Evaluation en ligne sur les outils mathematique, pour les sciences physiques

Les membres du groupe 1

1: HIEN I PAMELA

2: EKPON Komi Ekoutigné

3: KINDA Wendsongola Faïzat

4: ZORNE Heliasse

5: OUEDRAOGO Lamoussa Laricia

Mercredi, le 25 janvier 2023

Evaluation en ligne sur les outils Mathematiques pour les sciences - physiques.

Exercice 1

Soient $A(4, 1, 2)$ et $B(-1, 2, 0)$ et soit le vecteur definit par $\vec{v} = \vec{AB}$ dans une base orthonormé $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

1) Trouvons les cosinus directeurs du vecteur (α, β, γ) du vecteur v.

* Calculons les coordonnées

$$\vec{v} = \vec{AB}\begin{pmatrix} -1-4 \\ 2-1 \\ 0-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = -5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$\vec{v} \times \vec{i} = \cos\alpha = \frac{-5}{\sqrt{30}} = \frac{-\sqrt{30}}{6}$ donc $\boxed{\cos\alpha = -\frac{\sqrt{30}}{6}}$

$\vec{v} \times \vec{j} = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{30}$ donc $\boxed{\cos\beta = \frac{\sqrt{30}}{30}}$

$\vec{v} \times \vec{k} = \cos\gamma = \frac{-2}{\sqrt{30}} = -\frac{\sqrt{30}}{15}$ donc $\boxed{\cos\gamma = -\frac{\sqrt{30}}{15}}$

2) Trouvons le vecteur unitaire

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{-5\vec{i}}{\|\vec{v}\|} + \frac{\vec{j}}{\|\vec{v}\|} - \frac{2\vec{k}}{\|\vec{v}\|}$$

$$E\ \vec{u} = -\frac{5}{\sqrt{30}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{30}}\vec{j} - \frac{2}{\sqrt{30}}\vec{k}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{u} = -\frac{\sqrt{30}}{6}\vec{i} + \frac{\sqrt{30}}{30}\vec{j} - \frac{\sqrt{30}}{15}\vec{k}}$$

3) Calculons le volume v

$v = \vec{e} \cdot [(\vec{a} \wedge \vec{c}) \wedge (\vec{d} \wedge \vec{b})]$

$(\vec{a} \wedge \vec{c}) = (-9\vec{i} ; -21\vec{j} , 3\vec{k})$

$\vec{d} \wedge \vec{b} = (-3\vec{i} ; 3\vec{j})$

$(\vec{a} \wedge \vec{c}) \wedge (\vec{d} \wedge \vec{b}) = (9\vec{i} ; -9\vec{j} ; -36\vec{k})$

$v = \vec{e} \cdot [(\vec{a} \wedge \vec{c}) \wedge (\vec{b} \wedge \vec{d})]$

$= (27\vec{i} + 18\vec{j} + 36\vec{k})$

$= \sqrt{(27)^2 + (18)^2 + (36)^2}$

$$\boxed{v = \sqrt{2349} \cdot uv}$$

Exercice 2

1) Résolvons les équations différentielles suivantes

1) $2xy' = 3y \Rightarrow y' - \frac{3}{2}xy = 0$

Solution homogène

$y' \longrightarrow k e^{-A(x)}$ avec $A(x)$ une primitive de $(x) = \frac{3}{2}x$

$A(x) = -\frac{3}{2}\ln x$

d'où $y(x) = k e^{-(-\frac{3}{2}\ln x)}$

$= k e^{\frac{3}{2}\ln x}$

$\boxed{y(x) = k x^{\frac{3}{2}}}$ avec k une constante

Exercice 2

2) $2y' - 8y = 10$

$\Leftrightarrow y' - 4y = 5$

Prenons; $f(x) = -4$ et $u(x) = 5$

$f(x) = e^{\int -4 dx}$ et $u(x) = 5$

$\Leftrightarrow f(x) = e^{-4x}$ $\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{e^{4x}}$ car $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{\frac{1}{e^{4x}}} \times \int 5 \times \frac{1}{e^{4x}} dx$

$\Leftrightarrow y = e^{4x} \times \left(\frac{-5}{4e^{4x}} + c \right), c \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y = -e^{4x} \times \frac{5}{4e^{4x}} + ce^{4x}, c \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{5}{4} + ce^{4x}, c \in \mathbb{R}}$

3) $y'' - 3y' + 2y = 0$

Posons $r^2 - 3r + 2$

$\Delta = 9 - 4(2) = 1$

$r_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \Leftrightarrow r_1 = 1$

$r_2 = \frac{3+1}{2} = 2 \Leftrightarrow r_2 = 2$

L'équation admet comme solution la fonction f définie sur IR par :

$$\boxed{y(x) = Ae^{x} + Be^{2x} \quad , (A;B) \in \mathbb{R}^2}$$

4) $y'' - 4y' + 4y = 0$

Posons $r^2 - 4r + 4 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4(4) = 0$

$r_0 = + \frac{4}{2} = +2$

La solution est de la forme : $y = (Ax + B)e^{2x}$

$$\boxed{y(x) = (Ax+B)e^{2x} \quad \text{avec } (A;B) \in \mathbb{R}^2}$$

5) $y'' - 4y + 8y = 0$

Posons $r^2 - 4r + 8 = 0$

$\Delta = 16 - 32 = -16$

$\Delta = (4i)^2$

Soit $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $\gamma^2 = \Delta \Leftrightarrow \gamma^2 = -16 \Leftrightarrow \gamma^2 = 16i^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = (4i)^2 \Leftrightarrow \gamma = 4i$

$r_1 = \frac{4-4i}{2} = 2 - 2i$; $r_2 = \frac{4+4i}{2} = 2 + 2i$

La solution de cette équation est de la forme :

$$\boxed{y(x) = (A\cos(2x) + B\sin(2x))e^{x} \ ; \ A \text{ et } B \text{ des réels}}$$

Exercice 3

1) $f(x,y) = x^3 - e^{(2xy+1)}$

Calculons $f'_x(x,y)$ et $f'_y(x,y)$

$f'_x(x,y) = [x^3 - e^{(2xy+1)}]'$

$= [x^3]' - [e^{(2xy+1)}]'$

$\boxed{f'_x(x,y) = 3x^2 - 2y e^{2xy+1}}$

$f'_y(x,y) = [x^3 - e^{(2xy+1)}]'$

$\boxed{f'_y(x,y) = -2x e^{2xy+1}}$

2) On donne $f(x,y) = (x^2y, xy^2)$

$f^1(x,y) = x^2y$; $f^2(x,y) = xy^2$

$f^1_x(x,y) = 2xy$; $f^1_y(x,y) = x^2$

$f^2_x(x,y) = y^2$; $f^2_y(x,y) = 2xy$

La matrice jacobienne s'écrit :

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} f^1_x(x,y) & f^1_y(x,y) \\ f^2_x(x,y) & f^2_y(x,y) \end{pmatrix}$$

Au point $P(2;1) \Rightarrow x = 2$ et $y = 1$

on a : $f^1_x(2,1) = 4$; $f^1_y(2;1) = 4$

$f^2_x(2;1) = 1$; $f^2_y(2;1) = 4$

D'où $\boxed{J_f(2;1) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}$