-u)^{-\frac{n+1}{2}}du=\frac{1}{2}\mathrm{B}(\frac{n+1}{2},\frac{1-n}{2})$

存在域为$\frac{n+1}{2}>0$且$\frac{1-n}{2}>0$，即$-1<n<1$.

（4）$\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^p dx \underline{\underline{x=e^{-t}}} \int_0^{+\infty}t^p e^{-t}dt=\Gamma(p+1)$，$p+1>0$即$p>-1$为存在域.

（5）由对Γ函数分析性质的证明，可知$\forall p$：$-1<p_0\le p\le p_1$，积分$\int_0^{+\infty}x^p e^{-\alpha x}\ln xdx\ (\alpha>0)$在$[p_0,p_1]$一致收敛．故当$p_0\le p\le p_1$时，

$$\frac{d}{dp}\int_0^{+\infty}x^p e^{-\alpha x}dx=\int_0^{+\infty}x^p e^{-\alpha x}\ln xdx,$$

但$\int_0^{+\infty}x^p e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha^{p+1}}\int_0^{+\infty}t^p e^{-t}dt=\frac{\Gamma(p+1)}{\alpha^{p+1}}$，故

$$\int_0^{+\infty}x^p e^{-\alpha x}\ln xdx=\frac{d}{dp}\int_0^{+\infty}x^p e^{-\alpha x}dx=\frac{d}{dp}\left(\frac{\Gamma(p+1)}{\alpha^{p+1}}\right),\quad -1<p_0\le p\le p_1,$$

由$-1<p_0<p_1$的任意性，知上式对一切$p>-1$均成立.

3．证明：

（1）$\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=\frac{1}{n}\Gamma(\frac{1}{n})\quad (n>0)$；

（2）$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=1$．.

证明（1）令$x^n=t$，则$dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$，所以，$\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{n}-1}e^{-t}dt=\frac{1}{n}\Gamma(\frac{1}{n})$.

（2）$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\Gamma(\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to+\infty}\Gamma(1+\frac{1}{n})=\Gamma(1)=1$.

4．证明：

$$\mathrm{B}(a,b)=\int_0^1\frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}dx;$$

$$\Gamma(\alpha)=s^\alpha\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-sx}dx\quad (s>0).$$

证明　$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$，令$x=\frac{1}{1+t}$，则$x=1$时，$t=0$；$x=0$时，$t=+\infty$，

$$1-x=1-\frac{1}{1+t}=\frac{t}{1+t},\quad dx=-\frac{1}{(1+t)^2}dt,$$

所以，

$$B(a,b)=-\int_{+\infty}^{0}\frac{1}{(1+t)^{a-1}}\cdot(\frac{t}{1+t})^{b-1}\cdot\frac{1}{(1+t)^{2}}dt=\int_{0}^{+\infty}\frac{t^{b-1}}{(1+t)^{a+b}}dt$$

$$=\int_{0}^{1}\frac{t^{b-1}}{(1+t)^{a+b}}dt+\int_{1}^{+\infty}\frac{t^{b-1}}{(1+t)^{a+b}}dt,$$

在后一积分中作倒代换$t=\frac{1}{u}$，则$t=1$时，$u=1$；$t=+\infty$时，$u=0$.

$$dt=-\frac{1}{u^{2}}du,\quad \frac{t^{b-1}}{(1+t)^{a+b}}=\frac{(\frac{1}{u})^{b-1}}{(1+\frac{1}{u})^{a+b}}=\frac{u^{a+1}}{(1+u)^{a+b}},$$

所以，

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{t^{b-1}}{(1+t)^{a+b}}dt=-\int_{1}^{0}\frac{u^{a+1}}{(1+u)^{a+b}}\cdot\frac{1}{u^{2}}du=\int_{0}^{1}\frac{u^{a-1}}{(1+u)^{a+b}}du=\int_{0}^{1}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt,$$

因此，

$$\mathrm{B}(a,b)=\int_{0}^{1}\frac{t^{b-1}}{(1+t)^{a+b}}dt+\int_{1}^{+\infty}\frac{t^{b-1}}{(1+t)^{a+b}}dt=\int_{0}^{1}\frac{t^{b-1}}{(1+t)^{a+b}}dt+\int_{0}^{1}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt$$

$$=\int_{0}^{1}\frac{t^{a-1}+t^{b-1}}{(1+t)^{a+b}}dt=\int_{0}^{1}\frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}dx.$$

$$\Gamma(\alpha)=\int_{0}^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx\,\underline{\underline{\;x=st\;}}\int_{0}^{+\infty}(st)^{\alpha-1}e^{-st}sdt=s^{\alpha}\int_{0}^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-st}dt=s^{\alpha}\int_{0}^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-sx}dx.$$

第二十章　重 积 分

§1 重积分的概念

1．证明性质（4），性质（6）.

证明　性质（4）为单调性：若f与g都在D可积,且在D的每点P都有$f(P)\le g(P)$，则$\iint\limits_{D}f(P)d\sigma\le\iint\limits_{D}g(P)d\sigma$.

事实上，f与g的 Rimann 和有以下关系:

$$\sum_{i=1}^{n}f(p_i)\Delta\sigma_i\le\sum_{i=1}^{n}g(p_i)\Delta\sigma_i,$$

令$d=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\sigma_i\text{的直径}\}\to 0$,按积分的定义，

$$\iint\limits_{D}f(p)d\sigma=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(p_i)\Delta\sigma_i\le\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}g(p_i)\Delta\sigma_i=\iint\limits_{D}g(p)d\sigma.$$

性质(6)为积分中值定理：设 D 是有界闭区域(因而是连通的)，$f(P)$ 在 D 上连续，则存在 $P_0 \in D$，使得 $\iint\limits_D f(P)d\sigma = f(P_0)|D|$，其中 $|D|$ 表示 D 的面积.

事实上，设 M 与 m 是连续函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上的最大值与最小值，即：$\forall P \in D$，$m \le f(P) \le M$．所以，$m|D| \le \iint\limits_D f(p)d\sigma \le M|D|$，即 $m \le \dfrac{\iint\limits_D f(P)d\sigma}{|D|} \le M$.

由有界闭区域上的连续函数的介值定理，存在 $P_0 \in D$，使得 $f(P_0) = \dfrac{\iint\limits_D f(P)d\sigma}{|D|}$，即 $\iint\limits_D f(p)d\sigma = f(p_0)|D|$.

2．证明有界闭区域上的连续函数必可积.

证明 在有界闭区域 D 上的连续函数 $f(P)$ 必定是一致连续的，故 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P_1, P_2 \in D$，只要 $r(p_1, p_2) < \delta$，就有 $|f(P_1) - f(P_2)| < \dfrac{\varepsilon}{2|D|}$，$|D|$ 表示 D 的面积.

把 D 分成 n 个区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$，使 $d = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\sigma_i\} < \delta$，显然 $f(P)$ 在 $\Delta\sigma_i$ 上的振幅 $\omega_i \le \dfrac{\varepsilon}{2|D|}$. 所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i \le \dfrac{\varepsilon}{2|D|}\cdot|D| = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$ 故 $f(P)$ 在 D 上可积.

3．设 Ω 是可度量的平面图形或空间立体，f, g 在 Ω 上连续，证明:

(1) 若在 Ω 上 $f(p) \ge 0$，且 $f(p) \not\equiv 0$，则 $\int_\Omega f(p)d\Omega > 0$;

(2) 若在 Ω 的任何区域 $\Omega' \subset \Omega$ 上，有 $\int_{\Omega'} f(p)d\Omega = \int_{\Omega'} g(p)d\Omega$，则在 Ω 上有，$f(p) \equiv g(p)$.

证明：不妨设 Ω 是可度量的平面图形，f, g 在 Ω 上连续.

(1) 若在 Ω 上 $f(p) \ge 0$，且 $f(p) \not\equiv 0$，则存在一点 $P_0 \in \Omega$，使 $f(p_0) \ge 0$.

由于 f 在 Ω 上连续，因而对 $\varepsilon = {}^{f(P_0)}\!/_{2} > 0, \exists \delta > 0, \forall P \in \Omega, r(P, P_0) \le \frac{\delta}{2}$，就有 $|f(P) - f(P_0)| < \dfrac{f(P_0)}{2}$，即有 $f(P) > \dfrac{f(P_0)}{2}$. 由可加性，有

$$\int_\Omega f(P)d\Omega = \int_{r(P,P_0)\le\frac{\delta}{2}} f(P)d\Omega + \int_{\Omega - \{r(P,P_0)\le\frac{\delta}{2}\}} f(P)d\Omega$$

$$\geq \int_{r(P,P_0)\leq\frac{\delta}{2}} f(P)d\Omega \geq \frac{f(P_0)}{2}\int_{r(P,P_0)\leq\frac{\delta}{2}} d\Omega$$

$$= \frac{f(p_0)}{2}\pi(\frac{\delta}{2})^2 = \frac{\pi\delta^2}{8} f(p_0) > 0.$$

(2) 若在 Ω 上 $f(P) \not\equiv g(P)$，即 $\exists P_0 \in \Omega$，使 $f(P_0) \neq g(P_0)$. 不妨设 $f(P_0) > g(P_0)$，由此得 $f(P_0) - g(P_0) > 0$. 由于 f, g 在 Ω 上连续，因而函数 $f(P) - g(P)$ 在 Ω 上连续，因而在 P_0 连续,故对 $\varepsilon = \dfrac{f(P_0) - g(P_0)}{2} > 0$, $\exists \delta > 0$，当 $r(P, P_0) \leq \dfrac{\delta}{2}$ 时，有

$$\left| f(P) - g(P) - (f(P_0) - g(P_0)) \right| < \frac{f(P_0) - g(P_0)}{2}.$$

即有 $\left| f(P) - g(P) \right| > \dfrac{f(P_0) - g(P_0)}{2}$. 设 $\Omega' = \{P : r(P, P_0) \leq \frac{\delta}{2}\} \subset \Omega$，这时

$$\int_{\Omega'} [f(P) - g(P)] d\Omega \geq \frac{f(P_0) - g(P_0)}{2} (\frac{\delta}{2})^2 \pi > 0.$$

即 $\int_{\Omega'} f(p) d\Omega > \int_{\Omega'} g(p) d\Omega$，矛盾. 所以在 Ω 上 $f(P) \equiv g(P)$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，$g(y)$ 在 $[c,d]$ 可积,则 $f(x)g(y)$ 在矩形区域 $D = [a,b] \times [c,d]$ 上可积,且

$$\iint_D f(x)g(y)dxdy = \int_a^b f(x)dx \int_c^d g(y)dy.$$

证明: 用平行坐标轴的直线网 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,\ c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_m = d$,
将 D 分为 $m \times n$ 个小矩形 $\Delta\sigma_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. 记 $f(x)g(y)$ 在 $\Delta\sigma_{ij}$ 的上下确界分别为 M_{ij}, m_{ij}，任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，则

$$m_{ij}\Delta y_j \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i) g(y) dy \leq M_{ij}\Delta y_j, \quad i = 1,2,\cdots,n, j = 1,2,\cdots,m.$$

对 j 求和得

$$\sum_{j=1}^m m_{ij}\Delta y_j \leq \int_c^d f(\xi_i) g(y) dy \leq \sum_{j=1}^m M_{ij}\Delta y_j, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

乘以 Δx_i 后再对 i 求和，得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \le \sum_{i=1}^{n}\int_c^d f(\xi_i)g(y)dy\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j,$$

当 $\lambda=\max\limits_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}\{\sigma_{ij}\text{的直径}\}\to 0$ 时，$\lambda'=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0$. 由于 $f(x)g(y)$ 在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积,上式左右两端当 $\lambda\to 0$ 时有公共极限值 $\iint\limits_D f(x)g(y)dxdy$.因此由夹迫性

$$\lim_{\lambda'\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\int_c^d f(\xi_i)g(y)dy)\Delta x_i=\iint\limits_D f(x)g(y)dxdy.$$

由定积分的定义即得

$$\int_a^b(\int_c^d f(x)g(y)dy)dx=\iint\limits_D f(x)g(y)dxdy.$$

即

$$\iint\limits_D f(x)g(y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x)g(y)dy=\int_a^b(f(x)\int_c^d g(y)dy)dx=\int_a^b f(x)dx\int_c^d g(y)dy.$$

5．若 $|f(x,y)|$ 在 D 上可积,那么 $f(x,y)$ 在在 D 上是否可积?考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{若}x,y\text{都是有理数}\\ -1, & \text{若}x,y\text{至少有一个是无理数}\end{cases}$$

在 $[0,1]\times[0,1]$ 上的积分.

解: 若 $|f(x,y)|$ 在 D 上可积,那么 $f(x,y)$ 在 D 上不一定可积.

事实上，用题所给的函数 $f(x,y)$, $|f(x,y)|\equiv 1,(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$, 因而 $\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy=|D|=1$, 即 $|f(x,y)|$ 在 D 上可积.

但 $f(x,y)$ 在分割 Δ 下的积分和为

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i, & (\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i\text{为有理点}\\ \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)\Delta\sigma_i. & (\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i\text{为非有理点}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}|D|, & (\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i\text{为有理点}\\ -|D|, & (\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i\text{为非有理点}\end{cases}$$

因而 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 不存在，即 $f(x,y)$ 在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上不可积.

6. 设 $D=[0,1]\times[0,1]$，$f(x,y)=\begin{cases}1, & x\text{是有理数}\\ 0, & x\text{是无理数}\end{cases}$ 证明 $f(x,y)$ 在 D 上不可积.

证明: 用任意曲线网将 $D=[0,1]\times[0,1]$ 分成有限个可求积的区域: $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$.

取 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$，$\xi_i$ 为有理数，则积分和 $\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i=1$,这时

$$\lim_{\lambda\to0}\sigma=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=1.$$

而取 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$，$\xi_i$ 为无理数，则积分和 $\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\sum\limits_{i=1}^{n}0\cdot\Delta\sigma_i=0$,这时

$$\lim_{\lambda\to0}\sigma=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=0.$$

因而积分和 $\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)$ 当 $\lambda\to0$ 的极限不存在，因而函数 $f(x,y)$ 在 D 上不可积.

§2 重积分化累次积分

1. 计算下列二重积分:

(1). $\iint\limits_D(y-2x)dxdy,\quad D=[3,5]\times[1,2]$

(2). $\iint\limits_D\cos(x+y)dxdy,\quad D=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\pi]$

(3). $\iint\limits_D xye^{x^2+y^2}dxdy,\quad D=[a,b]\times[c,d]$

(4). $\iint\limits_D\dfrac{x}{1+xy}dxdy,\quad D=[0,1]\times[0,1]$

解: (1) 原式 $=\int_3^5dx\int_1^2(y-2x)dy=\int_3^5(\frac{7}{2}-2x)dx=-10$;

(2) 原式 $=\int_0^{\pi/2}dx\int_0^{\pi}\cos(x+y)dy=\int_0^{\pi/2}(\sin(x+\pi)-\sin x)dx=-2$;

(3) 原式 $=\int_a^b xe^{x^2}dx\cdot\int_c^d ye^{y^2}dy=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_a^b\cdot\frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_c^d=\frac{1}{4}(e^{b^2}-e^{a^2})(e^{d^2}-e^{c^2})$;

（4）原式 $=\int_0^1xdx\int_0^1\dfrac{dy}{1+xy}=\int_0^1\ln(1+x)dx=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\dfrac{xdx}{1+x}=\ln2-1+\ln(1+x)\Big|_0^1$

. $=2\ln2-1$

2. 将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 化为不同顺序累次积分.

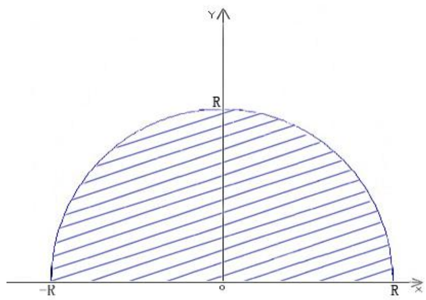
(1) D 由 x 轴与 $x^2+y^2=r^2(y>0)$ 所围成;

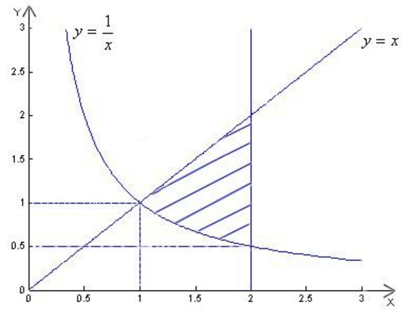
(2) D 由 $y=x, x=2$ 及 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 所围成;

(3) D 由 $y=x^3, y=2x^3, y=1$ 和 $y=2$ 所围成;

(4) $D=\{(x,y)\|x|+|y|\le 1\}$

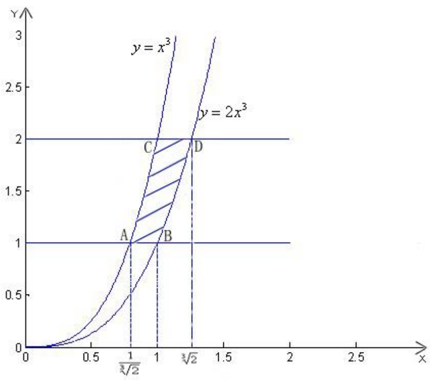
解: (1) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{-r}^{r}dx\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}f(x,y)dy=\int_0^r dy\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}f(x,y)dx$

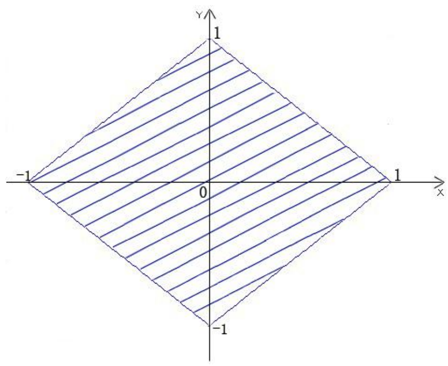




(2) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}f(x,y)dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{1}{y}}^{2}f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$.

(3) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^{1}dx\int_1^{2x^2}f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt[3]{2}}dx\int_{x^2}^{2}f(x,y)dy=\int_1^2 dy\int_{\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{2}}}^{\sqrt[3]{y}}f(x,y)dx$.





(4) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-(1+x)}^{1+x}f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_{-1+x}^{1-x}f(x,y)dy$

$$=\int_{-1}^{0}dy\int_{-(1+y)}^{1+y}f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_{-1+y}^{1-y}f(x,y)dx.$$

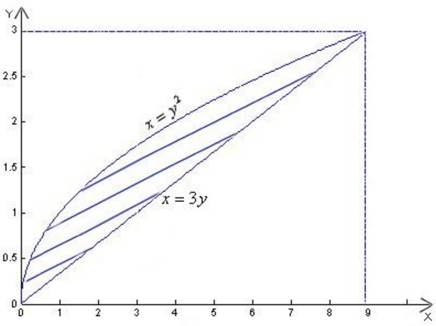
3. 改变下列累次积分的次序.

(1) $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{3y} f(x,y)dx$;

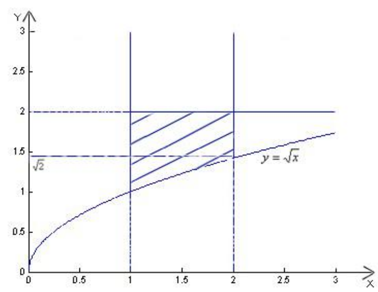
(2) $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)dy$;

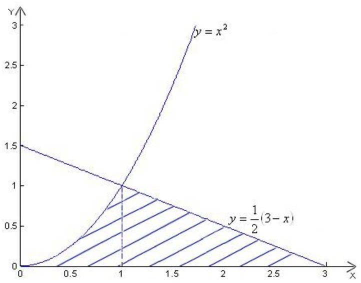
(3) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy$.

解：(1) 原式= $\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{3}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy+\int_4^6 dx\int_{\frac{x}{3}}^{2} f(x,y)dy$.



(2) 原式= $\int_1^{\sqrt{2}} dy\int_1^{y^2} f(x,y)dx+\int_{\sqrt{2}}^{2} dy\int_1^{2} f(x,y)dx$.





(3) 原式= $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx$.

4. 设 $f(x,y)$ 在所积分的区域 D 上连续，证明：$\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)dx$.

证明: 先画出 D 的草图如右,则

$$\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)dx.$$

5．计算下列二重积分:

(1) $\iint_D x^m y^k dxdy(m,k>0)$, D 是由 $y^2=2px(p>0),x=\frac{p}{2}$ 围城的区域;

(2) $\iint_D xdxdy$，D 是由 $y=0,y=\sin x^2,x=0$ 和 $x=\sqrt{\pi}$ 围城的区域;

(3) $\iint_D \sqrt{x}dxdy$,$D:x^2+y^2\le x$;

(4) $\iint\limits_D |xy|dxdy$， $D: x^2+y^2\le a^2$;

(5) $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, D 由 $y=e^x, y=1, x=0, x=1$ 所围成;

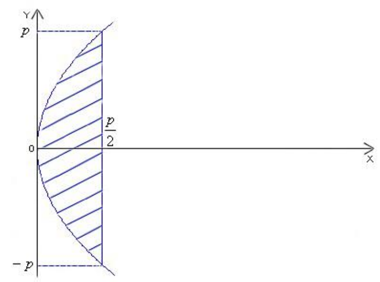
(6) $\iint\limits_D x^2y^2dxdy$, D 由 $x=y^2, x=0, x=2, y=2+x$ 所围成;

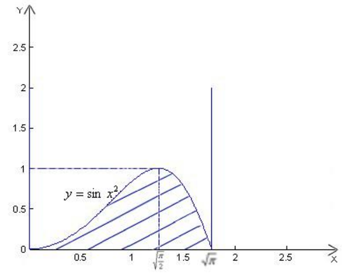
(7) $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy$, D 由 $(2,2),(2,3),(3,1)$ 为顶点的三角形;

(8) $\iint\limits_D \sin nx dxdy$, D 由 $y=x^2, y=4x, y=4$ 所围成;

解:（1）原式=$\int_{-p}^{p}dy\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}x^m y^k dx=\frac{1}{(m+1)2^{m+1}p^{m+1}}\int_{-p}^{p}(p^{2(m+1)}-y^{2(m+1)})y^k dy$

$$=\frac{p^{m+k+2}}{(m+1)2^{m+1}}[1-(-1)^{k+1}][\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2(m+1)+k+1}]=\frac{p^{m+k+2}[1-(-1)^{k+1}]}{2^m(k+1)(2m+k+3)}.$$

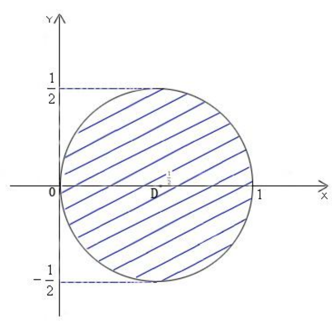


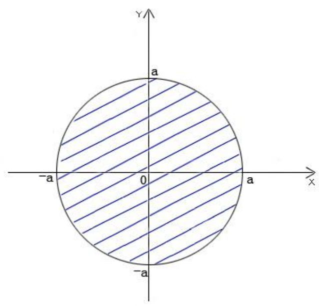


（2）原式=$\int_0^{\sqrt{\pi}}xdx\int_0^{\sin x^2}dy=\int_0^{\sqrt{\pi}}x\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin x^2d(x^2)$

$$=-\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^{\sqrt{\pi}}=-\frac{1}{2}(\cos\pi-\cos 0)=1.$$

(3) 原式=$\int_0^1\sqrt{x}dx\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}dy=2\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx=2\int_0^1(1-x^2)x(-2x)dx=4\int_0^1(x^2-x^4)dx=\frac{8}{15}$.



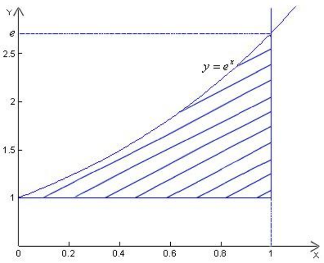


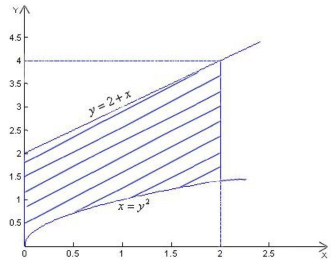
(4) 原式= $4\iint\limits_{D_1}|xy|dxdy$　　$D_1: x^2+y^2\le a^2, x,y\ge 0$

$$=4\int_0^a xdx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} ydy = 2\int_0^a x(a^2-x^2)dx = 2(\frac{a^2x^2}{2}-\frac{1}{4}x^4)\bigg|_0^a = \frac{a^4}{2}.$$

(5) 原式$=\int_0^1 dx\int_1^{e^x}(x+y)dy = \int_0^1 (xe^x+\frac{1}{2}e^{2x}-x-\frac{1}{2})dx$

$$=[\tfrac{1}{4}e^{2x}+(x-1)e^x-\tfrac{1}{2}x(x+1)]\Big|_0^1 = \tfrac{1}{4}(e^2-1).$$

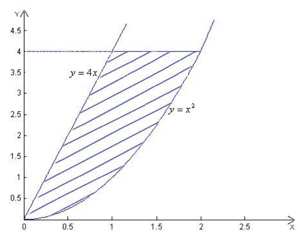




(6) 原式$=\int_0^2 x^2dx\int_{\sqrt{x}}^{2+x} y^2dy = \frac{1}{3}\int_0^2 x^2[(2+x)^3-x\sqrt{x}]dx$

$$=\tfrac{1}{3}(\tfrac{8}{3}x^3+3x^4+\tfrac{6}{5}x^5+\tfrac{1}{6}x^6-\tfrac{2}{9}x^{\frac{9}{2}})\Big|_0^2 = 40\frac{16}{45}-\frac{32}{27}\sqrt{2}.$$

(7) 原式$=\int_2^3 e^xdx\int_{4-x}^{7-2x} e^ydy = \int_2^3 e^x(e^{7-2x}-e^{4-x})dx = \int_2^3 (e^{7-x}-e^4)dx = e^5$.



(8) 当$n=0$时，显然$\iint\limits_D \sin nxdxdy = 0$.

当$n\neq 0$，则

$$\iint\limits_D \sin nxdxdy = \int_0^4 dy\int_{\frac{y}{4}}^{\sqrt{y}} \sin nxdx = -\frac{1}{n}\int_0^4 \cos(n\sqrt{y})dy + \frac{1}{n}\int_0^4 \cos\frac{ny}{4}dy$$

$$=-\frac{1}{n}\int_0^4 \cos(n\sqrt{y})dy + \frac{4}{n^2}\sin n = -\frac{2}{n}\int_0^2 t\cos ntdt + \frac{4}{n^2}\sin n$$

$$=\frac{4\sin n}{n^2}(1+\frac{2}{n}\sin n - 2\cos n).$$

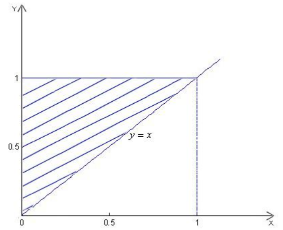
6. 求下列二重积分:

(1). $I=\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}dy$.

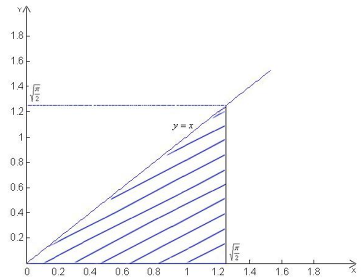
(2). $I=\int_0^1 dx\int_x^1 x^2e^{-y^2}dy$

(3). $I=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}dy\int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}y^2\sin x^2dx$

解：（1）$I=\int_0^1 e^{-y^2}dy\int_0^y dx=\int_0^1 ye^{-y^2}dy=-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$



（1）（2）题图



（3）题图

(2). $I=\int_0^1 e^{-y^2}dy\int_0^y x^2dx=\frac{1}{3}\int_0^1 y^3e^{-y^2}dy\overset{y^2=t}{=}\frac{1}{6}\int_0^1 te^{-t}dt=\frac{1}{6}(1-\frac{2}{e})$.

(3). $I=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\sin x^2dx\int_0^x y^2dy=\frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}x^3\sin x^2dx\overset{x^2=t}{=}\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin tdt=\frac{1}{6}$.

7. 设 y 轴将有界区域 D 分成对称的两部分 D_1 和 D_2,证明:

(1) 若 $f(x,y)$ 关于 x 轴为奇函数,即 $f(-x,y)=-f(x,y)$,则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=0;$$

(2) 若 $f(x,y)$ 关于 x 轴为偶函数,即 $f(-x,y)=f(x,y)$,则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=2\iint_{D_1}f(x,y)dxdy=2\iint_{D_2}f(x,y)dxdy.$$

证明: (1) 设 $f(x,y)$ 关于 x 轴为奇函数,即 $f(-x,y)=-f(x,y)$,则由于 y 轴将有界区域 D 分成对称的两部分 D_1 和 D_2,不妨设

$$D_1: 0\le x\le b,\quad \varphi(x)\le y\le\psi(x),$$

则由对称性,知

$$D_2: -b\le x\le 0,\quad \varphi(x)\le y\le\psi(x),$$

且 $\varphi(x),\psi(x)$ 在 $[-b,b]$ 上是偶函数,因此

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D_1}f(x,y)dxdy+\iint_{D_2}f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy+\int_{-b}^0 dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy$$

$$=\int_0^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy-\int_b^0 dt\int_{\varphi(-t)}^{\psi(-t)}f(-t,y)dy$$

$$=\int_0^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy-\int_0^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy .$$

(2) 同样,若 $f(x,y)$ 关于 x 轴为偶函数,即 $f(-x,y)=f(x,y)$,则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy+\int_{-b}^0 dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

$$=\int_0^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy-\int_b^0 dt\int_{\varphi(-t)}^{\psi(-t)} f(-t,y)dy$$

$$=\int_0^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy+\int_0^b dt\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t,y)dy$$

$$=2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy=2\iint_{D_2} f(x,y)dxdy .$$

8. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint_V (x+y+z)dxdydz$, $V: x^2+y^2+z^2\le a^2$;

解: 原式= $\iiint_V (x+y+z)dxdydz=\int_{-a}^a dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}(x+y+z)dz$

$$=2\int_{-a}^a dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}(x+y)\sqrt{a^2-x^2-y^2}dy=4\int_{-a}^a xdx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dy$$

$$=4\int_{-a}^a x\left(\frac{a^2-x^2}{2}\arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{y}{2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$=2\int_{-a}^a x(a^2-x^2)dx=0 .$$

(2) $\iiint_V zdxdydz$,V 由曲面 $z=x^2+y^2, z=1, z=2$ 所围成.

解: $\forall z\in[1,2]$,用平行于 Oxy 平面的平面 $Z=z$ 去截 V ,得一圆面 $D_z: x^2+y^2\le z^2$,

而它的面积为 πz^2 ,因此有

$$\iiint_V zdxdydz=\int_1^2 zdz\iint_{D_z} dxdy=\int_1^2 \pi z^3 dz=\frac{15}{4}\pi .$$

(3) $\iiint_V (1+x^4)dxdydz$,V 由曲面 $x^2=z^2+y^2, x=2, x=4$ 所围成.

解: $\forall x\in[2,4]$,用平行于 oyz 平面的平面 $X=x$ 去截 V ,得一圆面:$D_x: y^2+z^2\le x^2$,而它的面积为 πx^2 ,因此有

$$\iiint_V (1+x^4)dxdydz=\int_2^4 (1+x^4)dx\iint_{D_x} dydz=\int_2^4 \pi x^2(1+x^4)dx=\frac{7064}{3}\pi .$$

(4) $\iiint\limits_V x^3yzdxdydz$,V 由曲面 $x^2+y^2+z^2=1, x=0, y=0, z=0$ 所围成的位于第一卦限的有界区域.

解: $\iiint\limits_V x^3yzdxdydz = \int_0^1 x^3dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^3dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2)dy$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 x^3(1-x^2)^2dx = \frac{1}{16}\int_0^1 t(1-t)^2dt = \frac{1}{192}.$$

(5) $\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz$,V 由曲面 $z=xy, y=x, z=0, x=1$ 所围成.

解: $\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz = \int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy\int_0^{xy} z^3dz = \frac{1}{4}\int_0^1 x^5dx\int_0^x y^6dy = \frac{1}{364}$.

(6) $\iiint\limits_V y\cos(x+z)dxdydz$,V 是由 $y=\sqrt{x}, y=0, z=0, x+z=\frac{\pi}{2}$ 所围成的区域.

解: $\iiint\limits_V y\cos(x+z)dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} dz\int_0^{\sqrt{x}} y\cos(x+z)dy$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} x\cos(x+z)dz = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1-\sin x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2+x\cos x-\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$$

9. 改变下列累次积分的次序.

(1) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$

解:原式 $= \int_0^1 dy\int_0^{1-y} dx\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$

$$= \int_0^1 dx\int_0^x dz\int_0^{1-x} f(x,y,z)dy$$

$$= \int_0^1 dy\int_0^y dz\int_0^{1-y} f(x,y,z)dx$$

$$= \int_0^1 dz\int_0^z dx\int_0^{1-x} f(x,y,z)dy + \int_0^1 dz\int_z^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y,z)dy$$

$$= \int_0^1 dz\int_0^z dx\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx + \int_0^1 dz\int_z^1 dx\int_0^{1-y} f(x,y,z)dx.$$

(2) $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$

解:原式 $= \int_0^1 dy\int_0^1 dx\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$

$$=\int_0^1 dy\int_0^{y^2} dz\int_0^1 f(x,y,z)dx+\int_0^1 dy\int_{y^2}^{1+y^2} dz\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx$$

$$=\int_0^1 dz\int_{\sqrt{z}}^1 dy\int_0^1 f(x,y,z)dx+\int_0^1 dz\int_0^{\sqrt{z}} dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx+\int_1^2 dz\int_{\sqrt{z-1}}^1 dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2} dz\int_0^1 f(x,y,z)dy+\int_0^1 dx\int_{x^2}^{1+x^2} dz\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)dy$$

$$=\int_0^1 dz\int_{\sqrt{z}}^1 dx\int_0^1 f(x,y,z)dy+\int_0^1 dz\int_0^{\sqrt{z}} dx\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dy+\int_1^2 dz\int_{\sqrt{z-1}}^1 dx\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dy\ .$$

(3) $\int_1^2 dx\int_0^1 dy\int_{1-x-y}^0 f(x,y,z)dz=\int_0^1 dy\int_1^2 dx\int_{1-x-y}^0 f(x,y,z)dz$

解：原式$=\int_0^1 dy\int_1^2 dx\int_{1-x-y}^0 f(x,y,z)dz$

$$=\int_{-1}^0 dz\int_{-z}^0 dy\int_1^2 f(x,y,z)dx+\int_{-1}^0 dz\int_0^{-z} dy\int_{1-y-z}^2 f(x,y,z)dx+\int_{-2}^{-1} dz\int_{-1-z}^1 dy\int_{1-y-z}^2 f(x,y,z)dx$$

$$=\int_0^1 dy\int_{-y}^0 dz\int_1^2 f(x,y,z)dx+\int_0^1 dy\int_{-1}^{-y} dz\int_{1-y-z}^2 f(x,y,z)dx+\int_0^1 dy\int_{-1-y}^{-1} dz\int_{1-y-z}^2 f(x,y,z)dx$$

$$=\int_1^2 dx\int_{1-x}^0 dz\int_0^1 f(x,y,z)dy+\int_1^2 dx\int_{-1}^{1-x} dz\int_{1-x-z}^1 f(x,y,z)dy+\int_1^2 dx\int_{-x}^{-1} dz\int_{1-x-z}^1 f(x,y,z)dy$$

$$=\int_{-1}^0 dz\int_{1-z}^2 dx\int_0^1 f(x,y,z)dy+\int_{-1}^0 dz\int_1^{1-z} dx\int_{1-x-z}^1 f(x,y,z)dy+\int_{-2}^{-1} dz\int_{-z}^2 dx\int_{1-x-z}^1 f(x,y,z)dy$$

(4) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz=\int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz$

解：原式$=\int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz$

$$=\int_{-1}^1 dx\int_{|x|}^1 dz\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)dy=\int_0^1 dz\int_{-z}^z dx\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)dy$$

$$=\int_{-1}^1 dy\int_{|y|}^1 dz\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)dx=\int_0^1 dz\int_{-z}^z dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)dx\ .$$

10. 求下列立体之体积.

(1) V 由 $x^2+y^2+z^2\le r^2, x^2+y^2+z^2\le 2rz$ 所确定.

解： $V=\iint\limits_D(\sqrt{r^2-x^2-y^2}-(r-\sqrt{r^2-x^2-y^2})dxdy$

$$=\iint\limits_D(2\sqrt{r^2-x^2-y^2}-r)dxdy$$

由 $x^2+y^2+z^2\le r^2, x^2+y^2+z^2\le 2rz$ 联立,得

$D: x^2+y^2\le\dfrac{3}{4}r^2$,采用极坐标,有

$$V=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r}(2\sqrt{r^2-\rho^2}-r)\rho d\rho=\int_0^{2\pi}\tfrac{5}{24}r^3 d\theta=\frac{5}{12}r^3\pi\ .$$

(2) V 由 $z\ge x^2+y^2, y\ge x^2, z\le 2$ 所确定.

解： $V=\iint\limits_D(2-x^2-y^2)dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}(2-x^2-y^2)dy$

$=2\int_0^1[\frac{2}{3}(2-x^2)\sqrt{2-x^2}-x^2(2-x^2)+\frac{1}{3}x^6]dx=\frac{\pi}{2}+\frac{52}{105}$.

(3) V 是由坐标平面及 $x=2,y=3,x+y+z=4$ 所围成的角柱体 $(z=0)$.

解： $V=\iint\limits_D(4-x-y)dxdy=\int_0^2dy\int_0^2(4-x-y)dx+\int_2^3dy\int_0^{4-y}(4-x-y)dx$

$=\int_0^2(6-2y)dy+\int_2^3\frac{1}{2}(4-y)^2dy=9\frac{1}{6}$.

§3 重积分的变量代换

1.用极坐标变换将 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 化为累次积分.

(1) $D:x^2+y^2\le a^2,y\ge 0$;

解： $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^a f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$.

(2) $D:a^2\le x^2+y^2\le b^2,x\ge 0$;

解： $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_a^b f(x\cos\theta,y\sin\theta)rdr$.

(3) $D:x^2+y^2\le ay,a>0$;

解： $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{a\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$.

(4) $D:0\le x\le a,0\le y\le a$;

解： $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1}f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2}f(x,y)dxdy$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a/\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a/\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$.

2.用极坐标变换计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$， $D:\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$;

解： $\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\pi}^{2\pi}r\sin rdr=-6\pi^2$.

(2) $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, D 是 $x^2+y^2\le x+y$ 的内部;

解: $\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sin\theta+\cos\theta} r(\sin\theta+\cos\theta)rdr = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin\theta+\cos\theta)^4 d\theta$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\pi} \sin^4\theta d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi}(\frac{3}{2}-2\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos 4\theta)d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

(3) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, D 由双曲线 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)(x\ge 0)$ 围成;

解: $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{a\cos\theta}} r^3 dr = \frac{a^2}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta d\theta$

$$= \frac{a^2}{8}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 4\theta)d\theta = \frac{\pi}{16}a^2$$

(4) $\iint\limits_D xdxdy$, D 由 Archimedes 螺线 $r=\theta$ 和半射线 $\theta=0,\theta=\frac{\pi}{2}$ 围成;

解: $\iint\limits_D xdxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\theta} r^2\cos\theta dr = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^3\cos\theta d\theta$

$$= \frac{1}{3}(\theta^3\sin\theta+3\theta^2\cos\theta-6\theta\sin\theta-6\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi(\frac{\pi^2}{24}-1)+2$$

(5) $\iint\limits_D xydxdy$, D 由对数螺线 $r=e^{\theta}$ 和半射线 $\theta=0,\theta=\frac{\pi}{2}$ 围成。

解: $\iint\limits_D xydxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{e^{\theta}} r^3\cos\theta\sin\theta dr = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{4\theta}\sin 2\theta d\theta = -\frac{1}{40}(e^{2\pi}+1)$

3.在下列积分中引入新变量 u,v, 将它们化为累次积分:

(1) $\int_0^2 dx\int_{1-x}^{2-x} f(x,y)dy$, 若 $u=x+y, v=x-y$;

解: $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\ne 0$$

$$\therefore \int_0^2 dx\int_{1-x}^{2-x} f(x,y)dy = \frac{1}{2}\int_1^2 du\int_{-u}^{4-u} f(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2})dv .$$

(2) $\int_a^b dx\int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)dy \quad (0<a<b, 0<\alpha<\beta)$, 若 $u=x, v=\frac{y}{x}$;

解：在变换 $u=x,v=\dfrac{y}{x}$ 下，区域 $D=\{a\le x\le b,\alpha x\le y\le \beta x\}$ 变为 $\Delta=\{a\le u\le b,\alpha\le v\le\beta\}$ 。变换的 Jacobi 行列式为

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ v & u\end{vmatrix}=u>0$$

$$\therefore \int_a^b dx\int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)dy=\int_a^b udu\int_\alpha^\beta f(u,v)dv$$

(3) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ ，其中 $D=\{(x,y)\big|\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{a},x\ge 0,y\ge 0\}$ ，若 $x=u\cos^4 v,y=u\sin^4 v;$

解：在变换 $x=u\cos^4 v,y=u\sin^4 v$ 下，区域 D 变为 $\Delta=[0,a]\times[0,\dfrac{\pi}{2}]$.变换的 Jacobi 行列式

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\cos^4 v & -4u\cos^3 v\sin v\\ \sin^4 v & 4u\sin^3 v\cos v\end{vmatrix}=4u\sin^3 v\cos^3 v\ne 0$$

于是 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=4\int_0^a udu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 v\sin^3 vf(u\cos^4 v,u\sin^4 v)dv$.

（4） $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ ，其中 $D=\{(x,y)\big|x+y\le a,x\ge 0,y\ge 0\}(a\succ 0)$ ，若 $x+y=u,y=uv$

解：在变换 $x+y=u,y=uv$ 下，区域 D 变为 $\Delta=\{0\le u\le a,0\le v\le 1\}$

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1-v & -u\\ v & u\end{vmatrix}=u$$ 仅在 $u=0,0\le v\le 1$ 上等于 0，在其他地方 $J(u,v)\ne 0$.

$$\therefore \iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^a udu\int_0^1 f(u(1-v),uv)dv$$

4.作适当的变量代换，求下列积分：

（1） $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy,\quad D$ 是由 $x^4+y^4=1$ 围成的区域；

解：作极坐标变换 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$ ，并由对称性

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=8\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)dxdy ,$$

其中 $D_1=\{(x,y):x^4+y^4\le 1,0\le x\le 1,0\le y\le x\}$ ，而

$$\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}}r^3dr=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^4\theta}{1+\tan^4\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2\theta}{1+\tan^4\theta}d\tan\theta=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1+t^2}{1+t^4}dt=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}dt=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{d(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+2}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{2}}\Big|_0^1=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$$

$$\therefore \iint_D (x^2+y^2)dxdy=\frac{\pi}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi .$$

(2) $\iint_D (x+y)dxdy$, D 由 $y=4x^2, y=9x^2, x=4y^2, x=9y^2$ 围成；

解：画出 D 的图形，根据 D 的特点，作变换 $T^{-1}: u=\frac{y^2}{x}, v=\frac{x^2}{y}$,

它把 D 一一的映设为正方形区域 $\vartriangle=[4,9]\times[4,9]$

由 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{vmatrix}=-3$，所以 $J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\frac{1}{3}$.

而 $x+y=\sqrt[3]{uv^2}+\sqrt[3]{u^2v}=\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{v}+\sqrt[3]{u})$.

$$\therefore \iint_D (x+y)dxdy=\frac{1}{3}\int_4^9 du\int_4^9(\sqrt[3]{uv^2}+\sqrt[3]{u^2v})dv$$

$$=\frac{3}{10}(9^3+4^3-108\sqrt[3]{12}-72\sqrt[3]{18})$$

$$=\frac{3}{10}(793-108\sqrt[3]{12}-72\sqrt[3]{18}) .$$

（3）$\iint_D xydxdy$, D 由 $xy=2, xy=4, y=x, y=2x$ 围成

解：作变换，$u=xy, v=\frac{y}{x}$.则在变换下，D 变为 $[2,4]\times[1,2]$，

由 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}=2\frac{y}{x}=2v$，所以 $J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{2v}$。

$$\therefore \iint_D xydxdy=\int_2^4 du\int_1^2\frac{u}{2v}dv=\int_2^4 udu\int_1^2\frac{1}{2v}dv=3\ln 2 .$$

5.利用二重积分求由下列曲面围成的立体的体积：

（1）$z=xy, x^2+y^2=a^2, z=0;$

解：$V=\iint_D xydxdy$， 其中 $D: x^2+y^2\le a^2$, 用对称性

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a r^3\cos\theta\sin\theta dr=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^a r^3dr=\frac{1}{2}a^4$$

（2）$z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2},z=0,x^2+y^2=R^2$;

解：$V=\iint\limits_D \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}dxdy,\qquad D:x^2+y^2\le R^2$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R \frac{h}{R}r^2dr=\frac{2\pi h}{R}\bullet\frac{1}{3}R^3=\frac{2}{3}\pi R^2h\ .$$

（3）球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与圆柱面 $x^2+y^2=ax(a>0)$ 的公共部分；

解：$V=2\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy,\qquad$ 其中 $D:x^2+y^2=ax$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}r\sqrt{a^2-r^2}dr=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^3(\cos^3\theta-1)d\theta$$

$$=\frac{2}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{\cos3\theta+3\cos\theta}{4})d\theta=a^3(\frac{\pi}{3}+\frac{4}{9});$$

（4）$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}(z>0)$;

解：$V=4\iint\limits_D\left[c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}-c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right]dxdy\qquad$ 其中 $D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le\frac{1}{2}(x\ge0,y\ge0)$

作变换 $x=ar\cos\theta,y=br\sin\theta$，则 D 变为 $0\le r\le\frac{\sqrt{2}}{2},0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$$J(r,\theta)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -ar\cos\theta\\ b\sin\theta & br\sin\theta\end{vmatrix}=abr$$

$$\therefore V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}c(\sqrt{1+r^2}-r)abrdr=4abc\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\sqrt{1+r^2}-r)rdr$$

$$=2\pi abc\bullet\frac{1}{6}(2-\sqrt{2})=\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})abc\ .$$

（5）$z^2=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9},2z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$;

解：显然 $V=\iint\limits_D\left[\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)\right]dxdy,D:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le4$

作广义极坐标变换 $x=2r\cos\theta,y=3r\sin\theta$，则 D 变为

$0\le r\le2,0\le\theta\le2\pi$，$J(u,v)=6r$

$$\therefore V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(r-\frac{1}{2}r^2)\cdot 6rdr=8\pi \ .$$

（6） $z=x^2+y^2, z=x+y$.

解：$V=\iint\limits_D[(x+y)-(x^2+y^2)]dxdy$， 其中 $D: x^2+y^2\le x+y$

即 $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{2}$

作广义极坐标变换 $x-\frac{1}{2}=r\cos\theta, y-\frac{1}{2}=r\sin\theta$，则 D 变为 $0\le r\le\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\le\theta\le 2\pi$

变换的 Jacobi 行列式为：$J(r,\theta)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$

$$\therefore V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\frac{1}{2}-r^2)rdr=\frac{\pi}{8}.$$

6.求曲线 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2}$ 所围的面积.

解：设曲线 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2}$ 所围的区域为 D，则面积 $|D|=\iint\limits_D d\sigma=2\iint\limits_{D_1}dxdy$，

其中 $D_1:\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2}$ 在第一象限部分.

作变换 $x=ar\cos\theta, y=br\sin\theta$，则 $J(r,\theta)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -ar\cos\theta\\ b\sin\theta & br\sin\theta\end{vmatrix}=abr$ ，

区域 D 变为 $0\le r\le\frac{\sqrt{ab}}{c}\sqrt{\sin\theta\cos\theta}, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

$$\therefore |D|=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{ab}}{c}\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}abrdr\ =ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{ab}{c^2}\sin\theta\cos\theta d\theta=\frac{a^2b^2}{2c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta=\frac{a^2b^2}{2c^2}.$$

7.用柱坐标变换计算下列三重积分：

（1） $\iiint\limits_V(x^2+y^2)^2dxdydz$, V 由曲面 $z=(x^2+y^2)^2, z=4, z=16$ 围成.

解：$\iiint\limits_V(x^2+y^2)^2dxdydz,=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_2^4dr\int_4^{16}r^5dz=16128\pi$

（2） $\iiint\limits_V(\sqrt{x^2+y^2})^3dxdydz$, V 由曲面 $x^2+y^2=9, x^2+y^2=16, z^2=x^2+y^2, z\ge 0$ 围成.

解：$\iiint\limits_V (\sqrt{x^2+y^2})^3 dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_3^4 dr \int_0^r r^4 dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_3^4 r^5 dr = 1122\frac{1}{3}\pi$.

8.用球坐标变换计算下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz, V: x^2+y^2+z^2 \le R^2;$

解：原式$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R (\rho\cos\theta\sin\varphi + \rho\sin\theta\sin\varphi + \rho\cos\varphi)\rho^2 \sin\varphi d\rho$

$$=\frac{R^2}{4}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} (\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\sin\varphi + \cos\varphi) d\varphi$$

$$=\frac{\pi}{8}R^4 \int_0^{2\pi} (\cos\theta + \sin\theta) d\theta = \frac{\pi}{8}R^4 \bullet 0 = 0$$

（2）$\iiint\limits_V (\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5 dxdydz$， V 由 $x^2+y^2+z^2 = 2z$ 围成

解：原式$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^5 \rho^2 \sin\varphi d\varphi = 2^6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos^8\varphi d\varphi = \frac{64}{9}\pi$

（3）$\iiint\limits_V x^2 dxdydz$， V 由 $x^2+y^2=z^2, x^2+y^2+z^2=8$ 围成.

解：原式$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} \rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho$

$$+\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} \rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho$$

$$=\frac{64}{15}(4\sqrt{2}-5)\pi + \frac{64}{15}(4\sqrt{2}-5)\pi = \frac{128}{15}(4\sqrt{2}-5)\pi$$

9.作适当的变量代换，求下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_V x^2y^2 z dxdydz$， V 由 $z=\frac{x^2+y^2}{a}, z=\frac{x^2+y^2}{b}, xy=c, xy=d, y=\alpha x, y=\beta x$

围成的立体，其中 $0<a<b, 0<c<d, 0<\alpha<\beta;$

解： 作变换 $u=\frac{x^2+y^2}{z}, v=xy, w=\frac{y}{x}$，则变换把 V 变为

$$\Delta: a \le u \le b, c \le v \le d, \alpha \le w \le \beta .$$

逆变换为 $x=\sqrt{\frac{v}{w}}, y=\sqrt{wv}, z=\frac{v(1+w^2)}{uw}$.

$$\therefore \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix} \frac{2x}{z} & \frac{2y}{z} & -\frac{x^2+y^2}{z^2} \\ y & x & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \end{vmatrix}=-\frac{x^2+y^2}{z^2}\cdot\frac{2y}{x}=-2v(1+w^2)$$

$$\therefore J(u,v,w)=-\frac{1}{2v(1+w^2)}$$

$$\iiint_V x^2y^2zdxdydz=\iiint_\Delta \frac{v^3(1+w^2)}{uw}\cdot\frac{1}{2v(1+w^2)}dudvdw$$

$$=\iiint_\Delta \frac{v^2}{2uw}dudvdw=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{du}{u}\cdot\int_c^d v^2dv\cdot\int_\alpha^\beta\frac{dw}{w}=\frac{d^3-c^3}{6}\ln\frac{b}{a}\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

(2) $\iiint\limits_V x^2y^2zdxdydz$，$V$ 同（1）；

解：变换同（1），则

$$\iiint_V x^2y^2zdxdydz=\iiint_\Delta \frac{\sqrt{v^3}}{2u\sqrt{w}}\cdot dudvdw \quad =\frac{1}{2}\int_a^b\frac{1}{u}du\int_c^d\sqrt{v^3}dv\int_\alpha^\beta\frac{1}{\sqrt{w}}dw$$

$$=\frac{2}{5}(d^2\sqrt{d}-c^2\sqrt{c})(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})\ln\frac{b}{a}$$

（3）$\iiint\limits_V y^4dxdydz$，$V$ 由 $x=az^2,x=bz^2(z>0,0<a<b),x=\alpha y,x=\beta y(0<\alpha<\beta),$

以及 $x=h(h>0)$ 围成；

解：作变换：$u=\frac{x}{z^2},v=\frac{x}{y},w=x,$　则变换把 V 变为 $\Delta: a\le u\le b,\alpha\le v\le\beta,0\le w\le h$；

$$变换后\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{z^2} & 0 & -\frac{2x}{z^3} \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-\frac{2x^2}{y^2z^3}=-\frac{2u^{\frac{3}{2}}v^2}{w^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore J(u,v,w)=-\frac{w^{\frac{3}{2}}}{2u^{\frac{3}{2}}v^2}$$

逆变换为 $x=w,y=\frac{w}{v},z=\sqrt{\frac{w}{u}}$

$$\iiint\limits_V y^4 dxdydz=\iiint\limits_\Delta \frac{w^4}{v^4}\cdot\frac{w^{\frac{3}{2}}}{2u^{\frac{3}{2}}v^2}dudvdw$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b u^{-\frac{3}{2}}du\int_\alpha^\beta v^{-6}dv\int_0^h w^{\frac{11}{2}}dw$$
$$=\frac{2h^6}{65}\sqrt{h}(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}})(\frac{1}{\alpha^5}-\frac{1}{\beta^5})$$

（4）$\iiint\limits_V e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}dxdydz$，$V$ 由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 围成；

解：作广义球坐标变换 $x=ar\cos\theta\sin\varphi, y=br\sin\theta\sin\varphi, z=cr\cos\varphi$，在变换下，曲面方程化为 $r=1$，则 V 变为：$\Delta=\{(r,\theta,\varphi)\big|0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\pi, 0\le r\le 1\}$

而 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=-abcr^2\sin\varphi$

$$\therefore\iiint\limits_V e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}dxdydz=\iiint\limits_\Delta e^r abcr^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$$

$$=abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\pi\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^2e^r dr=abc\cdot 2\pi\cdot 2(e-2)$$
$$=4\pi(e-2)abc$$

（5）$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2dz=\iiint\limits_V z^2dxdydz$，其中 V 由曲面 $x^2+y^2+z^2=2$ 及 $x^2+y^2=z^2\,(z\ge 0)$ 围成.

解：作柱坐标变换，得

$$\iiint\limits_V z^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^{\sqrt{2-r^2}}z^2dz$$

$$=2\pi\int_0^1\frac{1}{3}[(2-r^2)^{\frac{3}{2}}-r^3]dr=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}(\pi+2)$$

10．求下列各曲面所围立体之体积：

（1）$z=x^2+y^2, z=2(x^2+y^2), y=x, y=x^2$;

解：$V=\iint\limits_D(2(x^2+y^2)-(x^2+y^2))dxdy$, 其中 $D: y=x$ 与 $y=x^2$ 所交的平面区域.

$$\therefore V=\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}r^3dr=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^4\theta}{\cos^8\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^4\theta(1+\tan^2\theta)d\tan\theta=\frac{3}{35}$$

（2）$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1(x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0,a>0,b>0,c>0).$

解：$V=\iint\limits_D c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2}dxdy$, 其中 $D:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\leq 1,x\geq 0,y\geq 0$.

令 $x=ar\cos^2\varphi,y=br\sin^2\varphi$, 则 $J(r,\varphi)=abr\sin 2\varphi$

$$\therefore V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 abc\sin 2\varphi\sqrt{1-r^2}dr$$

$$=abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr=\frac{1}{3}abc\ .$$

§4　曲面面积

1. 求下列曲面的面积：

（1）$z=axy$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=a^2$ 内的部分；

解：$S=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\iint\limits_D\sqrt{1+a^2(x^2+y^2)}dxdy,D:x^2+y^2\leq a^2$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{1+a^2r^2}\cdot rdr=\frac{2\pi}{3a}\left(1+a^4\right)^{\frac{3}{2}}$$

（2）锥面 $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$ 与平面 $x+y+z=2a(a>0)$ 所界部分的表面；

解： 锥面与平面的交线在 Oxy 平面上的射影为：

$$3(x^2+y^2)=(2a-x-y)^2，\text{即} x^2+y^2-xy+2a(x+y)=2a^2$$

作转轴变换 $x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$，则射影方程变为 $\frac{\left(x'+\frac{4a}{\sqrt{2}}\right)^2}{12a^2}+\frac{y'^2}{4a^2}=1$

这是以 $2\sqrt{3}a,2a$ 为两个半轴的椭圆，因而其面积为 $\pi\cdot(2\sqrt{3}a)(2a)=4\sqrt{3}\pi a^2$。锥面与平面所截部分的表面由截面和截出的锥面两部分组成.对于 $z=2a-x-y,z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ ，分别有：

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{3} \qquad \text{与} \quad \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=2$$

于是，物体的表面积 $S=\iint\limits_D\sqrt{3}dxdy+\iint\limits_D 2dxdy$， D:曲线 $x^2+y^2-xy+2a(x+y)=2a^2$ 所围平面区域，即椭圆域.

$$\therefore S=\iint\limits_D(2+\sqrt{3})dxdy=(2+\sqrt{3})\left|D\right|=(2+\sqrt{3})\cdot 4\sqrt{3}\pi a^2=4\pi(3+2\sqrt{3})a^2.$$

（3）锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所截部分；

解：锥面与柱面交线在 Oxy 平面上的射影为 $x^2+y^2=2x$，故由

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}$$

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\iint\limits_D\sqrt{2}dxdy, \quad (D:x^2+y^2\le 2x)$$

$$=\sqrt{2}\left|D\right|=\sqrt{2}\pi\ .$$

(4)曲面 $z=\sqrt{2xy}$ 被平面 $x+y=1,x=1$ 及 $y=1$ 所截下的部分.

解：$z_x=\frac{y}{\sqrt{2xy}},z_y=\frac{x}{\sqrt{2xy}},\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{2xy}}=\frac{x+y}{\sqrt{2xy}}$

$\therefore S=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\iint\limits_D\frac{x+y}{\sqrt{2xy}}dxdy$， D:由 $x+y=1,x=1$ 及 $y=1$ 三条平面直线围成的区域.

因此 $S=\int_0^1dx\int_{1-x}^1\frac{x+y}{\sqrt{2xy}}dy=\frac{\sqrt{2}}{8}(16-5\pi)$

2．求螺旋面 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=h\varphi(0<r<a, 0<\varphi<2\pi)$ 的面积。

解：$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\varphi, \frac{\partial x}{\partial\varphi}=-r\sin\varphi, \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\varphi, \frac{\partial y}{\partial\varphi}=r\cos\varphi, \frac{\partial z}{\partial r}=0, \frac{\partial z}{\partial\varphi}=h$

$\therefore E=|r_u|^2=\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2=1$，$G=|r_v|^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=r^2+h^2$，

$$F=(r_u\cdot r_v)=\frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial y}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0$$

$$S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}drd\varphi=\iint_D\sqrt{r^2+h^2}drd\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\sqrt{r^2+h^2}dr=\pi\left(a\sqrt{r^2+h^2}+h^2\ln\left(a+\sqrt{a^2+h^2}\right)-h^2\ln h\right)$$

3．求环面 $x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi, y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi, z=a\sin\psi(0<a\le b)$ 被两条经线 $\varphi=\varphi_1, \varphi=\varphi_2$，和两条纬线 $\psi=\psi_1, \psi=\psi_2$ 所围成部分的面积，并求出整个环面的面积.

解：$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-(b+a\cos\psi)\sin\varphi,\quad \frac{\partial x}{\partial\psi}=-a\sin\psi\cos\varphi,\quad \frac{\partial y}{\partial\varphi}=(b+a\cos\psi)\cos\varphi,$

$\frac{\partial y}{\partial\psi}=-a\sin\psi\sin\varphi,\quad \frac{\partial z}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{\partial y}{\partial\psi}=a\cos\psi$

$$\therefore E=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=(b+a\cos\psi)^2, G=\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2=a^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\psi}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\psi}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\psi}=0$$

$$\therefore\sqrt{EG-F^2}=a(b+a\cos\psi)$$

于是 $S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{\psi_1}^{\psi_2}a(b+a\cos\psi)d\psi=a(\varphi_2-\varphi_1)[b(\psi_2-\psi_1)+a(\sin\psi_2-\sin\psi_1)]$

整个环面的面积为 $\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\pi}^{\pi}a(b+a\cos\psi)d\psi=4\pi^2ab$.

§5 重积分的物理应用

1． 求下列均匀密度的平面薄板的质心.

（1）求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1, y\ge 0$；

解：由对称性，质心为$(0,\overline{y})$，设密度为ρ（＝常数）

$$\text{而}\iint_D \rho dxdy=\rho\left|D\right|=\rho.\frac{\pi}{2}ab=\frac{\pi}{2}\rho ab$$

$$\iint_D y\rho dxdy=\rho\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 br\sin\theta\bullet abrdr=\frac{2}{3}ab^2\rho$$

$$\therefore\overline{y}=\frac{\frac{2}{3}ab^2\rho}{\frac{\pi}{2}ab\rho}=\frac{4}{3\pi}\qquad\text{即质心}(0,\frac{4}{3\pi});$$

（2）高为 h，底分别为 a 和 b 的等腰梯形；

解：以两底重点直线为 y 轴正向，以其中一底中点为原点，该底边为 x 轴建立直角坐标系，由对称性，质心为$(0,\overline{y})$

$$\text{而}\iint_D \rho dxdy=\frac{1}{2}\rho h(a+b)$$

$$\iint_D y\rho dxdy=\rho\int_0^h ydy\int_{\frac{a-b}{2h}y-\frac{a}{2}}^{\frac{b-a}{2h}y+\frac{a}{2}}xdx=\frac{a+2b}{b}h^2\rho$$

$$\therefore\overline{y}=\frac{\frac{a+2b}{b}h^2\rho}{\frac{1}{2}(a+b)h\rho}=\frac{a+2b}{3(a+b)}h$$

（3）$r=a(1+\cos\varphi)(0\le\varphi\le\pi)$所界的薄板.

解：由对称性，质心为$(\overline{x},0)$

$$\iint_D \rho dxdy=2\rho\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)}rd\varphi=\frac{3}{2}\pi a^2\rho$$

$$\iint_D x\rho dxdy=2\rho\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)}r^2\cos\varphi d\varphi=\frac{5}{4}\pi a^3\rho$$

$$\therefore\overline{x}=\frac{\frac{5}{4}\pi a^3b}{\frac{3}{2}\pi a^2b}=\frac{5}{6}a\quad\text{即质心为}(\frac{5}{6}a,0)$$

（4）$ay=x^2,x+y=2a(a>0)$所界的薄板。

解：设质心坐标为$(\overline{x},\overline{y})$，则由

$$\begin{cases} ay = x^2 \\ x + y = 2a \end{cases}$$ 解出交点 (a, a)，$(-2a, 4a)$

而 $$\iint_D \rho dxdy = \rho\int_{-2a}^{a} dx\int_{x^2/a}^{2a-x} dy = \frac{9}{2}a^2\rho$$

$$\iint_D \rho xdxdy = \rho\int_{-2a}^{a} xdx\int_{x^2/a}^{2a-x} dy = -\frac{9}{4}a^3\rho$$

$$\iint_D \rho ydxdy = \rho\int_{-2a}^{a} dx\int_{x^2/a}^{2a-x} ydy = \frac{36}{5}a^3\rho$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{-\frac{9}{4}a^3\rho}{\frac{9}{2}a^2\rho} = -\frac{1}{2}a \qquad \bar{y} = \frac{\frac{36}{5}a^3\rho}{\frac{9}{2}a^2\rho} = \frac{8}{5}a$$

即质心为 $(-\frac{a}{2}, \frac{8}{5}a)$.

2．求下列密度均匀物体的质心，（设体密度为 ρ ）

（1） $z \le 1 - x^2 - y^2, z \ge 0$ ；

解：由对称性，质心坐标为 $(0, 0, \bar{z})$，

而 $$\iiint_V \rho dxdydz = \rho|V| = \frac{2}{3}\pi\rho$$

$$\iiint_V \rho zdxdydz = \rho\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^1 r\cos\varphi \bullet r^2\sin\varphi dr = \frac{1}{4}\pi\rho$$

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{4}\pi\rho}{\frac{2}{3}\pi\rho} = \frac{3}{8}$$

即质心坐标为 $(0, 0, \frac{3}{8})$.

（2）由坐标系平面与 $x + 2y - z = 1$ 所围的四面体；

解： $$\iiint_V \rho dxdydz = \rho|V| = \frac{1}{12}\rho$$

$$\iiint_V \rho xdxdydz = \rho\int_0^1 xdx\int_0^{\frac{1-x}{2}} dy\int_{x+2y-z}^{0} dz = \frac{1}{48}\rho$$

$$\iiint\limits_V \rho y dxdydz = \rho\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1-x}{2}} ydy\int_{x+2y-z}^0 dz = \frac{1}{96}\rho$$

$$\iiint\limits_V \rho z dxdydz = \rho\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1-x}{2}} dy\int_{x+2y-z}^0 zdz = -\frac{1}{48}\rho$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\frac{1}{48}\rho}{\frac{1}{12}\rho} = \frac{1}{4}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{96}\rho}{\frac{1}{12}\rho} = \frac{1}{8}, \quad \bar{z} = \frac{-\frac{1}{48}\rho}{\frac{1}{12}\rho} = -\frac{1}{4}$$

即质心坐标为$(\frac{1}{4},\frac{1}{8},-\frac{1}{4})$.

（3）$z^2 = x^2 + y^2$，$x + y = a$，$x = 0, y = 0, z = 0$围成的立体；

解：$$\iiint\limits_V \rho dxdydz = \rho\int_0^a dx\int_0^{a-x} dy\int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{1}{6}a^4\rho$$

$$\iiint\limits_V \rho x dxdydz = \rho\int_0^a xdx\int_0^{a-x} dy\int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{1}{15}a^5\rho$$

$$\iiint\limits_V \rho y dxdydz = \rho\int_0^a dx\int_0^{a-x} ydy\int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{1}{15}a^5\rho$$

$$\iiint\limits_V \rho z dxdydz = \rho\int_0^a dx\int_0^{a-x} dy\int_0^{x^2+y^2} zdz = \frac{7}{90}a^6\rho$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\frac{1}{15}a^5\rho}{\frac{1}{6}a^4\rho} = \frac{2}{5}a, \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{15}a^5\rho}{\frac{1}{6}a^4\rho} = \frac{2}{5}a, \quad \bar{z} = \frac{\frac{7}{90}a^6\rho}{\frac{1}{6}a^4\rho} = \frac{7}{15}a^2$$

所以质心坐标为$(\frac{2}{5}a,\frac{2}{5}a,\frac{7}{15}a)$.

（4）$z^2 = x^2 + y^2 (z \geq 0)$和平面$z = h$围成的立体；

解：由对称性：$\bar{x} = \bar{y} = 0$

$$\iiint\limits_V \rho dxdydz = \rho|V| = \frac{1}{3}\pi h^3\rho$$

$$\iiint\limits_V \rho z dxdydz = \rho\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^h rdr\int_r^h zdz = \frac{1}{4}\pi h^3\rho$$

$$\therefore \bar{z}=\frac{\frac{1}{4}\pi h^4\rho}{\frac{1}{3}\pi h^3\rho}=\frac{3}{4}h$$

质心坐标为$(0,0,\frac{3}{4}h)$.

（5）半球壳$a^2\le x^2+y^2+z^2\le b^2, z\ge 0$

解： 由对称性：$\bar{x}=\bar{y}=0$

$$\iiint\limits_V \rho dxdydz=\rho|V|=\frac{2}{3}\pi(b^3-a^3)\rho$$

$$\iiint\limits_V \rho zdxdydz=\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_a^b r^3dr=\frac{1}{2}\pi(b^4-a^4)\rho$$

$$\therefore z=\frac{3}{4}\frac{(b^4-a^4)}{(b^3-a^3)}$$

质心坐标为$\left(0,0,\dfrac{3(b^4-a^4)}{4(b^3-a^3)}\right)$.

3．求下列密度均匀的平面薄板的转动惯量

（1）边长为 a 和 b，且夹角为φ得平行四边形，关于底边 b 得转动惯量；

解：以一个顶点为坐标原点，底边b为x轴建立坐标系，设密度为常数ρ，则要求得就是该平行四边形薄板对x轴的转动惯量I_x.

任给面积微元$d\sigma$，台灯x轴的转动惯量为$dI_x=\rho y^2d\sigma$

因此D对$y=0$的转动惯量为$I_x=\iint\limits_D \rho y^2d\sigma=\rho\int_0^{a\sin\varphi}y^2dy\int_{\cot\varphi\cdot y}^{\cot\varphi\cdot y+b}dx=\frac{1}{3}a^3b\rho\sin^3\varphi$

(2) $y=x^2, y=1$所围平面图形关于直线$y=-1$的转动惯量.

解：任给面积微元$d\sigma$,它对$y=-1$的转动惯量为$dI=\rho(y+1)^2d\sigma$

因此平面图形D关于$y=-1$的转动惯量为

$$I=\iint\limits_D \rho(y+1)^2d\sigma=\rho\int_0^1(y+1)^2dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}dx=\frac{368}{105}\rho.$$

4.求由下列曲面所界均匀体的转动惯量；

(1) $z=x^2+y^2, x+y=\pm1, x-y=\pm1, z=0$ 关于 z 轴的转动惯量;

解 ： $I_z=\iiint\limits_V \rho(x^2+y^2)dxdydz=\rho\left(\int_{-1}^{0}dx\int_{-(1+x)}^{1+x}dy\int_0^{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)dz+\int_0^1 dx\int_{-(1-x)}^{1-x}dy\int_0^{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)dz\right)$

$=\dfrac{14}{45}\rho$.

(2) 长方体关于它的一棱的转动惯量;

解：以长方体的一顶点为坐标原点，三条相邻坐标轴建立直角坐标系，把长方体放置在第一卦限，设三条棱长 a,b,c. 则关于长为 a 的棱的转动惯量(x 轴)为

$$I_x=\iiint\limits_V \rho(y^2+z^2)dxdydz=\rho\int_0^c dz\int_0^b (y^2+z^2)dy\int_0^a dx$$

$$=\frac{1}{3}abc(b^2+c^2)\rho.$$

(3) 圆筒 $a^2\le x^2+y^2\le b^2$，$-h\le y\le h$ 关于 x 轴和 z 轴的转动惯量。

解： $I_x=\iiint\limits_V \rho(y^2+z^2)dxdydz=\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b rdr\int_{-h}^{h}(r^2\sin^2\theta+z^2)dz$

$$=\frac{\pi}{6}(b^2-a^2)h\left[3(b^2+a^2)+4h^2\right]\rho$$

$$I_z=\iiint\limits_V \rho(x^2+y^2)dxdydz=\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b r^3dr\int_{-h}^{h}dz$$

$$=\pi h(b^4-a^4)\rho$$

5. 设球体 $x^2+y^2+z^2\le 2x$ 上各点的密度等于该点到坐标原点的距离，求这球的质量。

解： $m=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz$， V: $x^2+y^2+z^2\le 2x$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2cos\theta\sin\varphi}\rho^3 sin\varphi d\rho$ $\qquad (\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$

$=\dfrac{7}{5}\pi$

6. 求均匀薄片 $x^2+y^2\le R^2, z=0$ 对 z 轴上一点 $(0,0,c)$ $(c>0)$ 处单位质点的引力。

解：由对称性，$F_x=F_y=0$

$$F_z=\iint\limits_D k\frac{\rho c}{\left(x^2+y^2+c^2\right)^{\frac{3}{2}}}dxdy$$

$$=k\rho c\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^k\frac{rdr}{\left(r^2+a^2\right)^{3/2}}$$

$$=2\pi kc\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{\sqrt{R^2+c^2}}\right)\rho$$

其中 ρ 为均匀薄片的密度，因此引力大小为 $2\pi kc\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{\sqrt{R^2+c^2}}\right)\rho$，方向向下。（k 为引力常数）

7．求均匀柱体 $x^2+y^2\le a^2, 0\le z\le h$ 对于 $(0,0,c)\quad(c>h)$ 处单位质点的引力。

解：由对称性，$F_x=F_y=0$

$F_z=\iiint\limits_V k\frac{-z+c}{r^3}\rho dxdydz$，$\rho$ 为密度，$r=\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}$，做极坐标变换，

有

$$F_z=k\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\alpha d\alpha\int_0^h\frac{-z+c}{\left(\sqrt{\alpha^2+(z-c)^2}\right)^3}dz$$

$$=2\pi k\left(\sqrt{a^2+(c-h)^2}+h-\sqrt{a^2+c^2}\right)\rho$$

因此引力大小为 $2\pi k\left(\sqrt{a^2+(c-h)^2}+h-\sqrt{a^2+c^2}\right)\rho$，方向向下。