Mesure et Integration Cheat Sheet HIM7

Notion de tribu

Soit E un ensemble quelconque soit $\mathcal{T} \subset P(E)$(ensemble des parties de E); on dit que $\mathcal{T}$ est une tribu sur E si et seulement si $\mathcal{T}$ vérifie les conditions suivantes :

- $\varnothing, E \in \mathcal{T}$
- $\forall A \in \mathcal{T}$ on a $A^c \in \mathcal{T}$
- $\forall (A_n)_n$ familles dénombrables de $\mathcal{T}$ on a $\bigcup_n A_n \in \mathcal{T}$ dans ce cas-là on dit que (E,T)est un espace mesurable.

Exemple

Soit E un ensemble quelconque:

- $\mathcal{T} = P(E)(E, P(E))$ est un espace mesurable.
- $\mathcal{T}_1 = \varnothing, E\ (E, \mathcal{T}_1)$ est un espace mesurable.

tribu engendrée

Soient E un ensemble quelconque et $\mathcal{C} \in P(E)$ on appelle tribu engendrée par C la plus petite tribu sur E, c'est aussi l'intersiction de toutes les tribus sur E qui contient la partie C on la note $\sigma(C)$.

tribu borélienne

Soit E un espace topologique (ou métrique) $\mathcal{C} = \{$ ouvert de $\mathbb{R}\}$; on appelle tribu borélienne (ou tribu de Borèl) la plus petite tribu sur E qui contient les ouverts de E

Mesure Positive

Une mesure positive sur $(E, \mathcal{T})$ est une application :

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{T} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A &\longrightarrow \mu(A) \end{aligned}$$

Qui verifie les proprietés suivantes:

- $\mu(\theta) = 0$
- Pour toute suite $(A_n)_n$ d élements de $\mathcal{T}$ disjoints deux à deux $(A_n \cap A_m = \emptyset \forall m \neq n)$ on a $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$ avec la série:

$$\sum_n \mu(A_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$$

Dans ce cas là ,on dit que $(E, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré.

Propriétés de Mesure

Soit (E.T.μ) espace mesuré

- la mesure μ est dite fini si et seulement si $\mu(E) < \infty$
- la mesure μ esi dite mesure probabilité ou une probabilité si et seulement si $\mu(E) = 1$
- la mesure μ est σ fnis s'ile existe une suite $(A_n)_n$ de $\mathcal{T}$ tel que $E = \bigcup_n A_n \forall n$

Exemple

Si μ est finie alors μ σ finie. (la mesure de Lebesgue est δ finie Mais n'est pas finie.)

Ensemble Négligeable

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ espace mesure soit $A \subset E$,on dit que A est un ensemble μ négligeable si et seulement si il 'existe $B \in \mathcal{T}$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$

Remarque

Si $A \in \mathcal{T}$, A est dite négligeable si $\mu(A) = 0$.

Exemple

Pour la mesure de Dirac en x_0, toute ensemble ne contient pas x_0 sont négligeables.

Proposition 1.2.1

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesure Alors :

- Si $A, B \in \mathcal{T}$ et $A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
- Soit $(A_n)_n$ une suite de $\mathcal{T}$ tel que $A_n \subset A_{n+1} \forall n$ Alors on a :

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sup_n \mu(A_n) = \lim_{x \to +\infty} \mu(A_n)$$

- Soit $(A_n)_n$ une suite de T tel que $A_{n+1} \subset A_n \forall n$ et il existe n_0 tel que $\mu(A_{n_0}) < \infty$ Alors on a :

$$\mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \inf_n \mu(A_n) = \lim_{x \to +\infty} \mu(A_n)$$

- Soit $(A_n)_n$ une suite quelconque de T Alors on a :

$$\mu(A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$$

Mesure de Lebesgue

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$,et soit $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty]$ telle que $\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_n (b_n - a_n) / A \subset \bigcup_n \right] a_n, b_n [$

Propriétés

λ^* est bien définie et vérifie :

- $\lambda^*(\emptyset) = 0$
- Pour tout $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tels que $A \subset B$ on a $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$
- Pour toute suite $(A_n)_n$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, on a :

$$\lambda^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \lambda^*(A_n)$$

Théorème de Caratheodory

Il existe une et une seule mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, notée λ et appelée mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$ tel que: Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\lambda((\alpha, \beta)) = \beta - \alpha$$

Remarque

Remarque : λ^* n'est pas une mesure sur $P(\mathbb{R})$. λ^* est définie sur l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{R}$. Cette mesure sera la restriction de l'application λ^* sur une nouvelle tribu.

Parties *Mesurables

Une partie E de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est dite λ^*-mesurable si

$$\lambda^*(A) = \lambda^*\left(E \bigcap A\right) + \lambda^*\left(E^c \bigcap A\right)$$

est vérifiée pour toute partie $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ On note alors $\mathcal{L}$ l'ensemble de toutes les parties λ^*-mesurable.

Proposition

Soit $m : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une mesure qui vérifie $m(K) \leq +\infty$ pour tout K compact de $\mathbb{R}$. On pose $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) /$ tel que pour tout $\epsilon \geq 0$, il existe O_ϵ ouvert de $\mathbb{R}$ et il existe F_ϵ fermé de $\mathbb{R}$ tel que $F_\epsilon \subset A \subset O_\epsilon$ et $m(O_\epsilon \backslash F_\epsilon) \leq \epsilon\}$ Alors $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.

fonctions mesurables

Soient $(E, \mathcal{A})$ et (F, τ) deux espaces mesurables et $f : E \to F$ une application. On dit que f est mesurable sur E ssi: $\forall B \in \tau \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Proposition 3.1.1

Soient $(E_1, \mathcal{M}_1), (E_2, \mathcal{M}_2), (E_3, \mathcal{M}_3)$ des espaces mesurables; $f_1 : E_1 \to E_2$ et $f_2 : E_2 \to E_3$ des fonctions mesurables. Alors $f_2 \circ f_1 : E_1 \to E_3$ est aussi mesurable.

Proposition 3.1.2

Soit $f : (E, A) \to (F, B)$ une application. Si $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$ (La tribu $\mathcal{B}$ est engendree par la classe $\mathcal{C}$), Alors :

$$(f \text{ est mesurable }) \Longleftrightarrow \left(\forall B \in \mathcal{C} f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right)$$

Corollaire 3.1.2

Soit $f : (E, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$(f \text{ est mesurable }) \Longleftrightarrow \left(\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}(]-\infty, a[) \in \mathcal{A}\right)$$

- $f^{-1}(]-\infty, a[) = \{x \in E / f(x) < a\} = [f < a]$.
- $f^{-1}(]b, +\infty[) = \{x \in E / b < f(x)\} = [b < f]$.

Corollaire 3.1.3

f est mesurable ssi : $\forall b \in \mathbb{R}$ on $a[b < f] \in \mathcal{A}$

Définition 3.2.1.

Soient $(E_1, \beta_1), (E_2, \beta_2)$ des espaces mesurables.
On a : $E_1 \times E_2 = \{(x, y) / x \in E_1, y \in E_2\}$ est un ensemble mesurable avec $(E_1 \times E_2, \sigma(C))$ et $C = \{A_1 \times A_2 / A_1 \in \beta_1, A_2 \in \beta_2\}$

Proposition 3.2.2

Soit $f_1, f_2 : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ fonctions mesurables, avec $(E, \mathcal{A})$ un espace.

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 : (E, \mathcal{A}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_1(x) + f_2(x) \end{aligned}$$

est une fonction mesurable.

Proposition 3.2.1.

Soient $(E_1, \mathcal{A}) . (F_i, \beta_1), (F_2, \beta_2)$ des espaces mesurables , $f_1 : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F_1, \beta_1)$ et $f_2 : (F_1, \beta_1) \longrightarrow (F_2, \beta_2)$ forctions mesurables. Alors l'application :

$$\begin{aligned} f : (E, \mathcal{A}) &\longrightarrow (F_1 \times F_2, \sigma(\mathcal{C})) \\ x &\longmapsto (f_1(x), f_2(x)) \end{aligned}$$

Avec $\mathcal{C} = \{A_1 \times A_2 / A_1 \in \beta_1, A_2 \in \beta_2\}$ est mesurable.

Théorème 3.2.1.

Théorème 3.2.1. : Il y a équivalence entre :

- f est mesurable.
- $\forall a \in \mathbb{R}, [f > a] \in \mathcal{A}$
- $\forall a \in \mathbb{R}, [f < a] \in \mathcal{A}$
- $\forall a \in \mathbb{R}, [f \geq a] \in \mathcal{A}$
- $\forall a \in \mathbb{R}, [f \leq a] \in \mathcal{A}$

Théorème 3.2.2.

soit $(E, \mathcal{A})$ un espacs nuesurable, et $f, g : (E, \mathcal{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ applications mesurables. Alors fg est aussi mesurable.

Remarque 3.2.1.

comme conséquence, on a αf est mesurable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et f une fonction mesurable.

Corollaire 3.2.1.

Comme conséquences des résultats précedents si f et g sont mesurables. ona $[f < g] \in \mathcal{A}, [f \leq g] \in \mathcal{A}, [f = g] \in \mathcal{A}, [f \neq g] \in \mathcal{A}$.

Proposition 3.2.3.

Si $f : (E, \mathcal{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable. Alors $|f|, f^+, f^-$ sont aussi mesurables.
On note $f^+ = \sup(0, f)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$. Alors on peut caractériser f^+ et f^- par :

$$f^+ = \frac{f + |f|}{2} \quad , \quad f^- = \frac{|f| - f}{2}$$

Proposition 3.2.4.

Soit f_n une suite de fonctions mesurables, on a : sont des fonctions mesurables.

$$1) \inf_n f_n, \quad 2) \sup_n f_n, \quad 3) \lim_{\overline{n}} f_n, \quad 4) \overline{\lim_n} f_n$$

Corollaire 3.2.2.

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

- Si $(f_n)_n$ une suite de fonctions de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ mesurable, et si $f_n \rightarrow f$ simplement. Alors $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable.
- Si $f_n : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est mesurable. Alors $\sum_n f_n : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est mesurable.

Définition 3.3.1.

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable.
Une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite étagée ssi il existe $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{p_0})$ dans $\mathbb{R}$ et il existe $(A_1, A_2, \cdots, A_{p_0})$ des élèments de $\mathcal{A}$ tel que

$$f = \sum_{i=1}^{p_0} \alpha_i 1_{Ai}$$

Remarque 1

Soit $A \in \mathcal{A}$. On a

$$\begin{aligned} 1_A : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour $a \in \mathbb{R}$, on a $[1_A < a] = \{x \in E / 1_A(x) \leq a\}$

$$[1_A < a] = \begin{cases} \phi \text{ si } a \leq 0 \\ A^c \text{ si } 0 < a \leq 1 \\ E \text{ si } a > 1 \end{cases}$$

D'où $[1_A < a] \in \mathcal{A}$ ceci $\forall a \in \mathbb{R}$. Ainsi 1_A est une fonction mesurable.

- conclusion:Toutes les fonctions étagées sont mesurables.

Théorème 3.3.1.

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Alors on a l'équivalence suivante:

- f est une fonction mesurable.
- f est une limite de suite $(f_n)_n$ étagées vérifiant:
  a) $f_n \leq f$
  b) $(f_n) \uparrow$
  c) $f_n \longrightarrow f$ simplement.

Définition 3.4.1.

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.
Soient $f_n : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonctions mesurables. On dit que $f_n \rightarrow f$ μ presque partout (note $\mu.p.p$) ssi il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A^c) = 0$ et $\forall x \in A$ on a $f_n(x) \longrightarrow f(x)$.

Remarque 3:

$f_n \longrightarrow f$ simplement $\Longrightarrow f_n \longrightarrow f \mu.p.p$ car $\mu(\phi) = 0$.

Théorème 3.4.1. (Thèorème d'Egorov)

Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini $(\mu(E) < +\infty) \cdot (f_n)_n, f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurables tel que $f_n \longrightarrow f \mu.p.p$. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathcal{A} \text{ tel que } \mu(A) < \varepsilon \text{ et } f_n \longrightarrow f \text{ uniformement sur } (A^c).$$

Lemme 4.1.1.

Soit $f \in \varepsilon_+$et soient deux décompositions de f suivantes :

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{Ai} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j 1_{Bj}$$

avec $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^*$ et $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) \in \mathbb{R}_+^*$

$(A_i)_i$ sont disjoints deux à deux et (B_j) s swì disjoints deux à deux. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j)$$

Définition 4.1.2.

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \varepsilon_+$. On appelle intégrale de f par rapport à la mesure μ le réel.

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

où $f = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i 1_{Ai} \alpha_i \in \mathbb{R}_+^*$ et $A_i \in \mathcal{A}$ disjoints deux à deux.

- Notation :
  $\int f d\mu$ peut être noté $\int_E f d\mu$ ou $\int_E f(x) d\mu(x)$ ou $\int_E f(x) \mu(dx)$ ou $< f, \mu >$.

Remarque 4.1.1.

- Si $f \in \varepsilon_+$ et $f = 0$
  $$\Longrightarrow$$
  $\int f d\mu = 0$.
- $\forall$f $\in \varepsilon_+ \Longrightarrow \int f d\mu \geq 0$.
- Si $\mu(E) = 0 \Longrightarrow \int f d\mu = 0$.

Proposition 4.1.1.

- si $\alpha > 0$ et $f \in \varepsilon_+$, alors $\int (\alpha f) d\mu = \alpha \int f d\mu$.
- $\forall f, g \in \varepsilon_+$on a $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$
- $\forall f, g \in \varepsilon_+ f \leq g \Longrightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$

Lemme 4.2.1.

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré soient $(f_n)_n, (g_n)_n$ deux suites des forctions étagées positives croissantes qui convergent vers une fonction $f \in M$.
Alors

$$\lim_n \int f_n d\mu = \lim_n \int g_n d\mu$$

Définition 4.2.1.

Soit $f \in M_+$ on définit :

$$\int f d\mu = \lim_n \left(\int f_n d\mu \right)$$

où $(f_n)_n$ suite croissante de fonction de ε_+ qui converge simplement vers f

Proposition 4.2.1

Soit $f, g \in M_+$ et $\alpha > 0$
Alors :

- $\forall f, g \in M_+$ on a $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$
- Si $\alpha > 0$ et $f \in M_+$ on a $\int (\alpha f) d\mu = \alpha \int f d\mu$

Théorème de Beppolevi

Soit f_n une suite dans M_+ croissante
Alors

$$\int \left(\sup_n f_n \right) d\mu = \sup_n \int f_n d\mu$$

c'est à dire

$$\int \left(\lim_n f_n \right) d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$$

Remarque 4.3.1.

Si $(f_n)_n$ sont dans M_+, c'est exactement la définition de l'intégrale.

Corollaire 4.3.1.

Soit (E, A, μ) un espace mesure
pour tout suite $(f_n)_n$ dans M_+ on a :

$$\int \sum_n f_n d\mu = \sum_n \int f_n d\mu$$

lemme de fatou

Soit $(f_n)_n$ une suite dans M_+ Alors :

$$\int \left(\liminf_n f_n\right) d\mu \leq \liminf_n \left(\int f_n d\mu\right)$$

Définition 4.4.1.

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré
On dit que f est intégrable si et seulement si $\int |f| d\mu$ existe
(si $\int |f| d\mu = \infty$ alors f n'est pas intégrable)
dans ce cas là ,on dit que $f \in \mathcal{L}^1$
avec :

$$\mathcal{L}^1 = \left\{ f \in M \text{ tel que } \int |f| d\mu < \infty \right\}$$

Définition 4.4.2.

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f \in \mathcal{L}^1$
on appelle intégrale de f noté $\int f d\mu$ le nombre

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

Remarque 4.4.1.

Si $f \in \mathcal{L}^1$, alors $f^+ \leq |f|$ et donc $\int f^+ d\mu < \infty$. De même, on a $f^- \leq |f|$ donc $\int f^- d\mu < \infty$. Comme $|f| = f^+ + f^-$, on a $\int |f| d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$.

Proposition 4.4.1.

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathcal{L}^1 = \{f \in M \text{ tel que } \int |f| d\mu < \infty\}$. Alors on a :

- $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel.
- L'application $f \longrightarrow \int f d\mu$ est linéaire.

Proposition 4.4.2

Soit $f \in M^+$. Alors :

$$\int f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \mu.p.p$$

Corollaire 4.4.1

Soient $f, g \in \mathcal{L}^1$. On a :

- $f \leq g..\mu.p.p \Longrightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$
- $f = g..\mu.p.p \Longleftrightarrow \int f d\mu = \int g d\mu$

Remarque 4.4.2

Pour tout $f \in \mathcal{L}^1$, on a :

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$$

convergence monotone

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans $\mathcal{L}^1$ croissante. Alors

- $(f_n)_n$ converge vers une fonction $f \in M$
- $\int f d\mu = \sup_n \int f_n d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$

convergence dominée/de Lebesgue

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans M vérifiant :

- f_n converge vers $f\mu.p.p$ (f est une fonction mesurable).
- il existe g dans $\mathcal{L}^1$ tel que $\forall n \, |f_n| \leq g..\mu$.p.p.

Alors $f \in \mathcal{L}^1$ et :

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$$

Définition 5.0.1.

Soit (E, μ) un espace mesuré.
Soient $1 \leq p < +\infty$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.
On dit que $f \in \mathcal{L}^p$ si et seulement si $|f|^p \in \mathcal{L}^1$ (i.e $\int |f|^p d\mu \leq +\infty$).

Proposition 5.0.1.

Soit (E, μ) un espace mesuré et $1 \leq p \leq +\infty$. $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel.

Proposition 5.3.2.

Soit (E, μ) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}^+$. Si $\int f d\mu \leq +\infty$ alors $f < +\infty..\mu$ presque partout.

Définition 5.0.2.

On définit sur $\mathcal{L}^p$ la relation d'équivalence suivante:
$f \mathcal{R} g$ si et seulement si $f = g..\mu$ presque partout.
et on note L^p l'ensemble de toutes les classes d'équivalences de l'esvaces L^p,
on on céfinit $f \in L^p$ si et seulement si :

$$\left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

où f est un représentant de sa propre classe.
Cela implique clairement que l'application $f \longrightarrow \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur L^p et $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Définition 5.0.3.

Définition 5.0.3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de L^p, soit $f \in L^p$.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in N}$ converge vers f dans L^p si et seulement si :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

Théorème 5.0.3.

Soit $p \geq 1$, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de l'espace L^p vérifiant :

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f\mu$ presque partout.
- il existe une fonction g dans L^p vérifiant:

$$|f_n| \leq g \quad \mu \text{ presque partout}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$
Alors $f \in L^p$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^p

Théorème 5.1.1. (De Fatou)

Soit $(E, , \mu)$ un espace mesuré et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de l'espace L^p. Soit $f \in \mathcal{M}$ une fonction telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f..\mu$ .p.p.
L'implication suivante est valide :

Si la limite $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_p \neq +\infty$ alors $f \in L^p$.

Riesz-Fischer

Soit $(E, , \mu)$ un espace mesuré, soit $p \geq 1$. Alors $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

Corollaire 5.3.1.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de L^p qui vérifie :

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^p
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g..\mu$ presque partout

Alors $f = g\mu$ presque partout et $g \in L^p$.

Corollaire 5.3.2.

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^p, alors il existe une sous suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge μ presque partout vers f.

Corollaire 5.3.3.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans L^p telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction $f\mu$ presque partout.
Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^p et $f \in L^p$. (avec $p \neq \infty$)

Proposition 5.3.1.

Soit $(E, , \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) \leq +\infty$ et soient $p, q \geq 1$ vérifiant $1 \leq p \leq q < \infty$.
Alors $L^q \subset L^p$.

Remarque 5.2.1.

Dans la preuve, on a si $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans L^p alors elle admet une sous suite $\left(f_{\varphi(n)}\right)_n$ qui converge μ presque partout vers $f \in L^p$ uniformément.

Définition 5.1.1.

Soient $(E, , \mu)$ un espace mesuré et soit l'application $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que l'application f est essentiellement bornée ou que $f \in \mathcal{L}^\infty$ si et seulement s'il existe $c > 0$ vérifiant :
$|f| \leq c \quad \mu$ presque partout
Si $f \in \mathcal{L}^\infty$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \inf\{c > 0 | |f| \leq \text{ c in presque partout }\}$$

Proposition 5.1.1.

Si $f \in \mathcal{L}^\infty$ on a : $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ presque partout.

Complétude dans le cas de L^∞

Soit $(E, , \mu)$ un espace mesuré. Alors $(L^\infty, \|.\|_\infty)$ est complet.

Inégalité de Young

Soient $p, q \geq 1/\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors pour tout $x, y \geq 0$ on a

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

Inégalité de Holder

Soient $(E, , \mu)$ un espace mesuré, $1 \leq p, q < +\infty$. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
$f \in \mathcal{L}^p, g \in \mathcal{L}^q$, Alors on a :

- $fg \in \mathcal{L}^1$
- $\int |f||g| d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$

Inégalité de Minkowski

Soient $(E, , \mu)$ un espace mesuré, $p \geq 1, \mathcal{L}^p \ni$
$f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$.
Alors on a : $f + g \in \mathcal{L}^p$ et :

$$\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Continuité sous intégrale

Soit $(E, , \mu)$ un espace mesuré et (U, d) un espace métrique. Soit l'application:

$$\begin{aligned} f : E \times U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longrightarrow f(x, t) \end{aligned}$$

On suppose que:

- L'application $t \to f(x, t)$ est continue sur $U \mu$ presque partout suivant la variable x.
- Il existe $g \in L^1 |f(., t)| \leq g$ pour tout $t \in U$ et μ presque partout suivant la variable x.

Alors l'application :

$$\begin{aligned} F : U &\to \mathbb{R} \\ t &\to F(t) = \int_E f(x, t) d\mu(x) \end{aligned}$$

est continue sur U.

Dérivabilité sous le signe intégral

Soit $(E, , \mu)$ un espace mesuré et I un intervaile ouvert de $\mathbb{R}$. On considere l'application :

$$\begin{aligned} f : E \times I &\to \mathbb{R} \\ (x, t) &\longrightarrow f(x, t) \end{aligned}$$

vérifiant :

- L'application $t \to f(., t)$ est dérivable dans $I \mu$ presque partout sur E.
- n existe $g \in L^1 \left|\frac{\partial f}{\partial t}(., t)\right| \leq g$ pour tout $t \in I \mu$ presque partout sur E.

Alors l'application :

$$\begin{aligned} F : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow F(t) = \int_E f(x, t) d\mu(x) \end{aligned}$$

est dérivable sur I.