本周简介

单变量微分学的知识到 $Taylor$ 定理就大致结束了,本周对导数、中值定理和 $Taylor$ 定理做一些复习. 线下会挑一部分题出来讲解.

史济怀先生的数学分析教程中有这样一段话:

> “我们不想把话说得太绝对，但至少可以说:凡是用一元微分学中的定理、技巧能解决的问题,其中的大部分都可以用 Taylor 定理来解决. 掌握了 Taylor 定理之后，回过头去看前面的那些理论,似乎一切都在你的掌握之中,使你有一种'会当凌绝顶,一览众山小’的意境.从这个意义上说'Taylor 定理是一元微分学的顶峰’,并不过分。”

习题

1. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可微, 且有界,证明: 存在ξ,使成立 $f''(\xi)=0$.
2. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导,且，满足 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$,其中 a,b,c 均为常数, $|a|\neq|b|$, 求 $f'(x)$.
3. 设 f 在 $[0,2]$ 上二阶可微, 且 $|f(x)|\leq 1$, $|f''(x)|\leq 1$, 证明: $|f'(x)|\leq 2$.
4. 求曲线

   $$\begin{cases} x=t^3+4t, \\ y=6t^2, \end{cases}$$

   上的的点满足:该点处的切线与直线

   $$\begin{cases} x=-7t, \\ y=12t-5, \end{cases}$$

   平行.
5. 设 f 在 $[a,b]$ 上可导,且 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$,证明:在 (a,b) 内至少存在一点 ξ ,使得 $f'(\xi)=0$.
6. 证明近似公式 $\sqrt[n]{a^n+b}\approx a+\frac{b}{na^{n-1}}\quad(|b|\ll a^n)$.
7. 计算 $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ 的带 $Peano$ 余项的 $Maclaurin$ 公式.
8. 求极限

   $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^2[3x+\ln(1-3x)]}.$$

9. 设 f 在 $x=0$ 的邻域内二阶可导,且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}=0$,求 $f(0),f'(0),f''(0)$.
10. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明:
    (1)存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $f(x_0)=2-3x_0$;
    (2)存在$\xi,\eta\in(0,1)$, 且 $\xi\neq\eta$,使得 $[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.
11. 设 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$, $x_n=\sin x_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}_+$,证明: $x_n\sim\sqrt{\frac{3}{n}}(n\to\infty)$.

Hint

第七题 利用递推公式
第八题 利用带 $Peano$ 余项的 $Taylor$ 展开
第十题 (第十二届CMC非数竞赛预赛第三题)第一题利用零点存在定理,第二题利用第一小问得到的 x_0 ,在 $[0,x_0]$ 和 $[x_0,1]$ 中分别运用 $Lagrange$ 中值定理
第十一题 运用 $stolz$ 定理