第六章图的基本概念

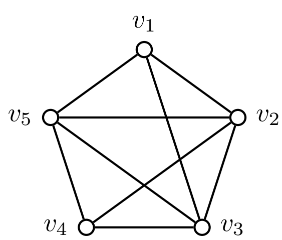
陈建文

April 19, 2023

设V为一个集合，V的一切二元子集之集合记为$\mathcal{P}_2(V)$，即

$$\mathcal{P}_2(V) = \{A|A \subseteq V 且 |A| = 2\}。$$

定义1. **设V为一个非空有限集合，$E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$，二元组$G = (V, E)$称为一个无向图。$V$中的元素称为无向图$G$的顶点，$V$为顶点集；$E$中的元素称为无向图$G$的边，$E$为边集。无向图简称图。如果$|V| = p$，$|E| = q$，则称$G$为一个$(p, q)$图，即$G$为一个具有$p$个顶点$q$条边的图。**



定义2. 在图$G = (V, E)$中，如果$\{u, v\} \in E$,则称顶点u与v邻接;若x与y是图G的两条边，并且仅有一个公共端点，即$|x \cap y| = 1$,则称边x与y邻接;如果$x = \{u, v\}$是图G的一条边，则称u与x互相关联，同样的，称v与x互相关联。

定义3. 如果一个图中两个顶点间允许有多于一条边存在，则称为多重图，这些边称为多重边; 如果一个图中允许联结一个顶点与其自身的边存在，则称为带环图，这些边称为环;允许有环或多重边存在的图，称之为伪图。

定义4. 设$G = (V, E)$为一个图，如果$E = \Phi$,则称G为零图; $(1, 0)$图称为平凡图。

定义5. 设v为图$G = (V, E)$的任意一个顶点，G中与v关联的边的数目称为顶点v的度，记为$\deg v$。

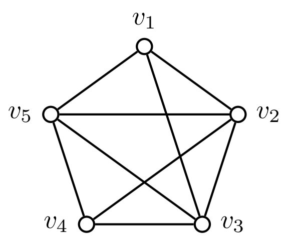
定理1. 设$G = (V, E)$为一个具有p个顶点q条边的图，则G中各顶点度的和等于边的条数q的两倍，即

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2q$$

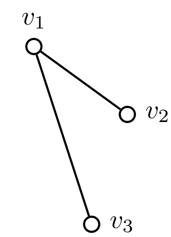
定理2. 在任一图中，度为奇数的顶点的数目必为偶数。

定义6. 图G称为r度正则图，如果G的每个顶点的度都等于r。3 度正则图也称为三次图。一个具有p个顶点的$p-1$度正则图称为包含p个顶点的完全图，记为K_p。

定义7. 设$G=(V,E)$为一个图，图$H=(V_1,E_1)$称为G的一个子图，当且仅当V_1为V的非空子集且E_1为E的子集。如果$H\neq G$，则称H为G的真子图。

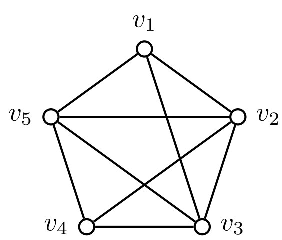


G

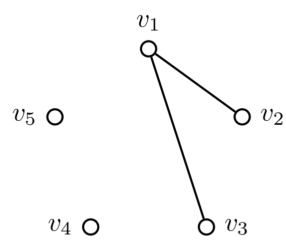


H

定义8. 设$G=(V,E)$为一个图，如果$F\subseteq E$，则称G的子图$H=(V,F)$为G的一个生成子图。



G

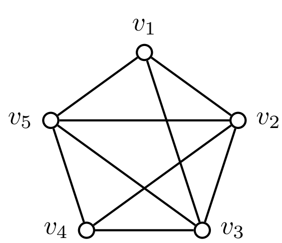


H

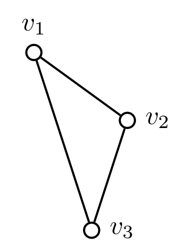
定义9. 设图G的子图H具有某种性质，若G中不存在与H不同的具有此性质且包含H的子图，则称H为具有此性质的极大子图。

定义10. 设S为图$G=(V,E)$的顶点集V的非空子集，则G的以S为顶点集的极大子图称为由S导出的子图，记为$\langle S\rangle$。形式的，

$$\langle S\rangle=(S,\mathcal{P}_2(S)\cap E)$$

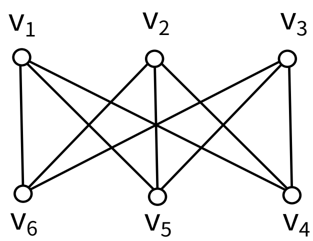


G

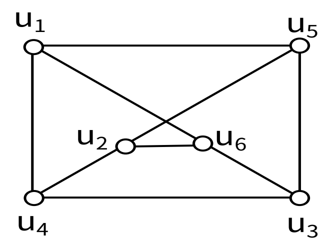


H

定义11. 设$G=(V,E)$，$H=(U,F)$为两个图，如果存在一个一一对应$\phi:V\to U$，使得$\{u,v\}\in E$当且仅当$\{\phi(u),\phi(v)\}\in F$,则称G与H同构。



G



H

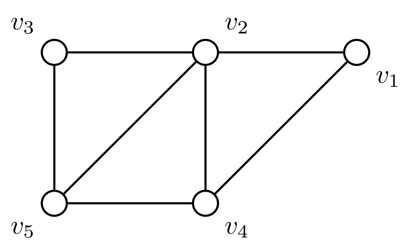
定义12. 设$G=(V,E)$为一个图。G的一条**通道**为G的顶点和边的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, x_3, \ldots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

其中$x_i=\{v_{i-1}, v_i\}, i=1,2,\ldots,n$。$n$称为该通道的长。这样的通道常称为$v_0-v_n$通道，并简记为$v_0v_1v_2\ldots v_n$。当$v_0=v_n$时，则称此通道为**闭通道**。

定义13. 如果图中一条通道上的各边互不相同，则称此通道为图的**迹**。如果一条闭通道上的各边互不相同，则称此闭通道为**闭迹**。

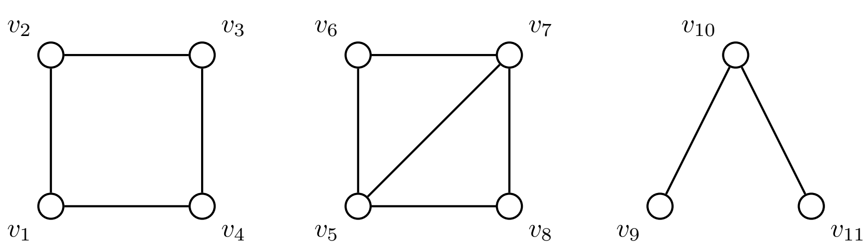
定义14. 如果一条迹上的各顶点互不相同，则称此迹为路。如果一条长度大于0的闭迹上除终点外各顶点互不相同，则称此闭迹为**圈**，或**回路**。



G

定义15. 设$G=(V,E)$为一个图，如果G中任两个不同顶点间至少有一条路联结，则称G为一个连通图。

定义16. 图G的极大连通子图称为G的一个支。



G

定理3. 设$G=(V,E)$为一个图。在V上定义二元关系$\cong$如下：

$$\forall u,v\in V, u\cong v\text{当且仅当}u\text{与}v\text{间有一条路},$$

则$\cong$为V上的等价关系，G的支就是关于$\cong$的每个等价类的导出子图。

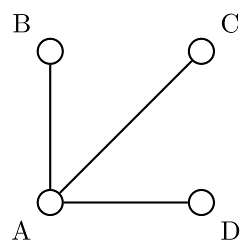
练习1. 设图G的顶点u与v之间有一条通道，那么u与v之间有一条路。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于顶点u与v之间通道的长l。

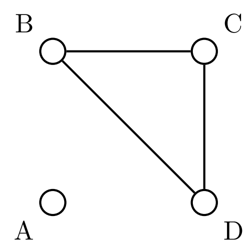
（1）当$l=0$时，顶点u与v之间有一条长为0的通道，此时$u=v$，显然u与v之间有一条路。

（2）假设当$l=k$时结论成立，往证当$l=k+1$时结论也成立。设顶点u与v之间有一条长为$k+1$的通道L，进一步设L上顶点v之前的顶点为w，则顶点u与顶点w之间有一条长为k的通道。由归纳假设，u与w之间有一条路P，此时如果v不在路P中出现，则路P之后接顶点v就构成了u与v之间的一条路；如果v在路P中出现，此时路P上从u到v之间的顶点和边的序列就构成了u与v之间的一条路。 □

定义17. 设$G=(V,E)$为一个图，图$G^c=(V,\mathcal{P}_2(V)\setminus E)$称为$G$的补图。如果$G$与$G^c$同构，则称$G$为自补图。



G



G^c

定理4. 对任一有6个顶点的图G，G中或G^c中有一个三角形。

证明. 设图G的顶点集为$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$,考虑顶点$v_1$。

- 存在三个顶点，其中的每个顶点都与顶点v_1相邻接。不失一般性，不妨设这三个顶点为v_2,v_3,v_4。
  - 在顶点v_2,v_3,v_4中，存在两个顶点相邻接，此时G中存在三角形。
  - 在顶点v_2,v_3,v_4中，任意两个顶点都不邻接，此时G^c中存在三角形。
- 存在三个顶点，其中的每个顶点都与顶点v_1不邻接。不失一般性，不妨设这三个顶点为v_2,v_3,v_4。
  - 在顶点v_2,v_3,v_4中，存在两个顶点不邻接，此时G^c中存在三角形。
  - 在顶点v_2,v_3,v_4中，任意两个顶点互相邻接，此时G中存在三角形。

□

定义18. 对任意的正整数m，n，$m \geq 2$，$n \geq 2$，求一个最小的正整数$r(m,n)$，使得任意有$r(m,n)$个顶点的图G中一定含有一个K_m或者图G^c中一定含有一个K_n，这里的数$r(m,n)$称为拉姆齐数。

定义19. 设$G = (V,E)$为一个图,如果G的顶点集V有一个二划分$\{V_1, V_2\}$，使得G的任意一条边的两个端点一个在V_1中，另一个在V_2中，则称G为偶图。如果$\forall u \in V_1, \forall v \in V_2$均有$uv \in E$，则称$G$为完全偶图，记为$K_{m,n}$，其中$|V_1| = m, |V_2| = n$。

定义20. 设$G = (V,E)$为一个图，u和v为G的两个顶点。联结u和v的最短路的长称为u与v之间的距离，并记为$d(u,v)$。如果u与v间在G中没有路，则定义$d(u,v) = \infty$。

定理5. 图G为偶图的充分必要条件为它不包含奇数长的圈。

A graph is bipartite if and only if it contains no cycles with odd lengths.

Proof. Suppose that G is bipartite with bipartition (X, Y), and let $C = v_0v_1 \dots v_kv_0$ be a cycle of G. Without loss of generality we may assume that $v_0 \in X$. Then, since $v_0v_1 \in E$ and G is bipartite, $v_1 \in Y$. In general, $v_{2i} \in X$ and $v_{2i+1} \in Y$. Since $v_0 \in X$, $v_k \in Y$. Thus $k = 2i + 1$, for some i, and it follows that C is even.
It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles. We choose an arbitrary vertex u and define a partition (X, Y) of V by setting

$$X = \{x \in V | d(u,x) \text{is even}\}$$
$$Y = \{y \in V | d(u,y) \text{is odd}\}$$

We shall show that (X, Y) is a bipartition of G. Suppose that v and w are two vertices of X. Let P be a shortest (u,v)-path and Q be a shortest (u,w)-path. Denote by u_1 the last vertex common to P and Q. Since P and Q are shortest paths, the (u, u_1)-sections of both P and Q are shortest (u, u_1)-paths and, therefore, have the same length. Now, since the lengths of both P and Q are even, the lengths of the (u_1, v)-section P_1 of P and the (u_1, w)-section Q_1 of Q must have the same parity. It follows that the (v, w)-path from v to u_1 along P_1 reversely and then from u_1 to w along Q_1 is of even length. If v were joined to w, the path from v to u_1 along P_1 reversely, from u_1 to w along Q_1 and then from w to v along the edge wv would be a cycle of odd length, contrary to the hypothesis. Therefore no two vertices in X are adjacent; similarly, no two vertices in Y are adjacent. □

定理6. 所有具有p个顶点而没有三角形的图中最多有$\llcorner p^2/4 \lrcorner$条边。

练习2. 证明：唯一没有三角形的$(p, [\frac{p^2}{4}])$图为$K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$。

证法一. 我们证明如下结论：唯一没有三角形的包含p个顶点且边数$q \geq [\frac{p^2}{4}]$的图一定为$K(\lfloor\frac{p}{2}\rfloor, \lceil\frac{p}{2}\rceil)$。设$G$为一个没有三角形，包含$p$个顶点且边数$q \geq [\frac{p^2}{4}]$的图。设$V$为$G$的顶点集合，$v_0$为$G$中度最大的顶点，$V_1$为所有与$v_0$邻接的顶点构成的集合，$V_2 = V \setminus V_1$。以下证明$V_1$中任意两个不同的顶点互相不邻接，$V_2$中任意两个不同的顶点互相不邻接，$|V_1|$和$|V_2|$最多相差1，从而完成定理的证明。

首先，由V_1中的每个顶点都与v_0邻接，G中没有三角形知V_1中任意两个不同的顶点互相不邻接。

构造一个完全偶图G'，G'的顶点集为$V_1 \cup V_2$，V_1中任意两个不同的顶点互相不邻接，V_2中任意两个不同的顶点互相不邻接，V_1和V_2中的任意两个顶点互相邻接。由v_0为G中度最大的顶点知对任意的$v \in V$，v在G中的度$d(v)$小于等于v在G'中的度$d'(v)$。而一个图中所有顶点的度数之和为边数的两倍，从而G中的边数q小于等于G'中的边数q',即

$$q \leq |V_1||V_2| \tag{1}$$

易验证

$$|V_1||V_2| \leq [\frac{p^2}{4}] \tag{2}$$

由$q \geq [\frac{p^2}{4}]$知(1)式和(2)式中的等号成立。由(1)式中的等号成立知在G中V_1中的每个顶点必与V_2中的每个顶点邻接，再由G中没有三角形知，V_2中任意两个不同的顶点在G中不邻接。由$|V_1| + |V_2| = p$知(2)中的等式成立当且仅当$|V_1|$与$|V_2|$最多相差1。

□

证法二. 用数学归纳法证明以下结论：唯一没有三角形的包含p个顶点且边数$q \geq [\frac{p^2}{4}]$的图一定为$K(\lfloor\frac{p}{2}\rfloor, \lceil\frac{p}{2}\rceil)$。施归纳于顶点数$p$，只证$p$为奇数的情况，$p$为偶数的情况是类似的。

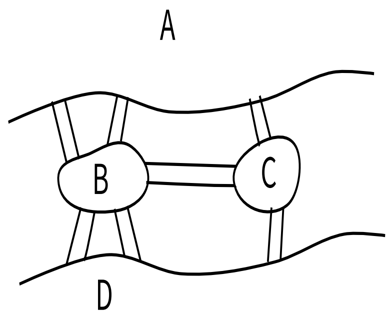
1) 当$p = 1$时，唯一没有三角形的包含一个顶点且边数$q \geq 0$的图一定为$K(0,1)$，结论显然成立。（注：我们把$(1,0)$图也称为偶图，并记为$K(0,1)$或$K(1,0)$）。

2)假设当$p = 2k-1 (k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = 2k+1$时结论也成立。设G为一个没有三角形，顶点数$p = 2k+1$，边数$q \geq [\frac{p^2}{4}]$的图。显然，G中至少有两个邻接的顶点u和v。图$G' = G - \{u\} - \{v\}$中没有三角形，有$2k-1$个顶点。因为G中没有三角形，如果u与G'的x个顶点邻接，则v至多能与G'中剩余的$2k-1-x$个顶点邻接，于是G'中的边数

$$\begin{aligned} q' &\geq q - x - (2k-1-x) - 1 \\ &\geq [\frac{(2k+1)^2}{4}] - 2k \\ &= k^2 - k \\ &= [\frac{(2k-1)^2}{4}] \end{aligned}$$

由归纳假设，G'为$K(\lfloor\frac{2k-1}{2}\rfloor, \lceil\frac{2k-1}{2}\rceil)$，即$K(k-1,k)$。以下证明$G$必为$K(k,k+1)$。

假设偶图G'的顶点集有一个二划分为$\{V_1, V_2\}$，使得G'的任意一条边的两个端点一个在V_1中，一个在V_2中，$|V_1| = k-1$，$|V_2| = k$。由G中没有三角形知V_1和V_2中的每个顶点在G中至多与顶点u和顶点v中的一个邻接。另外，V_1和V_2中的每个顶点在G中必与顶点u和顶点v中的一个邻接，否则，G中的边数$q < (k-1)k + (2k-1) + 1 = k^2 + k = [\frac{(2k+1)^2}{4}]$，矛盾。不妨设在$G$中$V_2$中的某个顶点与$v$相邻接，由$G$中没有三角形知$v$不能与$V_1$中的顶点相邻接，从而$u$与$V_1$中每个顶点相邻接，$v$与$V_2$中的每个顶点相邻接。这证明了$G$为$K(k, k+1)$。 □



定义21. 包含图的所有顶点和所有边的闭迹称为欧拉闭迹。存在一条欧拉闭迹的图称为欧拉图。

定理7. 图G为欧拉图当且仅当G为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明. 首先，假设图G为欧拉图，往证G为连通的且每个顶点的度为偶数。

由图G为欧拉图知G中有一条包含所有边和所有顶点的闭迹$T: v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$，其中$v_n = v_0$。显然$G$为连通的。顶点$v_0$在$T$中的第一次出现与一条边相关联，最后一次出现与一条边相关联，其余的每次出现均与两条边相关联，因此其度为偶数。除v_0之外的其他顶点在T中的每次出现均与两条边相关联，因此其度也为偶数。

其次，假设G为连通的且每个顶点的度为偶数，往证G为欧拉图。

设$v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$为图$G$的一条最长的迹，记为$Z$，则$Z$为闭迹。否则，$v_n \neq v_0$，$v_n$在迹$Z$中的最后一次出现与一条边相关联，其他的每次出现均与两条边相关联，由v_n的度为偶数知，v_n在G中还有一条与之关联的边没有在Z中出现，记为$x_{n+1} = v_n v_{n+1}$。则$v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n, x_{n+1}, v_{n+1}$构成了图$G$的一条更长的迹，这与$v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$为图$G$的一条最长的迹矛盾。接下来证明$Z$包含了图$G$的所有的边。若不然，则图$G$中有一条边$x$不在$Z$中出现，并且$x$有一个端点在$Z$中出现。在图$G$中去掉$Z$中的所有边，得到图$G'$。取图$G'$中一条包含$x$的最长的迹$Z'$，由图$G'$中所有顶点的度均为偶数易知$Z'$为闭迹（与前面证明$Z$为闭迹的过程相类似）。于是$Z$和$Z'$可以联结成一条更长的迹，这与$v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$为图$G$的一条最长的迹矛盾。 □

定义22. 包含图的所有顶点和边的迹称为欧拉迹。一条欧拉迹如果不是欧拉闭迹，则称其为欧拉开迹。

定理8. 图G有一条欧拉开迹当且仅当G为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明. 设图G有一条欧拉开迹$Z: v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$，其中$x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \ldots, n$。显然，图$G$是连通的。顶点$v_0$在$Z$中除了其首次出现与一条边相关联外，其余的每次出现均与两条边相关联，因此顶点v_0的度为奇数；同理，v_n的度为奇数。除了v_0和v_n之外其余的每个顶点在Z中的每次出现均与两条边相关联，因此其度为偶数。这证明了图G恰有两个奇度顶点。

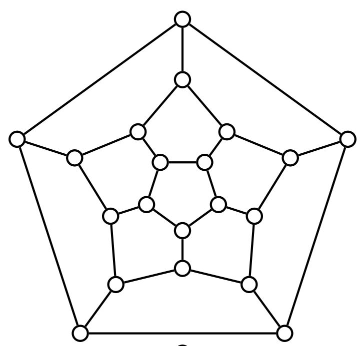
设图G是连通的，且恰有两个奇度顶点u和v。在顶点u和v之间加一条边，得到图G'。则图G'是连通的且每个顶点的度为偶数，因此有一条欧拉闭迹。在该欧拉闭迹上去掉新加的顶点u与顶点v之间的边，便得到了图G的一条欧拉开迹。 □

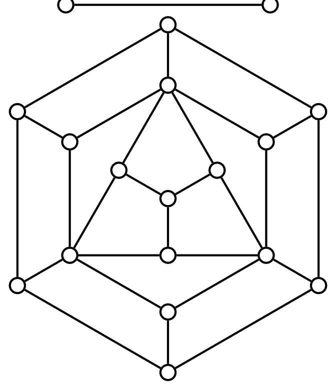
定理9. 设G为连通图，G恰有$2n$个奇度顶点，$n \geq 1$，则G的全部边可以排成n条开迹，且不能排成少于n条开迹。

证明. 设连通图G有$2n$个奇度顶点$u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n$。在$G$中加入$n$条边$u_1v_1$，$u_2v_2$，...，$u_nv_n$，得到图$G'$。则$G'$是连通的，且每个顶点的度为偶数，因此存在一条欧拉闭迹Z。在Z中去掉新加入的边$u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_nv_n$，则得到图$G$的$n$条开迹。

假设图G的所有边能排成m条开迹，$m < n$。则只有这m条开迹的端点可能为奇度顶点，因此图G至多有$2m$个奇度顶点，这与图G有$2n$个奇度顶点矛盾。 □

定义23. 图G的一条包含所有顶点的路称为G的一条哈密顿路;图G的一个包含所有顶点的圈称为G的一个哈密顿圈。具有哈密顿圈的图称为哈密顿图。

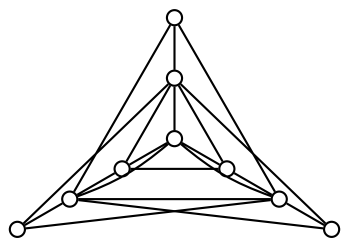




定理10. 设$G=(V,E)$为哈密顿图，则对V的每个非空子集S，均有

$$\omega(G-S)\leq |S|$$

其中$G-S$是从G中去掉S中那些顶点后所得到的图，$\omega(G-S)$是图$G-S$的支数。



定理11. 设G为一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u+\deg v\geq p-1,$$

则G为连通的。

证明. 用反证法。假设G不连通，则G至少有两个支。设$G_1=(V_1,E_1)$为其中的一个支，其他各支构成的子图为$G_2=(V_2,E_2)$。取V_1中的任意一个顶点u和V_2中的任意一个顶点v，则顶点u和顶点v不邻接并且

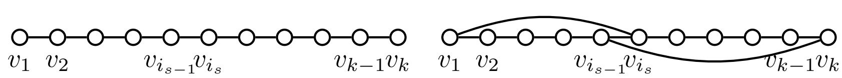
$$\deg u+\deg v\leq (|V_1|-1)+(|V_2|-1)=p-2$$

矛盾。 □

定理12. 设G为一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u+\deg v\geq p-1,$$

则G有哈密顿路。



证明. 当$p=1,2,3$时，易验证结论成立。以下证明当$p\geq 4$时结论成立。设G中的最长路为$v_1v_2\cdots v_k$，只需证明$k=p$。

用反证法，假设$k<p$，易验证此时$k\geq 3$。以下证明$v_1v_2\cdots v_k$必在同一个圈上。由$v_1v_2\cdots v_k$为最长路知v_1只能与$v_2,v_3,\ldots,v_{k-1},v_k$中的顶点邻接，$v_k$只能与$v_1,v_2,v_3,\ldots,v_{k-1}$中的顶点邻接。设$v_{i_1},v_{i_2},\ldots,v_{i_r}$与$v_1$邻接，$2=i_1<i_2<\cdots<i_r\leq k$，则$v_k$必与某个$v_{i_s-1}$邻接。否则，$v_k$至多与最长路上其余的顶点邻接，所以

$$\deg v_1+\deg v_k\leq r+((k-1)-r)=k-1<p-1$$

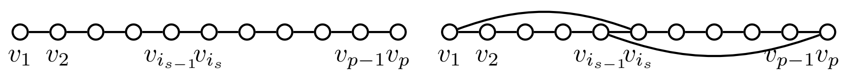
矛盾。于是，$v_1v_2\cdots v_{i_{s-1}}v_kv_{k-1}\cdots v_{i_s}v_1$为$G$中的一个圈。

由于G为连通的，$k<p$，所以G必有某个顶点v，v不在C上，但与C上某个顶点v_i邻接。于是得到G的一条更长的路，这就出现了矛盾。 □

定理13. 设G为有$p(p\geq 3)$个顶点的图。如果对G的任一对不邻接的顶点u和v，均有

$$\deg u+\deg v\geq p,$$

则G为一个哈密顿图。



证明. 由定理6.12知，G有哈密顿路，记为$v_1v_2\cdots v_p$。
以下证明$v_1v_2\cdots v_p$必在同一个圈上，从而G中有哈密顿圈。
设$v_{i_1},v_{i_2},\ldots,v_{i_r}$与$v_1$邻接，$2=i_1<i_2<\cdots<i_r\leq p$，则$v_p$必与某个$v_{i_s-1}$邻接。否则，$v_p$至多与最长路上其余的顶点邻接，所以

$$\deg v_1+\deg v_p\leq r+((p-1)-r)=p-1$$

与已知条件矛盾。于是，$v_1v_2\cdots v_{i_{s-1}}v_pv_{p-1}\cdots v_{i_s}v_1$为$G$中的一个圈。 □

定义24. 设$G=(V,E)$为一个图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$。$p\times p$矩阵$A=(a_{ij})$称为G的邻接矩阵，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1,\text{如果}\{v_i,v_j\}\in E\\ 0,\text{如果}\{v_i,v_j\}\notin E\end{cases}$$

定理14. 设$G=(V,E)$为一个(p,q)图，$p\times p$矩阵A为G的邻接矩阵，则G中v_i与v_j间长为l的通道的条数等于A^l的第i行第j列元素的值。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于l。
当$l=1$时，结论显然成立。
假设当$l=k$时结论成立，往证当$l=k+1$时结论也成立。由矩阵乘法的计算规则知:

$$(A^{k+1})_{ij}=(A^kA)_{ij}=\sum_{h=1}^{p}(A^k)_{ih}A_{hj}$$

由归纳假设，$(A^k)_{ih}$为从顶点v_i到顶点v_h长度为k的通道的条数。
由从顶点v_i到顶点v_j长度为$k+1$的通道的条数为从顶点v_i到顶点v_j长度为$k+1$且倒数第二个顶点依次为v_1，v_2，…，v_p的通道的条数之和知$(A^{k+1})_{ij}$为从顶点v_i到顶点v_j长度为$k+1$的通道的条数。 □

练习1. 设G是一个(p,q)图，证明：若$q\geq p+4$，则G中有两个边不重的圈。

证明. 当$q > p+4$时，可以在G中任意去掉一些边，使得剩余的边数恰好比顶点数多4 。如果此时得到的新图中有两个边不重的圈，则原来的图G中也一定有两个边不重的圈。因此，以下只需证当$q = p+4$时，图G中有两个边不重的圈。

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

(1)当$p \le 4$时，图G最多有$p(p-1)/2$条边，易验证此时$q = p+4$不可能成立。当$p = 5$时，$q = 9$。设此时图G的顶点集为$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$，除了$v_1$和$v_5$之间没有边关联之外，其余的任意两个顶点之间均有边关联，则此时$v_1v_2v_3v_1$和$v_3v_4v_5v_3$就是图G中两个边不重的圈。

(2)假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设图G有$k+1$个顶点。分以下四种情况进行验证：

(i)当$\delta(G) = 0$时，去掉图G中任意一个度为0的顶点和任意一条边，得到的图G'中有p'个顶点，q'条边，则$q' = p'+4$。由归纳假设，图G'中有两个边不重的圈，它们也是图G中两个边不重的圈。

(ii)当$\delta(G) = 1$时，去掉图G中任意一个度为 1 的顶点及其与之关联的边，得到的图G'中有p'个顶点，q'条边，则$q' = p'+4$。由归纳假设，图G'中有两个边不重的圈，它们也是图G中两个边不重的圈。

(iii)当$\delta(G) = 2$时，设u为图G中度为2的顶点，与之邻接的两个顶点为v和w。分两种情况讨论。在第一种情况下，v和w之间没有边关联，去掉顶点u及其与之关联的两条边uv和uw，添加一条边vw，得到的图G'中有p'个顶点，q'条边，则$q' = p'+4$。由归纳假设，图G'中有两个边不重的圈。如果新添加的边vw不在这两个圈上，则这两个圈就是图G中两个边不重的圈；如果新添加的边vw在其中的一个圈上，将其替换为图G中的两条边vu和uw，则所得到的圈与另一个圈一起构成图G中两个边不重的圈。在第二种情况下，v和w之间有边关联，此时$uvwu$构成图G中的一个圈，去掉该圈上的三条边，得到的图G'中有p'个顶点，q'条边。此时$q' = p'+1$，因此图G'中必定有一个圈，与原来图G中的圈$uvwu$构成图G中两个边不重的圈。

(iv)当$\delta(G) \ge 3$时,$2q \ge 3p$，即$2(p+4) \ge 3p$， 可以得到$p \le 8$。此时若图G中有长度小于等于4的圈，将其上的4 条边去掉，得到的图G'中有p'个顶点，q'条边，则$q' \ge p'$，图G'中必定有一个圈，与原来图G中去掉的边所构成的圈一起构成图G中两个边不重的圈。若图G中所有圈的长度至少为5，设C为其中长度最短的一个圈。由$\delta(G) \ge 3$知圈C上的每个顶点至少与圈外的一个顶点相邻接，而其中任意两个不同的顶点不能同时与圈外同一个顶点相邻接，否则将产生一个长度更小的圈。由圈C上至少有 5 个顶点知图G中至少有10个顶点，与$p \le 8$矛盾。这说明图G中所有圈的长度至少为5的情况不可能出现。

□

练习2. 菱形*12*面体的表面上有无哈密顿圈?