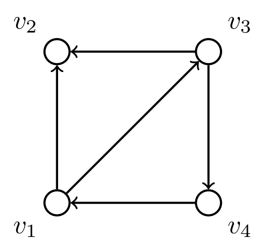
第十章有向图

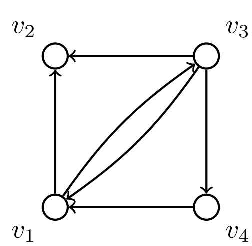
陈建文

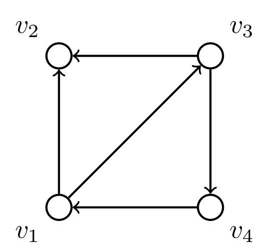
May 12, 2023

定义1. 设V为一个有穷非空集合，$A \subseteq V \times V \setminus \{(v,v)|v \in V\}$，二元组$D = (V,A)$称为一个**有向图**。$V$称为有向图$D$的**顶点集**，$V$中的元素称为$D$的**顶点**。$A$称为$D$的**弧集**或**有向边集**，$A$中的元素称为$D$的**弧**或**有向边**。如果$x = (u,v) \in A$，则$u$称为弧$x$的**起点**，$v$称为弧$x$的**终点**。



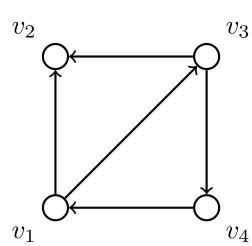
定义2. 如果(u,v)和(v,u)都是有向图D的弧，则称(u,v)与(v,u)为D的**对称弧**。如果D中不含对称弧，则称D为**定向图**。

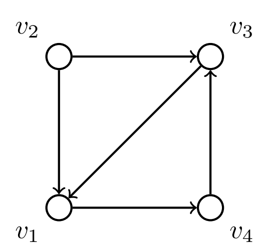




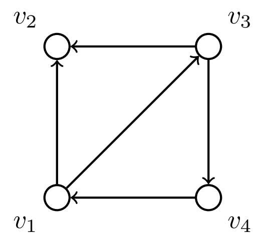
定义3. 设$D = (V,A)$为一个有向图，D的**反向图**为有向图$D^T = (V,A^T)$，其中

$$A^T = \{(u,v)|(v,u) \in A\}$$





定义4. 设$D = (V, A)$为一个有向图，v为D的任一顶点，以v为终点的弧称为v的**入弧**；以v为始点的弧称为v的**出弧**。顶点v的入弧的条数称为v的**入度**，记为$id(v)$；顶点v的出弧的条数称为v的**出度**，记为$od(v)$。

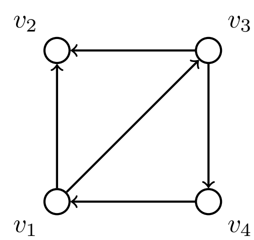


定理1. 设$D = (V, A)$为一个有向图，$|A| = q$，则

$$\sum_{v\in V} id(v) = \sum_{v\in V} od(v) = q$$

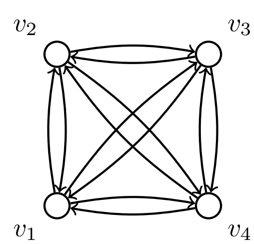
从而

$$\sum_{v\in V}(id(v) + od(v)) = 2q$$



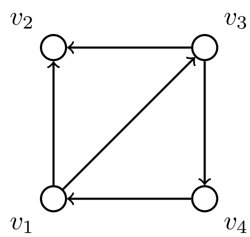
定义5. 有向图$D = (V, A)$称为**完全有向图**，如果

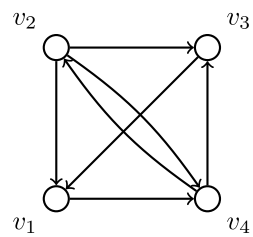
$$A = V \times V \setminus \{(v, v)|v \in V\}$$



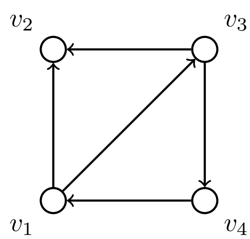
定义6. 有向图$D = (V, A)$的**补图**定义为$D^c = (V, A^c)$，其中

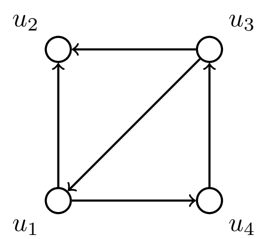
$$A^c = (V \times V \setminus \{(v, v)|v \in V\}) \setminus A$$





定义7. 设$D_1 = (V_1, A_1)$，$D_2 = (V_2, A_2)$都为有向图，如果存在一个一一对应$\varphi : V_1 \to V_2$，使得$\forall u, v \in V_1, (u, v) \in A_1$当且仅当$(\varphi(u), \varphi(v)) \in A_2$，则称$D_1$与$D_2$**同构**。

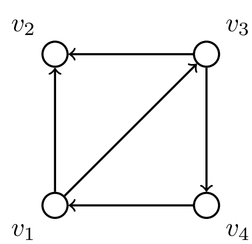




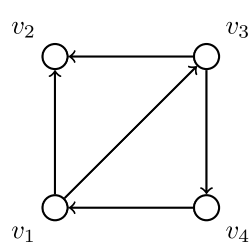
定义8. 设$D = (V, A)$为一个有向图。D的一条**有向通道**为D的顶点和弧的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, \cdots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

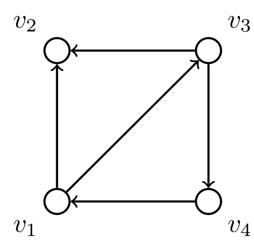
其中$x_i = (v_{i-1}, v_i)$，$i = 1, 2, \cdots, n$。n称为该有向通道的长。这样的有向通道常称为$v_0 - v_n$有向通道，并简记为$v_0 v_1 v_2 \ldots v_n$。当$v_0 = v_n$时,则称此有向通道为**闭有向通道**。



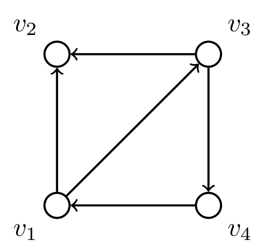
定义9. 如果有向图中一条有向通道的各弧互不相同，则称此有向通道为有向图的**有向迹**。如果一条闭有向通道上的各弧互不相同，则称此闭有向通道为**闭有向迹**。



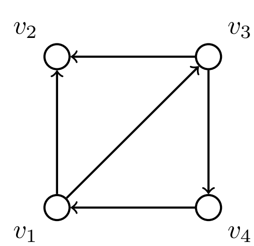
定义10. 如果一条有向通道上的各顶点互不相同，则称此有向通道为**有向路**。如果一条长度大于0的闭有向迹上除终点外各顶点互不相同，则称此闭有向迹为**有向圈**，或**有向回路**。



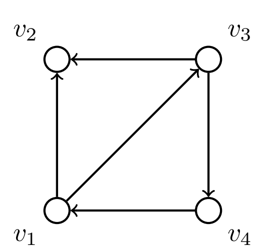
定义11. 含有向图D的所有顶点的有向圈称为D的**生成有向圈**，或**有向哈密顿圈**。有生成有向圈的有向图称为**有向哈密顿图**。含有向图D的所有顶点的有向路称为D的**生成有向路**，或**有向哈密顿路**。



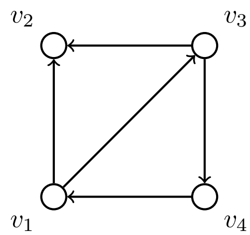
定义12. 设$D = (V, A)$为一个有向图，u和v为D的顶点。如果在D中有一条从u到v的有向路，则称从u能达到v，或者v是从u**可达**的。



定义13. 有向图D称为是**强连通**的，如果对D的任意两个不同的顶点u和v，u和v是互达的（即从u可以达到v并且从v可以达到u）。



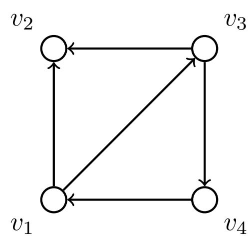
定义14. 有向图D的极大强连通子图称为D的一个**强支**。



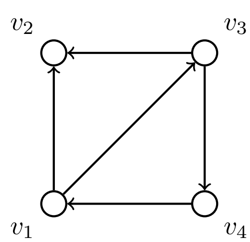
定理2. 设$D = (V, A)$为一个有向图。在V上定义二元关系$\cong$如下：

$$\forall u, v \in V, u \cong v\text{当且仅当}u\text{与}v\text{互达}$$

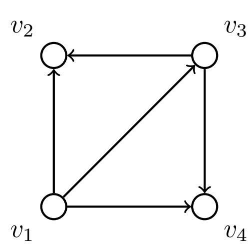
则$\cong$为V上的等价关系，D的强支就是顶点集V关于$\cong$的每个等价类的导出子图。



定义15. 有向图$D = (V, A)$称为**单向连通**的，如果对D的任意两个不同的顶点u和v，或从u可达到v，或从v可达到u。



定义16. 设$D = (V, A)$为一个有向图，如果抹去D中所有弧的方向之后所得到的无向图是连通的，则称D为**弱连通**的，简称**连通**的。



定义17. 设$D = (V, A)$为一个有向图，$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$，$p \times p$矩阵$B = (b_{ij})$称为$D$的邻接矩阵，其中

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{如果}(v_i, v_j) \in A \\ 0, \text{如果}(v_i, v_j) \notin A \end{cases}$$

定理3. 设B为有向图$D = (V, A)$的邻接矩阵，$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$，则从顶点$v_i$到顶点$v_j$的长为$l$的有向通道的条数等于$B^l$的第$i$行第$j$列元素$(B^l)_{ij}$的值。

定义18. 设$D = (V, A)$为一个有向图，$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$，$p \times p$矩阵$R = (r_{ij})$称为$D$的可达矩阵，其中

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{如果从}v_i\text{可以达到}v_j \\ 0, \text{如果从}v_i\text{不能达到}v_j \end{cases}$$

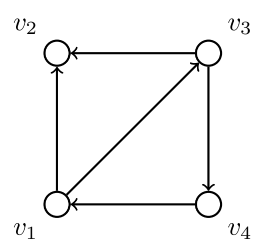
定理4. 设$p \times p$矩阵B是有向图$D = (V, A)$的邻接矩阵，则D的可达矩阵

$$R = I \vee B \vee B^{(2)} \vee \cdots \vee B^{(p-1)}$$

定理5. 设$p \times p$矩阵R为有向图$D = (V, A)$的可达矩阵，

$$C = R \wedge R^T,$$

C的第i行上为1的元素$c_{ij_1}, c_{ij_2}, \ldots, c_{ij_k}$，则$v_i$在由$V_i = \{v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_k}\}$诱导出的$D$的子图-$D$的强支中。



定义19. 设$D = (V, A)$为一个有p个顶点q条弧的有向图，$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$，$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_q\}$，$p \times q$矩阵$H = (h_{ij})$称为$D$的关联矩阵，其中

$$h_{ij} = \begin{cases} 1, \text{如果}v_i\text{为弧}x_j\text{的起点} \\ -1, \text{如果}v_i\text{为弧}x_j\text{的终点} \\ 0, \text{如果}v_i\text{既不是弧}x_j\text{的起点也不是弧}x_j\text{的终点} \end{cases}$$

定义20. 一个有向图，如果抹去其所有弧的方向以后所得到的无向图是一棵无向树，则称该有向图为一棵**有向树**。

定义21. 有向树D称为**有根树**，如果D中恰有一个顶点的入度为*0*，而其余每个顶点的入度均为*1*。有根树中入度为*0*的顶点称为有根树的根，出度为*0*的顶点称为有根树的**叶子**，非叶顶点称为有根树的**分支点**或**内顶点**。

定义22. 设$T=(V,A)$为一棵有根树。如果$(u,v)\in A$，则称v为u的**儿子**，u为v的**父亲**。如果从顶点u能达到顶点v，则称v为u的**子孙**，u为v的**祖先**。如果u为v的祖先且$u\neq v$，则称u为v的**真祖先**，v为u的**真子孙**。

定义23. 设$T=(V,A)$为一棵以v_0为根的有根树。从v_0到顶点v的有向路的长度称为T的顶点v的**深度**。从顶点v到T的叶子的最长的有向路的长度称为顶点v在T中的**高度**。根顶点v_0的高度称为树T的**高度**。

定义24. 设$T=(V,A)$为一棵有根树，v为T的一个顶点，由v及其子孙所导出的T的子图称为T的以v为根的**子树**。

定义25. 设$T=(V,A)$为一棵有根树。如果T的每个顶点的各个儿子排定了次序，则称T为一棵**有序树**。

定义26. 有序树T称为m**元有序树**，如果T的每个顶点的出度$\leq m$。一棵m元有序树T称为**正则**m**元有序树**，如果T的每个顶点的出度不是0就是m。二元有序树简称**二元树**。

练习1. 证明：有向图D是单向连通的当且仅当D中有一条有向生成通道。

证明. 如果有向图D中有一条有向生成通道，显然D是单向连通的。
设有向图D是单向连通的，往证D有一条有向生成通道。用反证法，假设D中不含有向生成通道。设$W: v_1v_2\ldots v_k$为D中一条包含顶点数最多的有向通道，则存在顶点v，顶点v不是W中的顶点。由D为单向连通的知，要么从顶点v到顶点v_1可达，要么从顶点v_1到顶点v可达。如果从顶点v到顶点v_1可达，那么从顶点v到顶点v_1的路后接W构成了D中一条包含顶点数比W更多的通道，与W为D中的一条包含顶点数最多的有向通道矛盾。因此，从顶点v_1到顶点v是可达的。同理，从顶点v到顶点v_k是可达的。对每个顶点v_i，$2\leq i\leq k-1$，要么从顶点v_i到顶点v可达，要么从顶点v到顶点v_i可达。设v_j为W上第一个从顶点v到其可达的顶点，则从顶点v_{j-1}到顶点v是可达的，于是沿着W从顶点v_1到顶点v_{j-1}，经过从顶点v_{j-1}到顶点v的一条有向路，再经过从顶点v到顶点v_j的一条有向路，最后沿着W从顶点v_j到达顶点v_k，构成了D中一条包含顶点数比W更多的有向通道，与W为D中包含顶点数最多的有向通道矛盾。 □