Approximation linéaire et quadratique

Mme F. Zohra ABDESSAMEUD

29 mars 2017

Rappel: formule de Taylor en une variable et approximation

Soit f une fonction à une variable dérivable $(n+1)$ fois au voisinage d'un point a:

1. Polynôme de Taylor de degré 1

   $$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

   Approximation **linéaire** près de a

   $$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

2. Polynôme de Taylor de degré 2

   $$Q(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

   Approximation **quadratique** près de a

   $$f(x) \approx Q(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

Formule de Taylor pour une fonction à 2 variables

Formule de Taylor (2 variables)

Soit f une fonction à 2 variables continue ainsi que ses dérivées partielles d'ordre $(n+1)$.

$$f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

$$+\frac{1}{2!}f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f_{xy}(x-a)(y-b) + \frac{1}{2!}f_{yy}(a,b)(y-b)^2$$

$+\cdots+R_n(x,y)$ *où* $R_n(x,y)$ *désigne le reste de Taylor.*

Polynôme de Taylor de degré 1

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Polynôme de Taylor de degré 2

$$Q(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

$$+\frac{1}{2!}f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f_{xy}(x-a)(y-b) + \frac{1}{2!}f_{yy}(a,b)(y-b)^2$$

Approximation linéaire d'une fonction à 2 variables

Soit f une fonction à 2 variables continue ainsi que ses dérivées partielles d'ordre 2.
On note $B_d(a,b) = \{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = d\}$

Approximation linéaire

Pour $(x,y) \in B_d(a,b)$*, près de* (a,b)*:*

$$f(x,y) \approx L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

L'erreur d'approximation dans ce cas est $E_L = f(x,y) - L(x,y)$ *satisfait*

$$|E_L(x,y)| \leq M_L d^2$$

où

$$M_L \geq \max_{(x,y)\in B_d(a,b)} \{|f_{xx}(x,y), |f_{xy}(x,y)|, |f_{yy}(x,y)|\}$$

Exemple

Soit $f(x, y) = e^{x+y}$ définie sur le domaine
$D = \{(x, y) \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$.

1) f est-elle linéaire? Justifier.

2) Trouver une fonction linéaire qui approxime $f(x, y)$ près de $(0, 1)$.

3) Donner une borne d'erreur $|E_L(x, y)|$ sur D.

Rép:
1) Non

2) $L(x, y) = e(x + y)$

3) $|E_L(x, y)| \leq 4e^{1+2\sqrt{2}}$

Approximation quadratique d'une fonction à 2 variables

Soit f une fonction à 2 variables continue ainsi que ses dérivées partielles d'ordre 3.

Approximation quadratique

Pour $(x, y) \in B_d(a, b)$*, près de* (a, b)*:*

$$f(x, y) \approx Q(x, y)$$

$$\begin{aligned} f(x, y) \approx L(x, y) &+ \frac{1}{2!} f_{xx}(a, b)(x-a)^2 \\ &+ f_{xy}(x-a)(y-b) + \frac{1}{2!} f_{yy}(a, b)(y-b)^2 \end{aligned}$$

L'erreur d'approximation dans ce cas est $E_Q = f(x, y) - Q(x, y)$ *satisfait*

$$|E_Q(x, y)| \leq \frac{\sqrt{2}}{3} M_Q d^3$$

où $M_Q \geq \max_{(x,y) \in B_d(a,b)} \{|f_{xxx}(x, y), |f_{xxy}(x, y)|, |f_{xyy}(x, y)|, |f_{yyy}(x, y)|\}$.

Exemple 1

Soit $f(x, y) = e^{x+y}$ définie sur le domaine
$D = \{(x, y) \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$.

1) Trouver une fonction quadratique qui approxime $f(x, y)$ près de $(0, 1)$.

2) Donner une borne d'erreur $|E_Q(x, y)|$ sur D.

Rép:

1) $Q(x, y) = \frac{1}{2}e(x^2 + 2xy + y^2 + 1)$

2) $|E_Q(x, y)| \leq 4\sqrt{3}e^{1+2\sqrt{2}}$