Simplex & sýningastúlkur

Inngangur að aðgerðagreiningu

HELGA INGIMUNDARDÓTTIR

GitHub $\boxed{\mathcal{GH}}$

Um höfund

Helga Ingimundardóttir er doktorsnemi í tölvunarfræði við Háskóla Íslands. Helga kláraði B.Sc. gráðu í stærðfræði með hagnýttri tölvunarfræði frá Háskóla Íslands vorið 2008, jafnframt kláraði hún M.Sc. gráðu í reikniverkfræði frá sama skóla vorið 2010.

Helga hefur kennt aðgerðagreiningu við Háskóla Íslands samhliða doktorsnáminu sínu undanfarin tvö vormisseri. Kennslubók þessi er unnin út frá fyrirlestrarnótum þeirra námskeiða og samstarfsverkefni við Matís, þar sem nemendur fengu tækifæri til að kynnast raunhæfum reikniverkefnum og hvernig mætti stilla þeim upp sem línulegum bestunarverkefnum og beita aðferðafræði úr aðgerðagreiningu við lausn þeirra.

Kennslusýn Helgu er leiðsagnamiðað nám, þar sem áhersla er lögð á að nemendur fái að reyna við raunhæf verkefni og kynna sínar eigin lausnir.

Efnisyfirlit

Kafli 1

Inngangur

Aðgerðagreining eða aðgerðarannsóknir beinast að því að ákvarða hagkvæmustu leið til að framkvæma eitthvað innan fyrirtækja eða stofnana. Iðnaðarverkfræðingar fást oft slík rekstrar tengd verkefni, en aðgerðagreining takmarkast þó engan vegin við slík verkefni.

Oft er um að ræða ákvarðanatöku þar sem flókin viðfangsefni eru sett fram sem bestunarverkefni. Lausn upphaflega verkefnisins felst þá í að finna hámark/lágmark á tilteknu falli, svokallað **markfall**.

Aðgerðagreining fellur undir hagnýta stærðfræði og samtvinnar m.a. tölfræði, líkindafræði, tölvunarfræði, ákvarðanafræði, biðraðafræði, leikjafræði, netafræði, hermun og bestun. Áherslan í þessari bók, verður mest lögð á líkanagerð og bestun.

Aðgerðagreining eins og hún er stunduð í dag má rekja aftur til seinni heimstyrjaldarinnar þegar breskir og bandarískir vísindamenn voru fengnir til að finna hvernig ráðstafa mátti takmörkuðum auðlindum á hagkvæman máta.

1.1 Nokkur dæmi um bestunarverkefni

Rekstur Hámarka hagnað fyrirtækja (lágmarka skuldir?), hámarka afköst framleiðslulína, lágmarka kostnað við vörudreifingu (t.d. útkeyrslu og lagerhald).

Landbúnaður Hámarka verðmæti uppskeru m.t.t. takmarkana á landrými, lágmarka kostnað við fóðurgjöf (t.d. kjúklinga eða svína).

Byggingarverkfræði Lágmarka þyngd mannvirkja (t.d. háspennumöstur) sem uppfylla jafnframt hönnunarkröfur.

Umhverfisverkfræði Koma mengun undir viðmiðunarmörk en lágmarka jafnframt kostnað við þær framkvæmdir. Hámarka hagnað af endurvinnslu.

Hagfræði Hámarka þjóðarframleiðslu, taka þarf tillit til takmarkaðs vinnuafls, atvinnuleysis ofl. (Sjá t.d. Leontif)

Fjarskiptaverkfræði Bestun á úthlutun tíðnisviða í símkerfum.

Læknisfræði Lágmarka skaða heilbrigðra líffæra í geislameðferð við krabbameini.

Fjármálaverkfræði Val á hlutabréfum, lánastýring.

Athugasemd. Sjá fleiri tilvik um beitingu aðgerðagreiningar í töflu á bls. 4 í kennslubók.

1.2 Ferli

1. Skilgreining verkefnis og gagnasöfnun.

2. Stærðfræðilegt líkan útbúið sem fangar kjarna viðfangsefnisins.

3. Tölvuforrit þróað til að vinna með líkanið.
4. Prófun (sannreyning) líkans. Líkanið endurbætt ef nauðsyn krefur.
5. Líkanið tekið í notkun – yfirleitt í formi forrits.

Kafli 2

Líkansmíð

Stærðfræðilíkan: Líkir eftir þeim þáttum verkefnisins sem mestu máli skipta.

2.1 Ákvarðanataka

1. Hvaða ákvarðanir þarf að taka?
2. Hverjir eru valmöguleikarnir?
3. Hver er árangurinn (ávinningurinn)?
4. Hver eru skilyrðin fyrir góða ákvarðanatöku?
5. Hvaða þættir hafa áhrif á ákvörðunartökuna?
6. Hvernig getum við fullvissað okkur að hafa tekið rétta ákvörðun?

Dæmi 2.1 (Gamalt prófdæmi) Áður en bjór var leyfður á Íslandi var um tíma framleitt og selt svonefnt bjórlíki. Hugsum okkur að sá tími renni upp aftur og Ölgerðin þurfi að búa til bjórlíki með því að blanda saman pilsner (2.25% alkóhól, kostar 100 kr. á lítra), vodka (40% alkóhól, kostar 2000 kr. á lítra), brandíi (gefur gott bragð, 40% alkóhól, kostar 3000 kr. á lítra) og maltöli (gefur bragð og lit, 1.5% alkóhól, kostar 120 kr. á lítra). Til að líkið verði gott þarf 3-5% að vera malt, a.m.k. 2% brandí, í mesta lagi 7% vodki og sterkt vín mest vera 10% samtals (annars kemur spírabragð).

1. Setjið fram línulegt bestunarverkefni fyrir uppskrift að sem sterkustu (góðu) bjórlíki.

2. Setjið fram slíkt verkefni fyrir uppskrift að sem ódýrustu (en samt góðu) 4% bjórlíki.

Lausn: **Ákvarðanabreytur** P, V, B, M (gefið í lítrum).

Styrkur $2.25P + 40V + 40B + 1.5M$ (gefið í %).

Skorður $P \geq 0, V \geq 0, B \geq 0, M \geq 0$

Hlutfall $P + V + B + M = 1$
Malt $\frac{3}{100} \leq M \leq \frac{5}{100}$
Brandí $B \geq \frac{2}{100}$
Vodki $V \leq \frac{7}{100}$
Sterkt $V + B \leq \frac{10}{100}$

1. Markfall fyrir sterkasta og góðu bjórlíki er,

$$\max_{P,V,B,M} \quad styrkur$$

2. Markfall fyrir ódýrasta og 4% bjórlíki er,

$$\min_{P,V,B,M} \quad 100P + 2000V + 3000B + 120M$$

að viðbættri skorðu $styrkur = 4$

Besta lausn reynist vera:

	1.	2.	
P	0.87	0.923	
V	0.07	0.027	
B	0.03	0.02	
M	0.03	0.03	
styrkur	6	4	(%)
kostn.	242.3	209.8	$(kr./\ell)$

2.2 Stærðfræðilegt bestunarlíkan af verkefni

2.2.1 Helstu þættir

- Ákvörðunarbreytur (e. decision variables)
- Markfall (e. objective function)
- Skorður (e. constraints)

Víðtæka gagnasöfnun þarf til að meta stika (e. parameters) líkansins. Svokölluð næmnigreining er notuð til að meta áhrif breytinga í einstökum stikum líkansins. Ef í ljós kemur að líkanið er tiltölulega næmt fyrir gildum á einstökum stikum, þarf að vanda sérstaklega til við matið á þeim. Slembin bestun (e. stochastic programming) tekur á óvissu í stikum líkansins með formlegum hætti.

2.2.2 Tegundir líkana

- Ákvörðunarbreytur geta verið samfelldar (e. continuous), strjálar (e. discrete) eða hvoru tveggja.
- Markfall getur verið með eitt eða fleiri há-/lággildi.
- Skorður geta verið línulegar eða ólínulegar.

Aðaláherslan í námskeiðinu er á líkön með samfelldum breytum, línulegu markfalli og skorðum (línuleg bestun). Við munum að auki skoða svonefnda heiltölubestun (ákvarðanabreytur taka gildin $0, 1, 2, \ldots$).

Í grófum dráttum flokkast bestunarverkefni í eftirfarandi undirflokka:

- Samfelldar ákvarðanabreytur (e. continuous)
  - Engar skorður (e. unconstrained)

    * Ólínulegar jöfnur
    * Aðferð minnstu fervika (e. least squares)
    * Víðvær bestun (e. global)
    * Ekki diffranleg (e. non-differentiable)
  - Skorðað (e. constrained)
    * **Línuleg bestun** (e. linear programming)
    * Hálfákveðin bestun (e. semidefinite programming)
    * Ólínulegar skorður (e. nonlinearly constrained)
    * Bundnar ákvarðanabreytur (e. bound constraints)
    * **Netbestun**
    * Slembibestun (e. stochastic programming)

- Strjálar ákvarðanabreytur (e. discrete)
  - **Heiltölubestun**
  - Slembibestun

Nemendur ættu að kannast við aðferð minnstu fervika úr Línulegri algebru (STÆ107G). Áframhaldandi námskeið í aðgerðagreiningu eru til dæmis framhaldsnámskeiðin Slembin og víðvær bestun (IÐN201F); Heiltölubestun, netlíkön og röðun (IÐN201M); og Ólínuleg bestun (REI202M).

2.3 Finna lausn út frá stærðfræðilegu líkani

Hanna þarf sérhæft reiknirit (e. algorithm) fyrir hvert stærðfræðilegt líkan sem leitar (e. search) að bestu lausn (e. optimal solution). Sem dæmi, *simplex aðferðin*:

Stigler setur fram línulegt bestunarverkefni árið 1939 þar sem hann leitast við að lágmarka kostnað við að fæða fullorðinn karlmann en jafnframt uppfylla næringarþörf (RDS). Eftir nokkra yfirlegu fann Stigler lausn sem kostar \$39.93 á ári (m.t.t. verðbólgu væri núvirðið

$561.43). Hagkvæmast er að borða blöndu af heilhveiti, þurrmjólk, káli, spínati og baunum. Alla daga!

Árið 1947 þróar George Dantzig Simplex aðferðina fyrir línuleg bestunarverkefni. Besta lausn á verkefni Stigler reynist vera $39.69 á ári (tók tvo mánuði að finna lausnina með handknúnum reiknivélum).

Dæmi 2.2 The Diet Problem: An Application of Linear Programming
http://www-neos.mcs.anl.gov/CaseStudies/dietpy/WebForms/index.html

Árið 1975 fá Leonid Kantorovich og Tjalling Koopmans Nóbels verðlaun í hagfræði “for their contribution to the theory of optimum allocation of resources” (þ.e.a.s. línulega bestun).

Dæmi 2.3 (Gamalt prófdæmi) Jón ætlar að smíða pall við húsið sitt og er búinn að mæla út að hann þurfi eftirfarandi magn af 21×95 gagnvörðu pallaefni: 104 stk. 1.20m, 12 stk. 1.55m, 63 stk. 2.35m og 86 stk. 3.15 m.

Hann ætlar að kaupa efnið í Húsasmiðjunni og þar fæst gagnvarið 21×95 í einni lengd, 3.90 m. Hve margar spýtur á hann að kaupa, og hvernig á að saga þær?

1. Hvaða ákvarðanir þarf að taka?
   (ákvörðunarbreytur $\boldsymbol{x}$)
2. Hverjir eru valmöguleikarnir?
   ($\boldsymbol{x} \in X$)
3. Hver er árangurinn (ávinningurinn?)?
   (markfall $f(\boldsymbol{x})$)
4. Hver eru skilyrðin fyrir góða ákvarðanatöku?
   ($z = \max_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$)
5. Hvaða þættir hafa áhrif á ákvörðunartökuna?
   (skorður $g_j(\boldsymbol{x}) \leq 0, j = 1, \ldots, m$)
6. Hvernig getum við fullvissað okkur að hafa tekið rétta ákvörðun?
   (rétt líkan?)

Lausn: Setjum þær upplýsingar sem okkur er gefið í töflu:

Fjöldi	Lengd
104	1.20
12	1.55
63	2.35
86	3.15

Ákvarðanabreytur eru:

x_1	fj. spýta í 3.15	x_2	fj. spýta í $2.35 + 1.55$
x_3	fj. spýta í $2.35 + 1.20$	x_4	fj. spýta í $1.55 + 1.55$
x_5	fj. spýta í $1.55 + 1.20$	x_6	fj. spýta í $1.20 + 1.20 + 1.20$

Markfallið okkar er

$$\min_{\boldsymbol{x}} z = \sum_{i=1}^{6} x_i$$

m.t.t. skorðanna

$$\begin{aligned}
x_1 &\geq 86 \\
x_2 + x_3 &\geq 63 \\
x_2 + 2x_4 + x_5 &\geq 12 \\
x_3 + x_5 + 3x_6 &\geq 104 \\
x_i &\geq 0 \quad i \in \{1, .., 6\} \\
x_i & \quad \text{heiltölur}
\end{aligned}$$

Hér er stærðfræðilegt líkan komið á vandamálið, því er síðan hægt að leysa með aðferðum síðar kynnt í námskeiðinu. Besta lausn reynist vera

$$\begin{array}{ll}
x_1^* = 86 & x_2^* = 13 \\
x_3^* = 50 & x_4^* = 0 \\
x_5^* = 0 & x_6^* = 18
\end{array}$$

með markfallsgildið $z^* = 167$.

Dæmi 2.4 (Geislameðferð við krabbameini) Jónandi geislun er notuð til þess að drepa krabbameinsfrumur. Geislun veldur einnig skaða á heilbrigðum vef. Viljum lágmarka hann. Líffæri, bein og vefir dempa og dreifa geislun.

Höfum tvær tegundir geisla. Ákvarðanabreyturnar eru skammtastærð (mæld í kílórad) á hverjum geisla.

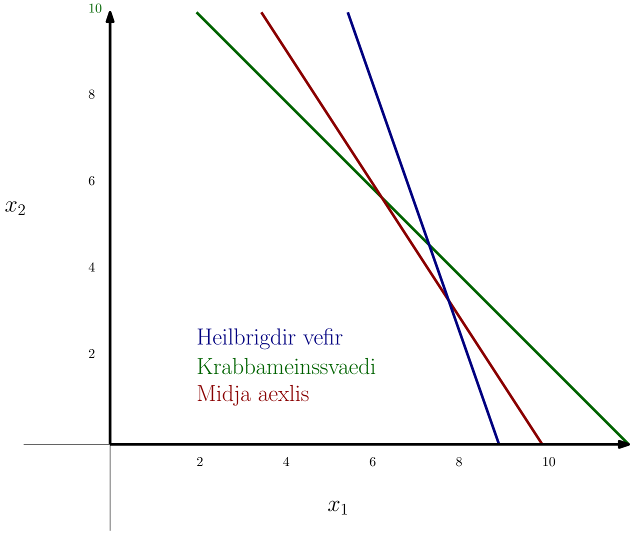
G.r.f. að gleypni svæðis er í réttu hlutfalli af styrk geisla við viðborð, þá fundust eftir ítarlegar rannsóknir og útreikninga eftirfarandi hönnunarforsendur:

	Gleypni svæðis		
	Geisli 1	Geisli 2	Geislaskammtur
Heildarmagn geislunar	0.4	0.5	lágmarka
Heilbrigðir vefir	0.3	0.1	≤ 2.7
Krabbameinssvæði	0.5	0.5	$= 6.0$
Miðja æxlis	0.6	0.4	≥ 6.0

Lausn: Línulegt bestunarlíkan er því

Heildarmagn geislunar	$\min_{x_1,x_2} z = 0.4x_1 + 0.5x_2$
Heilbrigðir vefir	$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$
Krabbameinssvæði	$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6.0$
Miðja æxlis	$0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6.0$
	$x_1, x_2 \geq 0$

Athugasemd. Þar sem aðeins eru um tvær ákvarðanabreytur um að ræða er hægt að leysa líkanið grafískt.



Mynd 2.1: Skorður vegna geislameðferðar

Dæmi 2.5 Banki nokkur vinnur að því að marka nýja útlánastefnu. Fjórar tegundir lána verða í boði:

	Tegund	Vextir	Afskrifarhlutfall
1	Lán til fyrirtækja	r_1	p_1
2	Lán til einstaklinga (neysla/yfirdráttur)	r_2	p_2
3	Húsnæðislán	r_3	p_3
4	Bílalán	r_4	p_4

Hlutfallið sem þarf að afskrifa er metið út frá fyrri reynslu, og $0 < p_i << 1$. Heildarfjármagn til ráðstöfunar er L (t.d. í krónum). Jafnframt hefur eftirfarandi hefur verið ákveðið á síðasta stjórnarfundi:

- A.m.k. 40% af fjármagninu fer til fyrirtækja.
- Húsnæðislán a.m.k. helmingur bíla og neyslulána .
- Hámark 5% heildarútlána sem þarf að afskrifa.

Ákvarða þarf hagkvæmustu ráðstöfun á fjármagni bankans.

LAUSN: Ákvarðanabreytur:

$$x_i = \text{ Fjármagn sem veitt er til lánaflokks} \quad i \in \{1,2,3,4\}$$

Markfall

$$\max_{\boldsymbol{x}} z = \underbrace{\sum_{i=1}^{4}(1-p_i)r_i x_i}_{\text{tekjur af lánum}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{4} p_i x_i}_{\text{afskriftir}}$$

því hlutfall í skilum fyrir lánaflokk i er $1 - p_i$ og vaxtatekjur þess eru $r_i x_i$.

Skorðurnar eru

Heildarráðstöfun:	$\sum_{i=1}^{4} x_i$	$\leq$	L
Fyrirtæki:	x_1	$\geq$	$0.4L$
Einstaklingar:	x_3	$\geq$	$\frac{1}{2}(x_4 + x_2)$
Hámarks afskriftir:	$\sum_{i=1}^{4} p_i x_i$	$\leq$	$0.05 \sum_{i=1}^{4} x_i$
	x_1, x_2, x_3, x_4	$\geq$	0

2.4 Hugbúnaður fyrir línulega bestun

2.4.1 Forrit sem leysa línuleg bestunarverkefni

Forrit sem leysa línuleg bestunarverkefni eru t.d.

Excel	÷ skelfilegt
Matlab	÷ rándýrt, ÷ LP föll óþæginleg í notkun fyrir stór verkefni
CPLEX	+ mögulega það öflugasta sem er í boði, ÷ rándýrt
MOSEK	+ öflugur pakki, + sanngjarnt verð
lp-solve	+ ókeypis
GLPK	+ ókeypis
gurobi	+ ókeypis stúdenta útgáfa

Fyrir Windows notendur er hægt að nota forritunarumhverfið GUSEK fyrir GLPK.

2.4.2 Líkindamál

Svonefnd **líkanamál** (e. modelling language) eru mjög gagnleg við að skilgreina stór bestunarverkefni. Dæmi um nokkur þeirra eru t.d.

MPL	+ þæginlegt notendaviðmót, ÷ selt
GAMS	+ rótgróið, ÷ selt
AMPL	+ rótgróið, ÷ selt
MATHPROG	+ einföld útgáfa af AMPL, + ókeypis

Athugasemd. Í þessu námskeiði verður stuðst við GLPK og MATHPROG

Kafli 3

Almennt línulegt bestunarverkefni

Gerum ráð fyrir að eftirfarandi sé þekkt

b_i Magn af hráefni (e. resources) með takmörkuðu framboði, til ráðstöfunar, þar sem $i \in \{1, \ldots, m\}$.

x_j Framleiðslumagn (e. activity) af afurð j, þar sem $j \in \{1, \ldots, n\}$.

c_j Framlegð af afurð j.

a_{ij} Magn af hráefni i sem þarf til þess að framleiða afurð j.

Línulegt bestunarverkefni (LP) á **stöðluðu** (e. standard) formi[1] er að hámarka

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3.1}$$

[1]Skv. Hillier og Lieberman

með tilliti til skorðanna:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i \in \{1, \ldots, m\} \tag{3.2}$$

$$x_j \geq 0 \qquad j \in \{1, \ldots, n\} \tag{3.3}$$

eða á fylkjaformi:

$$\max_{\mathbf{x}} z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \tag{3.4}$$

með tilliti til skorðanna:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \tag{3.5}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{3.6}$$

Önnur form LP verkefna eru einnig möguleg:

- Lágmörkun, $\min_{\boldsymbol{x}} z$.
- Stærra-en skorður, $a_{i1}x_1 + \cdots + 1_{in}x_n \geq b_i$.
- Jafnt-og skorður, $a_{i1}x_1 + \cdots + 1_{in}x_n = b_i$.
- Eitt eða fleiri x_j geta verið neikvæð.

Athugasemd. Ólínulegum skorðum á forminu

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} \leq b$$

má breyta í jafngildar línulegar skorður

$$x_1 \leq bx_2 + bx_3$$

eða

$$x_1 - bx_2 - bx_3 \leq 0$$

Sjá sýnidæmi bls. 51-55 í H&L.

Dæmi 3.1 (Wyndor-Glass Company) Wyndor glervöruframleiðandi ætlar að hefja framleiðslu á tveimur nýjum vörutegundum sem er hægt að framleiða þremur mismunandi verksmiðjum.

- Vara 1: Framleidd í verksmiðju 1 og 3
- Vara 2: Framleidd í verksmiðju 2 og 3

Hægt er að selja allt sem er framleitt. Eftirfarandi upplýsingar liggja fyrir:

Verksmiðja	Framleiðslutími (klst)		Tími til umráðana
	Vara 1	Vara 2	
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Framlegð	\$3000	\$5000	

Notum línulega bestun t.þ.a. ákvarða hversu mikið eigi að framleiða þannig að framlegðin sé hámörkuð.

LAUSN: Ákvarðanabreyturnar eru

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{magn af vöru 1} \\ x_2 &= \text{magn af vöru 2} \end{aligned}$$

Markfallið er

$$\max_{x_1,x_2} 3x_1 + 5x_2 \tag{3.7}$$

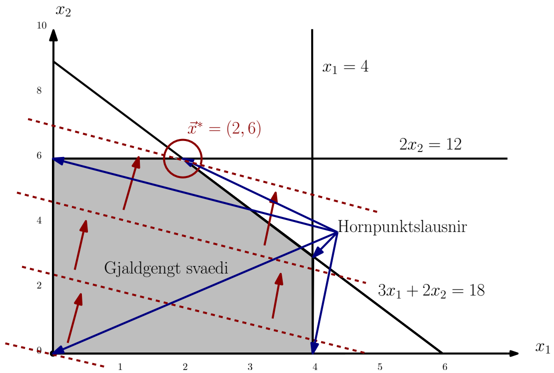
m.t.t. skorðanna

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Hér er einungis um tvær ákvarðanabreytur um að ræða, getum því fundið bestu lausn *grafískt.*

Viljum finna $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ sem hámarkar z. Fyrsta skrefið er að kanna hvaða gildi eru *gjaldgeng* (e. feasible) þ.e. uppfylla allar skorður. Vitum að vegna þess að $x_1 > 0$ og $x_2 > 0$ þá kemur 1. fjórðungur eingungis til greina. Ytri mörk skorða (e. constraint boundary) fást m.þ.a. skipta ójöfnu út fyrir jöfnu. Til dæmis

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 \quad \Rightarrow \quad 3x_1 + 2x_2 = 18$$



Mynd 3.1: Myndræn lausn á dæmi 3.1 (Wyndor-Glass Company). Gjaldgegna svæðið afmarkast af skorðum líkansins, og hæðarlínur markfallsins z eru teiknaðar sem rauðar brotalínur.

Í tveimur víddum eru þessi mörk línur.

Athugasemd. Til þess að finna hvorum megin við ytri mörkin gjaldgengar lausnir liggja, stingum við einhverjum heppilegum punkti, t.d. $(0, 0)$ inn í ójöfununa og athugum hvort hún sé uppfyllt.

Því næst er að teikna hæðarlínur fyrir einhver gildi á z. Förum samsíða hæðalínunum í hækkandi átt (hér upp og til hægri) eins langt og kemst innan gjaldgegna svæðisins, ysti leyfilegi punkturinn er besta lausn líkansins. Sjáum á mynd 3.1 að $\boldsymbol{x}^* = (2, 6)$ gefur hæsta markfallsgildi, $z^* = 36$.

3.1 Nokkur hugtök

- **Ákvarðanabreytur** (e. decision variables) $x_1, \ldots, x_n$

- **Ákvörðun eða lausn** (e. decision or solution) er tiltekin gildi á ákvarðanabreytum
- **Markfall** (e. objective function) z
- **Gjaldgeng lausn** (e. feasible solution) er lausn sem uppfyllir skorður
- **Gjaldgengt svæði** (e. feasible region) mengi gjaldgengra lausna
- **Besta lausn** (e. optimal or best solution) er gjaldgeng lausn sem hámarkar (eða lágmarkar í min verkefni) markfall z

---

Athugasemd. Stundum eru fleiri en ein jafngóðar bestu lausnir (jafnvel óendanlega margar, sbr. ef dæmi 3.1 væri með markfall samsíða skorðunni $z = 3x_1 + 2x_2$).

- **Gjaldgeng hornpunktslausn** (e. corner-point feasible solution) er lausn í hornpunkti gjaldgengs svæðis.

Lausn í hornpunkti gjaldgenga svæðisins er lausn þar sem n ójöfnuskorður eru uppfylltar með $=$ merki; þær eru sagðar **virkar** (e. active).

Setja má fram bestunarverkefni sem hafa **engar gjaldgengar lausnir** (e. infeasible).

Dæmi 3.2 Tökum dæmi 3.1 og bætum við skorðunni

$$3x_1 + 5x_2 \geq 50$$

þá eru skorðurnar sýndar myndrænt á mynd 3.2. Sjáum að við getum aldrei uppfyllt allar skorður samtímis, þ.a.l. engar gjaldgengar lausnir til á líkaninu.

Athugasemd. Þessi staða kemur stundum upp ef LP verkefni er sett ranglega fram.

Annar möguleiki er að gjaldgegna svæðið sé **ótakmarkað** (e. unbounded), þ.e.a.s. markfallið getur vaxið/minnkað hindrunarlaust.

Dæmi 3.3 Tökum aftur dæmi 3.1 og sleppum tveimur skorðum, þ.e.

$$\max_{\boldsymbol{x}} z = 3x_1 + 5x_2$$

m.t.t. sk.

$$x_1 \leq 4$$

Sjáum á mynd 3.3 að z getur orðið eins stórt og vera vill.

Athugum nú hvernig leysa má LP verkefni á skipulegan hátt. Eftirfarandi setning reynist gagnleg

Setning 3.2 *Um línuleg bestunarverkefni með eina eða fleiri gjaldgengar lausnir og lausnarsvæði sem ekki eru ótakmörkuð gildir:*

1. *Ef verkefnið hefur nákvæmlega eina bestu lausn, þá er hún í hornpunkti lausnarsvæðisins.*
2. *Ef verkefnið hefur fleiri en eina bestu lausn þá eru a.m.k. tvær þeirra gjaldgengar hornpunktslausnir.*

Fjöldi gjaldgengra hornpunktslausna er þar að auki endanlegur. Tillaga að reikniriti er því: Prófa allar gjaldgengar hornpunktslausnir.

Athugasemd. Í raunveruleikanum vex fjöldi slíkra punkta mjög hratt með fjölda ákvarðanabreyta n og skorðna m, svo þetta reynist frekar óraunhæft reiknirit fyrir stærri verkefni.

3.3 Forsendur línulegrar bestunar

Til þess að beita megi hefðbundinni línulegri bestun er gert ráð fyrir eftirfarandi forsendum:

Hlutfallsleiki (e. proportionality): Framlag afurðar j til markfallsins er í hlutfalli við gildi á x_j, þ.e.a.s. z er línulegt fall af ákvarðanabreytum. Sama gildir um vinstri hlið í skorðum.

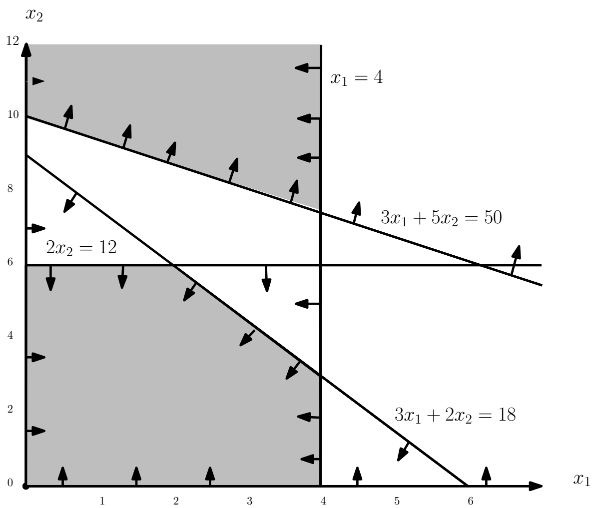
Samleggjanleiki (e. additivity): Markfall og vinstri hlið skorða er summa framlaga frá einstökum afurðum.[2]

Deilanleiki (e. divisibility): Ákvarðanabreytur geta tekið hvaða rauntölugildi sem er innan lausnarsvæðisins.[3]

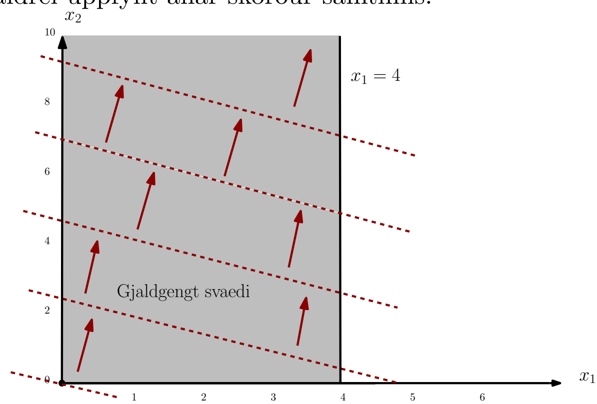
Vissa (e. certainty): Gerum ráð fyrir að gildi á *stikum* a_{ij}, b_i og c_j séu að fullu þekkt (þ.e. ekki slembnir).

[2] T.d. væri samlegðaráhrif nóg til að *brjóta* þessa forsendu, sbr. $z = 3x_1 + 5x_2 + x_1x_2$

[3] Ef þær þurfa að vera heiltölur þarf að nota heiltölubestun.



Mynd 3.2: Myndræn lausn á dæmi 3.2 (Wyndor-Glass Company). Gjaldgenga svæðið afmarkast af skorðum líkansins, sjáum að við getum aldrei uppfyllt allar skorður samtímis.



Mynd 3.3: Myndræn lausn á dæmi 3.3 (Wyndor-Glass Company). Gjaldgenga svæðið afmarkast af skorðum líkansins, sjáum að z getur orðið eins stórt og verða vill.

Kafli 4

Stöðlun verkefna

4.1 Staðlað form

Skv. H&L er staðlað form eftirfarandi:

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

m.t.t. sk.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & \qquad i \in \{1,\ldots,m\} \quad (b_i \ge 0) \\ x_j \ge 0, & \qquad j \in \{1,\ldots,n\} \end{aligned}$$

4.2 Viðskeytt form

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

m.t.t. sk.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} &= b_i \qquad & i \in \{1,\ldots,m\} \quad (b_i \geq 0) \\ x_j &\geq 0, \qquad & j \in \{1,\ldots,n+m\} \end{aligned}$$

4.3 Önnur form línulegra bestunarvandamála

4.3.1 Lágmörkunarverkefni

Markfallið er

$$\min_{\boldsymbol{x}} \quad z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

Því má breyta í jafngilt hámörkunarverkefni

$$\max_{\boldsymbol{x}} \quad z = -\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

4.3.2 Jöfnuskorður

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

Verkefni af þessu tagi er leyst með notkun **gervibreytu** $\bar{x}$ (e. artificial variable). Þessi breyta lítur alveg eins út og slakabreyta nema henni er aðeins bætt við skorður sem innihalda jafnaðarmerki. Einnig er stuðullinn $-M$, sem hér táknar mjög stóra neikvæða tölu, margfaldaður með gervibreytunni í markfalli z sem á að hámarka (til að refsa markfallinu). Aðferðin kallast **Aðferð stóra M** (e. big M method).

Dæmi 4.1 (Wyndor-Glass Company með jöfnuskorðu)

$$\max_{x_1,x_2} z = 3x_1 + 5x_2$$

m.t.t. sk.

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 18 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lausn (Viðskeytt *big M method*):

$$\max_{x_1,x_2,x_3,x_4,\bar{x}_5} z = 3x_1 + 5x_2 - M\bar{x}_5$$

m.t.t. sk.

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 \\ x_2 + x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + \bar{x}_5 &= 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

þar sem M er stór tala.

Athugasemd. Ef hægt er að tryggja að í bestu lausn viðskeytta verkefnisins sé $\bar{x}_5$ utan grunns (þ.e. $\bar{x}_5 = 0$) þá gefur lausn þess okkur lausn á upphaflegu verkefninu. Það er hægt með því að breyta markfallinu í $z = 3x_1 + 5x_2 - M\bar{x}_5$. Hér er bætt við markfallið $-M\bar{x}_5$ því um ræðir hámörkunarvandamál. Hins vegar ef um lágmörkunarvandamál væri að ræða þá væri $+M\bar{x}_5$ bætt við markfallið. Það er hægt að líta á þetta eins og sé verið að refsa markfallinu ef gervibreytan fær gildi > 0.

Byrjum á því að koma Simplex töflunni á eiginlegt form: þ.e.a.s. gervibreyta þarf að vera með 0 í grunni, þar sem allar gervibreytur byrja í grunni þarf að fjarlægja M úr efstu röð (röð markfallsins) áður en Simplex-aðferðin er beitt með hefðbundnum hætti.

grunnbr.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	HH	min-ratio test
Skref #1 $>> T$								
z	1	-3	-5	0	0	M	0	koma á eiginleg
x_3	0	1	0	1	0	0	4	
x_4	0	0	1	0	1	0	12	
$\bar{x}_5$	0	3	2	0	0	$\boxed{1}$	18	$\leftarrow$ gervibr. úr z
Skref #2 $>> T = pivot(T, 4, 6)$								
z	1	$-(3M+3)$	$-(2M+5)$	0	0	0	$-18M$	$-3M << -2M$
x_3	0	$\boxed{1}$	0	1	0	0	4	$4/1 = 4 \leftarrow$ min
x_4	0	0	1	0	1	0	12	$-$
$\bar{x}_5$	0	3	2	0	0	1	18	$18/3 = 9$
Skref #3 $>> T = pivot(T, 2, 2)$								
z	1	0	$-(2M+5)$	$3M+3$	0	0	$-6M+12$	stærsta mínusta
x_1	0	1	0	1	0	0	4	
x_4	0	0	1	0	1	0	12	$12/1 = 12$
$\bar{x}_5$	0	0	$\boxed{2}$	-3	0	1	6	$6/2 = 3 \leftarrow$ min
Skref #4 $>> T = pivot(T, 4, 3)$								
z	1	0	0	-4.5	0	$M+2$	27	stærsta mínusta
x_1	0	1	0	$\boxed{1}$	0	0	4	$4/1 = 4 \leftarrow$ min
x_4	0	0	0	1.5	1	0	9	$9/1.5 = 6$
x_2	0	0	1	-1.5	0	0	3	
Skref #5 $>> T = pivot(T, 2, 4)$								
z	1	4	0	0	0	$M+2$	45	engin mínustala
x_1	0	1	0	1	0	0	4	$\rightarrow$ besta lausn
x_3	0	-1	0	0	1	0	3	
x_2	0	1	1	0	0	0	9	

Hér má lesa úr lokatöflunni:

$$\boldsymbol{x} = (0,\ 9,\ 4,\ 3,\ 0)$$

eða

$$x_1^* = 0 \text{ og } x_2^* = 9 \qquad \text{(besta lausn)}$$

Í skrefi #1 erum við koma fylkinu yfir á eiginlegt form, því til að geta notað gervibreytuna $\bar{x}_5$ sem grunnbreytu þá þarf að losna við hana úr markfallinu. Restin af skorðunum haldast óbreyttar.

Í skrefum #2 og #3 er lausnin eingöngu gjaldgeng í breytta verkefninu, því $\bar{x}_5$ er enn í grunni, en í skrefum #4 og #5 eru lausnirnar gjaldgengar í upphaflega verkefninu.

Athugasemd.

- Ef allar gervibreytur eru jafnar núlli í bestu lausn þá höfum við fundið bestu lausn upprunalega vandamálsins.
- Ef einhverjar gervibreytur eru enn í grunni þegar komið er í bestu lausn þá er það til marks um að upphaflega verkefnið hafi enga gjaldgenga lausn (munið að “ekki grunnbreytur” eru 0 og grunnbreytur eru fundnar með því að leysa jöfnunar). Tilgangur gervibreytu er eingöngu að fá fram upphafslausn.

Athugum nú hvernig væri hægt að nota innbyggða línulega bestunarfallið í MATLAB[1], nefnilega `linprog`. Skoðum fyrst hjálpina:

```
>> help linprog
 LINPROG Linear programming.
    X = LINPROG(f,A,b) attempts to solve the linear
        programming problem:

             min f'*x    subject to:   A*x <= b
              x

    X = LINPROG(f,A,b,Aeq,beq) solves the problem above
        while additionally
    satisfying the equality constraints Aeq*x = beq.
```

[1] Ólíkt því sem gert er ráð fyrir í H&L, þá er staðlað form línulegra bestunarverkefna í MATLAB lágmörkunarvandamál – í stað hámörkunar.

Lausn (Dæmi 4.1 með matlab): Hægt er að láta Matlab styðjast við Simplex aðferðina í útreikningum sínum á eftirfarandi hátt:

```
>> % Segja linprog ad nota simplex (ma sleppa)
>> options = optimset('linprog');
>> options.LargeScale = 'off';
>> options.Simplex = 'on';
>> % Wyndor verkefnid
>>  A = [1 0;0 1];b = [4;12];c = [3 5];Aeq = [3 2];beq = 18;
>> [x,fmax]=linprog(-c',A,b,Aeq,beq,[0 0]',[],[],options)
Optimization terminated.

x =
     0.0000
     9.0000

fmax =
   -45.0000
```

Sem er eins og vænta mátti út frá niðurstöðu Stóru M aðferðarinnar.

4.3.3 Stærri-en skorður með neikvæða hægri hlið

Ef við höfum $\geq$ skorður með $b_i \leq 0$, þá margföldum í gegn með -1, og fáum jafngilda $\leq$ skorður með $b_i \geq 0$.

Dæmi 4.2

$$2x_1 + 3x_2 \geq -5 \quad \Leftrightarrow \quad -2x_1 - 3x_2 \leq 5$$

4.3.4 Stærri-en skorður með jákvæða hægri hlið

Ef við höfum $\geq$ skorður með $b_i > 0$.

Byrjum á að setja inn slakabreytu x_s eða **umframbreytu** (e. surplus variable), til dæmis:

Dæmi 4.3

$$2x_1 + 3x_2 \geq 5$$

LAUSN: Innleiðum umframbreytu á eftirfarandi hátt

$$\Rightarrow \quad 2x_1 + 3x_2 - x_s = 5 \quad \text{og} \quad x_s \geq 0$$

Það þarf meira til, því ef við byrjum í $x_1 = x_2 = 0$ (eins og venjulega) þá fæst $x_s = -5$, sem er ekki gjaldgengt. Þess vegna bætum við nú líka við gervibreytu $\bar{x}$:

$$2x_1 + 3x_2 - x_s + \bar{x} = 5$$

og $x_s, \bar{x} \geq 0$ og bætum loks $-M\bar{x}$ við markfallið (M-aðferð).

4.3.5 Neikvæð gildi á ákvarðanabreytum

Neðri mörk

Höfum neðri mörk á ákvarðanabreytu x_j, þ.e.

$$x_j \geq L$$

þar sem L er einhver neikvæður fasti.

LAUSN: Skilgreinum $x'_j = x_j - L$, þá er $x'_j \geq 0$. Stingum inn $(x'_j + L)$ alls staðar þar sem x_j kemur fyrir, þ.e. í bæði skorðum og markfalli bestunarverkefnisins.

Engin neðri mörk

Höfum engin neðri mörk á ákvarðanabreytu x_j, þ.e. $x_j \to -\infty$.

LAUSN: Skilgreinum $x_j = x_j^+ - x_j^-$ með $x_j^+ \geq 0$ og $x_j^- \geq 0$. Stingum inn $(x_j^+ - x_j^-)$ alls staðar þar sem x_j kemur fyrir, þ.e. í bæði skorðum og markfalli bestunarverkefnisins.

Dæmi 4.4

$$\max_{x_1,x_2} z = x_1 + x_2$$

m.t.t. sk.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

LAUSN: Set $x = x^+ - x^-$, og þ.a.l.

$$\max_{x^+,x^-,x_2} z = x^+ - x^- + x_2$$

m.t.t. sk.

$$\begin{aligned} x^+ - x^- + 2x_2 &\leq 3 \\ 3(x^+ - x^-) + x_2 &\leq 1 \\ -(x^+ - x^-) + x_2 &\leq 2 \\ x^+, x^-, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

4.4 Tveggja fasa Simplex

Stóra-M aðferðin finnur fyrst lausn sem er gjaldgeng í upphaflega verkefninu (allar gervibreytur = 0) og síðan tekur við leit að bestu lausn. **Tveggja fasa aðferðin** (e. two phase method) gerir það sama – án þess að innleiða stóra M. Í raun öðruvísi lýsing á stóru-M aðferðinni.

Stóra M-aðferð Lágmarka $z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + M\bar{x}_4 + M\bar{x}_6$

Tveggja fasa aðferð

Fasi 1 Lágmarka $z = \bar{x}_4 + \bar{x}_6$ þangað til $\bar{x}_4 = \bar{x}_6 = 0$ m.t.t. upprunanlegu skorðanna. Finnum bestu lausn fyrir gerviverkefnið, sem er gjaldgegn lausn fyrir raunverulega verkefnið.

Fasi 2 Lágmarka $z = 0.4x_1 + 0.5x_2$ með $\bar{x}_4 = \bar{x}_6 = 0$. Byrjum út frá bestu lausninni fengna úr Fasa 1. Getum sleppt dálkum sem tilheyra gervibreytum (þeir eru hvort eð er 0). Simplex-aðferð beitt til að leysa raunverulega verkefnið.

Athugasemd. Ef engin gjaldgeng lausn er til á upphaflega verkefninu þá er lokalausn í fasa #1 (eða stóru-M aðferðinni) með að minnsta kosti eina gervibreytu > 0.

Dæmi 4.5 (Geislameðferð – frh. af dæmi 2.4) Höfum ákvarðanabreyturnar

x_1 geislamagn fyrir geisla af tegund 1

x_2 geislamagn fyrir geisla af tegund 2

og línulega bestunarlíkan sett fram með eftirfarandi hætti:

Heildarmagn geislunar	$\min_{x_1,x_2} z = 0.4x_1 + 0.5x_2$
Heilbrigðir vefir	$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$
Krabbameinssvæði	$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6.0$
Miðja æxlis	$0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6.0$
	$x_1, x_2 \geq 0$

Lausn: Byrjum á því að setja verkefnið fram á staðlað form, þ.e. jöfnuform og max verkefni með því að bæta við slaka breytu x_3 og umframbreytu x_5:

Heildarmagn geislunar	$\max_{x_1,x_2,x_3,x_5} -z = -0.4x_1 - 0.5x_2$
Heilbrigðir vefir	$0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 = 2.7$
Krabbameinssvæði	$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6.0$
Miðja æxlis	$0.6x_1 + 0.4x_2 - x_5 = 6.0$
	$x_1, x_2, x_3, x_5 \geq 0$

Bætum því næst við gervibreytum, þeirra hlutverk er að búa til leyfilega byrjunarlausn:

$$\max_{\boldsymbol{x}} -z = -0.4x_1 - 0.5x_2 - M\bar{x}_4 - M\bar{x}_6$$

$$\begin{array}{llllllll}
0.3x_1 & +\,0.1x_2 & +\,x_3 & & & & = 2.7 \\
0.5x_1 & +\,0.5x_2 & & +\,\bar{x}_4 & & & = 6.0 \\
0.6x_1 & +\,0.4x_2 & & & -\,x_5 & +\,\bar{x}_6 & = 6.0
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, x_5, \bar{x}_6 \geq 0$$

Beitum nú tveggja fasa Simplex-aðferðinni.

Fasi #1 Hafið til hliðsjónar töflu 4.1

- Fasi #1 gengur út á að leysa

$$\min_{\boldsymbol{x}} z = \bar{x}_4 + \bar{x}_6 \quad \Leftrightarrow \quad \max_{\boldsymbol{x}} -z = -\bar{x}_4 - \bar{x}_6$$

- Sjáum á töflunni að til þess að $\bar{x}_4$ og $\bar{x}_6$ verði grunnbreytur þarf að losna við þær úr markfalli (fyrstu 2 ítranir), þ.e. koma töflunni yfir á eiginlegt form.
- Því næst tekur við hefðbundin Simplex-bestun[2].
- Fasi #1 gengur út á að finna löglega upphafslausn á raunverulega verkefninu, en hún er $\boldsymbol{x}_v = (6, 6, 0.3, 0, 0, 0)$.

Fasi #2 Hafið til hliðsjónar töflu 4.2

- Fasi #2 gengur út á að leysa

$$\max_{\boldsymbol{x}} -z = -0.4x_1 - 0.6x_2 \quad \text{með} \quad \bar{x}_4 = \bar{x}_6 = 0$$

- Fasi #2 hefst á því að breyta lokatöflu fasa #1 þannig að dálkar gervibreytanna $\bar{x}_4$ og $\bar{x}_6$ er eytt (þurfum ekki lengur á þeim að halda) og upphaflegum kostnaði $\boldsymbol{c}$ er bætt við í efstu línuna (z), sem gefur upphafstöfluna fyrir fasa #2.
- Komum nú töflunni á eiginlegt form, því x_1 og x_2 eru grunnbreytur og þ.a.l. þurfa stuðlarnir í efstu línu að vera 0.
- Því næst er Simplex-aðferðin leyst með hefðbundnum hætti.
- Að lokum lesum við úr lokatöflunni að besta lausn fyrir upprunanlega verkefnið er $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*) = (7.5, 4.5)$ með tilsvarandi markfallsgildi $z^* = 5.25$.

[2]Hefðbundin Simplex-bestun: stærsti neikvæði stuðull segir til um vendidálk og min-ratio test segir til um vendilínu.

Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	x_5	$\bar{x}_6$	HH	min-ratio test
$>> T1$								
−1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	koma á eiginlegt form
0.00	0.30	0.10	1.00	0.00	0.00	0.00	2.70	
0.00	0.50	0.50	0.00	$\boxed{1.00}$	0.00	0.00	6.00	
0.00	0.60	0.40	0.00	0.00	−1.00	1.00	6.00	ath. engir $\boldsymbol{c}$ liðir í Fasa 1
$>> T1 = pivot(T1, 3, 5)$								
−1.00	−0.50	−0.50	0.00	0.00	0.00	1.00	−6.00	koma á eiginlegt form
0.00	0.30	0.10	1.00	0.00	0.00	0.00	2.70	
0.00	0.50	0.50	0.00	1.00	0.00	0.00	6.00	
0.00	0.60	0.40	0.00	0.00	−1.00	$\boxed{1.00}$	6.00	
$>> T1 = pivot(T1, 4, 7)$								
−1.00	−1.10	−0.90	0.00	0.00	1.00	0.00	−12.00	stærsta mínustala
0.00	0.30	0.10	1.00	0.00	0.00	0.00	2.70	$2.7/0.3 = 9 \leftarrow$ min
0.00	0.50	0.50	0.00	1.00	0.00	0.00	6.00	$6/0.5 = 12$
0.00	0.60	0.40	0.00	0.00	−1.00	1.00	6.00	$6/0.6 = 10$
$>> T1 = pivot(T1, 2, 2)$								
−1.00	0.00	−0.53	3.67	0.00	1.00	0.00	−2.10	stærsta mínustala
0.00	1.00	0.33	3.33	0.00	0.00	0.00	9.00	$9/0.33 = 27$
0.00	0.00	0.33	−1.67	1.00	0.00	0.00	1.50	$1.5/0.33 = 4.5$
0.00	0.00	$\boxed{0.20}$	−2.00	0.00	−1.00	1.00	0.60	$0.6/0.20 = 3 \leftarrow$ min
$>> T1 = pivot(T1, 4, 3)$								
−1.00	0.00	0.00	−1.67	0.00	−1.67	2.67	−0.50	stærsta mínustala
0.00	1.00	0.00	6.67	0.00	1.67	−1.67	8.00	$8/6.67 = 1.2$
0.00	0.00	0.00	$\boxed{1.67}$	1.00	1.67	−1.67	0.50	$0.5/1.67 = 0.3 \leftarrow$ min
0.00	0.00	1.00	−10.00	0.00	−5.00	5.00	3.00	−
$>> T1 = pivot(T1, 3, 4)$								
−1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	−0.00	1.00	−0.00	engin mínustala
0.00	1.00	0.00	0.00	−4.00	−5.00	5.00	6.00	$\rightarrow$ besta lausn
0.00	0.00	0.00	1.00	0.60	1.00	−1.00	0.30	og $\bar{x}_4$ og $\bar{x}_6$ eru
0.00	0.00	1.00	0.00	6.00	5.00	−5.00	6.00	komin úr grunni.

Tafla 4.1: Fasi 1 fyrir dæmi 4.5

Z	x_1	x_2	x_3	x_5	HH	min-ratio test
$>> T2$						
-1.00	0.40	0.50	0.00	-0.00	-0.00	koma á eiginlegt form
0.00	$\boxed{1.00}$	0.00	0.00	-5.00	6.00	
0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	0.30	
0.00	0.00	1.00	0.00	5.00	6.00	
$>> T2 = pivot(T2, 2, 2)$						
-1.00	0.00	0.50	0.00	2.00	-2.40	koma á eiginlegt form
0.00	1.00	0.00	0.00	-5.00	6.00	
0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	0.30	
0.00	0.00	$\boxed{1.00}$	0.00	5.00	6.00	
$>> T2 = pivot(T2, 4, 3)$						
-1.00	0.00	0.00	0.00	-0.50	-5.40	stærsta mínustala
0.00	1.00	0.00	0.00	-5.00	6.00	$-$
0.00	0.00	0.00	1.00	$\boxed{1.00}$	0.30	$0.3/1 = 0.3 \leftarrow \min$
0.00	0.00	1.00	0.00	5.00	6.00	$6/5 = 1.2$
$>> T2 = pivot(T2, 3, 5)$						
-1.00	0.00	0.00	0.50	0.00	-5.25	engin mínustala
0.00	1.00	0.00	5.00	0.00	7.50	$\rightarrow$ besta lausn
0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	0.30	
0.00	0.00	1.00	-5.00	0.00	4.50	

Tafla 4.2: Fasi 2 fyrir dæmi 4.5

Kafli 5

Simplex aðferðin

5.1 Simplex-aðferðin

Simplex-aðferðin er reiknirit (e. algorithm) sem notað er til þess að leysa línuleg bestunarverkefni.

Notum Wyndor-dæmið (3.1) til þess að kynnast aðferðinni

Dæmi 5.1

$$\max_{x_1,x_2} z = 3x_1 + 5x_2$$

m.t.t. skorðanna

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Gjaldgegna svæðið er mengi allra punkta sem uppfylla skorðurnar (Sjá mynd 3.1). Ytri mörk skorðanna fást m.þ.a. skipta ójöfnu út fyrir jöfnu. Gjaldgengar hornpunktslausnir, GHL, liggja þar sem ytri mörk tveggja skorða mætast (m skorður í almenna tilfellinu).

Tvær GHL eru sagðar **aðlægar** (e. adjecent) ef þær deila saman einni skorðu ($m-1$ í almenna tilfellinu).

Notum eftirfarandi próf til þess að kanna hvort tiltekin GHL sé besta lausn (e. optimality test):

Setning 5.2 (Optimality próf) *Ef GHL-in hefur aðlægar GHL sem gefa hærra gildi á markfalli (lægra ef lágmörkun) þá er viðkomandi punktur besta lausn.*

5.2.1 Simplex-aðferðin í grófum dráttum

1. Finna einhverja GHL sem upphafslausn[1]
2. Ef viðkomandi GHL er besta lausn, þá *hætta*.
3. Færa sig yfir í betri GHL skv.
   (i) Ferðast eftir þeirri skorðu sem gefur *hröðustu aukningu* á markfalli.
   (ii) Stöðva þegar við rekumst á jaðar lausnarsvæðis.
   (iii) Finna nýjan punkt m.þ.a. finna skurðpunkt viðkomandi skorða.
4. Aftur í skref 2.

Athugasemd. Simplex-aðferðin var uppgötvuð 1947 af G. Dantzig. Hún er enn í fullu gildi – helstu keppinautar eru innri punkts aðferðir (e. interior point method).

5.3 Viðskeytt form og grunnlausnir

Gerum ráð fyrir að leysa skuli:

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

m.t.t. sk.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & \qquad i \in \{1, \ldots, m\} \\ x_j \geq 0, & \qquad j \in \{1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

[1] Stundum má nota $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$.

þar sem $b_i \geq 0$.

Byrjum með gjaldgengu hornpunktslausninni

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0} \text{ þ.e. } x_1^{(0)} = x_1^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)} = 0$$

Í Simplex-aðferðinni erum við ítrekað að leysa jöfnur þegar farið er úr einni GHL í aðra. Til þess að auðvelda verkið breytum við öllum ójöfnu skorðum í jafnt-og skorður með því að innleiða **slakabreytur** (e. slack variables).

Byrjum á að búa til **viðskeytt** (e. augmented) verkefni með aðstoð **slakabreyta** $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$:

$$\max_{x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+m}} z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

m.t.t. sk.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i & \qquad i \in \{1, \ldots, m\} \\ x_k \geq 0 & \qquad k \in \{1, \ldots, n+m\} \end{aligned}$$

Viðskeytta verkefnið er *jafngilt* því upphaflega þannig að lausn á viðskeytta verkefninu gefur lausn á upphaflegu verkefninu með því að sleppa slakabreytum. Á fylkjamáli er viðskeytta verkefnið:

$$\max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_s} z = \begin{bmatrix}\boldsymbol{c}^T \mathbf{0}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s\end{bmatrix} = \boldsymbol{c_v}^T \boldsymbol{x_v}$$

m.t.t. sk.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s\end{bmatrix} = \boldsymbol{A_v}\boldsymbol{x_v} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{x}_s \geq \mathbf{0} \text{ (eða) } \boldsymbol{x_v} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

þar sem $\boldsymbol{x}$ eru ákvarðanabreytur upphaflega verkefnisins, $\boldsymbol{x}_s$ eru slakabreytur og $\boldsymbol{x}_v$ eru allar ákvarðanabreytur viðskeytta verkefnisins (þ.m.t. slakar).

Dæmi 5.2 Skorðan $x_1 \leq 4$ er jafngild $x_1 + x_s = 4$, $x_s \geq 0$, þar sem x_s segir til um hversu mikið x_1 getur vaxið til þess að skorðan sé bindandi.

Dæmi 5.3 (Wyndor verkefnið 3.1 á viðskeyttu formi)

$$\max_{x_1, x_2} z = 3x_1 + 5x_2$$

m.t.t. sk.

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 \\ 2x_2 + x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 &= 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

þar sem x_3, x_4, x_5 eru slakabreyturnar.

Athugasemd.

- Ef slakabreyta $= 0$ þá liggur punkturinn á jaðrinum
- Ef slakabreyta > 0 þá liggur punkturinn innan gjaldgenga svæðisins
- Ef slakabreyta < 0 þá liggur punkturinn utan gjaldgenga svæðisins

---

5.3.1 Nokkur hugtök

- **Viðskeytt lausn** (e. augmented solution): Gildi á ákvörðanabreytum, ásamt tilsvarandi gildum á slakabreytum.[2]

[2] Lausnin $\boldsymbol{x} = (2, 6)$ hefur tilsvarandi viðskeytta lausn $\boldsymbol{x}_v = (2, 6, 1, 8, 5)$.

- **Grunnlausn** (e. basic solution): Viðskeytt hornpunktslausn.
- **Gjaldgeng grunnlausn** (e. basic feasible solution): Viðskeytt GHL.[3]

Fjöldi skorða á viðskeyttu formi er m en fjöldi breyta er $n + m$ (vanákveðið jöfnuhneppi). Getum því valið hvaða gildi sem er á n breytum og leyst fyrir þær sem eftir standa.

Í Simplex-aðferðinni eru þessar breytur settar $= 0$ og þær eru sagðar **utan grunns** (e. non-basic variable). Breyturnar sem eftir standa og við leysum fyrir kallast **grunnbreytur** (e. basic variables).

Samantekt á eiginleikum grunnlausna

- Sérhver breyta er annaðhvort í grunni eða utan grunns.
- Fjöldi grunnbreyta er $= m$, fjöldi utan grunns eru $= n$ (og settar $= 0$).
- Gildi á grunnbreytum fást m.þ.a. leysa jöfnuhneppi sem samanstanda af skorðum viðskeytts verkefnisins.
- Ef grunnbreytur ≥ 0, þá er lausnin gjaldgeng grunnlausn.

5.4 Algebruleg lausnaraðferð á dæmi

Dæmi 5.4 (Lausn á Wyndor Glass Company í 3.1)

$$\max_{x_1, x_2} z = 3x_1 + 5x_2$$

[3] Lausnin $\boldsymbol{x} = (0, 6)$ er GHL, tilsvarandi viðskeytt GHL er $\boldsymbol{x}_v = (0, 6, 4, 0, 6)$.

m.t.t. sk.

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 \\ 2x_2 + x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 &= 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lausn (Algebruleg lausnaraðferð):

Skref 1 Hér er auðvelt[4] að finna gjaldgenga hornpunktslausn, setjum $x_1 = 0$ og $x_2 = 0$ (þ.e. utan grunns). Í grunni eru slakabreyturnar með $x_3 = 4$, $x_4 = 12$ og $x_5 = 18$ (lesum beint af skorðunum). Byrjum því með gjaldgengu grunnlausnina $\boldsymbol{x}_v = (0, 0, 4, 12, 18)$.

Skref 2 Best væri að framleiða eins mikið og mögulegt er á vöru x_2 (vegna þess að hagnaðurinn er 5 og einungis 3 fyrir vöru x_1). Veljum því x_2 inn í grunn.

Mesta aukningin fæst m.þ.a. fara eins langt og mögulegt er innan gjaldgenga svæðisins. Gætum að því að þegar x_2 vex, þá breytist gildi á öðrum breytum í grunni. Framleiðslan takmarkast af hráefni eða $x_2 = 6$ og þá þarf slakinn x_4 að fara úr 12 niður í 0:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 \\ 2(6) + (0) &= 12 \\ 3x_1 + 2(6) + x_5 &= 18 \end{aligned} \tag{5.1}$$

umritum jöfnu (5.1)

$$x_2 = \frac{12 - x_4}{2}$$

[4] Ef við erum með $\leq$ skorður og b-in eru ≥ 0 (framboð á hráefni) þá gefur $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ alltaf löglega lausn.

og skipum út fyrir x_2 í öllum jöfnum og þá fáum við

$$\max_{x_1,x_2} z = 3x_1 + 5\frac{12 - x_4}{2} = 30 + 3x_1 - \frac{5}{2}x_4$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 \\ \frac{2x_2}{2} + \frac{x_4}{2} &= \frac{12}{2} \\ 3x_1 + 2\frac{12 - x_4}{2} + x_5 &= 18 \end{aligned}$$

eða

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_4 &= 6 \\ 3x_1 - x_4 + x_5 &= 6 \end{aligned}$$

Endum með grunnlausnina $\boldsymbol{x}_v = (0, 6, 4, 0, 6)$

Skref 3

$$\max_{x_1,x_2} z = 30 + 3x_1 - \frac{5}{2}x_4$$

m.t.t. sk.

$$x_1 + x_3 = 4 \tag{5.2}$$
$$x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 6 \tag{5.3}$$
$$3x_1 - x_4 + x_5 = 6 \tag{5.4}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Nú má sjá að við getum grætt á því að framleiða vöru x_1 þar sem hagnaðurinn er 3 en neikvæður fyrir x_4. Það mesta sem við getum framleitt af x_1 er fyrir skorður:

(5.2) $x_1 = 4$ og x_3 lækkar niður í 0.

(5.3) engar hömlur á x_1.

(5.4) $x_1 = 6/3 = 2$ og x_5 lækkar niður í 0.

Mesta mögulega *leyfilega* hækkun er því $x_1 = 2$ og $x_5 = 0$ (lækkar og fer þ.a.l. úr grunni fyrir x_1), umritum skorðu (5.4):

$$x_1 = \frac{6 + x_4 - x_5}{3}$$

og skiptum út eins og áður:

$$\begin{aligned}
\max_{x_1,x_2} z &= 30 + 3\frac{6 + x_4 - x_5}{3} - \frac{5}{2}x_4 \\
&= 36 - \frac{3}{2}x_4 - x_5
\end{aligned}$$

m.t.t. sk.

$$\begin{aligned}
\frac{6 + x_4 - x_5}{3} + x_3 &= 4 \\
x_2 + \frac{1}{2}x_4 &= 6 \\
\frac{3x_1}{3} - \frac{x_4}{3} + \frac{x_5}{3} &= \frac{6}{3} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

eða

$$\begin{aligned}
x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 &= 2 \\
x_2 + \frac{1}{2}x_4 &= 6 \\
x_1 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 &= 2 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

Endum með grunnlausnina $\boldsymbol{x}_v = (2, 6, 2, 0, 0)$

Skref 4 Getum ekki aukið z með því að velja $x_4 > 0$ eða $x_5 > 0$ (því stuðlarnir eru neikvæðir). Besta lausn er því fundin, og besta launin á *upprunanlega* verkefninu er $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*) = (2, 6)$ með $z = 36$.

5.5 Simplex-aðferðin á töfluformi

Simplex-taflan er bókhald yfir framgangsmáta Simplex-aðferðarinnar. Hún heldur utan um stuðla í markfalli og skorðum.

Umritum jöfnurnar:

$$\begin{array}{lll} \max\limits_{x_1,\ldots,x_n} & z - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = 0 & (0) \\ \text{m.t.t. sk.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i & (i) \end{array}$$

þar sem $i \in \{1, \ldots, m\}$ og komum þeim fyrir í Simplex-töflu, sjá Töflu 5.1.

grunn-breytur	jafna	z	$x_1 \quad \ldots \quad x_n$ $\boldsymbol{x}$	$x_{n+1} \quad \ldots \quad x_{n+m}$ $\boldsymbol{x}_s$	= hægri -hlið
	(0)	1	$-\boldsymbol{c}^T$	$0 \quad \ldots \quad 0$	0
x_{1+n}	(1)	0			
x_{2+n}	(2)	0			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{b}$
x_{m+n}	(m)	0			

Tafla 5.1: Simplex taflan T

5.5.1 Aðgerðir á Simplex-töflu

Athugasemd. G.r.f. að upphaflega verkefnið sé $\max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$, með skorður $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$, og öll $b_i \geq 0$. Önnur form LP verkefna eru tekin fyrir í grein 4.3).

Upphafsstilling Koma verkefni yfir á viðskeytt form, slakabreytur í grunni.

Stoppskilyrði Athuga hvort besta lausn sé fundin m.þ.a. skoða stuðla við ákvarðanabreytur í markfalli (lína (0)). Ef allir stuðlar ≥ 0, þá er besta lausn fundin. **Hætta**.

Finna nýja grunnbreytu Sú breyta með stærsta neikvæða stuðlinn í jöfnu (0) (*stærsta* mínus tala í efstu línu) er valin, tilsvarandi dálkur kallast **vendidálkur** (j).

Finna grunnbreytu sem fer út með *minimum ratio test*:

- Deila tölum í hægri hlið (b-vigur) með tölum úr vendidálki (svo fremur sem þær eru > 0, ef $= 0$ þá sleppt).
- Línan með lægsta hlutfallið verður **vendilína** (i). Tilsvarandi breyta fer úr grunni.

Framkvæma Gauss-eyðingu til að finna næsta punkt með því að margfalda línu með fasta $\neq 0$, leggja saman/draga margfeldi einnar línu frá annarri, svokölluð "elementary row operations".

Aftur í stoppskilyrði.

Athugasemd. Ástæða Gauss-eyðingar: Höfum n breytur utan grunns, allar $= 0$, leysum $m \times n$ jöfnuhneppi t.þ.a. finna lausnina. Í hverju skrefi Simplex-aðferðarinnar kemur ein ný breyta í grunn og ein fer úr grunni. Gætum leyst jöfnuhneppi frá grunni, en það er óhagkvæmt. Þar sem lítið hefur breyst dugar nokkrar vel-valdar "elementary row operations" t.þ.a. finna lausn út frá þeirri gömlu.

MATLAB kóði

```
function T = pivot(T,i,j),
% usage: T = pivot(T,i,j);
  [m, n] = size(T);
  T(i,:) = T(i,:) / T(i,j);
  for k = 1:i-1, T(k,:) = T(k,:) - T(k,j) * T(i,:); end
  for k = i+1:m, T(k,:) = T(k,:) - T(k,j) * T(i,:); end
```

Dæmi 5.5 Beitum töflu-simplex aðferðinni á Wyndor-Glass Company:

$$\max_{x_1,x_2} z = 3x_1 + 5x_2$$

m.t.t. sk.

$$
\begin{aligned}
x_1 &\leq 4 && (5.1)\\
2x_2 &\leq 12 && (5.2)\\
3x_1 + 2x_2 &\leq 18 && (5.3)\\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Lausn: Byrjum á því að setja fram líkanið á fylkjamáli:

$$\max_{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} z = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

m.t.t. sk.

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &\geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Tilsvarandi Simplex-tafla er

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	HH	minratio-test
$>> T$							
1	-3	$-\mathbf{5}$	0	0	0	0	
0	1	0	1	0	0	4	$-$
0	0	$\boxed{\mathbf{2}}$	0	1	0	12	$12/2 = 6 \leftarrow$ min
0	3	$\mathbf{2}$	0	0	1	18	$18/2 = 9$
$>> T = pivot(T, 3, 3)$							
1	$-\mathbf{3}$	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30	
0	$\mathbf{1}$	0	1	0	0	4	$4/1 = 4$
0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	$-$
0	$\boxed{\mathbf{3}}$	0	0	-1	1	6	$6/3 = 2 \leftarrow$ min
$>> T = pivot(T, 4, 2)$							
1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36	
0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	
0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	
0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	

Hér má lesa úr lokatöflunni:

$$\boldsymbol{x}_v = (2,\ 6,\ 2,\ 0,\ 0)$$

eða fyrir upprunanlega verkefnið

$$x_1^* = 2 \text{ og } x_2^* = 6 \qquad \text{(besta lausn)}$$

Jafnframt er hægt að lesa úr fyrstu línu:

- Besta gildi markfallsins: $z^* = 36$,
- Skuggaverðin (e. shadow prices): $y_1^*, y_2^*, y_3^* = (0,\ \frac{3}{2},\ 1)$,
- Kostnaðarminnkun (e. reduced costs) fyrir x_1 og $x_2 = (0,\ 0)$.
- Skorður (5.2) og (5.3) eru virkar vegna þess að slakabreyturnar x_4 og x_5 eru ekki grunnbreytur, þ.e.a.s. $x_4 = x_5 = 0$.

5.6 Hvað-ef greining

Eftir að besta lausn hefur verið fundin er oft mjög gagnlegt að kanna áhrifa þess að breyta stikum líkansins. Slíkt kallast **hvað-ef greining** (e. postoptimality analysis).

Breytingar á hægri hlið skorðu (i), t.d. ef b_i hækkar um 1 þá getur það haft í för með sér breytingu á gildi markfallsins, $y_i = \frac{dz}{db_i}$ sem kallast **skuggaverð** skorðunnar (i).

Dæmi 5.6 (Hvað-ef greining Wyndor Glass Company)

$$\max_{x_1,x_2} z = 3x_1 + 5x_2$$

m.t.t. skorðanna

$$x_1 \leq 4 =: b_1 \tag{5.4}$$
$$2x_2 \leq 12 =: b_2 \tag{5.5}$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 =: b_3 \tag{5.6}$$

Hvaða áhrif hafa breytingar á $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ á markfallið?

Lausn: Leysum bestunarverkefnið myndrænt, mynd 5.1. Sjáum að besta lausn er $\boldsymbol{x}^* = (2, 6)$, með $z^* = 36$.

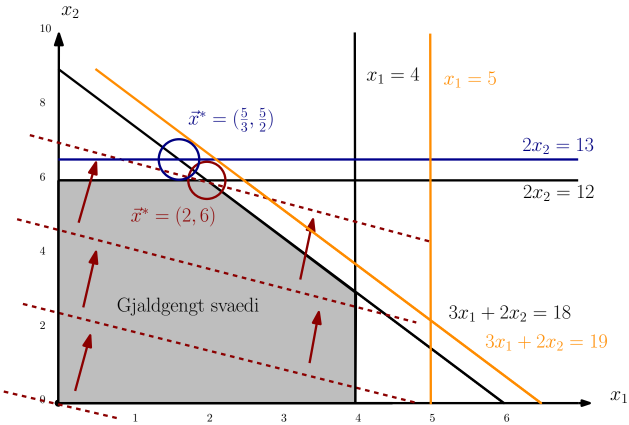
Þar sem skorða (5.4) er ekki virk sjáum strax að ef b_1 hækkar um 1 þá mun það ekki hafa áhrif á gildi markfallsins, því er skuggaverðið er $y_1 = \frac{dz}{db_1} = 0$.

Aftur á móti, er skorða (5.5) virk, svo ef við leyfum b_2 að hækka um 1 þá verður hún:

$$2x_2 \leq 13 \tag{5.7}$$

Leysum nýja skurðpunktinn við skorður (5.6) og (5.7), og fáum að nýja besta lausnin yrði $\boldsymbol{x}^* = (\frac{5}{3}, \frac{13}{2})$ með $z^* = 37.5$. Fáum því að breyting um b_2 um 1 hefur í för með sér breytingu á markfallinu um $\Delta z = \frac{3}{2}$, því er skuggaverðið er $y_2 = \frac{dz}{db_2} = \frac{3}{2}$.

Eins fæst fyrir á breytingu b_3 úr 18 í 19 að nýja besta lausnin verður $\boldsymbol{x}^* = (\frac{7}{3}, 6)$ með $z^* = 37$. Skuggaverðið er því $y_3 = \frac{dz}{db_3} = 1$.



Mynd 5.1: Hvað-ef greining fyrir dæmi 5.6

5.7 Samantekt um Simplex aðferðina

Z-röðin (0)

- Stuðlar breyta í grunni er alltaf núll.
- Stuðlar breyta sem ekki eru í grunni geta verið $+$, $-$, eða 0:
  - ef $-$, þá getur breyta komið inn í grunn,
  - ef $+$, þá getur breyta ekki komið í grunn (ef allir stuðla > 0 þá er lausnin besta lausn),
  - ef 0, breyta má koma inn í grunn, en það breytir ekki gildi markfallsins (ef allir stuðlar eru jákvæðir og a.m.k. einn er núll þá eru margar bestu lausnir á verkefninu).
- Ef fleiri en ein breyta koma til greina sem næsta breyta í grunn (t.d. markfall $z = 3x_1 + 3x_2$) þá skiptir ekki máli hver er valin.

Víkjandi breyta

- Ef engin breyta getur farið út úr grunni (vendilína) þ.e.a.s. allir stuðlar í þeim vendidálki eru neikvæðir eða núll, þá er vandamálið **ótakmarkað**[5] (e. unbounded)
- Ef jafntefli í "min-ratio" próf milli tveggja breyta, þá er ein valin af handahófi.[6]

Skuggaverð (e. shadow price): $y_i = dz/db_i$. Skuggaverð fyrir skorðu i mælir breytinguna á markfallinu (z) sem yrði ef b_i væri aukin.

Kostnaðarminnkun (e. reduced costs) er mesta leyfilega aukning í c_j (ef j er ekki grunn breyta) til að halda núverandi bestu gjaldgengu grunnlausn, eða m.ö.o. lágmarks hagnaður sem vara j þarf að hækka um til að hún fari í grunn.

Athugasemd. Til eru fleiri afbrigði af Simplex-aðferðinni. Munurinn felst í að nota aðrar aðferðir til þess að velja breytu í og úr grunni.

5.8 Fræðin á bak við Simplex

Til að meta hversu *góð* Simplex-aðferðin er í raun og veru má dæma hana út frá hversu *lengi* er Simplex-aðferðin að finna bestu lausn. Nokkar leiðir eru til að meta tímann sem það tekur að leita að bestu lausn, nefnilega

[5] Líklega er villa í framsetningu á bestunarverkefninu, t.d. eina eða fleiri skorður vantar.

[6] Í þessu tilviki getur Simplex-aðferðin lent í vandræðum, og farið í "hringi". En það kemur sjaldan fyrir í raunveruleikanum.

- Tími (sek) – hverfull skali þar sem ekki allar tölvur eru eins, og tölvur verða sífellt hraðvirkari.
- Fjöldi reikniaðgerða (samlagning, frádráttur, margföldun og deiling).
- Fjöldi ítrana – í Simplex-aðferðinni er fjöldi reikniaðgerða í hverri ítrun ca. fasti (háður m og n).

Greining á reikniritum miðast annaðhvort við **versta tilvik** (e. worst case analysis) eða **meðaltilvik** (e. average case). Greining sem miðað við versta tilfelli skoðar öll verkefni af tiltekinni stærð (m og n) og finnur hversu langan tíma erfiðasta tilvikið í hópnum tekur.

Þar sem Simplex-aðferðin fer aldrei til baka í eldri lausnir (nema í undantekninga tilvikum) þá er efra mark á fjölda gjaldgengra grunnlausna

$$\binom{n+m}{n} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

Fyrir $m = n$ gildir að

$$\frac{1}{2n}2^{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$$

þ.e. fjöldi hornpunkta vex *mjög hratt* með n, t.d. $2^{50} \approx 1.1 \cdot 10^{15}$.

Sýna má að verkefnið eftir Klee & Minty frá 1972[7]

$$\max_{\boldsymbol{x}} z = \sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j$$

m.t.t. sk.

$$2\sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j + x_i \leq 100^{i-1} \qquad i \in \{1, ..., n\}$$

$$x_j \geq 0 \qquad j \in \{1, ..., n\}$$

[7] V. Klee and G.J. Minty. *How Good is the Simplex Algorithm?* In O. Shisha, editor, Inequalities, III, pages 159175. Academic Press, New York, NY, 1972

tekur $2^n - 1$ Simplex-ítranir. Reiknitími Simplex-aðferðarinnar (í versta tilfelli) vex því með veldisvísisfalli í n.

Á hinn boginn hafa menn séð að fyrir flest raunhæf verkefni er reiknitíminn miklu styttri. Eftirfarandi mat á fjölda ítrana fékkst með því að leysa 35 LP verkefni úr NETLIB safninu

$$T \approx 0.5(n+m)^{1.05}$$

sem er fjarri versta tilvikinu.

5.9 Simplex-aðferðin á fylkjaformi

Línulegt bestunarverkefni á stöðluðu formi er

$$\max_{\boldsymbol{x}} z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

m.t.t. sk.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &\leq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

þar sem $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, og $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.

Komum verkefninu yfir á viðskeytt formi. Táknum slakabreytur með

$$\boldsymbol{x}_s = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

Skorðurnar verða þá

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x}_v = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix} &\geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

þar sem $\boldsymbol{I}_m$ er $m \times m$ einingarfylki.

Fjöldi breyta utan grunns er n, setjum tilsvarandi breytur jafnar núlli. Höfum þá m jöfnum með m óþekktum breytum.

Táknum grunnbreyturnar með $\boldsymbol{x}_B$ og tilsvarandi dálkar úr $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}$ er fylkið $\boldsymbol{B}$ (þ.a. í upphafi er $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_m$). Höfum því

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b}$$

Lausnin er þá

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{5.8}$$

Athugasemd.

- Getum séð hvernig lausnin breytist þegar $\boldsymbol{b}$ breytist lítið (sjá grein 6.9 um næmnigreiningu)
- Simplex-aðferðin velur breytur í og úr grunni þannig að tryggt er að $\boldsymbol{B}$ sé andhverfanlegt.
- **Endurskoðaða Simplex-aðferðin** (e. revised Simplex-method) í grein 5.9.3 reiknar andhverfuna á hagkvæman hátt.

Látum nú vigurinn $\boldsymbol{c}_B$ innihalda þá stuðla markfallsins sem svarar til breyta í $\boldsymbol{x}_B$ (önnur stök eru núll).

$$z = \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{x}_B \overset{(5.8)}{=} \boldsymbol{x}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{5.9}$$

Upphafsjöfnur Simplex-aðferðarinnar eru

$$\begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

Í sérhverri ítrun gildir um *hægri hlið* jöfnuhneppisins í (5.10).

$$\begin{bmatrix} z \\ \boldsymbol{x}_B \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c}_b\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix}}_{(\star)} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow (5.8) \\ \leftarrow (5.9) \end{matrix} \tag{5.11}$$

Þar sem sömu aðgerðir ($\star$) eru framkvæmdar á *vinstri hlið* (5.10) fæst

$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

Í sérhverri ítrun gildir því

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix}}_{\text{vinstri hlið}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix}}_{\text{hægri hlið}} \tag{5.13}$$

5.9.1 Fundamental insight

Ef upphafstaflan er þekkt, þ.e.a.s. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ og $\boldsymbol{c}$, og ef $\boldsymbol{B}^{-1}$ í lokatöflu er þekkt, þá er hægt að reikna öll gildin í Simplex-töflunni með formúlunum hér að undan. Þetta er kallað **fundamental insight**.

Jafnframt vitum við að í lokatöflu Simplex eru skuggaverðin $\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}$.

5.9.2 Samantekt

Simplex	Grunnbr.	Jafna	z	Upphafl. br.	Slakabr.	Hægri hlið
Upphafstafla	z	(0)	1	$-\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{0}$	0
(Ítrun 0)	$\boldsymbol{x}_B$	$(1,\ldots,m)$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{I}_m$	$\boldsymbol{b}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	z	(0)	1	$-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
(Ítrun k)	$\boldsymbol{x}_B$	$(1,\ldots,m)$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Lokatafla	z	(0)	1	$-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{y}^*\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{y}^*$	$\boldsymbol{y}^*\boldsymbol{b}$
	$\boldsymbol{x}_B$	$(1,\ldots,m)$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

Í lok hverrar ítrunar segja stuðlar slakabreyta til um hvernig viðkomandi jöfnuhneppi fékkst út frá upphaflegu jöfnunum.

Dæmi 5.7 (Wyndor frh. af dæmi 5.5) Upphafs- og lokatöflur eru:

Simplex	Grunnbr.	Jafna	z	Upphafl. br.		Slakabr.			Hægri hlið
Upphafstafla	z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Lokatafla	z	(0)	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36
	x_3	(1)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_1	(3)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

LAUSN: Sjáum að

$$\begin{aligned}
\text{Lína 1} &= 1 \cdot (\text{upphafl.lína 1}) + \frac{1}{3} \cdot (\text{upphafl.lína 2}) - \frac{1}{3} \cdot (\text{upphafl.lína 3}) \\
&= 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\text{Lína 2} &= 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\text{Lína 3} &= 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Að auki fáum við innsýn í skuggaverðin $\boldsymbol{y}^*$ þar sem

$$z^* = \boldsymbol{y}^* \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{m} y_i^* b_i = 0 \cdot 4 + \frac{3}{2} \cdot 12 + 1 \cdot 18 = 36$$

5.9.3 Endurskoðuð Simplex-aðferð

Endurskoðuð Simplex-aðferð (e. revised Simplex-method) gengur út á að geyma aðeins $\boldsymbol{B}^{-1}$ geymt og því er breytt í hverri ítrun með formúlu sem er á bls. 185 í kennslubók. Í upphafi er $\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{I}_m$.

Dæmi 5.8 (Wyndor í matlab) Höfum gefið

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^{-1} = I_3$$

Lausn: Til upprifjunar er hefðbundin Simplex-aðferð:

```
>> A=[1 0;0 2;3 2];b=[4;12;18];c=[3 5]';[m,n]=size(A);I=
    eye(m);
>> T = [1 -c' zeros(1,m) 0 ; zeros(m,1) A I b]

T =

     1    -3    -5     0     0     0     0
     0     1     0     1     0     0     4
     0     0     2     0     1     0    12
     0     3     2     0     0     1    18

>> % Itrun #1 ------------------------------------------------
>> T=pivot(T,3,3)

T =

    1   -3    0    0    2.5000    0   30
    0    1    0    1         0    0    4
    0    0    1    0    0.5000    0    6
    0    3    0    0   -1.0000    1    6

>> % Itrun #2 ------------------------------------------------
>> T=pivot(T,4,2)

T =

    1    0    0    0    1.5000    1.0000   36
    0    0    0    1    0.3333   -0.3333    2
    0    0    1    0    0.5000         0    6
    0    1    0    0   -0.3333    0.3333    2
```

Nú skulum við leysa verkefnið með endurskoðaðri Simplex-aðferð, skv. reikniriti í kennslubók á bls. 185:

```
>> A=[1 0;0 2;3 2];b=[4;12;18];c=[3 5]';[m,n]=size(A);
>> c_B = [0 0 0]; % Framlegd vid grunnbreytur x3,x4,x5 er 0
>> invB = eye(3); % I upphafi er invB=I_m
>> T = [1,          -c'+c_B*invB*A,   c_B*invB,   c_B*invB*b
        zeros(m,1),  invB*A,           invB,       invB*b ]

T =

     1    -3    -5     0     0     0     0
     0     1     0     1     0     0     4
     0     0     2     0     1     0    12
     0     3     2     0     0     1    18

>> % Itrun #1
>> k=2; % x2 entering basic
>> r=2; % x4 leaving basic
>> eta = -invB*A(:,k)/(invB(r,:)*A(:,k))

eta =

     0
    -1
    -1

>> eta(r)=1/(invB(r,:)*A(:,k))

eta =

          0
     0.5000
    -1.0000

>> E=I; E(:,r)=eta

E =

     1.0000         0         0
```

```
            0    0.5000         0
            0   -1.0000    1.0000

>> invB=E*invB % Uppfaersla a invB

invB =

     1.0000         0         0
          0    0.5000         0
          0   -1.0000    1.0000

>> c_B = [0 5 0], % Framlegd vid grunnbreytur x3,x2,x5


>> T = [1,          -c'+c_B*invB*A,  c_B*invB,  c_B*invB*b
        zeros(m,1),  invB*A,          invB,      invB*b      ]

T =

     1    -3     0     0    2.5     0    30
     0     1     0     1    0       0     4
     0     0     1     0    0.5     0     6
     0     3     0     0   -1       1     6


>> % Itrun #2
>> k=1; % x_1 entering basic
>> r=3; % x_5 leaving basic
>> eta = -invB*A(:,k)/(invB(r,:)*A(:,k));
>> eta(r)=1/(invB(r,:)*A(:,k)); E=I; E(:,r)=eta;
>> invB=E*invB % Uppfaersla a invB

invB =

     1.0000    0.3333   -0.3333
          0    0.5000         0
          0   -0.3333    0.3333

>> c_B = [0 5 3], % Framlegd vid grunnbreytur x3,x2,x1
>> T = [1,          -c'+c_B*invB*A,  c_B*invB,  c_B*invB
```

```
    *b
        zeros(m,1),   invB*A,             invB,         invB*b
                ]

T =

     1     0     0     0    1.5000    1.0000    36
     0     0     0     1    0.3333   -0.3333     2
     0     0     1     0    0.5000         0     6
     0     1     0     0   -0.3333    0.3333     2

>> % Skuggaverd, kostnadarminnkun, gildi markfalls og
    bestu lausn
>> ystar = c_B*invB, reduced_cost = ystar*A-c', z = ystar
    *b, xstar=zeros(n+m,1); xstar([3 2 1])=invB*b

ystar =

         0    1.5000    1.0000

reduced_cost =

     0     0

z =

    36

xstar =

     2
     6
     2
     0
     0
```

Kafli 6

Nykurverkefni

Sérhverju línulegu bestunarverkefni má breyta í svokallað **nykur** (e. dual) verkefni, sem er þá einnig línulegt bestunarverkefni. Einnig kalla **gagnvirkt** verkefni.

Verkefnin tengjast á þann hátt að lausn á einu verkefni gefur okkur lausnina á hinu. Skuggaverð í frumverkefninu eru ákvörðunarbreytur nykurverkefnisins og öfugt. Stundum er þægilegra og hagkvæmara að leysa tilsvarandi nykurverkefni heldur en upphaflega verkefnið.

Gjaldgeng lausn á öðru verkefninu gefur efri (neðri) mörk á bestu lausn hins verkefnisins.

Dæmi 6.1 (Efri og neðri mörk)

$$\max_{\boldsymbol{x}} z = 4x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\leq 1 \qquad (6.1) \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 \qquad (6.2) \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lausn: Ljóst er að sérhver gjaldgeng lausn gefur okkur *neðri mörk* á bestu lausn, t.d. $\boldsymbol{x} = (1,0,0)$ gefur $z = 4$. Með $\boldsymbol{x} = (0,0,3)$ fæst $z = 9$. Er þetta seinna gildi nálægt því besta? Til þess að svara því reynum við að finna efri mörk á markfallið.

Margföldum (6.2) með 2 og (6.3) með 3 og leggjum þær saman (fastar fundnir með "störun")

$$\begin{array}{rrrrcr} 2(& x_1 & +4x_2 & & \leq & 1) \\ +3(& 3x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq & 3) \\ \hline & 11x_1 & +2x_2 & +3x_3 & \leq & 11 \end{array}$$

Þar sem allar breytur eru ≥ 0 gildir að

$$\underbrace{4x_1 + x_2 + 3x_3}_{\text{markfallið}} \quad \leq \quad \underbrace{11x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 11}_{2(6.2)+3(6.3)}$$

þ.e. besta lausn liggur á bilinu $9 \leq z^* \leq 11$.

Hægt er að gera enn betur en þetta. Notum breyturnar y_1 og y_2 í stað fastanna 2 og 3 og finnum þau gildi sem gefa bestu efri mörk.

$$\begin{array}{rrrrcr} y_1(& x_1 & +4x_2 & & \leq & 1) \\ +y_2(& 3x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq & 3) \\ \hline & (y_1+3y_2)x_1 & +(4y_1-y_2)x_2 & +(y_2)x_3 & \leq & 1(y_1)+3(y_2) \end{array}$$

Gerum kröfu um að stuðlar við x-in séu a.m.k. jafnstórir og stuðlar markfallsins (svo mörkin haldi),

$$\begin{array}{rcl} y_1 + 3y_2 & \geq & 4 \\ 4y_1 - y_2 & \geq & 1 \\ y_2 & \geq & 3 \\ y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Berum nú markfallið saman við þessa summu (og efri mörk hennar)

$$\begin{array}{rcl} z & = & 4x_1 + x_2 + 3x_3 \\ & = & (y_1+3y_2)x_1 + (4y_1-y_2)x_2 + (y_2)x_3 \\ & \leq & \underbrace{y_1 + 3y_2}_{\text{efri mörk}} \end{array}$$

Lágmörkum efri mörkin $y_1 + 3y_2$ með því að leysa

$$\min_{\boldsymbol{y}} w = y_1 + 3y_2$$

m.t.t. sk.

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_2 &\geq 4 \\ 4y_1 - y_2 &\geq 1 \\ y_2 &\geq 3 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Þetta verkefni kallast **nykur** frumverkefnisins (e. primal). Besta lausn er hægt að leysa myndrænt[1] eða með GLPK,

$$\boldsymbol{y}^* = (y_1^*, y_2^*) = (1, 3) \quad \text{með} \quad w^* = 10.$$

6.1 Samband frum- og nykurverkefna

Svarandi til sérhvers línulegs bestunarverkefnis (á stöðluðu formi)

$$\left.\begin{array}{lccc} \max_{\boldsymbol{x}} & z & = & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sk.} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} & \leq & \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0} \end{array}\right\} \text{ frum}$$

er nykurverkefnið

$$\left.\begin{array}{lccc} \min_{\boldsymbol{y}} & w & = & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{sk.} & \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} & \geq & \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} & \geq & \boldsymbol{0} \end{array}\right\} \text{ nykur}$$

Samband frum- og nykurverkefna:

[1] Ef einungis tvær ákvarðanabreytur er um að ræða, þá er einfalt að leysa verkefnið myndrænt.

Annað verkefnið		Hitt verkefnið
Skorða i	$\leftrightarrow$	Breyta i
Markfall	$\leftrightarrow$	Hægri hlið
Hámörkun	$\leftrightarrow$	Lágmörkun

Í dæmi 6.1 gaf nykurverkefnið efri mörk á markfalli frumverkefnisins. Almennt gildir:

Setning 6.2 (Veika nykursetningin (e. weak duality thm.))
Ef $(x_1, ..., x_n)$ *er leyfileg lausn á frumverkefninu og* $(y_1, ..., y_m)$ *er leyfileg lausn á nykurverkefninu, þá er*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$$

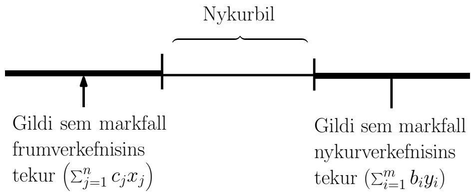
Sönnun

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j &\leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \right) x_j && (\text{því } \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{c}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \leq \sum_{i=1}^{m} y_i b_i && (\text{því } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}) \end{aligned}$$

Höfum því **nykurbil** (e. duality gap) á milli þeirra gilda sem markfall frumverkefnisins tekur og markfall nykurverkefnisins tekur. En hversu stórt er bilið?

Setning 6.3 (Sterka nykursetningin (e. strong duality theorem))
Ef $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ *er besta lausn á frumverkefninu. Þá er* $\boldsymbol{y}^* = (y_1^*, ..., y_m^*)$ *besta lausn nykurverkefnisins og*

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}^*$$



Setningin segir að ef til er besta lausn á frumverkefninu þá er ekkert nykurbil. Höfum því fjóra möguleika

1. Besta lausn til á bæði frum og nykur (ekkert bil)
2. Frum ótakmarkað, nykur ógjaldgengt (ekkert bil)
3. Frum ógjaldgengt, nykur ótakmarkað (ekkert bil)
4. Bæði frum og nykur ógjaldgeng (óendanlegt bil)

Athugasemd.

1. Efri og neðri mörk á markfalli geta komið að margvíslegum notum, t.d.
   (i) Til að ákvarða hvenær á að stoppa bestunarreiknirit (t.d. innri punkta aðferðir)
   $\rightarrow$ stopp þegar $\left|\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}\right| \leq \epsilon$, þar sem $\epsilon > 0$ er lítil tala.
   (ii) Takmarka lausnarsvæði í heiltölubestun (sjá kafla 8).
2. Í endurbættri Simplex-aðferðinni skiptir fjöldi skorða (m) meira máli en fjöldi breyta (n) fyrir tímann sem útreikningar taka. Þess vegna getur verið hagkvæmara að leysa nykurverkefnið ef $m \gg n$.

Dæmi 6.2 Fyrirtækið *Frum* framleiðir tækjabúnað og glingur.

1. Eitt kíló af tækjabúnaði þarfnast 1 vinnustundar, 1 einingu af timbri, 2 einingar af málmi, og er þá hagnaðurinn 5 evrur.

2. Eitt kíló af glingri þarfnast 2 vinnustunda, 1 einingu af timbri, 1 einingar af málmi, og hagnaðurinn er þá 4 evrur.

3. Tiltækar vinnustundir eru 120, 70 einingar af timbri og 100 einingar af málmi.

Hversu mikið af tækjabúnaði x_1 og glingri x_2 á fyrirtækið að framleiða til að hámarka hagnað?

Lausn: Línuleg bestunarverkefni fyrir *Frum* er eftirfarandi

$$\text{Hámarka hagnað:} \quad \max_{x_1,x_2} z = 5x_1 + 4x_2 \text{ (evrur)}$$

m.t.t. sk.

$$\begin{array}{lrcl} \text{Vinnustundir:} & x_1 + 2x_2 & \leq & 120 \\ \text{Timbur:} & x_1 + x_2 & \leq & 70 \\ \text{Málmur:} & 2x_1 + x_2 & \leq & 100 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Dæmi 6.3 Fyrirtækið *Nykur* vill bjóða í hráefnin sem *Frum* á og er til í að kaupa hvaða magn sem er. Hvaða verð á *Nykur* að bjóða þannið að *Frum* selji allt hráefnið?

Látum y_1, y_2, y_3 vera verðin fyrir eina vinnustund, eina einingu af timbri og eina einingu af málmi. Verðin þurfa að vera nógu há þannig að það borgi sig fyrir *Frum* að selja frekar en að framleiða tækjabúnað og glingur, þ.e.a.s. $y_1+y_2+2y_3 \geq 5$ og $2y_1+y_2+y_3 \geq 4$.

Fyrirtækið *Nykur* vill vitaskuld ekki greiða of mikið, þannig fáum við nýtt (nykur-)verkefni.

LAUSN:

$$\text{Lágmarka verð:} \quad \min_{y_1,y_2,y_3} \; w = 120y_1 + 70y_2 + 100y_3 \text{ (evrur)}$$

m.t.t. sk.

$$\begin{array}{lrcll} \text{Tækjabúnaður:} & y_1 + y_2 + 2y_3 & \geq & 5 & \text{(evrur)} \\ \text{Glingur:} & 2y_1 + y_2 + y_3 & \geq & 4 & \text{(evrur)} \\ & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

Skoðum nú sambandið á milli lausna frum- og nykurverkefna.

LAUSN (Á DÆMUM 6.2 OG 6.3): Fyrst lítum við á frumverkefnið leyst með Simplex aðferðinni:

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	HH
1	−5	−4	0	0	0	0
0	1	2	1	0	0	120
0	1	1	0	1	0	70
0	2	1	0	0	1	100

$>> T = pivot(T, 4, 2)$

1	0	−1.5	0	0	2.5	250
0	0	1.5	1	0	−0.5	70
0	0	0.5	0	1	−0.5	20
0	1	0.5	0	0	0.5	50

$>> T = pivot(T, 3, 3)$

1	0	0	0	3	1	310
0	0	0	1	−3	1	10
0	0	1	0	2	−1	40
0	1	0	0	−1	1	30

Lesum úr lokatöflunni:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^* &= (30, 40, 10, 0, 0) \\ z^* &= 310 \\ \boldsymbol{y}^* &= (0, 3, 1) \end{aligned}$$

Leysum nú nykurverkefnið með stóru M-aðferðinni í MATLAB:

```
>> syms M
>> format rational
>> Tdual=[-1 b' zeros(1,n) M M 0; zeros(n,1) A' -eye(n)
    eye(n) c]
```

```

Tdual =

[ -1, 120, 70, 100,  0,  0, M, M, 0]
[  0,   1,  1,   2, -1,  0, 1, 0, 5]
[  0,   2,  1,   1,  0, -1, 0, 1, 4]

>> Tdual = pivot(Tdual,2,7) % Koma grunnbr x6 a eiginlegt
    form

Tdual =

[ -1, 120 - M, 70 - M, 100 - 2*M,  M,  0, 0, M, -5*M]
[  0,       1,      1,         2, -1,  0, 1, 0,    5]
[  0,       2,      1,         1,  0, -1, 0, 1,    4]

>> Tdual = pivot(Tdual,3,8) % Koma grunnbr x7 a eiginlegt
    form

Tdual =

[ -1, 120 - 3*M, 70 - 2*M, 100 - 3*M,  M,  M, 0, 0, -9*M]
[  0,         1,        1,         2, -1,  0, 1, 0,    5]
[  0,         2,        1,         1,  0, -1, 0, 1,    4]

>> % Hefjum Simplex-bestun
    --------------------------------------------------
>> Tdual = pivot(Tdual,2,4)

Tdual =

[-1,70-(3*M)/2, 20-M/2, 0, 50-M/2, M, (3*M)/2-50, 0,-(3*M
    )/2-250]
[ 0,        1/2,    1/2, 1,   -1/2, 0,        1/2, 0,
      5/2]
[ 0,        3/2,    1/2, 0,    1/2,-1,       -1/2, 1,
      3/2]

>> Tdual = pivot(Tdual,3,2)

Tdual =

[ -1, 0, -10/3, 0, 80/3, 140/3, M- 80/3, M- 140/3,
```

```
    -320]
[   0,  0,    1/3,  1,  -2/3,    1/3,         2/3,         -1/3,
    2]
[   0,  1,    1/3,  0,   1/3,   -2/3,        -1/3,          2/3,
    1]

>> Tdual = pivot(Tdual,3,3)

Tdual =

[ -1, 10,  0,  0,  30,  40, M - 30, M - 40, -310]
[  0, -1,  0,  1,  -1,   1,      1,     -1,    1]
[  0,  3,  1,  0,   1,  -2,     -1,      2,    3]

>> % Bestun lokid; tokum ut gervibreytur

Tdual =

[ -1, 10,  0,  0,  30,  40, -310]
[  0, -1,  0,  1,  -1,   1,    1]
[  0,  3,  1,  0,   1,  -2,    3]
```

Lesum úr lokatöflunni:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}^* &= (0,3,1,0,0)\\
z^* &= 310\\
\boldsymbol{x}^* &= (30,40)
\end{aligned}
$$

6.4 Hagfræðileg túlkun nykurverkefna

Um frumverkefnið gildir

x_j Magn sem framleitt er af vöru (e. activity) j, $j \in \{1, ..., n\}$.

c_j Framlegð af vöru j (á einingu).

z Heildarhagnaður.

b_i Magn af hráefni (e. resource) i sem er til ráðstöfunar, $i \in \{1, ..., m\}$.

a_{ij} Magn af hráefni i sem þarf til þess að framleiða eina einingu af vöru j.

Í sérhverri ítrun er gildi markfallsins

$$w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

þ.e. framlag b_i eininga af hráefni til markfallsins er $y_i b_i$ og því má túlka y_i sem framlag einnar einingar af hráefni i til markfallsins. Gildin á y_i (y_i^* í bestu lausn) kallast **skuggaverð** (e. shadow price), $y_i^* = \frac{\partial w^*}{\partial b_i}$.

Við framleiðslu á vöru j eru notaðar a_{ij} einingar af hráefni i og $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ er því framlag til markfalls af *hráefnisblöndunni* sem þarf til að framleiða eina einingu af vöru j. Þessa hráefnisblöndu mætti einnig nota við framleiðslu á öðrum vörum. Það er einungis skynsamlegt ef $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$ (annars værum við ekki að nota hráefnin á hagkvæmasta máta).

6.5 Tengsl frum- og nykurverkefna

Frumverkefni P (e. primal):

$$
\begin{array}{rll}
\max & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{sk.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & i \in \mathcal{I}_1 \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, & i \in \mathcal{I}_2 \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i \in \mathcal{I}_3 \\
& x_j \ge 0, & j \in \mathcal{J}_1 \\
& x_j \le 0, & j \in \mathcal{J}_2 \\
& x_j \gtrless 0, & j \in \mathcal{J}_3
\end{array}
$$

Nykurverkefni D (e. dual):

$$
\begin{array}{rll}
\min & w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\
\text{sk.} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, & j \in \mathcal{J}_1 \\
& \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j, & j \in \mathcal{J}_2 \\
& \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, & j \in \mathcal{J}_3 \\
& y_i \ge 0, & i \in \mathcal{I}_1 \\
& y_i \le 0, & i \in \mathcal{I}_2 \\
& y_i \gtrless 0, & i \in \mathcal{I}_3
\end{array}
$$

Athugasemd. Um gagnvirk verkefni gildir:

- Til sérhverra skorðu í (P) svarar nykurbreyta.
- Til sérhverra skorðu í (D) svarar frumbreyta.
- Stuðlar markfalls (P) eru hægri hlið (HH) í (D)
- Stuðlar markfalls (D) eru HH í (P)

- Gagnvirkt (nykur) verkefni gagnvirka verkefnisins er upphaflega (frum) verkefnið, þ.e. nykur af nykur er frum.

  Lausn:

$$\begin{array}{llcllcll}
\max & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} & & \min & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} & & \max & -\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\
\text{sk.} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} & \stackrel{\text{nykur}}{\to} & \text{sk.} & \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} \ge \boldsymbol{c} & \stackrel{\text{staðlað form}}{\to} & \text{sk.} & -\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} \le -\boldsymbol{c} \\
 & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} & & & \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0} & & & \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0} \\
 & & & \min & -\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} & & \max & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
 & & \stackrel{\text{nykur}}{\to} & \text{sk.} & -\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \ge -\boldsymbol{b} & \stackrel{\text{staðlað form}}{\to} & \text{sk.} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\
 & & & & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} & & & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}
\end{array}$$

  Það skiptir því ekki máli hvort verkefnið við köllum frum eða nykur. Venjan er þó að kalla verkefnið sem við setjum (fyrst) fram, frumverkefni.

- Stundum er mun ódýrara að leysa gagnvirk (nykur) verkefni en það upphaflega (frum). Það gildir þegar skorður eru mun fleiri en fjöldi breyta, $m \gg n$.

- $w^* = \boldsymbol{y}^*\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = z^*$ (notum * til að tákna bestu lausn, sjá líka bls. 201 í H&L, e. strong duality property).

- Ef $\boldsymbol{x}$ er gjaldgeng lausn í frumverkefninu og $\boldsymbol{y}$ er leyfileg lausn í nykurverkefninu þá er $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y}\boldsymbol{b}$ (e. weak duality property).

- Í hverri ítrun simplex aðferðarinnar þá er fundin leyfileg grunnlausn (BFS) $\boldsymbol{x}$ og samsvarandi $\boldsymbol{y}$ fyrir nykurverkefnið, $\boldsymbol{c}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\boldsymbol{b}$ (e. complementary solution property). Ef $\boldsymbol{x}$ er ekki besta lausn í (P) þá er $\boldsymbol{y}$ ekki gjaldgeng lausn í (D).

Rifjum upp Simplex-töfluna á fylkjaformi (fyrir hvaða ítrun sem er):

Grunnbr.	Jafna	z	Upphafl. br.	Slakabr.	Hægri hlið
z	(0)	1	$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x}_B$	$(1,\ldots,m)$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

Athugum nánar jöfnu (0). Látum $z = \boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{y}\boldsymbol{A}$, þá er $z_j = \sum_{i=1}^m y_i a_{ij}$ og jafna (0) verður

$$\begin{array}{cccccc|c} x_1 & \cdots & x_n & x_{n+1} & \cdots & x_{n+m} & HH \\ z_1 - c_1 & \cdots & z_n - c_n & y_1 & \cdots & y_m & w = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} \end{array}$$

Skorða j í nykurverkefninu er $z_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j$ (sbr. $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{c}$) og því má túlka $z_j - c_j$ sem **umframbreytu** (e. surplus variable) fyrir skorðuna (er 0 þegar skorðan er *bindandi*).

Í frumverkefninu fæst grunnlausn m.þ.a. skeyta slakabreytum við x-in. Hliðstætt því fæst grunnlausn í nykurverkefni m.þ.a. skeyta umframbreytum við y-in, þ.e.

$$(y_1, ..., y_m, z_1 - c_1, ..., z_n - c_n).$$

Nykurverkefni á viðskeyttu formi hefur n breytur í grunni og m utan grunns.

Eftirfarandi samband gildir milli P og D

Frumbreyta	Tilsvarandi nykurbreyta	
Ákv.br. x_j	Slakabr. $z_j - c_j$	$j \in \{1, ..., n\}$
Slakabr. x_{n+i}	Ákv.br. y_i	$i \in \{1, ..., m\}$

Í sérhverri ítrun finnur Simplex-aðferðin gjaldgenga hornpunktslausn P og einnig svonefnda **fyllingalausn** (e. complementary solution) fyrir D þar sem $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}$ (ef $\boldsymbol{x}$ er ekki besta lausnin á P þá er $\boldsymbol{y}$ ekki gjaldgeng í D).

Tilsvarandi gildir um grunnlausnir P og D. Svarandi til sérhverrar grunnlausnar P er **fyllingagrunnlausn** (e. complimentary basic solution) á D og markfallsgildi þeirra (z og w) eru þau sömu. Auk þess gildir:

Frumbreyta	Tilsvarandi nykurbreyta
Í grunni (> 0)	Utan grunns ($= 0$)
Utan grunns ($= 0$)	Í grunni (> 0)

Þegar önnur lausnin (frum eða nykur) er þekkt má finna hina með því að leysa jöfnuhneppi.

Setning 6.6 (Complimentary slackness) *Ef* $(x_1, ..., x_n)$ *er besta lausn á* P *og* $(y_1, ..., y_m)$ *er besta lausn á* D *þá gildir:*

1. $x_j(z_j - c_j) = 0$ *(*$z_j - c_j$ *er umframbr. í* D*)*

2. $x_{n+1}y_i = 0$ *(*x_{n+1} *er slakabr. í* P*)*

fyrir öll i *og* j*.*

Sönnun Sjáum að strax að 1. og 2. eru tilsvarandi tilvik. Höfum að

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \overset{(\star)}{\leq} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j$$

því $c_j \leq \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ (sjá veiku nykursetninguna 6.2). Jafnaðarmerkið í $(\star)$ gildir annaðhvort þegar

(i) $x_j = 0$ fyrir öll $j \in \{1, ..., n\}$,

(ii) eða $c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = z_j$ þ.e. $z_j - c_j = 0$.

6.7 Frumverkefni sem eru ekki á stöðluðu formi

Getum alltaf komið línulegu bestunarverkefni yfir á staðlað form

$$\begin{aligned} \min z &\to \max -z \\ \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} &\to -\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} &\to \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \text{ og } \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ x_i \text{ frjáls} &\to x_i = x_i^+ - x_i^- \text{ með } x_i^+, x_i^- \geq 0. \end{aligned}$$

Athugasemd. Á bls. 213–215 í H&L eru nokkur trix sem stytta manni leið við að ákvarða form skorða og breyta í nykurverkefnum.

Annað verkefnið		Hitt verkefnið
$\max z$ (eða w)		$\min w$ (eða z)
skorða i		breyta y_i (eða x_i)
$\leq$	$\longleftrightarrow$	$y_i \geq 0$
$=$	$\longleftrightarrow$	y_i óskorðað
$\geq$	$\longleftrightarrow$	$y_i \leq 0$
breyta x_j (eða y_j)		skorða j
$x_j \geq 0$	$\longleftrightarrow$	$\geq$
x_j óskorðað	$\longleftrightarrow$	$=$
$x_j \leq 0$	$\longleftrightarrow$	$\leq$

Dæmi 6.4 (Nykurverkefni geisladæmisins 4.5) Höfum frumverkefni:

Heildarmagn geislunar	$\max_{x_1,x_2} -z = -0.4x_1 - 0.5x_2$
Heilbrigðir vefir	$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$
Krabbameinssvæði	$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6.0$
Miðja æxlis	$0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6.0$
	$x_1, x_2 \geq 0$

LAUSN: Þá er nykurverkefnið:

	$\min_{y_1,y_2,y_3} w = 2.7y_1 + 6y_2 + 6y_3$			
Geisli 1:	$0.3y_1$	$+0.5y_2$	$+0.6y_3$	≥ -0.4
Geisli 2:	$0.1y_1$	$+0.5y_2$	$+0.4y_3$	≥ -0.5
	$y_1 \geq 0$			
	y_2 óskorðað			
	$y_3 \leq 0$			

6.8 Strangt fyllingarskilyrði

Um **ströng fyllingarskilyrði** (e. strict complementarity) höfum við:

- Ef strangt fyllingarskilyrði *gildir*, en það segir að allar grunnbreytur séu $\neq 0$ (breytur utan grunns eru jú 0, en þetta þýðir að engar aðrar breytur séu 0 *fyrir tilviljun*). Þá gildir:

  (i) x er grunnbreyta þ.þ.a.a. tilsvarandi nykur skorða er virk, þ.e.a.s.

$$\begin{aligned} x_j \neq 0 \quad &\iff \quad \boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{y} = c_j \\ x_i^{\text{slaka}} \neq 0 \text{ (þ.e. } \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} \neq b_i) \quad &\iff \quad y_i = 0 \end{aligned}$$

  (ii) Ef upphafleg (frum) skorða er virk þ.þ.a.a. tilsvarandi nykur breyta er í grunni, þ.e.a.s.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} = b_i \quad &\iff \quad y_i \neq 0 \\ x_j = 0 \quad &\iff \quad y_j^{\text{slaka}} \neq 0 \text{ (þ.e. } \boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{y} \neq c_j) \end{aligned}$$

Athugasemd. Ljóst er að (i) er jafngilt (ii).

- Ef strangt fyllingarskilyrði *gildir ekki*, hefur í för með sér að til eru lausnir á frumverkefni og því gagnvirka (nykur):

$$\begin{aligned} x_j \text{ er í grunni} \quad &\iff \quad y_j^{\text{slaka}} \text{ er utan grunns} \\ x_i^{\text{slaka}} \text{ er í grunni} \quad &\iff \quad y_i \text{ er utan grunns} \end{aligned}$$

Athugasemd. Þó skorðan $\boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{y} = c_j$ sé virk er ekki nauðsynlegt að tilsvarandi slakabreyta sé utan grunns.

6.9 Næmnigreining og nykurverkefni

Næmnigreining (e. sensitivity analysis) kannar áhrif breytinga á c_j, b_i og a_{ij} á bestu lausn.

- Er lausnin gjaldgeng eftir breytingu?
- Er hún enn best?

Þessum spurningum (ásamt fleiri) má oft svara með lítilli fyrirhöfn m.þ.a. nýta vensl milli frum- og nykurverkefna. Sjaldnast þarf að leysa líkanið frá grunni.

Dæmi 6.5 (Ný vara bætist við hjá Wyndor úr dæmi 3.1)

$$\max_{\boldsymbol{x}} z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_{\text{ný}}$$

m.t.t. skorðanna

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & 2x_{\text{ný}} & \leq & 4 \\ & & 2x_2 & + & 3x_{\text{ný}} & \leq & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_{\text{ný}} & \leq & 18 \\ \multicolumn{7}{c}{x_1, x_2, x_{\text{ný}} \geq 0} \end{array}$$

Besta lausn sem við fundum fyrir upphaflega verkefnið var $x_1 = 2$,$x_2 = 6$ og því $x_{\text{ný}} = 0$. Hún er augljóslega gjaldgeng, en er hún enn best?

Lausn: Ný breyta í frumverkefni svarar til nýrrar skorðu í nykurverkefni:

$$2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 4 \tag{6.3}$$

Lesum fyllingalausnina $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^* - \boldsymbol{c}^*) = (y_1^*, y_2^*, y_3^*, z_1^* - c_1^*, z_2^* - c_2^*)$ beint út úr loka Simplex-töflunni (sjá lausn á bls. 52):

grunnbr.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	HH
z	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36
x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

þ.e. skorða (6.3) fyrir $\boldsymbol{y}^*$ verður

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{3}{2} + 1 \cdot 1 = \frac{11}{2} = 5.5 \geq 4.$$

Nykurlausnin er gjaldgeng, frumlausnin er gjaldgeng og lausnin er því ennþá best.

Athugasemd.

(i) Framlegð $c_{\text{ný}}$ er ekki nógu mikil til þess að Wyndor hafi ávinning á því að framleiða þessa nýju vöru.

(ii) Önnur leið að sömu niðurstöðu væri að leysa líkanið upp á nýtt.

Næmnigreining er mikilvæg í línulegri bestun því gert er ráð fyrri að stikar líkansins (b_i, c_j, a_{ij}) eru *þekktir fastar.* Oft eru gildi á stikunum einhvers konar spá um ástönd sem gilda í framtíðinni (t.d. framlegðartölur) og stikamatið því háð talsverðri óvissu. Í öðrum tilvikum geta gildi á stikunum endurspeglað ákvarðanir sem e.t.v. eru ekki vel ígrundaðar eða væri auðvelt að breyta. Dæmi um slíkt gæti verið tími til umráðana hjá Wyndor. Þess vegna er mikilvægt að kanna hvernig líkanið bregst við breytinum á stikum. Finna þarf hvaða stikar hafa mikil áhrif (e.t.v. þarf að endurmeta einhverja þeirra í framhaldinu). Fyrir þá stika sem hafa tiltölulega lítil áhrif á er gagnlegt að vita á hvaða bili þeir mega liggja án þess að besta lausn breytist að ráði.

6.10 Framgangsmáti næmnigreiningar

1. Uppfæra líkan m.t.t. breytinga á stikum.
2. Uppfæra loka Simplex-töfluna.
3. Koma töflunni yfir á eiginlegt form með Gauss-eyðingu.
4. Er lausnin gjaldgeng? (þ.e. hægri hlið ≥ 0)

Nei $\rightarrow$ Besta aftur (laga lokatöflu og nota sem upphafstöflu).
Já $\rightarrow$ Er lausnin ennþá best? (allir stuðlar í línu (0) eru ≥ 0)
Nei $\rightarrow$ Ítra með Simplex-aðferðinni.

Athugasemd. Ekki er alltaf nauðsynlegt að framkvæma öll þessi skref.

Þessi framgangsmáti miðar við að við viljum framkvæma næmnigreiningu á reikningslega hagkvæman máta, þ.e. ekki leysa líkönin ítrekað frá grunni, fyrir mismunandi gildum á stikunum t.d. $b_1 = 1, b_1 = 1.1, b_1 = 1.2$ o.s.frv.

Við finnum hvernig lokataflan myndi líta út ef við byrjum með nýju gildin $(\overline{\boldsymbol{c}}, \overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{A}})$ í upphafstöflunni, beitum sömu grunnaðgerðum (Gauss-eyðing) og við gerðum við með upphaflegu gildunum.

Athugasemd. Algengara er að skoða áhrif þess að breyta einum stika í einu heldur en mörgum í einu.

$\overline{\boldsymbol{A}}$	$\boldsymbol{A}$ fylki eftir breytingu,
$\overline{\boldsymbol{b}}$	hægri hlið eftir breytingu,
$\overline{\boldsymbol{c}}$	markfallsstuðlar eftir breytingu,
$\boldsymbol{y}^*$	skuggaverð í lokatöflu,
$\boldsymbol{S}^*$	stuðlar við slakabreytur í lokatöflu.

Tafla 6.1: Ritháttur

Lokatafla eftir breytingar

Jafna	z	Ákv.br. $x_1, ..., x_n$	Slakabr. $x_{n+1}, ..., x_{n+m}$	Hægri hlið
(0)	1	$\boldsymbol{y}^*\overline{\boldsymbol{A}} - \overline{\boldsymbol{c}}$	$\boldsymbol{y}^*$	$\boldsymbol{y}^*\overline{\boldsymbol{b}} = z^*$
$(1, \ldots, m)$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{S}^*\overline{\boldsymbol{A}}$	$\boldsymbol{S}^*$	$\boldsymbol{S}^*\overline{\boldsymbol{b}}$

6.10.1 Breytingar á hægri hlið

Þegar breytingar eru gerðar á hægri hlið (þ.e. $\boldsymbol{b}$) þá er taflan á réttu formi (Gauss-eyðing óþörf), og svo fremi sem hægri hlið er ≥ 0 (gjaldgeng lausn) eftir breytingarnar er lausnin enn best. Hægri hlið verður (eftir breytingu)

$$\begin{aligned} \text{Jafna } (0) &: \quad z^* = \boldsymbol{y}^*\overline{\boldsymbol{b}} \\ \text{Jafna } (1, ..., m) &: \quad \boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{S}^*\overline{\boldsymbol{b}} \end{aligned}$$

Dæmi 6.6 (Wyndor úr dæmi 3.1) Wyndor fer með b_2 úr 12 í

24, þ.e.

$$\bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

Er upphaflega lausnin enn best?

Lausn: Lokataflan fyrir upphaflega líkanið (sjá lausn á bls. 52)

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	HH
1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36
0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

Þá verður

$$\begin{aligned}
z^* &= \boldsymbol{y}\bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} = 36 + 18 = 54 \\
\boldsymbol{b}^* &= \boldsymbol{S}^*\bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+8-6 \\ 12 \\ -8+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Lausnin (sem áður var best) er því

$$(x_1 = -2, x_2 = 12, x_3 = 6, x_4 = x_5 = 0) \quad \text{með} \quad z = 36$$

sem er *ekki gjaldgeng* því $x_1 = -2 < 0$.

Þurfum því að besta aftur (e. reoptimisation) annaðhvort með

- Nykur-Simplex aðferðin (7. kafli), eða
- Frá grunni með $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$,

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	HH
1	-3	-5	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	4
0	0	2	0	1	0	24
0	3	2	0	0	1	18
$>> T = pivot(T, 4, 3)$						
1	$\frac{9}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$	45
0	1	0	1	0	0	4
0	-3	0	0	1	-1	6
0	$\frac{3}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	9

Nýja besta lausnin er:

$$(x_1 = 0, x_2 = 9, x_3 = 4, x_4 = 6, x_5 = 0) \quad \text{með} \quad z^* = 45.$$

Sjáum að við hættum að framleiða vöru 1.

Athugum nú á *hvaða bili* (e. allowable range) $\overline{\boldsymbol{b}}$ getur legið þ.a. lausnin verði áfram gjaldgeng

$$\boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{S}^* \overline{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{b} + \Delta \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{S}^* \boldsymbol{b} + \boldsymbol{S}^* \Delta \boldsymbol{b} \geq 0$$

Dæmi 6.7 (Leyfileg breyting á hægri hlið Wyndors) Sáum í dæmi 6.6 að með $b_2 = 12 \rightarrow 24 = \overline{b}_2$ varð lausnin óleyfileg. Finnum leyfilega breytingu á b_2 þ.a. lausnin verði enn gjaldgeng.

LAUSN: Höfum

$$\boldsymbol{S}^*\Delta\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta b_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\Delta b_2 \\ \frac{1}{2}\Delta b_2 \\ -\frac{1}{3}\Delta b_2 \end{bmatrix}$$

Þá þarf að gilda

$$\begin{array}{lcl} 2 + \frac{1}{3}\Delta b_2 \geq 0 & \rightarrow & \Delta b_2 \geq -6 \\ 6 + \frac{1}{2}\Delta b_2 \geq 0 & \rightarrow & \Delta b_2 \geq -12 \\ 2 - \frac{1}{3}\Delta b_2 \geq 0 & \rightarrow & \Delta b_2 \leq 6 \end{array}$$

Því er $\boldsymbol{x}^*$ gjaldgengt ef $-6 \leq \Delta b_2 \leq 6$, eða $12 - 6 \leq b_2 \leq 12 + 6$, þ.e. $6 \leq b_2 \leq 18$.

6.10.2 Breyting á stuðlum ákvarðanabreytu ekki í grunni

Breyting á stuðlum við x_j, þar sem x_j er ekki í grunni þýðir annaðhvort

$$a_{ij} \rightarrow \overline{a}_{ij} \quad \text{og/eða} \quad c_j \rightarrow \overline{c}_j$$

Lausnin verður áfram gjaldgeng í frumverkefni (því $x_j = 0$). Ef hún er líka gjaldgeng í nykurverkefni þá er hún enn best.

Dæmi 6.8 (Afbrigði af Wyndor)

$$\max_{\boldsymbol{x}} z = 3x_1 + 5x_2$$

m.t.t. sk.

$$\begin{array}{lll} x_1 & & \leq 4 \\ & 2x_2 & \leq 24 \\ 3x_1 & +2x_2 & \leq 18 \end{array}$$

Besta lausnin var fundin í dæmi 6.7 og var $x_1 = 0$, $x_2 = 9$ með $z = 45$. Hvernig breytist lausnin þegar c_1 og a_{i1} breytist *samtímis* ef

$$c_1 = 3 \rightarrow \overline{c}_1 = 4 \quad \text{og} \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \overline{\boldsymbol{A}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Lausn: Lokataflan var fundin hér á undan og var

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	HH
1	$\frac{9}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$	45
0	1	0	1	0	0	4
0	-3	0	0	1	-1	6
0	$\frac{3}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	9

Lesum úr töflunni $y_1^* = 0,\ y_2^* = 0,\ y_3^* = \frac{5}{2}$ með $z^* = 45$.

Ein skorða nykurverkefnisins breytist:

$$\begin{array}{lll} \text{Áður:} & y_1 + 3y_3 & \geq 3 \\ \text{Eftir:} & y_1 + 2y_3 & \geq 4 \end{array} \quad \overset{\text{set inn } \boldsymbol{y}^*}{\Longrightarrow} \quad 0 + 2\tfrac{5}{2} \geq 4,$$

Lausnin er gjaldgeng í nykurverkefninu, og því enn best.

Athugum nú á *hvaða bili* $\bar{\boldsymbol{c}}$ getur legið án þess að besta lausn breytist (g.r.f. að $\boldsymbol{A}$ breytist ekki). Þá þarf að gilda

$$z_j^* - c_j \geq 0$$

með $z_j^* = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = \boldsymbol{y}^* \boldsymbol{A}_j$ verður skilyrðið

$$c_j \leq \boldsymbol{y}^* \boldsymbol{A}_j$$

Dæmi 6.9 (Leyfileg breyting á ekki-grunnbreytu Wyndors)
Á hvaða bili getur c_1 legið án þess að besta lausn breytist?

Lausn:

$$c_i \leq \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \frac{5}{2} \cdot 3 = 7.5$$

Leyfilegt bil er því $c_1 \leq 7.5$.

Athugasemd. Stærðin $z_j - c_j$ fyrir breytu x_j sem ekki er í grunni kallast **fallverð** (e. reduced cost). Það segir til um hveru mikill einingakostnaður við vöru j þarf að *lækka* til þess að það borgi sig að framleiða vöruna (þ.e. x_j verði > 0).

Ef c_j táknar framlegð/hagnað þá er $z_j - c_j$ hámarks *aukning* á hagnaði þ.a. núverandi grunnlausn sé enn best.

6.10.3 Ný breyta innleidd

Sami framgangsmáti og í 6.10.2. Sjá dæmi 6.5.

6.10.4 Breyting á stuðlum ákvarðanabreytu í grunni

Breyting á stuðlum við x_j þegar x_j er í grunni (í lokatöflu). Eftir að dálkur j hefur verið uppfærður í lokatöflu, þ.e.

$$\begin{array}{lrl} \text{Stuðullinn við } x_j \text{í línu } (0): & z_j^* - \bar{c}_j = & \boldsymbol{y}^* \overline{\boldsymbol{A}}_j - c_j \\ \text{Stuðlar við } x_j \text{í línu } (1, ..., m): & \boldsymbol{A}_j^* = & \boldsymbol{S}^* \overline{\boldsymbol{A}}_j \end{array}$$

þarf yfirleitt að koma töflunni yfir á rétt eiginlegt form með Gauss-eyðingu.

Dæmi 6.10 (Afbrigði af Wyndor)

$$\max_{\boldsymbol{x}} z = 3x_1 + 5x_2$$

m.t.t. sk.

$$\begin{array}{rrl} x_1 & & \leq 4 \\ & 2x_2 & \leq 24 \\ 3x_1 & +2x_2 & \leq 18 \end{array}$$

Besta lausnin var fundin í dæmi 6.7, og var $(x_1, x_2) = (0, 9)$ með $z = 45$. Sá möguleiki er fyrir hendi að framlegð vöru 2 hafi verið ofmetin, ásamt því að hráefninotkun hafi verið vanmetin. Könnum áhrif þess að breyta:

$$c_2 = 5 \rightarrow \bar{c}_2 = 3 \quad \text{og} \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \overline{\boldsymbol{A}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Lausn: Þá er

$$\begin{aligned} z_2^* - \bar{c}_2 &= \boldsymbol{y}^* \overline{\boldsymbol{A}}_2 - \bar{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - 3 = 10 - 3 = 7 \\ \boldsymbol{A}_2^* &= \boldsymbol{S}^* \overline{\boldsymbol{A}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lokataflan verður þá

grunnbr.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	HH	minratio-test
$>> T$							
1	$\frac{9}{2}$	**7**	0	0	$\frac{5}{2}$	45	koma á eiginlegt form
x_3	1	0	1	0	0	4	
x_2	$\frac{3}{2}$	$\boxed{\mathbf{2}}$	0	0	$\frac{1}{2}$	9	
x_4	-3	-1	0	1	-1	6	
$>> T = pivot(T, 3, 2)$							
1	$-\boldsymbol{\frac{3}{2}}$	0	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{27}{2}$	
x_3	$\boxed{1}$	0	1	0	0	4	$4/1 = 4 \leftarrow \min$
x_2	$\frac{3}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}/\frac{3}{4} = 6$
x_4	$-\frac{9}{4}$	0	0	1	$-\frac{3}{4}$	21	$-$
$>> T = pivot(T, 2, 1)$							
1	0	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{33}{2}$	
x_1	1	0	1	0	0	4	
x_2	0	1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	
x_4	0	0	$\frac{9}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{39}{2}$	

Besta lausn er $x_1^* = \frac{3}{2}$, $x_2^* = \frac{3}{2}$ með $z^* = \frac{33}{2}$.

Athugasemd. Besta lausn er *ekki* heiltölulausn!

Það er aðeins meira mál en áður að finna á hvaða bili c_j getur legið þ.a. lausnin sé áfram best. Ástæðan er sú að beita þarf Gauss-eyðingu á lokatöfluna. Sjá bls. 238–239.

6.10.5 Ný skorða bætist við

- Ef besta lausn uppfyllir skorðuna, þá er lausnin enn best.
- Annars þarf að bæta skorðuna við í lokatöfluna. Koma töfluna yfir á rétt form með Gauss-eyðingu og halda áfram með Simplex.

Dæmi um hagnýtingu (kerfislíffræði): Leit að smæsta mengi sem lífverur þurfa að hafa til að geta vaxið og dafnað. Sjá einnig dæmi á bls. 240 í H&L.

6.10.6 Kerfisbundin næmnigreining

Kerfisbundin næmnigreining (e. parametric programming) skoðar áhrif þess þegar einum eða fleiri stikum er breytt samfellt á einhverju bili.

6.11 Næmnigreining í glpk

Dæmi 6.11 Næmnigreining á Wyndor með **glpk**: Hér ætlum við að taka fyrir gluggabreytuna x_1 sér.

```
# wyndor.mod ——   Wyndor GLPK example
#     max Z=(c1)x1 + 5x2
#     s.t.   x1          <= 4
#                   x2 <= 12
#          3x1 + 2x2 <= 18
#           x1 >=0, x2 >=0
```

```
# where c1 is to be varied

param c1 := 3; # Modify this value!

set product;
set factory;

param profit{j in product};
param resource{i in factory};
param A{i in factory, j in product};

var x{product} >= 0;

maximize Z: sum{j in product: j != "window"} profit[j]*x[j] + c1*x["window"];

subject to hours{i in factory} : sum{j in product} x[j] * A[i,j] <= resource[i];

solve;

# write results to file WYNDOR_RESULTS.TXT
printf : "c1=%.3f ", c1 >> "wyndor_results.txt";
printf{j in product} : "x[%s]=%.3f, ", j, x[j] >> "wyndor_results.txt"; # append to file
printf : "Z=%.3f\n", sum{j in product} profit[j]*x[j] >> "wyndor_results.txt"; # append to file
```

../glpk/wyndor.mod

```
data;
set product := window door;
set factory := 1 2 3;
param profit :=
    window  3
    door    5;
param resource :=
    1   4
    2   12
    3   18;
param A:        window   door :=
  1         1        0
  2         0        2
```

```
  3          3          2;
end;
```

../glpk/wyndor.dat

Lausn: Möguleikinn `-wcpxlp` býr til skránna `cplex.txt` sem sýnir hvernig GLPK túlkar MathProg. Gott er að skoða þessa skrá til að debögga mögulegar villur – líka til að athuga hvort líkanið sé ekki örugglega kórrétt:

```
\* Problem: wyndor *\

Maximize
 Z: + 3 x(window) + 5 x(door)

Subject To
 hours(1): + x(window) <= 4
 hours(2): + 2 x(door) <= 12
 hours(3): + 3 x(window) + 2 x(door) <= 18

End
```

`../glpk/wyndor_cplex.txt`

Keyrum úr skelinni eftirfarandi skipun.

```
glpsol --wcpxlp wyndor_cplex.txt -m wyndor.mod --data wyndor.dat -o
     wyndor_lausn.txt
```

Næmnigreiningin er síðan í úttaksskránni `wyndor_lausn.txt`:

```
Problem:    wyndor
Rows:       4
Columns:    2
Non-zeros:  6
Status:     OPTIMAL
Objective:  Z = 36 (MAXimum)

   No.   Row name   St   Activity     Lower bound   Upper bound
       Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- -------------
     -------------
     1 Z            B             36
     2 hours[1]     B              2                           4
     3 hours[2]     NU            12                          12
                    1.5
     4 hours[3]     NU            18                          18
                      1

   No. Column name  St   Activity     Lower bound   Upper bound
       Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- -------------
     -------------
     1 x[window]    B              2             0
     2 x[door]      B              6             0

Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions:

```

```
KKT.PE: max.abs.err = 0.00e+00 on row 0
        max.rel.err = 0.00e+00 on row 0
        High quality

KKT.PB: max.abs.err = 0.00e+00 on row 0
        max.rel.err = 0.00e+00 on row 0
        High quality

KKT.DE: max.abs.err = 0.00e+00 on column 0
        max.rel.err = 0.00e+00 on column 0
        High quality

KKT.DB: max.abs.err = 0.00e+00 on row 0
        max.rel.err = 0.00e+00 on row 0
        High quality

End of output
```

../glpk/wyndor_lausn.txt

Gerum eins fyrir afbrigðið á Wyndor úr dæmi 6.8

```
hei2@Helga:~/Work/IDN401G/glpk$ glpsol --wcpxlp wyndor_afbrigdi_cplex.
    txt -m wyndor.mod --data wyndor_afbrigdi.dat -o
    wyndor_afbrigdi_lausn.txt
```

Næmnigreiningin er síðan í úttaksskránni `wyndor_afbrigdi_lausn.txt`:

```
\* Problem: wyndor *\

Maximize
 Z: + 3 x(window) + 5 x(door)

Subject To
 hours(1): + x(window) <= 4
 hours(2): + 2 x(door) <= 24
 hours(3): + 3 x(window) + 2 x(door) <= 18

End
```

`../glpk/wyndor_afbrigdi_cplex.txt`

```
Problem:    wyndor
Rows:       4
Columns:    2
Non-zeros:  6
Status:     OPTIMAL
Objective:  Z = 45 (MAXimum)

   No.   Row name   St   Activity     Lower bound   Upper bound
       Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- -------------
     -------------
     1 Z            B             45
     2 hours[1]     B              0                           4
     3 hours[2]     B             18                          24
     4 hours[3]     NU            18                          18
                    2.5

   No. Column name  St   Activity     Lower bound   Upper bound
       Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- -------------
     -------------
     1 x[window]    NL             0             0
                                -4.5
     2 x[door]      B              9             0

Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions:

KKT.PE: max.abs.err = 0.00e+00 on row 0
        max.rel.err = 0.00e+00 on row 0
        High quality

KKT.PB: max.abs.err = 0.00e+00 on row 0
        max.rel.err = 0.00e+00 on row 0
```

```
         High quality

KKT.DE:  max.abs.err = 0.00e+00 on column 0
         max.rel.err = 0.00e+00 on column 0
         High quality

KKT.DB:  max.abs.err = 0.00e+00 on row 0
         max.rel.err = 0.00e+00 on row 0
         High quality

End of output
```

../glpk/wyndor_afbrigdi_lausn.txt

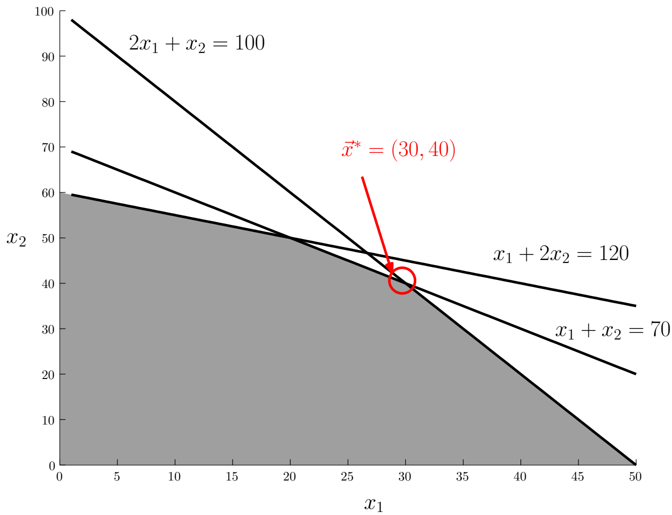
6.12 Samantekt

Hvernig er lausn verkefnis háð litlum breytingum í stikum þess $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}$?

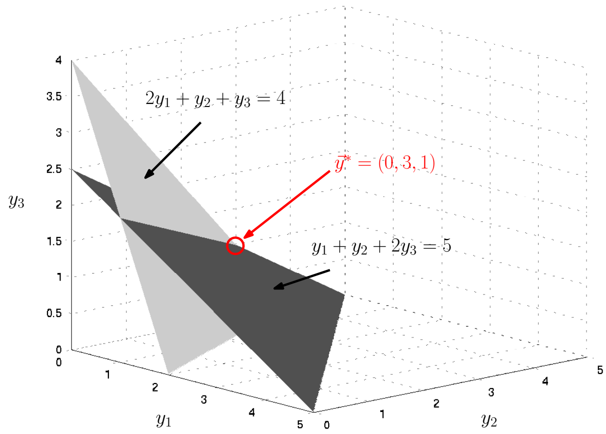
- Hvað er $\frac{\partial z}{\partial c_j}$, $\frac{\partial z}{\partial b_i}$, $\frac{\partial z}{\partial a_{ij}}$, ef grunnur helst óbreyttur?

  Svar: $\frac{\partial z}{\partial c_j} = x_j$, $\frac{\partial z}{\partial b_i} = y_i$, $\frac{\partial z}{\partial a_{ij}} = -y_i x_j$ (ekki sannað hérna)

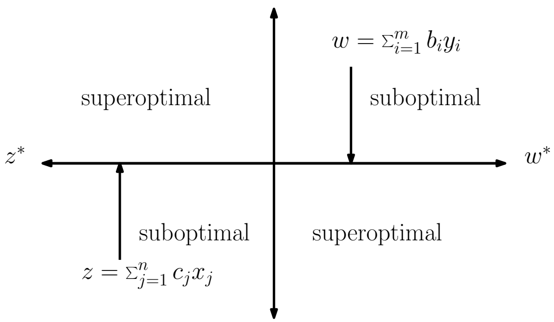
- Hve mikið má breyta c_j, a_{ij} og b_i án þess að grunnur breytist?



Mynd 6.1: Myndræn lausn á frumverkefninu 6.2



Mynd 6.2: Myndræn lausn á nykurverkefninu 6.3


$w = \Sigma_{i=1}^{m} b_i y_i$
superoptimal
suboptimal
z^*
w^*
suboptimal
superoptimal
$z = \Sigma_{j=1}^{n} c_j x_j$

Kafli 7

Netverkefni

7.1 Flutningsverkefni

Flutnings- og úthlutunarverkefni veru línuleg bestunarverkefni sem hægt er að leysa á hagkvæman máta með sérhæfðum afbrigðum af Simplex-aðferðinni sem nýta sér sérstaka eiginleika verkefnana.

Athugasemd. Mörg hagnýt bestunarverkefni eru á þessu formi.

7.2 Flutningsverkefni

Flutningsverkefni (e. transportation problem) snýst um flutning á vörum frá framleiðendum/birgjum til viðtakenda þ.a. kostnaður við að flytja vörurnar sé lágmarkaður. Látum:

c_{ij} kostnaður við að flytja eina einingu frá i til j.

s_i framboð (e. supply) framleiðanda i.

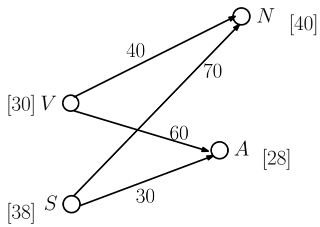
d_j eftirspurn (e. demand) viðtakenda j.

x_{ij} magn sem flutt er frá i til j.

z flutningskostnaður

G.r.f. að framboð og eftispurn sé í jafnvægi, þ.e. $\sum_i s_i = \sum_j d_j$.

Dæmi 7.1 (Heyflutningur) Við höfum framboð[1] af hey frá Vestur- og Suðurlandi (V og S), en það er eftirspurn[1] fyrir hey á Norður- og Austurlandi (N og A). Tölurnar við örvarnar segja svo til um kostnað per einingu:



Lausn: Setjum upp í flutningstöflu þar sem framboðið kemur fram í dálki lengst til hægri og eftirspurnin í neðstu línu töflu. Fyllt er upp í töfluna með kostnaðartölum á einingu:

i/j	N $(j=1)$	A $(j=2)$	s_i
V $(i=1)$	40	60	30
S $(i=2)$	70	30	38
d_j	40	28	68

Þar sem s_i er framboðið og d_j er eftirspurnin.

Línulega bestunarverkefnið er:

$$\min_{\boldsymbol{x}} z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

[1]tölurnar í hornklofunum

Skorðurnar eru eftirfarandi jafnaðarskorður:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= s_i \quad \text{fyrir} \quad i \in \{1, \dots, m\} \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= d_j \quad \text{fyrir} \quad j \in \{1, \dots, n\}
\end{aligned}
$$

og $x_{ij} \geq 0$ fyrir öll i og j.

Á fylkjaformi eru skorðurnar $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ með

$$
\begin{bmatrix}
1 & \cdots & 1 & & & & & & & \\
 & & & 1 & \cdots & 1 & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & & 1 & \cdots & 1 \\
1 & & & 1 & & & & 1 & & \\
 & \ddots & & & \ddots & & \cdots & & \ddots & \\
 & & 1 & & & 1 & & & & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{m1} \\ \vdots \\ x_{mn}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
s_1 \\ \vdots \\ s_m \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n
\end{bmatrix}
$$

Nykurverkefnið er þá

$$
\max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} w = \sum_{i=1}^{m} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n} d_j v_j
$$

m.t.t. sk.

$$
\begin{aligned}
u_i + v_j &\leq c_j \\
u_i,\ v_j &\ \text{óskorðuð}
\end{aligned}
$$

(Skuggaverð $\boldsymbol{y} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)$).

Athugasemd.

1. Verkefnið hefur þann eiginleika að ef öll s_i og d_j eru heiltölur þá er besta lausn *heiltölulausn*.

2. Það er alltaf til gjaldgeng lausn. Sjáum það með því að setja $x_{ij} = \frac{s_i d_j}{K}$ þar sem $K = \sum_i s_i = \sum_j d_j$. Þá er

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{s_i d_j}{K} = s_i \frac{\sum_j d_j}{K} = s_i \frac{K}{K} = s_i, \quad i \in \{1, ..., m\}$$

   og eins fæst $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j$, $j \in \{1, ..., n\}$, þ.e. allar skorður uppfylltar.

3. Við reiknum með að $\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$. Til að tryggja að það gangi alltaf upp þarf ef til vill að bæta við:
   - **Gervi upphafstaður** (e. dummy source) ef $\sum s_i < \sum d_j$ með engan flutningskostnað. Líka notað þegar eftirspurn er ótakmörkuð.
   - **Gervi áfangastaður** (e. dummy destination) ef $\sum s_i > \sum d_j$. Setjum eftirspurn hjá þessum viðtakendum jafna umframboðinu og tilsvarandi kostnað sem núll.
4. Ef einhver flutningsleið er ekki leyfileg má setja stóran kostnað fyrir þá leið (samsvarar stóru-M aðferð). Sjá nánar bls. 313–317 í H&L
5. Fylkið $\boldsymbol{A}$ hefur línulega háðar línur og einni skorðu er ofaukið. Þar af leiðandi er fjöldi grunnbreyta $n + m - 1$.

7.3 Flutnings-Simplex aðferðin

Flutnings-Simplex aðferðin er löguð að stikum verkefnisins – nýtir sér rýrleika $\boldsymbol{A}$.

Fasi 1 Finna gjaldgenga grunnlausn (alltaf til) t.d. með:

- Norð-vestur aðferð
- Aðferð lægsta kostnaðar
- Reglu Vogel
- Reglu Russel

Fasi 2 Bestun

Skref 1 Reikna skuggaverð u_i, v_j fyrir öll (i, j) sem eru í *grunni*. Um grunnbreytur gildir $c_{ij} - u_i - v_j = 0$.

Skref 2 Reikna **fallverð** (e. reduced cost) $r_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ fyrir öll (i, j) sem eru *ekki í grunni*.

Parið (i, j) sem svarar til mest neikvæða gildisins á r_{ij} kemur næst inn í grunn (þannig minnkar kostnaðarfallið hraðast).

Ef öll $r_{ij} \geq 0$ þá er besta lausn fundin.

Skref 3 Ákvarða breytu sem fer úr grunni m.þ.a. finna **hringrás** (e. chain reaction)

Skref 4 Aftur í Skref 1

Dæmi 7.2 sýnir flutningstöflu þar sem kostnaður er einnig tekinn til greina. Kostnaðurinn við að senda á milli viðkomandi áfangastaða er settur í horn hvers dálks. Í upphafi þarf að finna löglega lausn. Til eru nokkrar aðferðir til að finna upphafsgrunnlausn fyrir flutningsverkefnið.

Dæmi 7.2 Höfum eftirfarandi kostnaðartöflu fyrir flutningsverkefni á milli verksmiðja og áfangastaða gefna

		Áfangastaðir			
		1	2	3	s_i
Verksmiðjur	1	$\boxed{10}$	$\boxed{15}$	$\boxed{12}$	15
	1	$\boxed{8}$	$\boxed{17}$	$\boxed{14}$	20
	d_j	5	18	12	

7.3.1 Norðvestur-horns (NV) aðferðin

1. Byrjum í norð-vestur horni töflunnar (efst til vinstri).

2. Finnum lágmark á framboði og eftirspurn.

3. Skrifum lágmarkið í stóra kassann.

4. Förum til hægri og finnum það lágmark sem uppfyllur skilyrði þess dálks.

5. Þegar öll skilyrði viðkomandi línu eru uppfyllt, förum við neðar í töfluna og endurtökum leikinn.

Athugasemd. Passa að fara alltaf til hægri þar til summan í viðkomandi línu er uppfyllt.

LAUSN (Á DÆMI 7.2): Notum NV-aðferðina til að finna upphafslausn:

Áfangastaðir

Verksmiðjur	1	2	3	s_i
1	$\boxed{10}$ 5	$\boxed{15}$ 10	$\boxed{12}$	15
2	$\boxed{8}$	$\boxed{17}$ 8	$\boxed{14}$ 12	20
d_j	5	18	12	

7.3.2 Flutningasimplex aðferðin

1. Finnum gjaldgenga grunnlausn (e. BFS) með NV-hornsreglu, Vogelsreglu eða Russelsreglu. Ef

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

þá er til leyfileg lausn.

2. Reiknum skuggaverð. Leysum $\boldsymbol{yB} = \boldsymbol{c}_B$. Lát $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{u}_{1\times n}, \boldsymbol{v}_{1\times m})$ þá gildir að $u_i + v_j = c_{ij}$ fyrir öll (i, j) í grunni (e. basic).

Athugasemd. Dæmigerður dálkur í $\boldsymbol{B}$ fylki (sæti i og $m+j$ með 1 annars 0):

$$[u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n][0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]^{\mathrm{T}} = c_{ij}$$

3. Finnum stak $(\hat{i}, \hat{j})$ sem kemur inn í grunn. Reiknum kostnaðarminnkun

   $$\hat{c}_{ij} = c_{ij} - \boldsymbol{y}\boldsymbol{a}_{ij}$$

   þar sem $\boldsymbol{a}_{ij}$ er (ij)-dálkur $\boldsymbol{A}$, fyrir öll (i, j) sem eru utan grunns.

   Veljum nú það par sem gefur mesta neikvæða gildi (þá minnkar kostnaðarfallið hraðast). Ef öll $\hat{c}_{ij} \geq 0$ er besta lausnin fundin.

4. Ákvörðum breytu sem fer úr grunni með því að finna hringrás

Athugasemd. Fylkið í flutningaverkefnum hefur línulega háðar línur. Það þýðir að einni skorðu er í raun ofaukið og við getum sleppt einhverri skorðunni, en hinsvegar sakar ekki að hafa hana með. Samkvæmt þessu eru grunnbreytur $n+m-1$.

Dæmi 7.3 Flutningur úr vörubílum ($m = 3$) til smásala ($n = 4$).

Vöruhús \ Smásalar	$S1$	$S2$	$S3$	$S4$	s_i
V1	$\boxed{12}$	$\boxed{13}$	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	500
V2	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	700
V3	$\boxed{10}$	$\boxed{9}$	$\boxed{12}$	$\boxed{4}$	800
d_j	400	900	200	500	

Lausn: Framboð og eftispurn eru í jafnvægi:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} s_i &= 500 + 700 + 800 = 2000 \\
\sum_{j=1}^{n} d_j &= 400 + 900 + 200 + 500 = 2000
\end{aligned}
$$

og því ekki þörf á að bæta við gerviupphafsstöð eða -viðtakendum.

Fasi 1 Norðvestur aðferð:

(i) Byrja með x_{11} (norð-vestur horn)

(ii) Úthluta eins miklu og hægt er (hér 400) og uppfæra framboð og eftispurn.

(iii) Strika út línu/dálk með núll í framboð/eftirspurn.

(iv) Fara aftur í skref (ii) þangað til gjaldgeng lausn er fengin.

Smásalar

Vöruhús		$S1$	$S2$	$S3$	$S4$	s_i
	V1	$\boxed{12}$ 400	$\boxed{13}$ 100	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	~~500~~ ~~100~~ 0
	V2	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$ 700	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	~~700~~ 0
	V3	$\boxed{10}$	$\boxed{9}$ 100	$\boxed{12}$ 200	$\boxed{4}$ 500	~~800~~ ~~700~~ ~~500~~ 0
	d_j	~~400~~ 0	~~900~~ ~~800~~ 0	~~200~~ 0	~~500~~ 0	

Sjáum að upphafslausn er $x_{11} = 400, x_{12} = 100, x_{22} = 700,$

$x_{32} = 100$, $x_{33} = 200, x_{34} = 500$ og önnur $x_{ij} = 0$ með markfallsgildið

$$z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} = 14.200$$

Fasi 2 – ítrun #1 Bestun

1. Skuggaverð ($c_{ij} = u_i + v_j$) fyrir grunnbreytur. Höfum $m+n$ grunnbreytur en $m+n-1$ óháðar skorður. Getum því sett eina $= 0$. Setjum $u_3 = 0$ (því það kemur oftast fyrir) og leysum $c_{ij} = u_i + v_j$ og stillum upp í töflu:

$$
\begin{array}{cccccccc}
(1,1) & 12 & = & u_1 + v_1 & \Rightarrow & v_1 & = & 8 \\
(1,2) & 13 & = & u_1 + v_2 & \Rightarrow & u_1 & = & 4 \\
(2,2) & 4 & = & u_2 + v_2 & \Rightarrow & u_1 & = & -5 \\
(3,2) & 9 & = & u_3 + v_2 & \Rightarrow & v_2 & = & 9 \\
(3,3) & 12 & = & u_3 + v_3 & \Rightarrow & v_3 & = & 12 \\
(3,4) & 4 & = & u_3 + v_4 & \Rightarrow & v_4 & = & 4
\end{array}
$$

Athugasemd. Reikna þarf u_i og v_j í hverri ítrun.

---

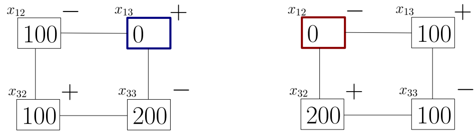
2. Fallverð $r_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ fyrir breytur *utan* grunns (þ.e. auðir reitir).

$$
\begin{array}{ccccccccc}
r_{21} & = & 6-(-5)-8 = 3 & r_{13} & = & -12 & r_{14} & = & -2 \\
r_{32} & = & 10+0-8 = 2 & r_{23} & = & 3 & r_{24} & = & 12
\end{array}
$$

		Smásalar				
		$S1$	$S2$	$S3$	$S4$	u_i
Vöruhús	V1	$\boxed{12}$ 400	$\boxed{13}$ 100	$\boxed{4}$ -12	$\boxed{6}$ -2	4
	V2	$\boxed{6}$ 3	$\boxed{4}$ 700	$\boxed{10}$ 3	$\boxed{11}$ 12	-5
	V3	$\boxed{10}$ 2	$\boxed{9}$ 100	$\boxed{12}$ 200	$\boxed{4}$ 500	0
	v_j	8	9	12	4	

Sjáum að við erum með neikvæð fallgildi, og r_{13} kemur inn í grunn.

3. Finnum hringrás fyrir x_{13}, og síðan breytuna sem fer úr grunni.



Fyrir tilfaerslu Eftir tilfaerslu

Sjáum að x_{12} fer úr grunni.

Fasi 2 – ítrun #2 Upphafstaflan er:

Smásalar

Vöruhús	$S1$	$S2$	$S3$	$S4$	s_i
V1	$\boxed{12}$ 400	$\boxed{13}$	$\boxed{4}$ 100	$\boxed{6}$	500
V2	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$ 700	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	700
V3	$\boxed{10}$	$\boxed{9}$ 200	$\boxed{12}$ 100	$\boxed{4}$ 500	800
d_j	400	900	200	500	

Síðan er haldið áfram eins og áður (gerið sjálf).

7.4 Gjaldgengar lausnir fyrir flutningsverkefni

Norð-vestur aðferð horfir alveg framhjá c_{ij} gildum og því getur upphafslausn verið langt frá bestu lausn sem kallar á margar ítranir í fasa 2.

7.4.1 Aðferð lægsta kostnaðar

Aðferð lægsta kostnaðar (e. minimum cost criterion)[2] gefur yfirleitt betri upphafslausn en norð-vestur aðferð.

Lausn (á dæmi 7.3): Finnum upphafslausn með aðferð lægsta kostnaðar.

Smásalar

		$S1$	$S2$	$S3$	$S4$	s_i
Vöruhús	V1	$\boxed{12}$ 300	$\boxed{13}$	$\boxed{4}$ 200	$\boxed{6}$	~~500~~ ~~300~~ 0
	V2	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$ 700	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	~~700~~ 0
	V3	$\boxed{10}$ 100	$\boxed{9}$ 200	$\boxed{12}$	$\boxed{4}$ 500	~~800~~ ~~300~~ ~~100~~ 0
	d_j	~~400~~ ~~300~~ 0	~~900~~ ~~200~~ 0	~~200~~ 0	~~500~~ 0	

Sjáum að $z = 12000$, þ.e. finnur bestu lausn (*fyrir tilviljun*) sem fæst staðfest í fasa 2.

[2]Sjá dæmi 8.2-4, bls. 350-1 í H&L.

7.4.2 Aðferð Vogel

Fyrir sérhverja óútstrikaða línu/dálk reiknast *mismunur* minnsta og næst minnsta kostnaðar. Finnum línu/dálk með mesta mismun. Veljum sem næstu grunnbreytu x_{ij} sem er með minnsta óútstrikað c_{ij} í línu eða dálki sem er með mesta mun.

Lausn (á dæmi 7.3): Finnum upphafslausn með aðferð Vogels.

Smásalar

Vöruhús	$S1$	$S2$	$S3$	$S4$	s_i
V1	$\boxed{12}$	$\boxed{13}$	$\boxed{4}$ 200	$\boxed{6}$ 300	~~500~~ ~~300~~ 0
V2	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$ 700	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	~~700~~ 0
V3	$\boxed{10}$ 400	$\boxed{9}$ 200	$\boxed{12}$	$\boxed{4}$ 200	~~800~~ ~~600~~ ~~400~~ 0
d_j	~~400~~ 0	~~900~~ ~~200~~ 0	~~200~~ 0	~~500~~ ~~200~~ 0	

Sjáum að $z = 12000$, þ.e. finnur bestu lausn (*fyrir tilviljun*) sem fæst staðfest í fasa 2.

7.4.3 Russel regla

Reiknum fyrir allar óútstrikaðar línur i og dálka j:

$$\bar{u}_i = \max_{i \in \text{ óútstr. dálkur}} c_{ij} \qquad \bar{v}_j = \max_{j \in \text{ óútstr. lína}} c_{ij}$$

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - \bar{u}_i - \bar{v}_j$$

Næsta grunnbreyta er sú sem hefur minnsta Δ_{ij}.

Athugasemd. Sjá dæmi á bls. 342, tafla 8.18, í H&L.

Dæmi 7.4 (Flutningsverkefni í MathProg)

```
set I;
/* canning plants */
set J;
/* markets */
param a{i in I};
/* capacity of plant i in cases */
param b{j in J};
/* demand at market j in cases */
param d{i in I, j in J};
/* distance in thousands of miles */
param f;
/* freight in dollars per case per thousand miles */
param c{i in I, j in J} := f * d[i,j] / 1000;
/* transport cost in thousands of dollars per case */
var x{i in I, j in J} >= 0;
/* shipment quantities in cases */
minimize cost: sum{i in I, j in J} c[i,j] * x[i,j];
/* total transportation costs in thousands of dollars */
s.t. supply{i in I}: sum{j in J} x[i,j] <= a[i];
/* observe supply limit at plant i */
s.t. demand{j in J}: sum{i in I} x[i,j] >= b[j];
/* satisfy demand at market j */

data;
set I := Seattle San-Diego;
set J := New-York Chicago Topeka;
```

```
param a := Seattle     350
           San-Diego   600;
param b := New-York    325
           Chicago     300
           Topeka      275;
param d :              New-York   Chicago   Topeka :=
           Seattle     2.5        1.7       1.8
           San-Diego   2.5        1.8       1.4    ;
param f := 90;
end;
```

../glpk/transport.mod

Keyrum GLPK á eftirfarandi hátt úr skelinni:

```
hei2@Helga:~/IDN401G/$ glpsol -m transport.mod -o
    transport.sol
```

Lesum lausnina úr skjalinu `transport.sol`, sem reynist vera

$$\begin{array}{lll} x_{S,NY} = 0, & x_{S,C} = 300, & x_{S,T} = 0, \\ x_{SD,N} = 325, & x_{SD,C} = 0, & x_{SD,T} = 275, \end{array} \quad \text{með } z = \$153,675.$$

7.5 Úthlutunarverkefni

Úthlutunarverkefni (e. assignment problem) er eins og flutningaverkefni þar sem öll framboð og allar eftirspurnir eru 1, þ.e.a.s.

$$\min_{\boldsymbol{x}} z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

þar c_{ij} er kostnaður við að úthluta frá i til j. Skorðurnar eru:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$$

fyrir $i = 1, \dots, m$ og $j = 1, \dots, n$ og $x_{ij} \geq 0$ fyrir öll i og j.

Dæmi um hagnýtingar

- Úthluta verkum á vélar,
- Úthluta verkefnum á starfsmenn,
- Raða flugvélum á flugleiðir.

Dæmi 7.5 (Dæmi á bls. 334 í H&L – örlítið breytt[3]) Í verksmiðju einni þarf að vinna þrjú mismunandi verk *samtímis*. Verkin má finna á fjórum mismunandi vélum. Kostnaður[4] við tiltekið verk er háður því hvar það er unnið.

	Vél 1	Vél 2	Vél 3	Vél 4
Verk 1	13	16	12	11
Verk 2	15	–	13	20
Verk 3	5	7	10	6

Athugasemd. Verk 2 kemur ekki til greina á vél 2.

Finna á hagkvæmustu pörun milli véla og verka þannig að kostnaður sé lágmarkaður.

[4]Kostnaður gæti t.d. endurspeglað tíma vélar.

LAUSN: G.r.f. að eftirfarandi gildi:

1. Fjöldi verka = fjöldi véla = n.
2. Sérhver vél vinnur nákvæmlega eitt verk.
3. Sérhvert verk er unnið á nákvæmlega einni vél.
4. Kostnaður við að vinna verk i á vél j er c_{ij}.
5. Finna hvernig á að úthluta verkum á vélar þ.a. kostnaður er lágmarkaður.

Höfum fjögur verk, en einungis þrjár vélar. Bætum við *gervivél* t.þ.a. koma verkefninu yfir á rétt form:

	Vél 1	Vél 2	Vél 3	Vél 4
Verk 1	13	16	12	11
Verk 2	15	M	13	20
Verk 3	5	7	10	6
Verk 4	0	0	0	0

þar sem M er stór tala.

Ákvarðanabreyturnar eru

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ef verk } i \text{ er unnið á vél } j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Viljum leysa

$$\min_{\boldsymbol{x}} z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

m.t.t. sk.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i \in \{1, \ldots, n\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j \in \{1, \ldots, n\}$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1 \qquad (\star)$$

Athugasemd. Þetta er ekki hefðbundið línulegt bestunarverkefni vegna heiltöluskorðunnar ($\star$).

Fáum jafngilt verkefni m.þ.a. slaka á heiltölukröfunni og setja í stað $x_{ij} \geq 0$, þ.e.

$$\min_{\boldsymbol{x}} z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

m.t.t. sk.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= 1 \qquad i \in \{1, \dots, n\} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} &= 1 \qquad j \in \{1, \dots, n\} \\ x_{ij} &\geq 0 \qquad \forall i, j \end{aligned}$$

Þetta er flutningsverkefni með $n = m$ og $s_i = d_j = 1$.

Athugasemd. Eiginleiki slíkra verkefna er að ef s_i og d_j eru heiltölur þá er besta lausn heiltölulausn. Þess vegna verða x_{ij} annaðhvort 0 eða 1 í bestu lausn á úthlutunarverkefnum.

7.5.1 Ungverska aðferðin

Ungverska aðferðin (e. Hungarian method) er lausnaraðferð sem er sérsniðin fyrir úthlutunarverkefni. Aðferðin byggir á því að draga má fasta frá sérhverri línu eða dálki án þess að besta lausn breytist, þ.e.

$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij} - p_i - q_j$$

því

$$
\begin{aligned}
z' &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(c_{ij}-p_i-q_j\right)x_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} - \sum_{i=1}^{n}p_i\underbrace{\sum_{j=1}^{n}x_{ij}}_{=1} - \sum_{i=1}^{n}q_j\underbrace{\sum_{j=1}^{n}x_{ij}}_{=1} \\
&= z\underbrace{-\sum_{i=1}^{n}p_i - \sum_{i=1}^{n}q_j}_{\text{fasti}}
\end{aligned}
$$

Reiknirit fyrir ungversku aðferðina

Skref 1 Finna minnsta gildi í hverri línu, p_i, og draga það frá öllum stökum í línunni.

Skref 2 Finna minnsta gildi í hverjum dálki, q_j, og draga það frá öllum stökum í dálkinum.

Skref 3 0-stökin koma til greina sem besta úthlutun:

(a) Finna fyrstu línu með nákvæmlega einu 0. Merkja með □. Strika út viðkomandi dálka.

(b) Meðhöndla óútstrikuðu dálka á sama máta, merkja núllreit með □ og strika út viðkomandi línur.

Ef fjöldi útstrikaða lína $= n$ þá er besta lausn fundin. Hætta.

Skref 4 Finna minnsta óútstrikaða stakið. Ef það er > 0 draga það frá öllum óútstrikuðum stökum, leggja það síðan við þau stök þar sem tvær línur skerast. Aftur í Skref 3.

Skref 5 (Minnsta stak er 0) Velja eitthvað óútstrikað 0, merkja það með □ og strika út þau núll sem eftir standa í tilsvarandi línu og dálki.

Athugasemd. Hér geta verið margar jafngóðar lausnir.

Endurtaka fyrir þau óútstrikuðu núll sem eftir standa. Stoppa.

Athugasemd. Ef reitur inniheldur M, þá er það látið halda sér.

LAUSN (UNGVERSKA LAUSNARAÐFERÐIN Á DÆMI 7.5): Lítum á minnsta stakið í hverri línu/dálki:

verk i/vél j	Vél 1	Vél 2	Vél 3	Vél 4	$\min_i$ verk i
Verk 1	13	16	12	11	11
Verk 2	15	M	13	20	13
Verk 3	5	7	10	6	5
Verk 4	0	0	0	0	0
$\min_j$ vél j	0	0	0	0	

Skref 1 Drögum frá minnsta gildið frá öllum línum, og fáum

verk i/vél j	Vél 1	Vél 2	Vél 3	Vél 4
Verk 1	2	5	1	0
Verk 2	2	M	0	7
Verk 3	0	2	5	1
Verk 4	0	0	0	0

Skref 2 Óþarft, því minnsta gildið frá öllum dálkum er 0.

Skref 3

verk i/vél j	Vél 1	Vél 2	Vél 3	Vél 4
Verk 1	2	5	1	$\boxed{0}$
Verk 2	2	M	$\boxed{0}$	7
Verk 3	$\boxed{0}$	2	5	1
Verk 4	0	$\boxed{0}$	0	0

Besta lausn er strax fundin, og lesum úr töflunni:

$$\begin{array}{lcl} \text{Verk 1} & \rightarrow & \text{Vél 4} \\ \text{Verk 2} & \rightarrow & \text{Vél 3} \\ \text{Verk 3} & \rightarrow & \text{Vél 1} \end{array} \qquad \text{með } z^* = 5 + 13 + 11 = 29.$$

Athugasemd. Vél 2 er ónotuð.

Dæmi 7.6 (Giftingar) Hjónabandsmiðlunin MIR sérhæfir sig í rússneskum konum og íslenskum sjómönnum. Kúnnahópurinn samanstendur af fjórum konum og fjórum körlum. Eftir að hafa tekið persónuleikapróf fást eftirfarandi *hamingjugildi* h_{ij} milli kvennanna og karlanna:

	Fannar	Gunnar	Hilmar	Ingi
Anastasiya	7	5	8	2
Borislava	7	8	9	4
Dunya	3	5	7	9
Elena	5	5	6	7

Hvernig væri best að para framtíðar hjónaefnum?

LAUSN: Þar sem við höfum ekki enn séð hvernig á að leysa heiltöluverkefni, þá til einföldunar skulum við g.r.f. að sjómennirnir eru tilbúnir að deila. Látum því x_{ij} tákna hlutfalls þess tíma sem kona i eyðir með manni j.

Úthlutunarverkefnið snýst um að hámarka hamingju,

$$\max_{\boldsymbol{x}} z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} h_{ij} x_{ij}$$

m.t.t. sk.

Konur eyða bara tíma með mönnum	$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1$	$i \in \{1, ..., 4\}$
Menn eyða bara tíma með konum	$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1$	$j \in \{1, ..., 4\}$
Enginn er einn í ellinni	$x_{ij} \geq 0$	

Reikniritið okkar g.r.f. lágmörkun, breytum því hamingju í kostnað skv.

$$c_{ij} = 9 - h_{ij}$$

því hæsta hamingjugildið er 9. Kostnaðartaflan verður:

	F	G	H	I	min
A	2	4	1	7	1
B	2	1	0	5	0
D	6	4	2	0	0
E	4	4	3	2	2

Beitum nú ungverska reikniritinu:

Skref 1 Drögum frá minnsta gildið frá hverri línu:

	F	G	H	I
A	1	3	0	6
B	2	1	0	5
D	6	4	2	0
E	2	2	1	0
min	1	1	1	0

Skref 2 Drögum frá minnsta gildið frá hverjum dálki:

	F	G	H	I
A	0	2	0	6
B	1	0	0	5
D	5	3	2	0
E	1	1	1	0

Skref 3 Lína D hefur nákvæmlega eitt núll í dálki I, merkjum það með $\square$ og strikum því dálk I út. Dálkur F hefur nákvæmlega eitt núll í línu A, merkjum með $\square$ og strikum því línu A út. Eins fer núllið í dálki G inn í grunn, og lína B strikuð út.

	F	G	H	I
A	$\boxed{0}$	2	0	6
B	1	$\boxed{0}$	0	5
D	5	3	2	$\boxed{0}$
E	1	1	1	0

Skref 4 Minnsta óútstrikaða stakið er $1 > 0$, drögum það frá óútstrikuðum stökum og leggjum við þau stök þar sem tvær línur skerast, þ.e.

	F	G	H	I
A	$\boxed{0}$	2	0	7
B	1	$\boxed{0}$	0	6
D	4	2	1	$\boxed{0}$
E	0	0	0	0

Skref 2 Dálkur H hefur nákvæmlega eitt núll, merkjum það með $\square$ og strikum því dálk E út.

	F	G	H	I
A	$\boxed{0}$	2	0	7
B	1	$\boxed{0}$	0	6
D	4	2	1	$\boxed{0}$
E	0	0	$\boxed{0}$	0

Fjöldi grunnbreyta $= n$, svo besta lausn er fundin og heildarhamingjan er $7 + 8 + 9 + 6 = 30$.

Athugasemd. Í bestu lausn eyðir fólkið öllum sínum tíma með einhverjum af gagnstæða kyni (sjá *marriage theorem*).

LAUSN (Á DÆMI 7.6 MEÐ **MathProg**): Nú ætlum við að sýna forsjáshyggju og aðskilja stærðfræðilega líkanið frá gögnunum, ef ske kynni að aðrar hjónabandsmiðlanir vilja nýta sérfræðiráðgjöf okkar á úthlutun kvenna á karla.

Almennt líkan á úthlutun kvenna á karla er eftirfarandi:

```
# Set definitions
set women;
set men;

# Parameter definitions
param happiness{women,men};

# Variable definitions
var x{women,men} >= 0;

# Objective function
maximize total_happiness:
sum{i in women, j in men} happiness[i,j]*x[i,j];

# Constraints
subject to women_constraint{i in women}:
sum{j in men} x[i,j] = 1;
subject to men_constraint{j in men}:
sum{i in women} x[i,j] = 1;

# Solve and display results
solve;
display x;
```

../glpk/assignment.mod

Því næst skulum við skrifa skrá sem heldur einungis utan um gögnin fyrir þessa tilteknu hjónabandsmiðlun MIR:

```
data;

set women:= Anastasiya Borislava Dunya Elena;
set men := Fannar Gunnar Hilmar Ingi;

param happiness: Fannar   Gunnar   Hilmar   Ingi :=
       Anastasiya  7        5        8        2
       Borislava   7        8        9        4
       Dunya       3        5        7        9
       Elena       5        5        6        7;

end;
```

../glpk/MIR.dat

Keyrum GLPK á eftirfarandi hátt úr skelinni:

```
hei2@Helga:~/IDN401G/$ glpsol -m assignment.mod -d MIR.
    dat -o MIR.sol
```

Lesum bestu lausnina úr skelinni (því við notuðum `display` skipunina)

$$\begin{array}{lcl} \text{Anastasiya} & \Longleftrightarrow & \text{Hilmar} \\ \text{Borislava} & \Longleftrightarrow & \text{Gunnar} \\ \text{Dunya} & \Longleftrightarrow & \text{Ingi} \\ \text{Elena} & \Longleftrightarrow & \text{Fannar} \end{array}$$

Úttaks-skráin `MIR.sol` sýnir að heildarhamingjan er $z^* = 30$.

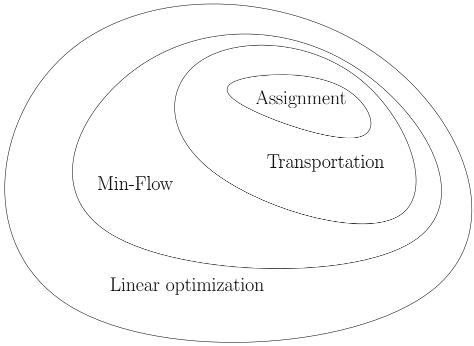
Athugasemd. Sjáum að GLPK gefur ekki sömu lausn og ungverska lausnaraðferðin, en markfallsgildið er að engu að síður hið sama.

7.6 Almenn flutningsverkefni

Höfum nú þegar kynnst flutninga- og úthlutunarverkefnum, en þau eru dæmi um netverkefni sem hægt er að leysa með línulegri bestun.

Netverkefni eru fjölbreytt bestunarverkefni með margskonar hagnýtingu til dæmis:

- samgöngukerfum,
- fjarskiptum,
- fjármálum,



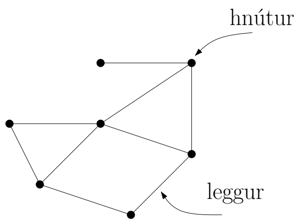
- verkefnastjórnun

- vörustjórnun.

Mörg hagnýt netverkefni falla undir línulega bestun og má oft finna reiknirit sem eru *sérsniðin* að einstökum tegundum verkefna. En áður en lengra er haldið þarf nokkur hugtök úr **netafræði** (e. graph theory).

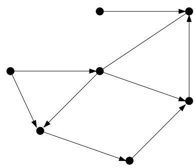
7.7 Nokkur hugtök úr netafræði

Net (e. network / graph) er safn af **hnútum** (e. node) eða punktum og **leggjum** (e. edges), hver leggur tengir tvo hnúta.

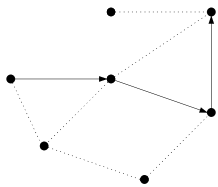


Dæmi:	Hnútur	Leggur	Flæði
Vegakerfi	gatnamót	götur	bílar
Flug	flugvellir	flugleiðir	flugvélar
Samskiptakerfi	hnútpunktar	rásir	skeyti
Vatnsdreifikerfi	dælur	pípur	vatn
Afbrot	krimmar	tengsl krimma	(á ekki við)

Stefnt net eða örvanet (e. directed network) er net þar sem leggirnir hafa stefnu, þeir eru **stefndir leggir** eða **örvar** (e. arc / directed edge). Ef flæði er í báðar áttir, þá er hann óstefndur.



Leið (e. path) er runa af leggjum sem tengir tvo hnúta (örvar sem snúa í rétta átt í örvaneti)

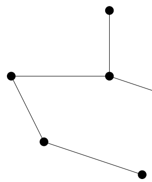


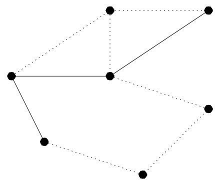
Rás eða hringrás (e. circuit) er leið sem tengir hnút við sjálfan sig (e. cycle / circuit)

örvarás (directed cycle) rás

Samhangandi net (e. connected graph) er net þar sem til er leið milli sérhverja tveggja punkta í netinu.

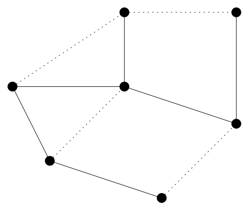
Tré (e. tree) Tré er samhangandi net sem inniheldur enga hringi, rásalaust net (eða hlutanet).





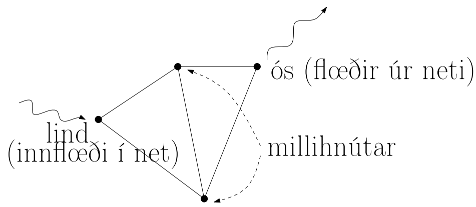
hlutanet

Spanntré (e. spanning tree) í neti er tré sem tengir alla hnúta netsins.



Flæðinet (e. flow network)

- Hverjum legg tengist **flæði** (oft eru það ákvörðunarbreytur verkefnisins).
- Flæðinet hefur **burðargetu** (e. capacity).
- Hnútur með innflæði í net er **upphafsstaður**, **uppspretta** eða **lind**.
- Þar sem flæðir út úr neti er **ós**, **svelgur** eða **áfangastaður** (e. sink, destination).
- Hnútar án inn- eða útflæðis eru **millihnútar** (e. transshipment node).

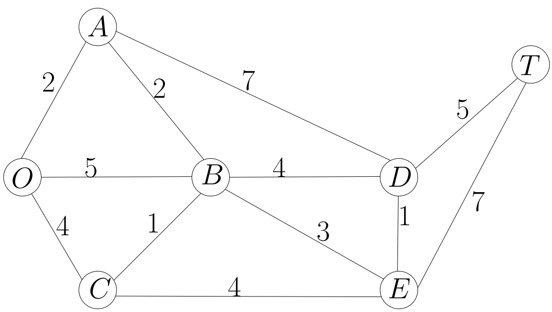


Stysta leið (e. shortest path)

- Óstefnt, samhangandi net.
- Upphafspunktur (e. source) og endapunktur (e. sink).
- Fyrir hvern legg höfum við *fjarlægð*
- Markmið: Finna leið sem lágmarkar fjarlægð frá upphafspunkti í endapunkt.

7.8 Stysta leið

Dæmi 7.7 (Seervada garður) Finna skal stystu leið á milli upphafsstaðs O og áfangastaðs T gefið:



Línulegt bestunarverkefni fyrir stystu leið hefur ákvarðanabreytur

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ef leggur } i \to j \text{ er á leiðinni} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Höfum gefna fasta

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \text{vegalengd milli } i \text{ og } j \\ \mathcal{V} &= \text{mengi hnúta, t.d. } \mathcal{V} = \{O, A, B, C, D, E, T\} \\ \mathcal{E} &= \text{mengi leggja, t.d. } \mathcal{E} = \{(O,A), (O,C), ..., (D,T), (E,T)\} \end{aligned}$$

Viljum lágmarka

$$\min_{\boldsymbol{x}} \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} d_{ij} x_{ij}$$

m.t.t. sk.

$$\underbrace{\overbrace{\sum_{k:(k,i)\in\mathcal{E}} x_{ki}}^{\text{innflæði í } i} - \overbrace{\sum_{j:(i,j)\in\mathcal{E}} x_{ij}}^{\text{útflæði úr } i}}_{\text{nettóflæði}} = \begin{cases} 1 & \text{ef } i = O \quad \text{(lind)} \\ -1 & \text{ef } i = T \quad \text{(svelgur)} \\ 0 & \text{annars} \quad \text{(millinóður)} \end{cases} \qquad \forall\, i \in \mathcal{V}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Athugasemd. Eiginleiki verkefnisins er að í bestu lausn eru öll $x_{ij} = 0 \vee 1$.

Afbrigði

- Finna minnsta *tíma* sem röð verka tekur.
- Finna minnsta *kostnað* við röð verka.

Notkun

- Bestun á samgöngukerfum (t.d. stysta leið milli tveggja staða í borginni).
- Tölvunet: stysta leið (um internetið) frá tölvu *Alice* til *Bob*.
- Stundum má tækla flókin verkefni í aðgerðagreiningu m.þ.a. leysa runu af stystu leiðar verkefnum.

Lausn (á stystu leið dæmis 7.7 með **MathProg**): Almennt líkan fyrir stystu leið í MathProg er eftirfarandi:

```
/* Shortest Path Problem */

/* Given a directed graph G = (V,E), its edge lengths c(i,j) for all (i,j) in E, and two nodes s, t in V, the Shortest Path Problem (SPP) is to find a directed path from s to t whose length is minimal. */

param n, integer, > 0;
/* number of nodes */

set E, within {i in 1..n, j in 1..n};
/* set of edges */

param c{(i,j) in E};
/* c[i,j] is length of edge (i,j); note that edge lengths are allowed to be of any sign (positive, negative, or zero) */

param s, in {1..n};
/* source node */

param t, in {1..n};
/* target node */

var x{(i,j) in E}, >= 0;
/*
   x[i,j] = 1 means that edge (i,j) belong to shortest path;
   x[i,j] = 0 means that edge (i,j) does not belong to shortest path;
   note that variables x[i,j] are binary, however, there is no need to declare them so due to the totally unimodular constraint matrix
   A unimodular matrix is a real square matrix with determinant plus/minus 1
*/

s.t. r{i in 1..n}: sum{(j,i) in E} x[j,i] + (if i = s then 1) =
                   sum{(i,j) in E} x[i,j] + (if i = t then 1);
```

```
/* conservation conditions for unity flow from s to t; every feasible solution is a path from s to t */

minimize Z: sum{(i,j) in E} c[i,j] * x[i,j];
/* objective function is the path length to be minimized */

solve;


/* Finally print optimal solution into the terminal */
printf{1..56} "="; printf "\n";
printf: "Optimal solution z*: %f\n", sum{(i,j) in E} c[i,j] * x[i,j];
printf "Edges in basis:\n";
printf{(i,j) in E: x[i,j] != 0}: "%d-%d\n", i, j;
printf{1..56} "="; printf "\n";
```

../glpk/spp.mod

Gagnaskráin fyrir Seervada garðinn er

```
/* Seervada Park (mynd 9.6 bls. 389 H&L). */

data;

param n := 7;
param s := 1;
param t := 7;

/* O,A,B,C,D,E,T == (1,2,3,4,5,6,7) */
param : E :    c :=
        1 2    2
        1 4    4
        1 3    5
        2 3    2
        3 4    1
        2 5    7
        3 5    4
        3 6    3
        4 6    4
        5 6    1
        5 7    5
        6 7    7;
```

```
end;
```

../glpk/seervada.dat

Keyrum GLPK úr skelinni,

```
hei2@Helga:~/IDN401G/$ glpsol -m spp.mod -d seervada.dat --wcpxlp cplex.skra
```

Lesum úr skelinni (því við notuðum `printf` skipunina í `spp.mod`) að leggir í grunni eru

$$1 \leftrightarrow 2,\ 2 \leftrightarrow 3,\ 3 \leftrightarrow 5,\ 5 \leftrightarrow 7 \text{ með } z^* = 13.$$

eða með réttum rithætti

$$O \to A \to B \to D \to T$$

Á bak við tjöldin breytti GLPK líkanamálinu MATHPROG í skorður sem það skilur. Hægt er að sjá hvernig þær nákvæmlega litu út með að líta á CPLEX keyrsluskránna:

```
\* Problem: spp *\

Minimize
 Z: + 2 x(1,2) + 4 x(1,4) + 5 x(1,3) + 2 x(2,3) + 7 x(2,5) + x(3,4)
 + 4 x(3,5) + 3 x(3,6) + 4 x(4,6) + x(5,6) + 5 x(5,7) + 7 x(6,7)

Subject To
 r(1): - x(1,2) - x(1,4) - x(1,3) = -1
 r(2): + x(1,2) - x(2,3) - x(2,5) = -0
 r(3): + x(1,3) + x(2,3) - x(3,4) - x(3,5) - x(3,6) = -0
 r(4): + x(1,4) + x(3,4) - x(4,6) = -0
 r(5): + x(2,5) + x(3,5) - x(5,6) - x(5,7) = -0
 r(6): + x(3,6) + x(4,6) + x(5,6) - x(6,7) = -0
 r(7): + x(5,7) + x(6,7) = 1

End
```

../glpk/cplex.skra

7.8.1 Reiknirit fyrir stystu leið

Skref 1 **Leystur hnútur** (e. solved node): Stysta leið í hnútinn frá upphafshnút er þekkt. Í byrjun er upphafshnúturinn eini leysti hnúturinn.

Skref 2 Finnið næsta hnút með:

(i) Skoðið alla óleysta hnúta sem eru tengdir leystum hnút (þetta eru kandídatar)

(ii) Reiknið fjarlægð að upphafspunkti með því að leggja fjarlægð í hnút við merkta fjarlægð

(iii) Kandídatinn með minnstu fjarlægð frá upphafspunkti verður næsti leysti hnútur (ef jafntefli, leysið þá fyrir báða hnúta)

Skref 3 Aftur í Skref 2 uns áfangastaður er leystur hnútur.

Skref 4 Stysta leið finnst með því að vinna sig afturábak frá áfangastað.

Lausn (á stystu leið Seervada úr dæmi 7.7 með reikniriti):

Ítrun n	Leystir hnútar	Skref 2(i)	Skref 2(ii)	Skref 2(iii)	Lágmarks fjarlægð	Síðasta tenging
1	O	A	2	A	2	OA
2	O	C	4	C	4	OC
3	A	B	$2+2=4$	B	4	AB
	A	D	$2+7=9$			
4	B	E	$4+3=7$	E	7	BE
	C	E	$4+4=8$			
	A	D	$2+7=9$			
5	B	D	$4+4=8$	D	8	BD
	E	D	$7+1=8$	D	8	ED
6	D	T	$8+5=13$	T	13	DT
	E	T	$7+7=14$			

Allir hnútar eru nú *leystir*. Finnum stystu leið m.þ.a. rekja okkur til baka

$$T \leftarrow D \leftarrow E \leftarrow B \leftarrow A \leftarrow O$$

eða

$$T \leftarrow D \leftarrow B \leftarrow A \leftarrow O$$

með vegalengd $z^* = 13$

Athugasemd. Fundum tvær *jafn* góðar bestu lausnir. Tökum eftir að GLPK fann aðeins seinni lausnina.

7.8.2 Dijkstra reiknirit

```
function [path, fmin] = shortestpath(C, s, d),
% Dijkstra's ``shortest-path'' reiknirit
% notkun : [path, fmin] = shortestpath(cost, s, d)

% fjoldi punkta
n = length(C);
% allir punktar eru oleystir
visited = zeros(1,n);
% fjarlaegd i alla punkta er inf
distance = inf*ones(1,n);
% foreldri (parent node)
parent = zeros(1,n);
% fjarlaegd fra upphafspunkti er 0
distance(s) = 0;
% athugum alla punkta (i raun bara tha sem eru tengdir)
for i = 1:(n-1),
  tempdist = []; % halda utan um fjarlaegd
  for h = 1:n,
    if (visited(h) == 0) % oleystur punktur
      tempdist = [tempdist distance(h)];
    else
      tempdist = [tempdist inf]; % leystur punktur (sleppa)
    end
  end
  [dummy, u] = min(tempdist);  % oleystur punktur med minnstu fjarlaegd
  visited(u) = 1;              % nuna er sa punktur leystur
  for v = 1:n,                 % fyrir alla nagranna vid u
  % "triange inequality "gildir adeins fyrir stystu leid:
    if ( (C(u, v) + distance(u)) < distance(v) ),
      distance(v) = distance(u) + C(u, v); % uppfaera stystu fjarlaegd
      parent(v) = u; % betri punktur fundinn!
    end
  end
end

% stysta leid finnst med thvi ad vinna afturabak
```

```
i = d; path = d;
while (parent(i) ~= parent(s))
  path = [parent(i) path];
  i = parent(i);
end
% minnsta fjarlaegd er i distance(d)
fmin = distance(d);
```

../matlab/dijkstra.m

Dæmi 7.8 (á stystu leið Seervada úr dæmi 7.7 með Dijkstra)

```
>> O=1;A=2;B=3;C=4;D=5;E=6;T=7;
>> c = inf*ones(n,n);
>> c(O,A) = 2; c(A,O) = 2; c(O,B) = 5; c(B,O) = 5; c(O,C)
     = 4; c(C,O) = 4; c(A,B) = 2; c(B,A) = 2; c(A,D) = 7;
     c(D,A) = 7; c(B,C) = 1; c(C,B) = 1; c(C,E) = 4; c(E,
    C) = 4; c(B,E) = 3; c(E,B) = 3; c(B,D) = 4; c(D,B) =
    4; c(D,E) = 1; c(E,D) = 1; c(T,E) = 7; c(E,T) = 7; c(
    T,D) = 5; c(D,T) = 5;
>> [path, fmin] = shortestpath(c, 1, 7);
tempdist =
       0   Inf   Inf   Inf   Inf   Inf   Inf
tempdist =
     Inf     2     5     4   Inf   Inf   Inf
tempdist =
     Inf   Inf     4     4     9   Inf   Inf
tempdist =
     Inf   Inf   Inf     4     8     7   Inf
tempdist =
     Inf   Inf   Inf   Inf     8     7   Inf
tempdist =
     Inf   Inf   Inf   Inf     8   Inf    14
path =
       1     2     3     5     7
fmin =
      13
>> labels = 'OABCDET'; labels(path)
ans =
OABDT
```

7.9 Léttasta spanntré

Spanntré Til er leið á milli allra para af hnútum í tréinu.

Léttasta spanntré (e. minimum spanning tree) Spanntré þannig að heildarlengd leggja er sem minnst.

Hagnýting

- Hönnun á samskiptakerftum (ljósleiðaranet)
- Samgöngukerfi (lestar, vegir)
- Háspennukerfi
- Pípukerfi

Inntak í reiknirit

$\mathcal{H}$ Safn hnúta

$\mathcal{L}$ Safn *mögulegra* leggja

$\mathcal{D}$ Lengd/þyngd leggja í $\mathcal{E}$.

Reiknirit

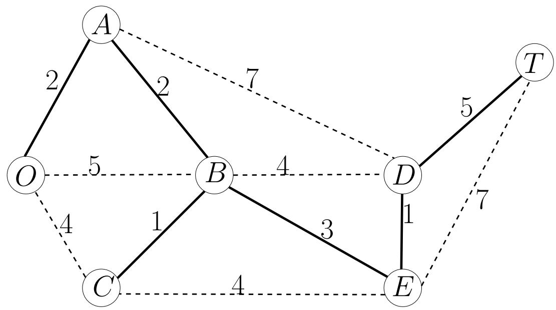
Skref 1 Velja hnút af handahófi

Skref 2 Velja *léttasta legg* sem ekki er þegar kominn í tréið og sem myndar ekki hringrás með leggjunum sem eru þar fyrir. Bætum þessum legg í tréið.

Skref 3 Aftur í Skref 2 þangað til netið inniheldur $n-1$ leggi.

Athugasemd. Þetta kallast **gráðugt** (e. greedy) reiknirit. Hægt að stilla upp sem LP – en ekki alveg eins einfalt.

Lausn (Léttasta spanntré fyrir Seervada úr dæmi 7.7):



Lægsti heildarkostnaður $2 + 2 + 1 + 3 + 1 + 5 = 14$.

7.9.1 Samantekt

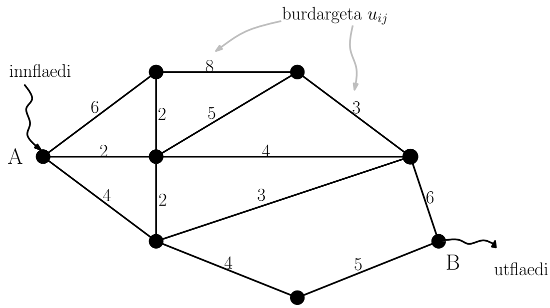
Stysta leið Finnur stystu *vegalengd* milli tveggja hnúta.

Léttasta spanntré Finnur stystu *heildarvegalengd* milli allra para af hnútum.

7.10 Hámarksflæði

Hér er markmiðið að senda sem **mesta flæði** (e. max flow) í gegnum netið. Aðferð til að leysa þetta verkefni er að:

Viljum finna **hámarksflæði** (e. max flow) frá A til B fyrir eitthvað tiltekið net, t.d.



Getum gert það m.þ.a.

- Nota sérsniðið reiknirit, t.d. **aðferð aukandi vega** (bls. 374–9 í H&L)

- Nota reiknirit fyrir **minnsta kostnaðar flæði** (sjá síðar)

- Stilla upp línulegu bestunarlíkani og leysa með Simplex.

Fyrir línulegt bestunarlíkan sem hámarkar flæði, látum $\mathcal{H} = \{1, ..., n\}$ tákna safn n hnúta og $\mathcal{L}$ tákna safn leggja. Ákvarðanabreytur eru x_{ij} = flæði á legg $i \to j$. Leysum

$$\max_{x_{ij} \in \mathcal{L}} d$$

m.t.t. sk.

$$\begin{aligned}
\sum_{i:(i,k)\in\mathcal{L}} x_{ik} - \sum_{j:(k,j)\in\mathcal{L}} x_{kj} &= 0 \quad \text{fyrir } k \in \mathcal{H} \setminus \{1, n\} \\
\sum_{j:(1,j)\in\mathcal{L}} x_{1j} &= s \\
\sum_{i:(i,n)\in\mathcal{L}} x_{in} &= d \\
x_{ij} &\leq u_{ij} \\
x_{ij} &\geq 0
\end{aligned}$$

Athugasemd.

- *Fyrstu þrjár skorðurnar hafa í för með sér að $s = d$.*
- *Til er afbrigði af hámarksflæði, þ.a. $x_{ij} \geq l_{ij}$.*

Nokkur dæmi um hagnýtingu

- Hámarka flæði vatns eða olíu í pípukerfum.
- Hámarka flæði faratækja (lestir, bílar) um samgöngumannvirki.
- Velja einhverja leið af handahófi í gegnum netið.
- Finna minnstu burðagetu leiðarinnar og senda það magn í gegnum netið. Burðagetan minnkar um þetta magn fyrir þessa leið.
- Ítrum áfram þangað til engin nýtanleg leið með burðagetu finnst. Þá erum við komin í hámark.

Dæmi 7.9 (Mesta flæði) Finnum mesta flæði fyrir Seervada (dæmi 7.7).

LAUSN (MEÐ **MathProg**): Almennt líkan fyrir mesta flæði er eftirfarandi:

```
/* MAXFLOW, Maximum Flow Problem */
/* Written in GNU MathProg by Andrew Makhorin <mao@mai2.rcnet.ru> */
/* The Maximum Flow Problem in a network G = (V, E), where V is a set of nodes, E within V x V is a set of arcs, is to maximize the flow from one given node s (source) to another given node t (sink) subject to conservation of flow constraints at each node and flow capacities on each arc. */

param n, integer, >= 2;
/* number of nodes */
set V, default {1..n};
/* set of nodes */
set E, within V cross V;
/* set of arcs */
param c{(i,j) in E}, > 0;
/* c[i,j] is capacity of arc (i,j) */
param s, symbolic, in V, default 1;
/* source node */
param t, symbolic, in V, != s, default n;
/* sink node */
var x{(i,j) in E}, >= 0, <= c[i,j];
/* x[i,j] is elementary flow through arc (i,j) to be found */

var flow, >= 0;
/* total flow from s to t */
s.t. node{i in V}:
/* node[i] is conservation constraint for node i */
   sum{(j,i) in E} x[j,i] + (if i = s then flow)
   /* summary flow into node i through all ingoing arcs */
   = /* must be equal to */
   sum{(i,j) in E} x[i,j] + (if i = t then flow);
   /* summary flow from node i through all outgoing arcs */
maximize obj: flow;
/* objective is to maximize the total flow through the network */

```

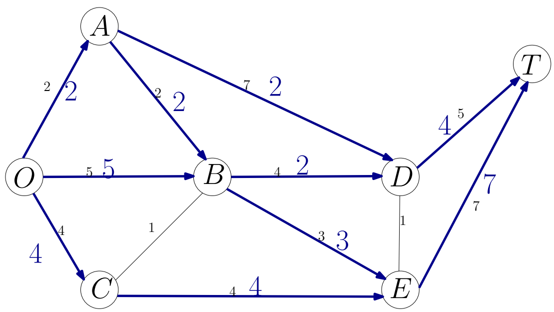
```
solve;
printf{1..56} "="; printf "\n";
printf "Maximum flow from node %s to node %s is %g\n\n", s, t, flow;
printf "Starting node   Ending node   Arc capacity   Flow in arc\n";
printf "-------------   -----------   ------------   -----------\n";
printf{(i,j) in E: x[i,j] != 0}: "%13s   %11s   %12g   %11g\n", i, j,
   c[i,j], x[i,j];
printf{1..56} "="; printf "\n";
```

../glpk/maxflow.mod

Höfum gagnaskrá fyrir Seervada garðinn á bls. 138. Keyrum því GLPK á eftirfarandi hátt úr skelinni, og lesum bestu lausn beint úr skelinni:

```
hei2@Helga:~/IDN401G/$ glpsol -m maxflow.mod -d seervada.dat
========================================================
Maximum flow from node 1 to node 7 is 11

Starting node   Ending node   Arc capacity   Flow in arc
-------------   -----------   ------------   -----------
            1             2              2             2
            1             4              4             4
            1             3              5             5
            2             5              7             2
            3             5              4             2
            3             6              3             3
            4             6              4             4
            5             7              5             4
            6             7              7             7
========================================================
Model has been successfully processed
```

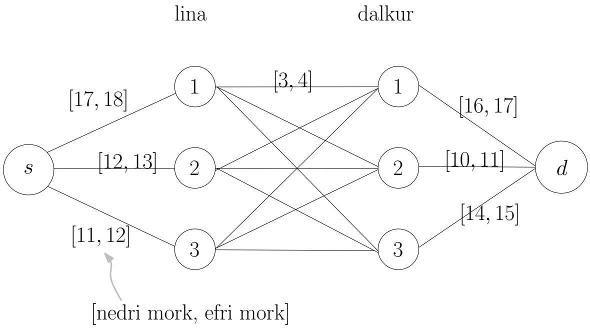


Mynd 7.1: Hámarksflæði fyrir Seervada garðinn

Dæmi 7.10 (Nálgun á fylkjum) Viljum nálga eftirfarandi fylki af fleytitölum í heiltölur

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\end{array} \qquad \sum \\ & \begin{bmatrix} 3.14 & 6.8 & 7.3 \\ 9.6 & 2.4 & 0.7 \\ 3.6 & 1.2 & 6.5 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} 17.24 \\ 12.7 \\ 11.3 \end{array} \\ \sum & \begin{array}{ccc} 16.34 & 10.4 & 14.5 \end{array} \end{array}$$

Lausn: Setjum upp nálgun fylkisins sem net þ.a. við getum hámarkað flæðið, þ.e.



þar sem burðargetan er skorðuð af neðri og efri mörkum á heiltölunálgun gildanna. Besta lausn reynist vera

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & & \end{array} \quad \sum \\ & \begin{bmatrix} 3 & 7 & 7 \\ 10 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} 17 \\ 13 \\ 11 \end{array} \\ \sum & \begin{array}{ccc} 16 & 10 & 15 \end{array} \end{array}$$

Dæmi 7.11 (Gjaldeyrisbrask) Gengi nokkra gjaldmiðla

	USD	TRY	AED	GBP
USD	–	1.0883	3.6732	0.7004
TRY	0.5921	–	2.1766	0.4148
AED	0.2722	0.4596	–	0.1906
GBP	1.4298	2.4130	5.2471	–

Sjáum t.d. að $GBP \to TRY \to GBP$ gefur ávöxtun upp á $1.6883 \cdot 0.5921 = 0.9996$ (tap) en $USD \to AED \to GBP \to USD$ gefur \$0.0010 í gróða á hvern dollar sem braskað er með.

Hvernig getum við fundið högnunartækifæri (e. arbitrage)?

Lausn: Látum $\mathcal{C}$ tákna mengi gjaldmiðla og r_{ij} tákna gengi á milli gjaldmiðla i og j. Ef við byrjum með USD þá getum við *leitað* að högnun m.þ.a. leysa

$$\max d$$

m.t.t. sk.

$$\begin{aligned} \sum_{j\in\mathcal{C},\, j\neq i} x_{ij} - \sum_{j\in\mathcal{C},\, j\neq i} x_{ji} r_{ji} = 0 \quad \forall\, i \in \mathcal{C} \setminus \{USD\} \\ f + \sum_{j\in\mathcal{C}\setminus\{USD\}} x_{USD,j} - \sum_{j\in\mathcal{C}\setminus\{USD\}} x_{j,USD} r_{j,USD} = 1 \\ f \leq 2, \quad x_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$

Sjáum að þetta er náskylt mesta flæðis verkefninu.

Besta lausn gefur ávöxtun 1.00143 á dollar ef $USD \to GBP \to USD$ þ.e.a.s. við þurfum \$683 til þess að græða \$1.

Athugasemd. Gerðum ekki ráð fyrir þóknun.

7.11 Flæði lægsta kostnaðar

Flæði lægsta kostnaðar (e. minimum cost flow) er nokkuð almennt verkefni, undir það fall m.a. stysta leið, mesta flæði og flutningsverkefni (sjá nánar 386–9 í H&L). Til er hagkvæmt reiknirit sem kallast **Netsimplex aðferðin**.

7.11.1 Netsimplex aðferðin

Netsimplex-aðferðin er sérsniðin að minnsta kostnaðar flæðisverkefni. Hún byrjar á einhverri gjaldgengri spanntréslausn og rekur sig á milli slíkra lausna með því að skipta út einum legg í hverju skrefi þar til komið er í bestu lausn.

Ákvörðunarbreytur x_{ij} = flæði í gegnum legg $i \to j$

Gögn

- c_{ij} kostnaður við flæði á legg $i \to j$
- u_{ij} **burðargeta leggs** (e. arc capacity) fyrir legg $i \to j$
- b_i er heildarflæði í hnút i
  - $b_i > 0$ ef hnútur i er lind
  - $b_i < 0$ ef hnútur i er svelgur
  - $b_i = 0$ ef hnútur i er millihnútur

Línulegt verkefni sem lágmarkar heildarkostnað, summan er aðeins tekin yfir leggi sem eru til staðar:

$$\min_{\boldsymbol{x}} \quad Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

skorður fyrir hvern hnút $i \in \mathcal{H}$

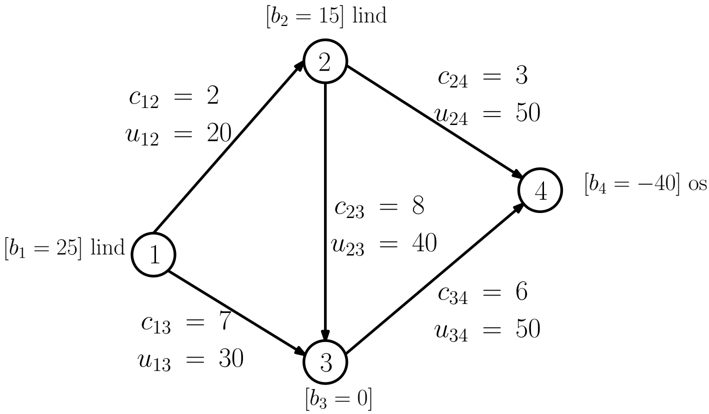
$$\sum_{j \in \deg^-(i)} x_{ij} - \sum_{j \in \deg^+(i)}^{n} x_{ji} = b_i$$

og efra mark á ákvörðunarbreytum

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

Athugasemd. Skilyrði fyrir að verkefnið hafi löglega lausn er $\sum_{i \in \mathcal{H}} b_i = 0$. Ef b_i og u_{ij} eru allar heiltölur þá verða ákv.breyturnar ($\boldsymbol{x}^*$) líka heiltölur.

Dæmi 7.12 Höfum gefið eftirfarandi net:



Lausn: Beitum netsimplex-aðferðinni:

Dæmi 7.13 (Minnsta kostnaðar flæði í MathProg)

```
/* MINCOSTFLOW, Maximum Flow Problem */

param n, integer, >= 2;
/* number of nodes */

set V, default {1..n};
/* set of nodes */

set E, within V cross V;
/* set of arcs */

param a{(i,j) in E}, > 0;
/* a[i,j] is capacity of arc (i,j) */

param s, symbolic, in V, default 1;
/* source node */

param t, symbolic, in V, != s, default n;
/* sink node */

param c{(i,j) in E}, >= 0;
/* c[i,j] is the cost through arc (i,j) */

param b{i in V};
/* net flow in node i */

var x{(i,j) in E}, >= 0, <= a[i,j];
/* x[i,j] is elementary flow through arc (i,j) to be found */

s.t. node{i in V}:
/* node[i] is conservation constraint for node i */
   sum{(i,j) in E} x[i,j] -sum{(j,i) in E} x[j,i] = b[i];

minimize obj: sum{(i,j) in E} c[i,j] * x[i,j];
/* objective is to maximize the total flow through the network */

solve;

printf{1..56} "="; printf "\n";
```

```
printf "Total cost %f\n\n", sum{(i,j) in E} c[i,j] * x[i,j];
printf "Starting node   Ending node   Arc capacity   Flow in arc\n";
printf "-------------   -----------   ------------   -----------\n";
printf{(i,j) in E: x[i,j] != 0}: "%13s   %11s   %12g   %11g\n", i, j,
   a[i,j], x[i,j];
printf{1..56} "="; printf "\n";

data;

/* Seervada Park (mynd 9.6 bls. 389 H&L). */

param n := 5;

/* see figure 9.12, using 1E9 for +Inf */
param : E :    a   c :=
        1 2     10  2    /* AB */
        1 4    1E9  9    /* AD */
        1 3    1E9  4    /* AC */
        2 3    1E9  3    /* BC */
        3 5     80  1    /* CE */
        5 4    1E9  2    /* ED */
        4 5    1E9  3;   /* DE */


param : V:    b :=
         1    50
         2    40
         3     0
         4   -30
         5   -60;

end;
```

../glpk/mincostflow.mod

7.11.2 Samband minnsta kostnaðar og mesta flæðis

Hægt er að nota **min cost flow** lausnaraðferðir til þess að leysa **max flow** verkefni. Hugsum okkur að við höfum max flow verkefni með eina lind (e. source), eina ós (e. sink) og nokkra hnúta (e. nodes) ásamt hámarksburðargetu leggja. Til að breyta þessu verkefni yfir í min cost flow verkefni þarf einungis að breyta þrennu:

1. Látum kostnaðinn $c_{ij} = 0$ fyrir öll i, j þ.e. setjum kostnað sérhvers leggs jafnt og núll.
2. Veljum nægilega stórt $\hat{F}$, sem á að tákna öruggt efra mark gjaldgengs flæðis í gegnum netið. Þ.e. setjum $\hat{F}$ á lindina og $-\hat{F}$ á ósina.
3. Búum til nýjan legg milli lindar og ósar, setjum á hann ótakmarkaða burðargetu og stóran kostnað M.

Tökum eftir að lágmörkun kostnaðar þess verkefnis jafngildir að hámarka flæði í gegnum upphaflega netið. Því vissulega viljum við lágmarka flæðið sem fer í gegnum nýja legginn sem hefur mikinn kostnað, sem gerist einmitt þegar sent er sem mest flæði í gegnum upphaflega netið.

7.12 Critical Path Method (CPM)

Dæmi 7.14 (Verkefnastjórnun) Lágmarka á tíma sem tekur að byggja hús (sjá töflu bls. 400 og mynd bls. 402). Viljum vinna verkið á 40 vikum. Hvernig er hagkvæmast að gera það?

Lausn: Getum fundið sex mismunandi vegi í gegnum netið:

```
* Start A B C D G H M Finish       Lengd: 40 vikur
* Start A B C E H M Finish         Lengd: 31 vikur
* Start A B C E F J K N Finish     Lengd: 43 vikur
* Start A B C E F J L N Finish     Lengd: 44 vikur
* Start A B C I J K N Finish       Lengd: 41 vika
* Start A B C I J L N Finish       Lengd: 42 vikur
```

Sú lengsta tekur 44 vikur. Þetta er stysti tíminn sem verkið getur tekið (kostn. 4.55 milljónir).

> Verk á þessari leið eru *flöskuhálsar* – mikilvægt að þeim seinki ekki.

Oft má flýta einstökum verkþáttum m.þ.a. auka við mannskap, vélar, tæki, meiri yfirvinnu o.s.frv. Af þessu hlýst viðbótarkostnaður. Ef öllum verkþáttum er flýtt einsog mögulegt er þá tekur verkið 28 vikur og kostnaður er 6.15 milljónir.

Setjum upp línulegt bestunarverkefni:

Ákvarðanabreytur

x_j tími sem verk j er stytt um.

y_j upphafstími verks j.

Gefið

t_j tími sem tekur að vinna verk j.

c_j kostnaður við að *krassa* verki.

Vandamálið snýst því um að lágmarka

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} z = \sum_{j \in \mathcal{H}} c_j x_j$$

m.t.t. sk.

$$\begin{aligned} y_j \geq y_i + t_i - x_i & \qquad \text{fyrir öll verk } i \text{ sem eru undanfarar } j \\ y_{finish} \leq 40 & \\ y_i \geq 0 & \qquad 0 \leq x_j \leq x_j^{\max} \end{aligned}$$

Kafli 8

Heiltölubestun

Heiltölubestun (e. integer programming) hefur margvíslega hagnýtingu í bestun. Rifjum upp forsendur línulegrar bestunar

1. Engin óvissa í stikum líkansins (e. certainty)
2. Skorður og markfall línuleg föll
3. Deilanleiki ákvörðunarbreyta (e. devisibility)

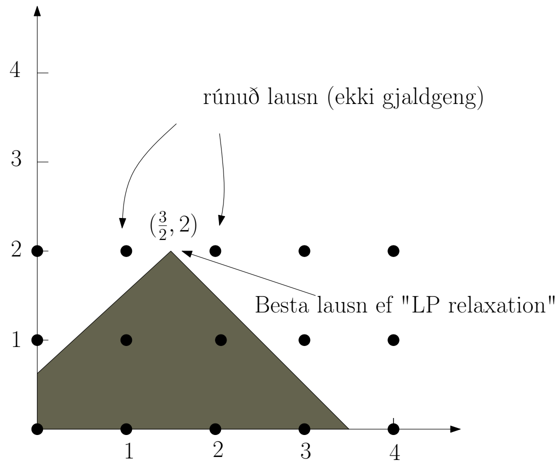
Ef

1. er ekki uppfyllt $\Rightarrow$ **slembin bestun** (e. stochastic programming)
2. er ekki uppfyllt $\Rightarrow$ **ólínuleg bestun** (e. nonlinear programming)
3. er ekki uppfyllt $\Rightarrow$ **heiltölubestun** (e. integer programming)

Í mörgum hagnýtum verkefnum er deilanleikaforsendan ógild eða hæpin forsenda. Sem dæmi má nefna bestun á vaktaplani þar sem ákvarðanabreytur svara til fjölda starfsmanna á vakt. Lausnir þar sem fjöldinn er ekki heiltölur hafa enga merkingu, hvernig á að túlka 1.5 starfsmenn?

Ef gildi ákvarðanabreyta í bestu lausn eru nálguð að næstu heiltölu getur nýja lausnin verið umtalsvert lakari en *besta* heiltölulausn eða það sem verra er hún er ekki endilega gjaldgeng.

Dæmi 8.1 Gjaldgenga svæðið afmarkað af skorðum verkefnisins er skyggt og svartir punktar eru gjaldgengar lausnir. Besta lausn línulega bestunarverkefnisins er $(\frac{3}{2}, 2)$. Aftur á móti eru rúnuðu lausnirnar annaðhvort $(1, 2)$ eða $(3, 2)$ – báðar ógjaldgengar.



Athugasemd. Ef slakað er á kröfum ákvarðanabreytanna um að vera heiltölur í rauntölur, þá er talað um **LP-tilslökun** (e. LP-relaxation).

8.1 Tegundir bestunarlíkana

Gerum greinarmun á eftirfarandi tegundum verkefna:

- Gerum ráð fyrir að föll séu línuleg og sleppum að taka fram *línulega* heiltölubestun.
- Þegar allar breytur í líkani eru heiltölubreytur kallast það **heiltölubestun** (e. Integer Programming), IP.
- Ef sumar eru heiltölubreytur en aðrar samfeldar notum við **blandaða heiltölubestun** (e. Mixed Integer Programming), MIP.
- Þegar við höfum *binary* breytur sem aðeins geta tekið gildið 1 eða 0, þá höfum við **tvíkostaverkefni** (e. Binary Integer Programming) BIP.

Athugasemd. Verkefni þar sem taka þarf röð *já–nei* ákvarðana má oft setja fram sem tvíkostaverkefni með

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{ef ákvörðun } j \text{ er tekin} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Dæmi 8.2 (Staðarval) Ákveða á hvort það á að byggja verksmiðju í LA eða SF, eða jafnvel á báðum stöðum. Einnig er í *athugun* hvort byggja eigi einn nýjan lager, og yrði hann annað hvort byggður í SF eða LA. Einnig er skilyrði að það verði að vera verksmiðja þar sem lager er byggður. Eftirfarandi framlegðar- og kostnaðartölur liggja fyrir í ($\$10^6$)

Nr.ákv.	Ákvörðun	Ákv.br.	Núvirtur hagnaður	Fjármagnsþörf
1	Verksm. í LA	x_1	9	6
2	Verksm. í SF	x_2	5	3
3	Lager í LA	x_3	6	5
4	Lager í SF	x_4	4	2
			Fjármagn til reiðu:	10

Fjármagn er takmarkað og ákvarða þarf hvað eigi að byggja þannig að arðsemi sé hámörkuð.

Lausn: Stærðfræðilegt líkan:

$$\max_{\boldsymbol{x}} z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

m.t.t. sk.:

$$\begin{aligned}
6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &\leq 10 \\
x_3 &\leq x_1 \\
x_4 &\leq x_2 \\
x_3 + x_4 &\leq 1 \\
x_j &\geq 0 \\
x_j &\leq 1 \\
x_j & \quad \text{er heiltala} \\
x_j & \quad \text{er tvíundarbreyta}
\end{aligned}$$

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{ef ákvörðun er já,} \\ 0 & \text{ef ákvörðun er nei.} \end{cases} \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$

Leysum með GLPK m.þ.a. setja

```
var x1, binary;
var x2, binary;
var x3, binary;
var x4, binary;
```

Markfall og skorður eins og lýst er hér að ofan. Besta lausn er $x_1^* = x_2^* = 1$, $x_3^* = x_4^* = 0$ með $z^* = 14$.

Dæmi um hagnýtingu tvíkostaverkefna

Mörg verkefni tengd fjárfestingum eru svipaðs eðlis, þ.e. ákveða á hvort ráðast eigi í tilteknar fjárfestingar en ekki bara hversu mikið eigi að fjárfesta (hefðbundin línuleg bestun).

- Fjárfestingar: Þegar ákveða á *hvort* ráðast eigi í tilteknar framkvæmdir (sbr. dæmi 8.2) en ekki bara *hversu mikið* eigi að fjárfesta (hefðbundin línuleg bestun)

- Ákvarða *hvar* á að byggja/opna nýja verksmiðju/verslun o.s.frv.

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{ef á að byggja á stað } j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

- Samval hlutabréfa (e. portfolio optimization): Finna eignasafn sem lágmarkar áhættu m.v. tiltekna (vænta) ávöxtun og lágmarkar jafnframt kostnað við kaup og sölu (e. transaction costs). Tvær ákvarðanabreytur fyrir hvert (hluta)bréf:

$$\begin{aligned} y_j &= \begin{cases} 1 & \text{ef bréf } j \text{ er keypt} \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \\ x_j &= \text{magn sem á að kaupa af bréfum } j \end{aligned}$$

- Vöruútkeyrsla á sendibílum til viðskiptavina

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ef bíll } i \text{ fer til viðskiptavinar } j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

- Sala á eignum: *hvenær* á að selja t.þ.a. hámarka hagna

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ef eign } i \text{ er seld á tímabili } j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

- Flugrekstur (uppspretta marvíslegra bestunarverkefna): Úthlutun flugvéla á flugleiðir

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ef flugvél } i \text{ flýgur leið } j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

- Lágmarka kostnað en uppfylla jafnframt kröfum um afköst.

8.2 Skorður með tvíkostabreytum

Með því að innleiða tvíkostabreytur má vinna með fjölbreyttari skorður en áður (þ.e. allar skorður uppfylltar).

8.2.1 Annaðhvort–eða skorður

Annaðhvort þarf skorða (1) eða skorða (2) að gilda.

Dæmi 8.3 (Framhald af Wyndor úr dæmi 3.1) Við höfum tvö aðföng til að nota í ákveðnum tilgangi og því þarf að virða magn sem til er af öðrum hvorum aðföngunum. Því þarf annaðhvort að gilda

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

eða

$$x_1 + 4x_2 \leq 16$$

LAUSN: Látum $M > 0$ tákna einhverja stóra tölu svo skorðan skerði ekki lausnarrúmið. Jafngildar skorður eru

- annaðhvort $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 & \leq 18 \\ x_1 + 4x_2 & \leq 16 + M \qquad \text{(alltaf uppfyllt)} \end{cases}$

- eða $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 & \leq 18 + M \qquad \text{(alltaf uppfyllt)} \\ x_1 + 4x_2 & \leq 16 \end{cases}$

Innleiðum nýja breytu $y \in \{0, 1\}$ – ákvörðunarbreyta. Þá fæst

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 + My \\ x_1 + 4x_2 &\leq 16 + M(1 - y) \end{aligned}$$

Athugasemd. y kallast **aukabreyta** (e. auxiliary variable).

8.2.2 K af N skorður eru með

Hægt að útfæra *annaðhvort–eða* skorður þannig að K af N skorðum séu með, þ.e. K af N skorðum eiga að halda.

Dæmi 8.4

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\leq b_1 + My_1 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\leq b_2 + My_2 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\leq b_m + My_m \\ \sum_{i=1}^{m} y_i &= N - K \end{aligned}$$

Þar sem y_i er tvíundarbreytur þ.a. $y_i = \begin{cases} 1 & \text{ef skorða er með} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$.

8.2.3 Föll með N mögulegum gildum

Oft geta föll tekið nokkur skilgreind gildi, t.d.

$$f(x_1, ..., x_n) = d_1 \text{ eða } d_2 \text{ eða } d_3 \text{ eða } \cdots$$

Dæmi 8.5 (Hlutir sem koma í kippum – t.d. bjór) Höfum fall:

$$3x_1 + x_2 = 6 \text{ eða } 12 \text{ eða } 18$$

Lausn: Þetta má setja upp sem:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 6y_1 + 12y_2 + 18y_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \end{aligned}$$

þar sem y_1, y_2, y_3 eru tvíundarbreytur.

8.2.4 Fastagjald

Fastagjald ef ákveðin ákvörðunarbreyta er notuð.

Dæmi 8.6 Ef framleiða á ál þarf að gangsetja ofn. G.r.f. að kostnaður við að framleiða afurð j sé

$$f_j(x_j) = \begin{cases} k_j + c_j x_j & \text{ef } x_j > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

þar sem k_j er fastur kostnaður vöru j og c_j er breytilegur kostnaður vöru j.

Viljum lágmarka heildarkostnað við framleiðsluna

$$\min_{\boldsymbol{x}} z = \sum_{j=1}^{N} f_j(x_j)$$

LAUSN: Innleiðum aukabreytu $y_j \in \{0,1\}$ þ.a. $y_j = \begin{cases} 1 & \text{ef } x_j > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$.

Þá fæst

$$\min_{\boldsymbol{x}} z = \sum_{j=1}^{N} c_j x_j + \sum_{j=1}^{N} k_j y_j$$

m.t.t. sk.

$$x_j \leq M y_j$$

því að

$$\begin{array}{lcl} y_j = 0 & \Rightarrow & x_j = 0 \\ y_j = 1 & \Rightarrow & x_j > 0 \end{array}$$

Athugasemd. Ef $x_j = 0$, þá verður $y_j = 0$ vegna þess að við erum að lágmarka z og $k_j > 0$.

8.3 Lausnaraðferðir

Mikil vinna við að þróa aðferðir til að leysa heiltölubestunarvandamál.

Fjöldi mögulegra heiltölulausna er endanlegur (sáum í dæmi 8.1 að þær væru 6 talsins). Er einfaldlega hægt að prófa allar mögulegar lausnir og velja síðan þá bestu? Nei! Fjöldi lausna vex *mjög* hratt.

Fyrir tvíkosta verkefni með n breytum er fjöldui mögulegra lausna $\leq 2^n$. Getum útilokað þær sem uppfylla ekki skorður.

Dæmi 8.7 (Veldisvísisvöxtur) Skoðum tímann sem tekur að prófa allar lausnir, gefið $m = n$ skorður, fyrir mismunandi gildi á n. Fjöldi lausna sem má prófa á sek er u.þ.b. $3 \cdot 10^9$ með $3GHz$ tölvu:

n	2^n	tími
10	1024	
20	$\approx 10^6$	1 sek
30	$\approx 10^9$	20 mín
40	$\approx 10^{12}$	27 dagar
50	$\approx 10^{15}$	119 ár
100	$\approx 10^{30}$	$5 \cdot 10^{17}$ ár

Hvað ræður mestu um reiknihraða?

- Fyrir LP er það fjöldi skorða (ath: nykur verkefnið gæti verið með færri skorður).
- Fyrir IP er það fjöldi breyta.
- Fyrir MIP er fjöldi heiltölubreyta ráðandi í lausnartíma.

Fyrir línulega bestun vex reiknitími Simplex aðferðarinnar í versta falli (Klee & Minty verkefnið á bls. 57) með veldisvísisfalli af m og n. Í langflestum tilvikum er Simplex þó miklu fljótari að finna bestu lausn. Fjöldi ítrana er að meðaltali $n + m$.

Svonefndar innripunktaaðferðir hafa reiknitíma sem takmarka má að ofan með margliðu í m og n (sjá grein 7.4 í H&L).

Öll þekkt reiknirit fyrir tvíkostaverkefni hafa reiknitíma sem vex sem veldisvísisfall í m og n (þó hægar en 2^n). Bestu algrím geta ekki leyst meira en 100 breytu vandamál af öryggi á *raunhæfum* tíma, en oft er hægt er að leysa stærri vandamál ef þau lúta sérstökum skilyrðum, t.d. BIP með 6000 breytum ef $\boldsymbol{A}$ fylki er mjög rýrt.

Almenn heiltöluverkefni ($x_i \in \{0, 1, 2, ...\}$) eru erfiðari að leysa en tvíkostaverkefni og þau sem hægt er að leysa eru því smærri í sniðum.

Helstu aðferðir

- *Branch and bound*,

- *Cutting planes*,
- *Metaheuristics*.

Hraðvirkustu aðferðirnar nota LP-tilslökun.

8.3.1 LP tilslökun

Leysir verkefnið sem hefðbundið LP og rúnar svo lausnina upp eða niður í næstu heiltölu.

Athugasemd. Þetta getur haft í för með sér að *besta* lausn sem LP-tilslökun finnur sé ógjaldgeng eða jafnvel lakari en raunverulega besta lausnin. Samanber dæmi 8.1.

8.3.2 *Branch and Bound*

Branch and bound aðferðafræðin er mikið notuð í bestun.

Upphaflega verkefninu er skipt niður í sífellt smærri undirverkefni (**kvíslun**, e. branching) þar til undirverkefni verða nægilega smá til þess að þau séu auðleyst.

Fyrir sérhvert undirverkefni er fundin efri mörk fyrir hámörkunarverkefni *eða* neðri mörk fyrir lágmörkunarverkefni (e. bounds) á lausn þess, oft með línulegri bestun þar sem slakað hefur verið á kröfum um heiltölulausn (LP-tilslökun). Þessi mörk eru síðan notuð t.þ.a. útiloka önnur undirverkefni.

Vandamálið við þessa aðferðafræði í heiltölubestun er sú að fjöldi undirverkefna vex mjög hratt (veldisvísisvöxtur).

Þrjú megin skref sem öll **branch og bound** algrím eiga sameiginlegt:[1]

1. **Kvíslun** (e. branching):

[1]Munur á aðferðum liggur í hvernig þessi skref eru framkvæmd.

- Val undirvandamáls sem á að skoða næst og skiptingu þess í undirvandamál.
- Mismunandi leiðir til að velja næsta vandamál (t.d. velja það sem síðast var leyst) og hvernig á að skipta niður (t.d. ganga á röðina).

2. **Efra mark** (e. bounding):
   - Leysa LP-tilslökun fyrir undirvandamál til að fá efri mörk.
3. **Eyðing** (e. fathoming):
   - Skipulögð eyðing undirsvæða þar sem lausn getur ekki verið.

Dæmi 8.8 (BIP) Skoðum dæmi 8.2 aftur:

$$\max_{\boldsymbol{x}} z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

m.t.t. sk.

$$\begin{array}{rrrrcl} 6x_1 & + 3x_2 & + 5x_3 & + 2x_4 & \leq & 10 \\ & & x_3 & + x_4 & \leq & 1 \\ -x_1 & & + x_3 & & \leq & 0 \\ & -x_2 & & + x_4 & \leq & 0 \end{array}$$

og

$$x_j \text{ er tvíunda breyta, } j = 1, 2, 3, 4.$$

Lausn (með *Branch and bound*):

1. **LP-tilslökun á upphaflega verkefnið** Leysi næst upprunanlega verkefnið sem hefðbundið línulegt bestunarverkefni með GLPK. Fæ lausnina $\boldsymbol{x} = (\frac{5}{6}, 1, 0, 1)$ sem gefur $z = 16.5$. Athugum að $x_1 = \frac{5}{6}$ er ekki heiltala!

   Þar sem leyfilegar lausnir BIP vandamálsins eru hlutmengi í mengi leyfilegra lausna á afslappaða verkefninu, þá er $z \leq 16$ efra mark á bestu lausn BIP vandamálsins (því allir stuðlar c_j eru heiltölugildir).

2. Í upphafi er sett $z^* = -\infty$ sem besta *þekkta* heiltölulausnin.

3. Skiptum upphaflega verkefninu niður eftir x_1 í tvö undirverkefni. Vitum jafnframt að $z^* \leq 16 = \lfloor 16.5 \rfloor$

   Undirverkefni 1 $x_1 = 0$.

$$\max_{\boldsymbol{x}} z = 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

$$\begin{array}{rrrcl} 3x_2 & +\ 5x_3 & +\ 2x_4 & \leq & 10 \\ & x_3 & +\ x_4 & \leq & 1 \\ & +\ x_3 & & \leq & 0 \\ -x_2 & & +\ x_4 & \leq & 0 \end{array}$$

$$x_j \text{ er tvíunda breyta, } j = 2, 3, 4$$

   LP-lausn fyrir undirverkefni 1 er: $\boldsymbol{x} = (0, 1, 0, 1)$ með $z = 9$

   Undirverkefni 2 $x_1 = 1$.

$$\max_{\boldsymbol{x}} z = 9 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

$$\begin{array}{rrrcl} 3x_2 & +\ 5x_3 & +\ 2x_4 & \leq & 10 - 6 \\ & x_3 & +\ x_4 & \leq & 1 \\ & +\ x_3 & & \leq & 0 + 1 \\ -x_2 & & +\ x_4 & \leq & 0 \end{array}$$

$$x_j \text{ er tvíunda breyta, } j = 2, 3, 4$$

   LP-lausn fyrir undirverkefni 2 er: $\boldsymbol{x} = (0, \frac{4}{5}, 0, \frac{4}{5})$ með $z = 16.2$

4. Sjáum að hjá undirverkefni 1 er komin heiltölulausn (heppni!) og því besta lausn á undirverkefni 1 – því þarf ekki að skoða þetta undirverkefni nánar. Þessi lausn er besta lausn sem hefur fundist hingað til og kallast *incumbent solution*, við geymum hana og setjum $z^* = 9$.

Athugasemd. Vitum nú að besta lausn er á bilinu $[9, 16]$.

---

5. **Eyðing** Hægt er að eyða undirverkefni ef:
   (i) Efra mark $\le z^*$.
   (ii) Ef afslappaða verkefni þess hefur engar leyfilegar lausnir.
   (iii) Ef afslappaða verkefni þess hefur heiltölulausn.

   Getum eytt undirverkefni 1 skv. (iii) hér á undan. Höldum því einungis áfram með undirverkefni 2:

6. Skiptum nú undirverkefni 2 niður eftir x_2 þar sem $z^* \le 16 \le \lfloor 16.2 \rfloor$ (munum að enn gildir $x_1 = 1$)

   Undirverkefni 2–1 $x_2 = 0$

$$\max_{\boldsymbol{x}} z = 9 + 6x_3 + 4x_4$$

$$\begin{array}{rrcl} 5x_3 & +\, 2x_4 & \le & 4 \\ x_3 & +\, x_4 & \le & 1 \\ x_3 & & \le & 1 \\ & x_4 & \le & 0 \end{array}$$

$$x_j \text{ er tvíunda breyta, } j = 3, 4$$

   LP-lausn fyrir undirverkefni 2–1 er: $\boldsymbol{x} = (1, 0, \frac{4}{5}, 0)$ með $z = 13.8$

   Undirverkefni 2–2 $x_2 = 1$.

$$\max_{\boldsymbol{x}} z = 9 + 5 + 6x_3 + 4x_4$$

$$\begin{array}{rrcl} 5x_3 & +\, 2x_4 & \le & 4 - 3 \\ x_3 & +\, x_4 & \le & 1 \\ x_3 & & \le & 1 \\ & x_4 & \le & 0 + 1 \end{array}$$

$$x_j \text{ er tvíunda breyta, } j = 3, 4$$

LP-lausn fyrir undirverkefni 2–2 er: $\boldsymbol{x} = (1, 1, 0, \frac{1}{2})$ með $z = 16$

7. Finna efra mark
   (a) Undirverkefni 2–1: LP-lausn fékk hæst $z = 13.8$, $\Rightarrow$ efra mark 13
   (b) Undirverkefni 2–2: LP-lausn fékk hæst $z = 16$, $\Rightarrow$ efra mark 16
8. Getum engu eytt.
9. Efri mörk fyrir undirverkefni 2–1 og 2–2 eru stærri en z^*, þurfum því að skoða þau *bæði* betur. Kvíslum næst undirverkefni 2–2 (vænlegra því efra mark er hærra) eftir x_3

Undirverkefni 2–2–1 $x_3 = 0$

$$\max_{\boldsymbol{x}} z = 9 + 5 + 4x_4$$

$$\begin{array}{rcl} 2x_4 & \leq & 1 \\ x_4 & \leq & 1 \\ 0 & \leq & 1 \\ x_4 & \leq & 1 \end{array}$$

$$x_j \text{ er tvíunda breyta, } j = 4$$

LP-lausn fyrir undirverkefni 2–2–1 er: $\boldsymbol{x} = (1, 1, 0, \frac{1}{2})$ með $z = 16$

Undirverkefni 2–2–2 $x_3 = 1$.

$$\max_{\boldsymbol{x}} z = 9 + 5 + 6 + 4x_4$$

$$\begin{array}{rcl} 2x_4 & \leq & 1 - 5 \\ x_4 & \leq & 1 - 1 \\ 1 & \leq & 1 \\ x_4 & \leq & 1 \end{array}$$

x_j er tvíunda breyta, $j = 4$

Ekki er til gjaldgeng lausn fyrir undirverkefni 2–2–2.

10. Getum eytt undirverkefni 2–2–2 því það hefur engar löglegar lausnir.

11. Höldum áfram með undirverkefni 2–2–1:

    Undirverkefni 2–2–1–1 $x_4 = 0$

    $$\max_{\boldsymbol{x}} z = 14$$

    $$\begin{array}{ccc} 0 & \leq & 1 \\ 0 & \leq & 1 \\ 0 & \leq & 1 \end{array}$$

    LP-lausn fyrir undirverkefni 2–2–1 er: $\boldsymbol{x} = (1, 1, 0, 1)$ með $z = 14$

    Undirverkefni 2–2–1–2 $x_4 = 1$.

    $$\max_{\boldsymbol{x}} z = 14 + 4$$

    $$\begin{array}{ccc} 0 & \leq & 1 - 2 \\ 0 & \leq & 1 - 1 \\ 0 & \leq & 1 - 1 \end{array}$$

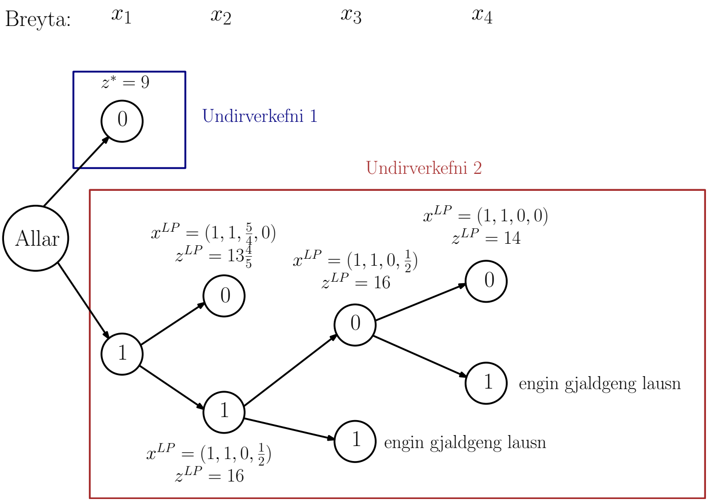
    Ekki er til gjaldgeng lausn fyrir undirverkefni 2–2–1–2.

12. Getum eytt undirverkefni 2–2–1–1 því það hefur heiltölulausn. Jafnframt er sú lausn hærri en núverandi *incumbent* lausn, uppfærum hana því í $z^* = 14$.

    Getum jafnframt eytt undirverkefni 2–2–1–2 þar sem það er ógjaldgengt.

13. Sáum í skrefi 9 að við þyrftum að skoða bæði undirverkefni 2–1 og 2–2. Við erum búin að eyða öllum greinum undirverkefnis 2–2. Skoðum aftur 2–1, þar var efra mark $z \leq 13$, en *nýja* besta *incumbent* lausn er $z^* = 14$ og það er hærra en efra markið, þ.a.l. getum við *núna* eytt undirverkefni 2–1.

14. Allar greinar eyddar. Besta lausn er síðasta *incumbent* lausn, þ.e.a.s. $\boldsymbol{x}^* = (1, 1, 0, 1)$ með $z^* = 14$



Lausn (*Branch-and-bound* með glpk): Þó svo glpk geti leyst tvíkostaverkefni, sbr. `var x, binary;` þá er minnsta mál að beita LP-tilslökun, og bæta við einni og einni skorðu fyrir hvert undirverkefni eins og gert var hér að ofan. Hér skiptir mestu máli að vera skipulagður í uppsetningu og kommenta réttar línur í hvert sinn forritið er keyrt.

```
set I := 1..2; # LA eda SF

var xl{I}, >=0, <=1; # LP relaxation
var xv{I}, >=0, <=1; # LP relaxation

# Nuvirtur hagnadur
param c_l{I};
param c_v{I};

# Fjarmagnsthorf
param A_l{I};
```

```
param A_v{I};

# Mesta lagi einn lager byggdur
s.t. max1lager: sum{i in I} xl[i] <= 1;

# Einungis lager thar sem er verksmidja
s.t. lager_ef_verksm{i in I}: xl[i] <= xv[i];

# Fjarmagn til umrada
s.t. pen: sum{i in I} A_v[i]*xv[i] + sum{i in I}A_l[i]*xl[i] <= 10;

#------ BRANCH AND BOUND *START* ------
# Kommenta fyrst allt i B-N-B blokkinni, og vinnid ykkur nidur

# s.t. Undirv1: xv[1]=0;
# LP => x=(0,1,0,1) z=9 ==> heiltolur, setjum z*=9, EYDA!

s.t. Undirv2: xv[1]=1; # Kommenta ut 1
# LP => x=(1,.8,1,.8) z=16.2 ==> Getum ekki eytt

  # s.t. Undirv2_1: xv[2]=0;
  # LP => x=(1,0,0.8,0) z=13.8 ==> Getum ekki eytt

  s.t. Undirv2_2: xv[2]=1; # Kommenta ut 2.1
  # LP => x=(1,1,0,.5) z=16 ==> Getum ekki eytt

  # Gatum hvorki hent 2.1 ne 2.2 --> byrjum med 2.2 (vaenlegra)

    s.t. Undirv2_2_1: xl[1]=0;
    # LP => fengum x=(1,1,0,.5) z=16 ==> Getum ekki eytt

    # s.t. Undirv2_2_2: xl[1]=1;
    # LP => PROBLEM HAS NO PRIMAL FEASIBLE SOLUTION ==> EYDA!

  # Gatum eytt 2.2.2 (kommenta ut), kvislum 2.2.1 (afkommenta)

      # s.t. Undirv2_2_1_1: xl[2]=0;
```

```
        # LP => x=(1,1,0,0) z=14 ==> Heiltolulausn, setjum z*=14, EYDA!

        s.t. Undirv2_2_1_2: xl[2]=1;
        # LP => PROBLEM HAS NO PRIMAL FEASIBLE SOLUTION ==> EYDA!

   # Getum nu snuid okkur aftur 2.1

   # Rifjum upp: efri mork 13 ==> Getum NUNA eytt (z*=14>13)

# BESTA LAUSN ER FUNDIN, x*=(1,1,0,0) z*=14

# ----- BRANCH AND BOUND *FINISH* -----

# Hamarka framlegd
maximize z: sum{i in I} c_v[i]*xv[i] + sum{i in I} c_l[i]*xl[i];

solve;

# Prenta ut akv.breytur og besta markfallsgildi
display xv, xl, (sum{i in I} c_v[i]*xv[i] + sum{i in I} c_l[i]*xl[i]);

data;
param c_v :=
 1   9
 2   5;
param c_l :=
 1   6
 2   4;
param A_v :=
 1   6
 2   3;
param A_l :=
 1   5
 2   2;
end;
```

../glpk/branchandbound.mod

8.3.3 *Branch and bound* fyrir MIP

Branch and bound fyrir blönduð heiltöluverkefni.

Dæmi 8.9

$$\max_{\boldsymbol{x}} z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$$

m.t.t. sk.

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & & +\ 5x_3 & & \leq & 10 \\ x_1 & +\ x_2 & -\ x_3 & & \leq & 1 \\ 6x_1 & -\ 5x_2 & & & \leq & 0 \\ -x_1 & & +\ 2x_3 & -\ 2x_4 & \leq & 3 \end{array}$$

og

$$\begin{array}{rl} x_j \geq 0 & j = 1, 2, 3, 4. \\ x_j & \text{heiltala, } j = 1, 2, 3. \\ x_4 & \text{samfelld.} \end{array}$$

LAUSN:

(0) Köllum fyrsta undirverkefnið $\mathcal{U}_0$. Setjum $z^* = -\infty$ (besta þekkta lausn á MIP hingað til). Leysum línl. bestunarverkefnið með því að slaka á heiltölu kröfunni í $\mathcal{U}_0$.

Athugasemd. Annaðhvort í höndunum (Simplex-tafla) eða með GLPK.

Fáum LP-lausn: $\boldsymbol{x} = (1.25, 1.5, 1.75, 0)$ með $z = 14.25$.

Sjáum að x_1, x_2 og x_3 eru ekki heiltölur, og þurfum því að kvísla verkefninu í frekari undirverkefni.

Efra mark er 14.25 – við nálgum ekki því x_4 er *ekki* heiltölubreyta.

(1) Veljum $x_1 = 1.25$ til að kvísla eftir:

$\mathcal{U}_0$ ásamt $\mathcal{U}_1 : \; x_1 \leq 1$
$\Rightarrow \boldsymbol{x} = (1, 1.2, 1.8, 0)$ með $z = 14.2$.

$\mathcal{U}_0$ ásamt $\mathcal{U}_2 : \; x_1 \geq 2$
$\Rightarrow$ engin gjaldgeng lausn.

(2) Getum eytt $\mathcal{U}_2$. Kvíslum $\mathcal{U}_1$ eftir $x_2 = 1.2$

$\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ ásamt $\mathcal{U}_3 : \; x_2 \leq 1$
$\Rightarrow \boldsymbol{x} = (0.833, 1, 1.833, 0)$ með $z =$ 14.1667.

$\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ ásamt $\mathcal{U}_4 : \; x_2 \leq 2$
$\Rightarrow \boldsymbol{x} = (0.833, 2, 1.833, 0)$ með z 12.1667.

(3) Getum ekki eytt, en kvíslum frekar $\mathcal{U}_3$ því það hefur hærra efra mark. Bíðum með $\mathcal{U}_4$. Kvíslum $\mathcal{U}_3$ eftir $x_1 = 0.833$:

$\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_3$ ásamt $\mathcal{U}_5 : \; x_1 \leq 0$
$\Rightarrow$ engin gjaldgeng lausn
$\Rightarrow$ eyðum!

$\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_3$ ásamt $\mathcal{U}_6 : \; x_1 \leq 1$
$\Rightarrow \boldsymbol{x} = (0, 0, 2, 0.5)$ með $z = 13.5$.
Fundum löglega lausn á $\mathcal{U}_0$, svo við u
færum $z^* = 13.5$.
$\Rightarrow$ eyðum!

(4) Getum núna eytt $\mathcal{U}_4$ því efra mark þess er $12.667 < z^*$.

(5) Höfum afgreitt öll undirverkefni. Besta lausn er því $\boldsymbol{x}^* = (0, 0, 2, 0.5)$ með $z^* = 13.5$.

8.3.4 Samantekt á *Branch and Bound* fyrir IP

- Upphafsskref: Lát $Z = -\infty$.

Athugasemd. Athugið *fathoming test*, ef ekki er hægt að eyða verkefni, þá er þetta fyrsta undirverkefni.

- **Kvíslun** (e. branch): Af þeim undirvandamálum sem ekki hefur verið eytt, veljið það sem síðast var búið til, eða það sem hefur besta efra mark. Skiptið upp með því að setja gildi (0 eða 1) eða með því að setja bil $x_j \leq [x_j^*]$ og $x_j \geq [x_j^*] + 1$ (x_j^* lausn á LP-tilslökunina).

- **Efra mark** (e. bound): Búið til efra mark með því að leysa aflappaða vandamálið með simplex aðferðinni.

- **Eyðing** (e. fathom): Undirvandamáli er eytt ef:

  – $F(1)$: eframark $\leq z^*$,

  – $F(2)$: afslappaða verkefni þess hefur engar leyfilegar lausnir,

  – $F(3)$: afslappaða verkefni þess hefur heiltölulausn. Þessi er ný *incumbent* lausn ef hún er betri.

- Besta lausn fundin? Halda áfram uns engin undirvandamál eru eftir. Síðasta *incumbent* lausnin er besta lausn.

8.4 Kvíslisnið fyrir BIP verkefni

Kvíslisnið (e. branch-and-cut) fyrir tvíkostaverkefni, þ.e. ákvarðanabreytur eru annaðhvort 0 eða 1.

Hugmynd: Forvinna BIP verkefnið þannig að það taki skemmri tíma til að leysa (án þess að útiloka gjaldgenga lausn). Aðferðir flokkast undir:

Festa ákvörðunarbreytur annaðhvort sem 0 eða 1 þannig að besta lausnin sé ekki útilokuð, t.d. ef $3x_1 \leq 2$ þá er $x_1 = 0$.

Eyða óþarfa skorðum sem dæmi er skorðan $3x_1 + 2x_2 \leq 6$ ofaukið, vegna þess að $3(1) + 2(1) = 5 \leq 6$. Getum eytt því skorðan verður alltaf uppfyllt.

Þrengja skorður minnka gjaldgengt svæði fyrir afslappað verkefni (LP-tilslökun) án þess að útiloka gjaldgengar lausnir á BIP verkefni.

8.4.1 Mynda kvíslisnið

1. Athuga skorður sem eru aðeins með jákvæða stuðla og $\leq$ form,

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$$

2. Finna hóp af breytum (minnsta þekjugrúpa) þannig að:
   - skorðan sé ekki gjaldgeng ef allar breytur í þekjugrúpu eru 1 og allar aðrar breytur eru 0, t.d. minnsta þekjugrúpa $\{x_1, x_3\}$,

   $$6(1) + 3(0) + 5(1) + 2(0) = 11 \not\leq 10$$

   - skorðan verður gjaldgeng ef ein breyta (eða fleiri) verður 0 í stað 1, t.d.

   $$6(1) + 3(0) + 5(\mathbf{0}) + 2(0) = 6 \leq 10$$

   eða

   $$6(\mathbf{0}) + 3(0) + 5(1) + 2(0) = 5 \leq 10.$$

   - Lát N vera fjölda breyta í minnstu þekjugrúpu $\mathcal{G}$, þá er hægt að mynda kvíslisnið á eftirfarandi formi:

   $$\sum_{i \in \mathcal{G}} x_i \leq N - 1$$

Dæmi 8.10 Kvíslisnið fyrir

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$$

LAUSN:

$$x_1 + x_3 \leq 1$$

og

$$x_1 + x_2 + x_4 \leq 2$$

8.4.2 Reiknirit til að þrengja skorður

```
function [a,b] = tighten(a,b)
% usage example: [a,b] = tighten([2 3], 4)

while 1, % infinite loop
% Calculate S = sum of the positive a(j)
  S = sum(a(find(a>0)));
% identify a(j) ~= 0 such that S < b + abs(a(j))
  I = find(a~=0 & S < b + abs(a));
% bail out of while loop if you can!
  if isempty(I), break; end
% lets just look at the first one
  j = I(1);
% condition a(j) > 0 and (a(j) < 0)
  if (a(j) > 0)
    ahat = S - b;
    b = S - a(j);
    a(j) = ahat;
  else
    a(j) = b - S;
  end
end
```

../matlab/tighten.m

Dæmi 8.11

$$\max_{\boldsymbol{x}} z = 3x_1 + 2x_2$$

m.t.t. sk.

$$2x_1 + 3x_2 \leq 4$$
$$0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1$$

LAUSN: Notum reikniritið hér að ofan:

```
>> [a,b] = tighten([2 3], 4)

a =

```

```
      1      1

b =

      1
```

Skiptum því $2x_1 + 3x_2 \leq 4$ út fyrir $x_1 + x_2 \leq 1$.

Athugasemd. Skorðan $x_1 + x_2 \leq 1$ hefur minnkað lausnarsvæði línulegu-tilslökunar umtalsvert, en sker ekki burt neinar gjaldgengar lausnir á tvíkostaverkefninu. Nú vill reyndar svo til að LP lausnin er $(0, 1)$.

Þrenging á skorðum er dæmi um hvernig þrengja má lausnarsvæði LP-tilslökunar með því að útbúa **skurðplön** (e. cutting plane). Sjá nánar bls. 514–515.

Kafli 9

Kvik bestun

Þegar taka þarf röð ákvarðana yfir tímabil geta ákvarðanir sem teknar eru snemma í ferlinu haft áhrif á gæði þeirra sem síðar eru teknar. Ef skammtíma sjónarmið ráða eingöngu för, fæst niðurstaða sem yfirleitt er frábrugðin bestu mögulegu lausn. **Kvika bestun** má oft nota bestu röð aðgerða.

Þrep (e. stages): hvert verkefni hefur N þrep (tímaþrep) táknað með n og á hverju þrepi er tekin ákvörðun x_n.

Staða (e. state): á hverju þrepi n eru nokkrar stöður s_n.

Ákvörðun (e. action or policy decision): er byggð á $f_n^*(s_n)$ þar sem x_n^* er besta ákvörðunin á þrepi n (lágmarka eða hámarka):

$$f_n^*(s_n) = f_n(s_n, x_n^*) = \min_{x_n} f_n(s_n, x_n) \text{ eða } \max_{x_n} f_n(s_n, x_n)$$

Besta stefna (e. optimal policy): markmið aðferðarinnar er að finna stefnu π sem segir til um hvaða ákvörðun sé best $x_n^* = \pi^*(s_n)$ í hverju þrepi.

$f_n(s_n, x_n)$ Tillegg til markfalls á þrepum $n, \ldots, N$ ef tekin er ákvörðun x_n og síðan bestu ákvarðanir eftir það (á þrepum $n+1, \ldots, N$).

Kostnaður $\mathcal{C}^{x_n}_{s_n s_{n+1}}$ er kostnaður við að taka ákvörðun x_n og fara úr stöðu s_n í stöðu s_{n+1}.

Slembin kvik bestun (e. stochastic): $\mathcal{P}^{x_n}_{s_n s_{n+1}}$ er líkur á að fara úr stöðu s_n í stöðu s_{n+1} þegar ákvörðun x_n er tekin. Í þessu tilfelli er f_n væntigildi (meðaltal).

Óslembin kvik bestun (e. deterministic):

$$f^*_n(s_n) = \min_{x_n} \left(\mathcal{C}^{x_n}_{s_n s_{n+1}} + \alpha f^*_{n+1}(s_{n+1}) \right)$$

Markov-eiginleiki gefið að við séum í stöðu s_n, þá er besta ákvörðun fyrir þau ástönd sem á eftir koma óháð því hvaða ákvarðanir voru teknar á fyrri þrepum $(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots)$.

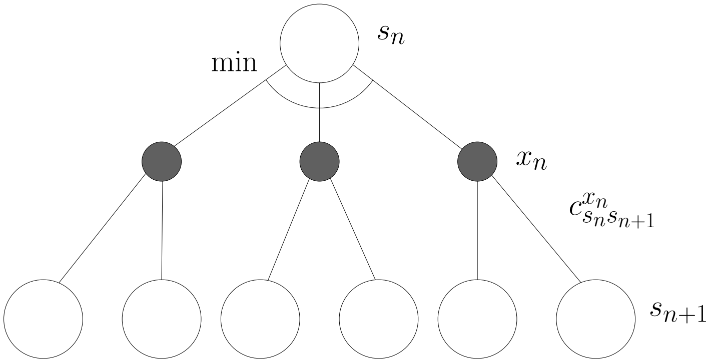
$N = \infty$ þá stefnir $f_n \to \infty$, og því þarf $0 < \alpha < 1$ (e. discount factor), annars notum við venjulega $\alpha = 1$ þegar N er takmarkað.

Bellman-jafna

$$f^*_n(s_n) = \min_{x_n} \sum_{s_{n+1} \in s'} \mathcal{P}^{x_n}_{s_n s_{n+1}} \left(\mathcal{C}^{x_n}_{s_n s_{n+1}} + \alpha f^*_{n+1}(s_{n+1}) \right)$$

9.1 Aðferðin

- Aðferð virkar með því að vinna sig afturábak frá $n = N, N-1, \ldots, 2, 1$.
- Lesum bestu lausn áfram frá $n = 1$.



- Gefin besta ákvörðun í þrepi $n+1$ þá finnum við bestu ákvörðun í þrepi n með því að nota **endurkvæma sambandið** (e. recursive relationship), sem dæmi:

$$f_n^*(s_n) = \min_{x_n} \left(\mathcal{C}^{x_n}_{s_n s_{n+1}} + f_{n+1}^*(s_{n+1}) \right)$$

Athugasemd. Afturvirka sambandið þarf ekki að vera línulegt, annað dæmi um afturvirkt samband er

$$f_n^*(s_n) = \min_{x_n} \left(\mathcal{C}_{s_n s_{n+1}}^{x_n} f_{n+1}^*(s_{n+1}) \right)$$

Í kvikri bestun er oft *unnið afturábak.* Oft er engan veginn augljóst hvernig leysa á bestunarverkefni með kvikri bestun – listgrein frekar en vísindi. Best er að læra það m.þ.a. skoða (og leysa) nokkur dæmi.

Dæmi 9.1 (Leikur) Höfum eftirfarandi leikreglur:

- Tveir leikmenn
- 30 eldspýtur
- Leikmenn skiptast á að draga 1, 2 eða 3 eldspýtur
- Sá sem á leik þegar ein eldspýta er eftir tapar

Hvernig getur sá sem byrjar tryggt sér sigur?

Lausn: Setjum möguleg ástönd og aðgerðir upp í töflu.

Fjöldi sem er eftir (ástand)	Fjöldi eldspýta sem degnar eru (aðgerð)
$\boxed{1}$	tapar
2	1
3	2
4	3
$\boxed{5}$	tapar
6	1
7	2
8	3
$\boxed{9}$	tapar
⋮	⋮

Ástönd sem leiða t.þ.a. andstæðingur tapar eru $T = \{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29\}$.

Drögum eina eldspýtu í upphafi. Í framhaldinu er fjöldinn valinn þannig að andstæðingur lendi í einu af ástöndum T.

Dæmi 9.2 (Afbrigði af svonefndu *bakpokaverkefni*) Vörubíll getur í mesta lagi borið 10 tonna farm. Hægt er að senda þrjár mismunandi vörur með bílnum $V1, V2$ og $V3$. Þyngd og verðmæti eru:

		$V1$	$V2$	$V3$
w	þyngd (tonn)	1	2	2
u	verðmæti	200	500	600

A.m.k. eitt stykki af hverri vöru á að fara í bílinn. Hvernig á að ferma bílinn þ.a. heildarverðmæti sé hámarkað?

LAUSN:

Þrep	vara $i = 1, 2, 3$.
Ástand	s_n = rými sem eftir er að ráðstafa á þrepi n
Ákv.br.	x_n = magn sem sent er af vöru i á þrepi n

Athugasemd. Þurfum að taka a.m.k. eitt stk. af hverri vöru $\Rightarrow$ 3 *þrep* í verkefninu. Athugið einnig að þrepið er ekki tími, eins og oft er raunin í kvikri bestun).

Virði þess að taka ákvörðun x_n á þrepi n (og taka alltaf bestu ákvörðun eftir það) er gefið með eftirfarandi jöfnu:

$$f_n(s_n) = x_n \cdot \underbrace{u_n}_{\text{verðmæti/ein}} + f_{n+1}^k(s_n - x_n \cdot \underbrace{w_n}_{\text{þyngd/ein}})$$

Þrep $n = 3$ Hér er um að ræða vöru 3, $w_3 = 2$ og $u_3 = 600$: Á þessu þrepi erum við búin að setja vörur 1 og 2 í bílinn og því mest $10 - 1 - 2 = 7$ tonn laus.

s_3	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
7	$3 \cdot 600$	3
6	$3 \cdot 600$	3
5	$2 \cdot 600$	2
4	$2 \cdot 600$	2
3	$1 \cdot 600$	1
2	$1 \cdot 600$	1

Þrep $n = 2$ Hér er um að ræða vöru 2, $w_2 = 2$ og $u_2 = 500$: Á þessu þrepi erum við búin að setja vöru 1 í bílinn og því mest $10 - 1 = 9$ tonn laus.

$s_2 \backslash x_2$	$f_2(s_2, x_2) = x_2 u_2 + f_3^*(s_2 - x_2 w_2)$ $x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
9	$1 \cdot 500 + 1800$	$2 \cdot 500 + 1200$	$3 \cdot 600$	2300	1
8	$1 \cdot 500 + 1800$	$2 \cdot 500 + 1200$	$3 \cdot 600$	2300	1
7	$1 \cdot 500 + 1200$	$2 \cdot 500 + 600$	–	1700	1
6	$1 \cdot 500 + 1200$	$2 \cdot 500 + 600$	–	1700	1
5	$1 \cdot 500 + 600$	–	–	1100	1
4	$1 \cdot 500 + 600$	–	–	1100	1

Þrep $n = 1$ Hér er um að ræða vöru 1, $w_1 = 1$ og $u_1 = 200$: Á þessu þrepi er bílinn tómur og því 10 tonn til umráðanna

$s_1 \backslash x_1$	$f_1(s_1, x_1) = x_1 u_1 + f_2^*(s_1 - x_1 w_1)$ 1	2	3	4	5	6	$f_1^*(s_1)$	x_1^*
10	$1 \cdot 200$ $+2300$	$2 \cdot 200$ $+2300$	$3 \cdot 200$ $+1700$	$4 \cdot 200$ $+1700$	$5 \cdot 200$ $+1100$	$6 \cdot 200$ $+1100$	2700	2

Sjáum strax hvað besta gildi markfalls er, nefnilega $z^* = f_1^*(s_1) = 2700$. Til að finna bestu lausnina, þá þurfum við að lesa hana afturábak:

$$x_1^* = 2 \xrightarrow{s_2=8} x_2^* = 1 \xrightarrow{s_3=6} x_3^* = 3.$$

Dæmi 9.3 (Skipan rannsóknateyma) Höfum gefnar forsendur:

- Þrjú teymi glíma við sama verkefnið (geimferðaáætlun) en nota mismunandi aðferðir
- Líkur á að hópunum *mistakist* að leysa verkefnið hefur verið metnar eftirfarandi:

1	0.4
2	0.6
3	0.8

Líkur að öllum mistekist er því $0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.8 = 0.192$.

Nú bætast við tveir toppmenn við í verkefnið. Hvernig á að ráðstafa þessum nýju mönnum þ.a. líkur á að öllum hópum mistakist séu lágmarkaðar m.v. að líkur á að mistakast séu eftirfarandi:

fj. sem bætist við	Hópur 1	2	3
0	0.4	0.6	0.8
1	0.2	0.4	0.5
2	0.15	0.2	0.3

Lausn: Látum

Þrep n	teymi $1, 2, 3$
Ástand s_n	fjöldi sem *eftir* er að ráðstafa á þrepin
Ákv.br. x_n	fjöldi sem úthlutað er á hóp n
$p_i(x_i)$	líkur á að teymi i mistakist m.v. að x_i mönnum hafi verið bætt við hóp i.

Líkur á að öllum mistakist eru $p(x_1)p(x_2)p(x_3)$. Lágmörkum þá stærð, þ.e.

$$\min_{\boldsymbol{x}} p(x_1)p(x_2)p(x_3)$$

m.t.t. sk.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_i \geq 0, \quad x_i \text{ heiltölur}$$

Þá er

$$f_n(s_n, x_n) = p_n(x_n) f^*_{n+1}(s_n - x_n)$$

með

$$f^*_n(s_n, x_n) = \min_{x_n \in \{0,..,s_n\}} f_n(s_n, x_n)$$

Þrep $n = 3$

s_3	$f^*_3(s_3)$	x^*_3
0	0.8	0
1	0.5	1
2	0.3	2

Þrep $n = 2$

$s_2 \backslash x_2$	$f_2(s_2, x_2) = p_2(x_2) f^*_3(s_2 - x_2)$			$f^*_2(s_2)$	x^*_2
	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$		
0	$0.6 \cdot 0.8 = 0.48$	$-$	$-$	0.48	0
1	$0.6 \cdot 0.5 = 0.30$	$0.4 \cdot 0.8 = 0.32$	$-$	0.3	0
2	$0.6 \cdot 0.3 = 0.18$	$0.4 \cdot 0.5 = 0.2$	$0.2 \cdot 0.8 = 0.16$	0.16	2

Þrep $n = 1$

$s_1 \backslash x_1$	$f_1(s_1, x_1) = p_1(x_1) f^*_2(s_1 - x_1)$			$f^*_1(s_1)$	x^*_1
	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$		
2	$0.4 \cdot 0.16 = 0.064$	$0.2 \cdot 0.3 = 0.06$	$0.15 \cdot 0.48 = 0.072$	0.06	1

Besta lausn er

$$x^*_1 = 1 \xrightarrow{s_2=1} x^*_2 = 0 \xrightarrow{s_3=1} x^*_3 = 1$$

sem gefur líkurnar að öllum mistekist eru 0.06.

Dæmi 9.4 (Lagerhald) Fyrirtæki framleiðir eina tegund vöru og selur áfram.

d_j	Eftirspurn í mánuði j (gefin)
x_j	Magn sem á að framleiða (ákv.breyta)
i_j	Lagerstaða í upphafi j-ta tímabils (ástand)

Í mánuði i gildir

$$i_{j+1} = i_j + x_j - d_j$$

G.r.f. að i_1 sé þekkt (upphafsstaða) og lager verði tómur í lokin. Að auki er g.r.f. að d_j, i_j og x_j séu heiltölur.

Kostnaður vegna framleiðslu í mánuði j er

$$\mathcal{C}_j(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{ef } x_j = 0 \\ K_j + c_j(x_j) & \text{ef } x_j \geq 0 \end{cases}$$

þar sem K_j er uppsetningarkostnaður í mánuði j og c_j er einhver kostnaður háður magni.

Þessu til viðbótar er birgðahaldskostnaður h_j á einingu í mán. j. Hver eru þrep, ástönd, ákvarðanabreytur og virðisfall verkefnisins?

LAUSN:

Þrep	tímabil $n \in \{1, 2, .., N\}$
Ástand	lagerstaða í lok tímabils j, þ.e. i_{j+1}
Ákv.br.	x_j er hversu mikið á að framleiða í mán. j
Virðisfallið	er heildarkostnaður: $f(x_j, i_{j+1}) = \mathcal{C}_j(x_j) + h_j i_{j+1}$.

Dæmi 9.5 (Birgðastýring)

Tímabil	Eftirspurn(d_j)	Upps.kostn(K_j)	Lagerk.(h_j)
1	3	3	1
2	2	7	3
3	4	6	2

Breytilegur kostnaður er $c_j = 10$ fyrir fyrstu 3 einingarnar og 20 fyrir þær sem eru umfram það. Í upphafi er $i_1 = 1$.

Lausn:

Þrep $n = 1$ Hér er $d_1 = 3$ en við höfum $i_1 = 1$, því framleiðum við minnst $x_1 = d_1 - i_1 = 2$ og til að dekka alla mögulegar framtíðar eftirspurnir þá þarf $x_1 \leq d_2 + d_3 = 2 + 4$. Því skoðum við $x_1 \in \{2, .., 6\}$.

Þurfum á $\mathcal{C}_1(x_1)$ að halda í töflunni:

x_1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{C}_1(x_1)$	23	33	53	73	93	113	133

i_2	$h_1 i_2$	$f_1^*(i_2) = \mathcal{C}_1(x_1) + h_1 i_2$							$f^*(i_2)$	x_1^*
ástand	kostn	2	3	4	5	6	7	8		
0	0	23							23	2
1	1		34						34	3
2	2			55					55	4
3	3				76				76	5
4	4					97			97	6
5	5						118		118	7
6	6							139	139	8

Þrep $n = 2$

x_2	0	1	2	3	4	5	6
$\mathcal{C}_2(x_2)$	0	17	27	37	57	77	97

i_3	$h_2 i_3$	$f_2^*(i_3) = \mathcal{C}_2(x_2) + h_2 i_3 + f_1^*(i_3 + d_2 - x_2)$							$f^*($
		2	3	4	5	6	7	8	
0	0	$0 + 55$	$17 + 34$	$27 + 23$	$-$	$-$	$-$	$-$	5
1	3	$3 + 76$	$20 + 55$	$30 + 34$	$40 + 23$	$-$	$-$	$-$	6
2	6	$6 + 97$	$23 + 76$	$33 + 55$	$43 + 34$	$63 + 23$	$-$	$-$	7
3	9	$9 + 118$	$26 + 97$	$36 + 76$	$46 + 55$	$66 + 34$	$86 + 23$	$-$	10
4	12	$12 + 139$	$29 + 118$	$39 + 97$	$49 + 76$	$69 + 55$	$89 + 34$	$109 + 23$	12

Þrep $n = 3$

x_3	0	1	2	3	4
$\mathcal{C}_3(x_3)$	0	16	26	36	56

i_4	$h_3 i_4$	$f_3^*(i_4) = \mathcal{C}_3(x_3) + h_3 i_4 + f_2^*(i_4 + d_3 - x_3)$					$f^*(i_4)$	x_3^*
		0	1	2	3	4		
0	0	$0 + 123$	$16 + 100$	$26 + 77$	$36 + 63$	$56 + 50$	99	3

Besta lausn fæst m.þ.a. rekja sig afturábak:

$$\xrightarrow{i_4=0} \boxed{x_3^* = 3} \xrightarrow{i_3=i_4+d_3-x_3=1} \boxed{x_2^* = 1} \xrightarrow{i_2=i_3+d_2-x_2=0} \boxed{x_1^* = 2}$$

með heildarkostnað $z^* = 99$.

Mismunandi snið

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{C}_{s_n}(x_n) + f^*_{n+1}(s_{n+1}) & \min \sum_{n=1}^{N} \mathcal{C}_{s_n}(x_n) \\
p_n(x_n) + f^*_{n+1}(s_n - x_n) & \max \sum_{n=1}^{N} p_n(x_n) \\
p_n(x_n) \cdot f^*_{n+1}(s_n - x_n) & \max \prod_{n=1}^{N} p_n(x_n) \\
x_n u_n + f^*_{n+1}(s_n - x_n w_n) & \max \sum_{n=1}^{N} x_n u_n
\end{array}$$

Kafli 10

Þumalputtareglur

Fram að þessu höfum við skoðað aðferðir sem finna bestu lausn á há- eða lágmörkunarverkefnum sbr. Simplex-aðferðin fyrir línulega bestun og *branch and bound* fyrir heiltölubestun.

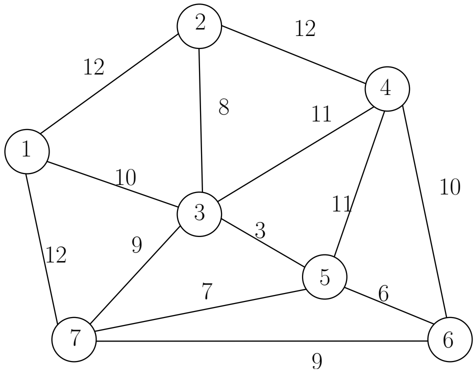
Mörg hagnýt verkefni í aðgerðagreiningu eru af þeirri stærðargráðu að illmögulegt eða jafnvel ómögulegt er að finna bestu lausn.

Í slíkum tilfellum er ásættanlegt að finna *góða* lausn, þ.e. gjaldgenga lausn sem er ekki mikið verri en sú besta.

Svonefndar **brjóstvitsaðferðir** (e. heuristics) eru oft notaðar til að finna slíkar nálgunarlausnir.

Eitt þekktasta dæmið snýst um farandsölumann (e. Travelling Salesman Problem – TSP) sem ætlar að heimsækja nokkra bæi. Verkefnið felst í því að heimsækja sérhvern bæ einu sinni áður en hann snýr til baka í bæinn sem hann býr í, þannig að heildarvegalengd sé sem minnst.

Dæmi 10.1 (TSP)



Skyld verkefni eru m.a.

- Vöruútkeyrsla
- Framleiðsla á prentplötum

Athugasemd. Fjöldi mögulegra leiða ef fjöldi bæja er n er:

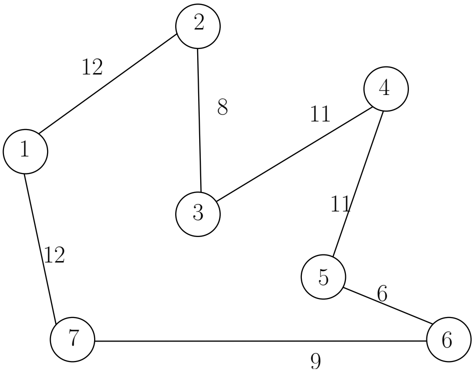
$$\frac{(n-1)(n-2)\cdots(1)}{2} = \frac{(n-1)!}{2}$$

Þannig að fyrir $n = 20$ eru þetta 10^{16} gjaldgengar leiðir, en fyrir $n = 50$ eru þetta 10^{62} gjaldgengar leiðir!

Framgangsmáti nálgunaraðferða er yfirleitt þannig að fyrst er fundin einhver gjaldgeng lausn (getur verið mjög erfitt) og síðan eru smávægilegar bætingar á lausninni gerðar ítrekað.

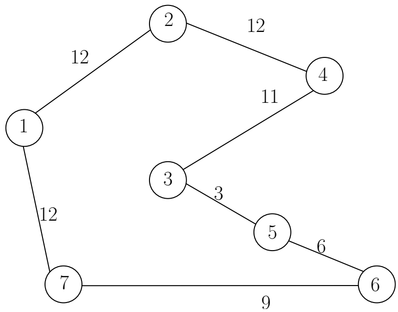
Dæmi um slíkar endurbætur í verkefni farandsölumannsins er að víxla á tveimur eða fleiri áfangastöðum (e. subtour reversal).

Lausn (á TSP dæmi 10.1): Höfum gefna upphafslausn þar sem farandsölumaðurinn fer $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 1$ með fjarlægð 69.



Prófum að víxla á $2 \to 3, 3 \to 4, 4 \to 5$ og $5 \to 6$.

Ef víxlað er t.d. á $3 \to 4$ verður vegalengdin 65 – sem er stytting um 4.

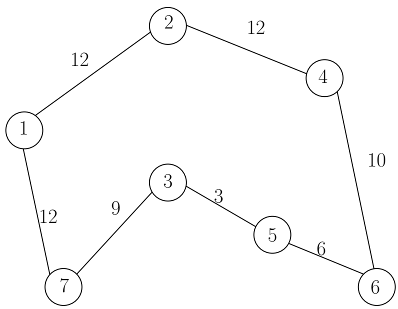


Á sama hátt fæst

Víxlað	Leið	Vegalengd
	$1-2-3-4-5-6-7-1$	69
$2 \to 3$	$1-3-2-4-5-6-7-1$	68
$3 \to 4$	$1-2-4-3-5-6-7-1$	$\boxed{65}$
$4 \to 5$	$1-2-3-5-4-6-7-1$	$\boxed{65}$
$5 \to 6$	$1-2-3-4-6-5-7-1$	66

Mesta bæting

Veljum t.d. $1-2-4-3-5-6-7-1$ (sjá mynd hér að ofan). Hægt er að stytta enn frekar m.þ.a. víxla $3-5-6$, og fá vegalend 64.



Ekki er hægt að stytta vegalend meira með þessari aðferð. Hún finnur því *ekki* bestu lausn, $1-2-4-6-7-5-3-1$ með vegalengd 63.

Við segjum að aðferðin sé föst í *staðbundnu lággildi* (e. local optimum).

Lausn (Heiltöluframsetning á TSP 10.1): Gefið:

$\mathcal{V}$ mengi hnúta,

$\mathcal{E}$ mengi leggja $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$,

c_{ij} vegalengd frá i til j,

n fjöldi hnúta, $n = |\mathcal{V}|$.

Ákvarðanabreytur:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ef sölumaður fer úr bæ } i \text{ til bæ } j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Markfall

$$\min_{\boldsymbol{x}} \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} c_{ij}x_{ij}$$

m.t.t. skorða

$$\sum_{j:\ (i,j)\in\mathcal{E}} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in \mathcal{V} \qquad \text{yfirgefur bæ } i \text{ einu sinni}$$

$$\sum_{i:\ (i,j)\in\mathcal{E}} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \in \mathcal{V} \qquad \text{förum einu sinni í bæ } j$$

Athugasemd. Þessar skorður duga ekki til – því við getum fengið ósamanhangandi lausnir.

Margar leiðir eru þekktar t.þ.a. tryggja það að lokalausn sé samanhangandi. Ein slík er að láta sölumanninn selja nákvæmlega einn hlut í hverjum bæ. Bætum við ákvarðanabreytu:

y_{ij} Fjöldi hluta sem sölumaður á eftir að hafa yfirgefið bæ i og áður en hann kemur í bæ j (flæði um legg (i,j)), $y_{ij} \geq 0$.

og skorðum

$$y_{ij} \leq (n-1)x_{ij} \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{E}$$

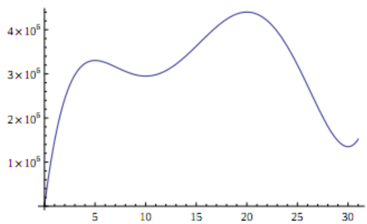
$$\begin{aligned} \sum_{j:\,(j,i)\in\mathcal{E}} y_{ji} &= \sum_{j:\,(i,j)\in\mathcal{E}} y_{ij} + 1 \quad \forall i \in \mathcal{V}\backslash\{i\} \\ \sum_{j:\,(j,i)\in\mathcal{E}} y_{ji} + n &= \sum_{j:\,(i,j)\in\mathcal{E}} y_{ij} + 1 \quad i = 1 \end{aligned}$$

Athugasemd. Getum notað GLPK t.þ.a. leysa TSP með 16–20 bæjum.

Bestunarverkefni sem hafa fleiri en eitt **staðbundið lággildi** (e. local optimum) eru sögð vera **víðvær** (e. global).

Dæmi 10.2 Hámarka $f(x) = 12x^5 - 975x^4 + 28000x^3 - 345000x^2 + 1800000x$ með $0 \leq x \leq 31$.

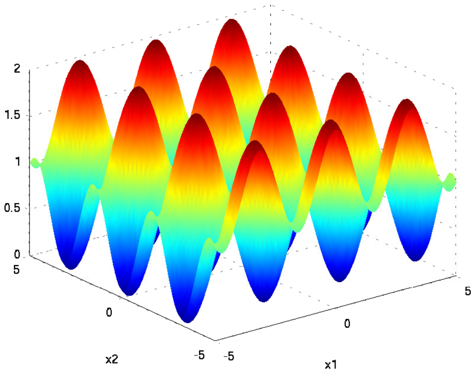
LAUSN: Rissum upp feril fallsins og finnum þannig hágildispunktinn.



Dæmi 10.3 Hámarka $f(x) = \cos(x_1)^2 + \sin(x_2)^2$ með $-5 \leq x_1 \leq 5$, $-5 \leq x_2 \leq 5$.

Lausn: Rissum feril fallsins með Matlab á eftirfarandi hátt:

```
>> [x1,x2]=meshgrid(-5:0.1:5,-5:0.1:5);
>> f=cos(x1).^2+sin(x2).^2;
>> surf(x1,x2,f);
>> shading interp
>> xlabel('x1'), ylabel('x2')
```



Hér er erfiðara að koma auga á hámarkið, en við finnum það m.þ.a. leysa

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \mathbf{0}$$

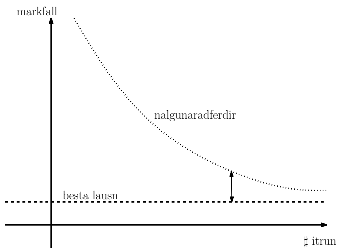
þ.e.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 2\cos(x_1)\,(-\sin(x_1)) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 2\sin(x_2)\cos(x_2) = 0 \quad \Rightarrow x_2 = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Athugum að einnig þarf að gilda $-5 \leq k\frac{\pi}{2} \leq 5$. Skoðum tilsvarandi gildi á $f(x_1, x_2)$.

Víðvær bestun er erfið vegna þess að almennt er erfitt að finna allar núllstöðvar ∇f. Einnig er til í dæminu að ∇f sé hreinlega óskilgreint (ódiffranleg bestun) sem flækir málið ennfrekar.

Nálgunaraðferðir eins og t.d. *sub-tour reversal* finna iðulega staðbundin há-/lággildi.



10.1 Hermd kólnun

Hermd kólnun (e. simulated annealing) er algeng lausnaraðferð til að leysa víðværa bestun.

1. Byrja með einhverja gjaldgenga lausn.

2. Ítra:

   (a) Næsta lausn er valin af handahófi úr þeim lausnum sem eru *nálægt* núverandi lausn. Hver þeirra verður fyrir valinu ræðst af líkindadreifingu sem ákvarðast af mismuni markfallsgilda ásamt *hitastigi* (T) sem lækkar smám saman þegar ítrunum fjölgar.

   (b) Af og til samþykkjum við lausnir sem eru *verri* en sú besta sem fundist hefur fram að þessu. Tilgangur með því er að draga úr líkum á því að festa í staðbundnu lággildi.

Þegar hitastigið (T) er hátt eru miklar líkur á að samþykkja verri lausn. Þegar það er lágt eru líkurnar litlar.

Athugasemd. Analógía með kólnun á bráðnu gleri eða málmi:

Bráðið kvartz $\nearrow$ Hröð kólnun: hrafntinna (óregluleg kristallsb.)
$\searrow$ Hæg kólnun: gler (regluleg kristallsbygging)
$\Rightarrow$ lægri stöðuorka $\Rightarrow$ víðvært lágmark

Látum

$$\begin{array}{ll} z_c & \text{markfall núverandi lausnar} \\ z_n & \text{markfall kandídats lausnar} \end{array}$$

Samþykkjum kandídat ef $z_n \geq z_c$ (því hann er betri – g.r.f. hámörkunarverkefni). Ef $z_n < z_c$ samþykkjum við kandídat með líkum

$$Pr\{\text{samþykkja}\} = e^{(z_n - z_c)/T}$$

Athugasemd. $\lim_{T \to 0} e^{(z_n - z_c)/T} = 0$ því $(z_n - z_c) < 0$.

Dæmi um stöðvunarskilyrði

1. ákveðinn fjöldi ítrana hefur verið náð,
2. hitastig náð einhverju tilteknu gildi,
3. engin bæting á markfalli fundist í langan tíma.

Þegar leit lýkur vitum við ekki hversu langt lausnin okkar er frá besta gildi (gætum jafnvel hafa slysast á þá bestu).

Sérsníða þarf reiknirit sem byggja á hermdri kólnun að sérhverri tegund verkefna. Það sama gildir um **bannleit** (e. tabu-search 13.2 í H&L) og **erfðaalgrím** (e. genetic algorithms í 13.4 í H&L).

Lausn (Nálgunarlausn á TSP 10.1 fundið með hermdri kólnun):

1. Byrjum með einhverja sæmilega góða upphafslausn, t.d. $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 1$, með $z_c = 69$.

   Oft fæst þokkaleg upphafslausn með því að velja upphafspunkt af handahófi. Förum næst í þann punkt sem er í stystu fjarlægð frá upphafspunktinum og svo koll af kolli (gráðug aðferð).

2. Notum *sub-tour reversal* t.þ.a. finna lausnir í nágrenni núverandi lausnar.

   Veljum upphafs- og endapunkt af handahófi t.d. $1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 4 \to 6 \to 7 \to 1$. Kandídatinn er gjaldgengur með $z_n = 65$.

   Þar sem $z_n = 65 < 69 = z_c$ samþykkjum við $1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 4 \to 6 \to 7 \to 1$ sem bestu lausn.

   Ef hins vegar $z_n > z_c$ þá er nýja lausnin verri. Samþykkjum hana með líkum $\exp\{(z_c - z_n)/T\}$.

3. Hitastýring: Í upphafi má t.d. nota $T_1 = 0.2z_c$ og síðan $T_k = 0.95T_{k-1}$, $k = 2, 3, 4, ...$

Atriðisorðaskrá