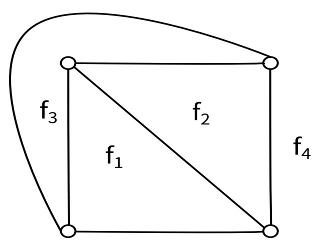
第九章平面图和图的着色

陈建文

May 10, 2023

定义1. 图G称为被嵌入平（曲）面S内，如果G的图解已画在S上，而且任意两条边均不相交（除可能在端点相交外）。已嵌入平面内的图称为**平面图**。如果一个图可以嵌入平面，则称此图为**可平面的**。

定义2. 平面图G把平面分成了若干个区域，这些区域都是连通的，称之为G的面，其中无界的那个连通区域称为G的外部面，其余的连通区域称为G的内部面。



定理1 (欧拉公式)**.** 如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则$p-q+f=2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于面数f。

（1）当$f=1$时，G中无圈，又因为G是连通的，所以G是树。从而$q=p-1$,$p-q+f=2$成立。

（2）假设当$f=k$时结论成立，往证当$f=k+1$时结论也成立。假设G有$k+1$个面，$k\geq 1$。此时G至少有一个内部面，从而有一个圈。从这个圈上去掉一条边x，则$G-x$就是一个有p个顶点，$q-1$条边，k个面的平面连通图。由归纳假设，对$G-x$结论成立，即

$$p-(q-1)+k=2$$

因此，

$$p-q+(k+1)=2$$

即当$f=k+1$时结论也成立。 □

推论1. 若平面图G有p个顶点q条边且每个面都是由长为n的圈围成的，则

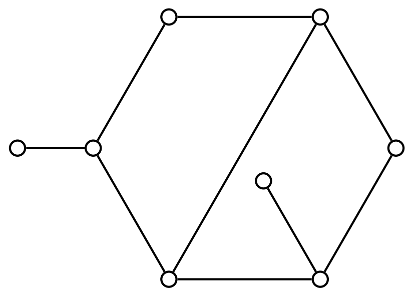
$$q=n(p-2)/(n-2)$$

一个**最大可平面图**是一个可平面图，对此可平面图中不能再加入边而不破坏其可平面性。

推论2. 设G为一个有p个顶点q条边的最大可平面图，$p \geq 3$，则G的每个面都为三角形，而且$q = 3p - 6$。

推论3. 设G为一个(p, q)可平面连通图，而且G的每个面都是由一个长为4的圈围成的，则$q = 2p - 4$。

推论4. 若G为一个有p个顶点q条边的可平面图，$p \geq 3$，则$q \leq 3p - 6$；进一步，若G中没有三角形，则$q \leq 2p - 4$。



证明. 不妨设G为连通的可平面图，否则可以加边使之变成连通的。由于每个面至少含有3条边，因此

$$2q \geq 3f$$

即

$$\frac{2q}{3} \geq f$$

由欧拉公式

$$p - q + f = 2$$

知

$$f = 2 - p + q$$

因此

$$\frac{2q}{3} \geq 2 - p + q$$

化简得：

$$q \leq 3p - 6$$

进一步，若G中没有三角形，则G中的每个面至少含有4条边，因此

$$2q \geq 4f$$

即

$$\frac{q}{2} \geq f$$

由欧拉公式

$$p - q + f = 2$$

知

$$f = 2 - p + q$$

得

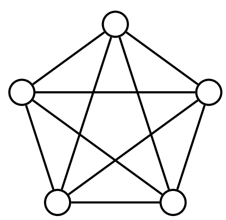
$$\frac{q}{2} \geq 2 - p + q$$

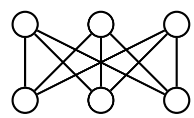
化简得:

$$q \leq 2p - 4$$

□

推论5. K_5和$K_{3,3}$都不是可平面图。





证明. 先证明K_5不是可平面图。用反证法，假设K_5为可平面图，其顶点数$p = 5$, 边数$q = 10$，此时

$$q \leq 3p - 6$$

即

$$10 \leq 3 \times 5 - 6 = 9$$

矛盾。因此K_5不是可平面图。
接下来证明$K_{3,3}$不是可平面图。用反证法，假设$K_{3,3}$为可平面图，其顶点数为$p = 6$，边数$q = 9$，由$K_{3,3}$中没有三角形知

$$q \leq 2p - 4$$

即

$$9 \leq 2 * 6 - 4 = 8$$

矛盾。因此$K_{3,3}$不是可平面图。 □

推论6. 每个可平面图G中顶点度的最小值不超过5,即$\delta(G) \leq 5$。

证明（证法一）. 当图G的顶点数$p = 1, 2$时，结论显然成立。当$p \geq 3$时，设可平面图G有q条边，则

$$\delta p \leq 2q$$

由G为可平面图知

$$q \leq 3p - 6$$

从而

$$\delta p \leq 6p - 12$$

两边同时除以p，得:

$$\delta \leq 6 - \frac{12}{p}$$

即

$$\delta \leq 5$$

$\square$

证明（证法二）．当图G的顶点数$p = 1, 2$时，结论显然成立。当$p \geq 3$时，用反证法证明结论也成立。假设$\delta(G) \geq 6$，设G有q条边，则

$$6p \leq 2q$$

由G为可平面图知

$$q \leq 3p - 6$$

从而

$$6p \leq 6p - 12$$

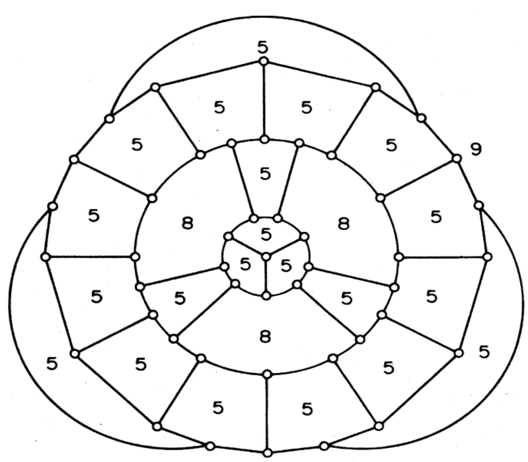
矛盾。 $\square$

定理2. 设$G = (V, E)$为一个(p, q)平面哈密顿图，C为G的哈密顿圈。令f_i为C的内部由i条边围成的面的个数，g_i为C的外部i条边围成的面的个数，则

$$1 \cdot f_3 + 2 \cdot f_4 + 3 \cdot f_5 + \cdots = \sum_{i=3}^{p} (i-2) f_i = p - 2; \tag{1}$$

$$1 \cdot g_3 + 2 \cdot g_4 + 3 \cdot g_5 + \cdots = \sum_{i=3}^{p} (i-2) g_i = p - 2; \tag{2}$$

$$1 \cdot (f_3 - g_3) + 2 \cdot (f_4 - g_4) + 3 \cdot (f_5 - g_5) + \cdots = \sum_{i=3}^{p} (i-2)(f_i - g_i) = 0 \tag{3}$$



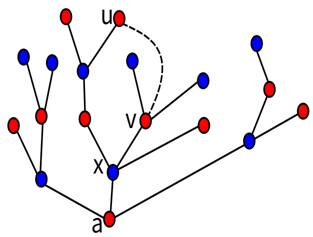


图 1: 用两种颜色对一个没有奇数长的圈的图进行着色的示意图

定义3. 设$x = uv$为图$G = (V, E)$的一条边，又w不是G的顶点，则当用边uw和wv代替边x时，就称x被细分。如果G的某些条边被细分，产生的图称为G的细分图。

定义4. 两个图称为同胚的，如果它们都可以从同一个图通过一系列的边细分得到。

定理3. 一个图为可平面的充分必要条件是它没有同胚于K_5或$K_{3,3}$的子图。

定义5. 一个图G的一个初等收缩由等同两个临接的顶点u和v得到，即从G中去掉u和v，然后再加上一个新顶点w，使得w临接于所有临接于u或v的顶点。一个图G可以收缩到图H，如果H可以从G经过一系列的初等收缩得到。

定理4. 一个图为可平面的当且仅当它没有一个可以收缩到K_5或$K_{3,3}$的子图。

定义6. 设$G = (V, E)$为一个平面图，由G按照如下方法构造一个图G^*，G^*称为G的对偶图：对G的每个面f对应地有G^*的一个顶点f^*;对G的每条边e对应地有G^*的一条边e^*：G^*的两个顶点f^*与g^*由边e^*联结，当且仅当G中与顶点f^*与g^*对应的面f与g有公共边e，如果某条边x仅在一个面中出现而不是两个面的公共边，则在G^*中这个面对应的顶点有一个环。

定义7. 图的一种**着色**是指对图的每个顶点指定一种颜色，使得没有两个临接的顶点有同一种颜色。图G的一个$n-$**着色**是用n种颜色对G的着色。

定义8. 图G的**色数**是使G为$n-$着色的数n的最小值，图G的色数记为$\chi(G)$。若$\chi(G) \leq n$，则称G为$n-$**可着色**的。若$\chi(G) = n$，则称G为n**色**的。

定理5. 一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。

证明. 设图G为可双色的，则显然图G没有奇数长的圈。这是因为假设图G有奇数长的圈C，则C是3色的，从而$\chi(G) \geq 3$，与G是可双色的矛盾。
设图G没有奇数长的圈，以下给出一种用两种颜色对G的顶点进行着色的算法，从而证明图G是可双色的。不妨设图G是连通的，否则可以对图G的每个连通分量分别进行着色。任取G的一个顶点a，对其着红色，然后对与顶点a邻接的顶点着蓝色，接下来对所有与已经着色的顶点相邻接的顶点着红色，这样依次下去，每次都对所有与已经着色的顶点相邻接的顶点着与前一次的着色不同的另一种颜色。如图 1所示该算法结束时用至多两种颜色对G的顶点进行了着色。

以下证明每次对所有与已经着色的顶点相邻接的顶点着与前一次的着色不同的另一种颜色时，不会产生相邻的两个顶点着以相同颜色的情况，从而保证前面的算法是正确的。用反证法。假设对顶点u进行着色时，不妨设对其着红色，已经有一个与之相邻的顶点v着了红色。从着色的过程知，从顶点a到顶点u之间有一条路P_1，其上的顶点依次着了红色和蓝色，从顶点a到顶点v之间也有一条路P_2，其上的顶点依次着了红色和蓝色。取P_1和P_2的最后一个公共的顶点x，则P_1上从顶点u到顶点x的路与P_2上从顶点x到顶点v的路和边vu一起构成一个圈，该圈上u和v着相同的颜色，其他各顶点依次着不同的颜色，因此其长度为奇数，与G中没有奇数长的圈矛盾。 □

定理6. 设$\Delta = \Delta(G)$为图G的顶点度的最大值，则G为$(\Delta + 1)-$可着色的。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p = k(k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设v为G中的任意一个顶点，由归纳假设，$G - v$是$\Delta(G - v) + 1$可着色的。又由于$\Delta(G - v) \leq \Delta$，从而$G - v$为$\Delta + 1$可着色的。假设已经用至多$\Delta + 1$种颜色对$G - v$进行了顶点着色，使得任意相邻的顶点着不同的颜色，那么此时在G中与v邻接的顶点用了至多Δ种颜色，用另外一种不同的颜色对顶点v进行着色，从而用至多$\Delta + 1$种颜色就可以对G的顶点进行着色使得相邻的顶点着不同的颜色，即G为$\Delta + 1$可着色的。

□

定理7. 如果G是一个连通图且不是完全图也不是奇数长的圈，则G为$\Delta(G)-$可着色的。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p=1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p<k(k\geq 2)$时结论成立，往证当$p=k$时结论也成立。设图G为有k个顶点的连通图，G不是完全图也不是奇数长的圈，v为图G的任意一个顶点。考虑$G-v$的每个支H。如果H不是完全图也不是奇数长的圈，由归纳假设，$\chi(H)\leq\Delta(H)\leq\Delta(G)$；如果$H$为完全图或者奇数长的圈，因为$H$中有一个顶点与$v$之间有边相连，所以$\chi(H)=\Delta(H)+1\leq\Delta(G)$。总之，$G-v$的每个支$H$为$\Delta(G)$可着色的，因此$G-v$为$\Delta(G)$可着色的。
如果$\deg v\leq\Delta(G)-1$，则在$G-v$中用至多$\Delta(G)$种颜色进行顶点着色时，在G中与v邻接的顶点至多用了$\Delta(G)-1$种颜色，此时，用另外一种不同的颜色对顶点v进行着色，这样用至多$\Delta(G)$种颜色就可以对G的顶点进行着色，从而图G为$\Delta(G)-$可着色的。
以下考虑$\deg v=\Delta(G)$的情况。此时与v邻接的$\Delta(G)$个顶点$v_1,v_2,\ldots,v_{\Delta(G)}$在$G-v$中分别用颜色$c_1,c_2,\ldots,c_{\Delta(G)}$进行了着色。如果$c_1,c_2,\ldots,c_{\Delta(G)}$中有两种颜色是相同的，则$c_1$，$c_2$，…，$c_{\Delta(G)}$中至多有$\Delta(G)-1$种颜色，用另外一种颜色对顶点$v$进行着色，这样用至多$\Delta(G)$种颜色就可以对$G$的顶点进行着色。以下考虑$c_1,c_2,\ldots,c_{\Delta(G)}$中的各种颜色互不相同的情况。对任意的正整数$i$，$j$，$i\neq j$，设$H_{ij}$为着颜色$c_i$和$c_j$的顶点集的导出子图。此时，分以下情况讨论:
（1）如果存在正整数i，j，$i\neq j$，顶点v_i和顶点v_j位于H_{ij}的不同的支中，交换v_i所在的支中顶点的着色，即着颜色c_i的顶点改着颜色c_j，着颜色c_j的顶点改着颜色c_i,于是顶点v_i和顶点v_j都用颜色c_j进行了着色，用颜色c_i对顶点v进行着色，这样用$\Delta(G)$种颜色就可以对G的顶点进行着色。
（2）如果对任意的正整数i，j，$i\neq j$，顶点v_i和顶点v_j都位于H_{ij}的同一个支C_{ij}中。设P_{ij}为C_{ij}中从v_i到v_j的一条路。在C_{ij}中，如果$\deg v_i>1$，则在$G-v$中与顶点v_i邻接的至多$\Delta(G)-1$个顶点中至多用了$\Delta(G)-2$种颜色，用除颜色c_i之外的另外一种多余的颜色对顶点v_i进行着色，然后用颜色c_i对顶点v进行着色，这样用$\Delta(G)$种颜色就可以对G的顶点进行着色。类似的，在C_{ij}中，如果$\deg v_j>1$，也可以用$\Delta(G)$种颜色对G的顶点进行着色。如果以上两种情况都不成立，设$u\neq v_i,v_j$为P_{ij}中某个顶点，在C_{ij}中，$\deg u>2$，则在$G-v$中与顶点u邻接的顶点至多用了$\Delta(G)-2$种颜色，用除顶点u所着颜色之外的另一种颜色对顶点u进行着色，可以划归为情况（1）。因此以下考虑对任意的C_{ij}，C_{ij}为从顶点v_i到顶点v_j的一条路的情况。此时如果$\deg v=2$，则$\Delta(G)=2$，G为奇数长的圈，矛盾。以下考虑$\deg v\geq 3$的情况。如果存在不同的正整数i,j,k，C_{ij}与C_{ik}有一个除了v_i之外的公共顶点u，此时顶点u有两个与之邻接的顶点着了颜色c_j,另外还有两个与之邻接的顶点着了颜色c_k，于是与顶点u邻接的顶点至多用了$\Delta(G)-2$种颜色，用除了顶点u所着颜色之外的另一种颜色对顶点u进行着色，可以划归为情况（1）。以下考虑对任意不同的正整数i,j,k，C_{ij}与C_{ik}除了顶点v_i之外没有其他的公共顶点的情况。此时与v邻接的顶点$v_1,v_2,\ldots,v_{\Delta(G)}$中必有两个是不邻接的，这是因为如果$v_1,v_2,\ldots,v_{\Delta(G)}$两两邻接，它们又都与$v$邻接，这就构成了一个包含$\Delta(G)+1$个顶点的完全图，与$G$不是完全图矛盾。不妨设$v_1$和$v_2$为与$v$邻接的顶点中不邻接的两个顶点。设$u$为$C_{12}$中与$v_1$邻接的顶点,则在$G-v$中$u$着了颜色$c_2$。交换$C_{13}$中各顶点的颜色，即着颜色$c_1$的顶点改着颜色$c_3$，着颜色$c_3$的顶点改着

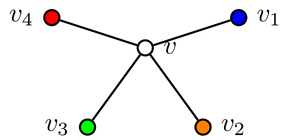


图 2: $\deg v \leq 4$的情况

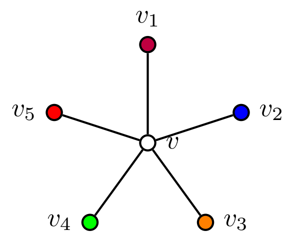


图 3: $\deg v = 5$的情况

颜色c_1。重新考虑$G - v$中各顶点的着色，此时如果v_1和v_2位于H_{12}的不同的支中，或v_2和v_3位于H_{23}的不同的支中，则划归为情况（1）。否则，如果C_{12}不是路，或者C_{23}不是路，则按照前面叙述的方法可以用$\Delta(G)$种颜色对G的顶点进行着色。最后，如果C_{12}和C_{23}都为路，此时u为C_{12}和C_{23}的除了v_2之外的公共顶点，亦可以采用前面叙述的方法用$\Delta(G)$种颜色对G的顶点进行着色。

□

定理8. 每个平面图为6−可着色的。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p = k(k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设平面图G有$k+1$个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \leq 5$。于是，$G - v$是一个有k个顶点的平面图，由归纳假设，$G - v$是6−可着色的。假设用至多6种颜色对$G - v$进行了着色。由于$\deg v \leq 5$，在$G - v$中用至多6种颜色进行顶点着色时，在G中与v邻接的顶点至多用了5种颜色。此时，用另外一种不同的颜色对顶点v进行着色，这样用至多6种颜色就可以对G的顶点进行着色，从而图G为6−可着色的。 □

定理9. 每个平面图为5−可着色的。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p < k$时结论成立，往证当$p = k$时结论也成立。设平面图G有k个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \leq 5$。于是，$G-v$是一个有$k-1$个顶点的平面图，由归纳假设，$G-v$是5−可着色的。假设用至多5种颜色对$G-v$进行了着色。
如果$\deg v \leq 4$，则在$G-v$中用至多 5 种颜色进行顶点着色时，在G中与v邻接的顶点至多用了4种颜色，如图 2所示。此时，用另外一种不同的颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色，从而图G是5−可着色的。
如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况，如图 3所示。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定

有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，在$G-v$中，将顶点v_i和顶点v_j视为同一个顶点w，即去掉顶点v_i和v_j，添加一个新的顶点w，原来与顶点v_i和顶点v_j相关联的边变为与顶点w相关联的边，得到的新的图记为G'，则G'仍然为平面图。由归纳假设，G'为5−可着色的。设用至多5种颜色对G'进行了顶点着色。在$G-v$中，顶点v_i和顶点v_j都着与w相同的颜色，其他的顶点均与G'中相对应的顶点着相同的颜色，这样$G-v$用至多5种颜色就可以进行顶点着色。在这里，在G中与顶点v邻接的五个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中用了4种颜色，用另外一种颜色对顶点v着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色，从而图G为5−可着色的。 □

定理10. 每个平面图为4−可着色的。

练习1. 设G为一个有p个顶点的平面图，$p \geq 4$。证明：G中有4个度不超过5的顶点。

证明. 如果G中有度小于3的顶点v，则v在$G-v$的一个面内，在这个面内至少有3个顶点，于是可以连接顶点v与这3个顶点中的某些顶点使得$\deg v \geq 3$。如果此时得到的新图中有4个不超过5的顶点，则原图中也一定有4个不超过5的顶点。以下不妨设G中每个顶点的度都大于等于3，用反证法证明结论成立。假设G中度不超过5的顶点的个数小于等于3，G中有q条边，则$2q \geq 3*3+6(p-3) = 6p-9$，这与$q \leq 3p-6$矛盾。 □

练习2. 设G为一个(p,q)图，证明：$\chi(G) \geq p^2/(p^2-2q)$

证明. 设图G的色数$\chi(G)=n$，则G可以用n种颜色进行顶点着色使得相邻的顶点着不同的颜色。设着不同颜色的顶点的个数分别为$p_1, p_2, \ldots, p_n$，则

$$p_1+p_2+\ldots+p_n = p_1\cdot 1+p_2\cdot 1+\ldots+p_n\cdot 1 \leq \sqrt{p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2}\cdot\sqrt{n}$$

于是

$$\sqrt{n} \geq \frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{\sqrt{p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2}}$$

从而

$$n \geq \frac{p^2}{p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2} \tag{4}$$

再由

$$(p_1+p_2+\ldots+p_n)^2 = p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n} p_i p_j$$

知

$$p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2 = p^2-2\sum_{1\leq i<j\leq n} p_i p_j \leq p^2-2q$$

结合(4)式知

$$n \geq p^2/(p^2-2q)$$

结论得证。 □

练习3. 证明：如果图G的任意两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \le 5$。

证明. 用反证法，假设$\chi(G) = n$, $n \ge 6$。对图G的顶点用n种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。
设V_1，V_2，V_3为其中着3种不同颜色的顶点集合，V_4，V_5，V_6为其中着另外3种不同颜色的顶点集合。则由$V_1 \cup V_2 \cup V_3$导出的子图G_1不是2-可着色的，从而G_1中存在一个奇数长的圈C_1;同理，由$V_3 \cup V_4 \cup V_6$导出的子图G_2中存在一个奇数长的圈C_2。C_1和C_2没有公共顶点，矛盾。 □

练习4. 证明：每个哈密顿可平面图都是4-面可着色的。

证明. 将圈内的每个面内画一个顶点，两邻的面对应的顶点之间连接一条边，所得到的图连通无圈，所以是树。树是2可着色的，从而哈密顿圈内部是2-面可着色的。同理，哈密顿圈外部是2-面可着色的。因此，整个哈密顿可平面图是4-面可着色的。 □