本周简介

主要是一些补充证明题.

习题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$.
2. 证明推广形式的 $Lagrange$ 中值定理:

   $$设f(x)在开区间(a,b)内连续可导,\lim_{x\to a^+}f(x)=A与\lim_{x\to b^-}f(x)=B都存在\Rightarrow\exists\xi\in(a,b),\lim_{x\to b^-}f(x)-\lim_{x\to a^+}f(x)=f'(\xi)(a-b).$$

3. 已知当 $x>0$ 时,方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解,求 k 的取值范围
4. 设函数 $f(x)$ 二阶可导,且 $\forall x\in\mathbb{R}$ 成立 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$.证明:
   (1)若 $f(x)$ 在 $x=c(c\neq 0)$ 处取极值, $f(c)$ 必为极小值;
   (2)若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极值,问 $f(0)$ 是极大值还是极小值?
5. 设函数 $f(x)\in C[0,c]\cap D(0,c)$, $f'(x)$在 $(0,c)$ 内单调递减, $f(0)=0$,试证明 $f(a+b)\leq f(a)+f(b)\qquad(0\leq a\leq b\leq a+b\leq c.$
6. 求函数 $f(x)=xe^{\frac{1}{x^2}}$ 和 $g(x)=2x+\arctan\frac{x}{2}$ 的渐近线.