本周简介

本次主要以连续函数(1.4.5.6.7.9.10.19.20.21.)和导数(2.3.11.13.14.15.17.)为主，以及少量的极限(8.12.16.)知识复习。主要题源：

- 《数学分析习题课讲义（第2版）》上册(谢惠民)
- ?

习题

判断

1. f 在 (a,b) 上的每一个子闭区间连续,则f 在 (a,b) 上连续.
2. f 在 $x=0$ 可导,且 $f(0)=0$,则 $f'(0)=0$;反之也成立.
3. 若f 在 $x=x_0$ 可导,且 f 是 $(-1,1)$ 上的奇函数,则$f'(0)=0$.
4. 如果一个函数$f(x)$在区间I上有介值性,那么$f(x)$在区间I上有连续性.
   定义介质性:若$f(x)$在区间I上有定义,且对于区间I上的任意两点$a<b$来说,任何一个$y\in[f(a),f(b)]$,都能找到$x\in[a,b]$且满足$y=f(x)$,那么就说$f(x)$在区间I上有介值性.
5. 定义在有界区间上的一致连续函数一定有界.

思考

6. 设函数f,g在$x=a$都不连续,问$f+g,fg$在$x=a$是否连续?
7. 区间上不是处处连续的函数,其值域可以是一个区间吗?

计算

8. 求 a ,使当 $x\to 1$ 时, $1-x$ 与 $a(1-\sqrt[m]{x})(m\in\mathbb{N}_+)$ 为等价无穷小.
9. 求下列各题中常数 a , b 的值,使函数 $f(x)$ 为连续函数

$$(1)\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{x}, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{b(\sqrt{1+x}-1)}{x}, & x>0;\end{cases}$$

$$(2)\quad f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}.$$

10. 设

$$f(x)=\begin{cases} x^a\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ e^x+b, & x\le 0,\end{cases}$$

试根据 a 与 b 的不同取值,讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性(连续,左连续,右连续或间断性,在间断时指出其所属类型).

11. 设 $y=\frac{e^x+\sin x}{\sqrt{x}}$,求 dy.

12. 计算下列极限:

$$(1)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^x-1)ln(1+x)},$$

$$(2)\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x},$$

$$(3)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x},$$

$$(4)\lim_{x\to 0}(\frac{2^x+3^x}{2})^{\frac{1}{x}}.$$

13. 笛卡尔叶形线的参数方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3},\\ \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3},\end{cases}$$

求 $y=y(x)$ 的导数.

14. 设 $a>0$,星形线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$$

证明:星形线上任意处的切线被坐标轴所截线段长度为常数.

15. 求 $\frac{d}{dx}a^{x^x}$.(利用对数求导法)
16. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}[n\sin(2\pi\sqrt{n^2+1})]$.

证明

17. 设 $\varphi(x), h(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, $\varphi(x)$ 在点 x_0 处可导,$h(x)$ 以在点 x_0 处连续但不可导. 证明: $f(x)=\varphi(x)h(x)$ 在点 x_0 处可导的充要条件为 $\varphi(x_0)=0$.
18. 设函数 $f(x)\in[0,1]$,且 $f(x)$ 只取有理值;若 $f(\frac{1}{3})=2$,证明:

$$f(x)=2 \quad \forall x\in[0,1]$$

19. (5.2.5例题谢惠民) 设函数 $f\in C[a,b]$. 若 $\forall x\in[a,b], \exists y\in[a,b]$,使得 $|f(y)|\leq\frac{1}{2}|f(x)|$. 证明: f 在 $[a,b]$ 中有零点.
20. (5.1.4练习题谢惠民T3) 设函数 $f\in C[a,b]$. 若有数列 $x_n\in[a,b]$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$,证明: 存在 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=A$.
21. (5.1.4练习题谢惠民T12)我们定义**函数在一个点的振幅**,即对于点 a 的某邻域 $U(a;\delta)$,定义 f 在这个邻域上的振幅为

$$\omega_f(a,\delta)=\sup_{x\in U(a;\delta)}\{f(x)\}-\inf_{x\in U(a;\delta)}\{f(x)\},$$

然后令

$$\omega_f(a)=\lim_{\delta\to0^+}\omega_f(a,\delta),$$

称 $\omega_f(a)$ 为 f 在点 a 的振幅. 证明: f 在点 a 处连续的充分必要条件为 $\omega_f(a)=0$.

Hint & 题源