

第七章树和割集

陈建文

April 24, 2023

定义1. 连通且无圈的无向图称为无向树，简称**树**。一个没有圈的无向图称为无向森林，简称**森林**。

定义2. 仅有一个顶点的树称为**平凡树**。

定理1. 任一非平凡树中至少有两个度为1的顶点。

证明. 设 P 为树中的一条最长路， v 为 P 的一个端点，则 v 除了 P 上与其关联的边之外，由 G 中无圈知 v 不能再有其他的与 P 上的顶点相关联的边，同时由 P 为一条最长路知 v 不能再有与 P 外的顶点相关联的边，因此 v 的度必为1。 P 的两个端点即为两个度为1的顶点。□

定理2. 设 $G = (V, E)$ 为一个 (p, q) 图，下列各命题等价：

1. G 为树；
2. G 为连通的且 $q = p - 1$ ；
3. G 中无圈且 $q = p - 1$ 。

证明.

$1 \Rightarrow 2$

(证法一)

只需证 $q = p - 1$ ，用数学归纳法证明，施归纳于顶点数 p 。

(1) 当 $p = 1$ 时， $q = 0$ ，结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立，往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设树 G 有 $k + 1$ 个顶点。 G 中一定存在一个度为1的顶点。去掉 G 中一个度为1的顶点及其与之关联的边，得到的图 G' 连通且无圈，则 G' 是树。 G' 有 k 个顶点， $q - 1$ 条边，由归纳假设， $q - 1 = k - 1$ ，从而 $q = (k + 1) - 1$ ，即当 $p = k + 1$ 时结论也成立。

(证法二)

只需证 $q = p - 1$ ，用数学归纳法证明，施归纳于边数 q 。

(1) 当 $q = 0$ 时， $p = 1$ ，结论显然成立。

(2) 假设当 $q < k$ 时结论成立，往证当 $q = k$ 时结论也成立。设树 G 有 k 条边。去掉 G 中的任意一条边，得到两个支 G_1 和 G_2 ，它们均连通无圈，因此是树。设 G_1 有 p_1 个顶点， k_1 条边， G_2 有 p_2 个顶点， k_2 条边，由归纳假设，

$$k_1 = p_1 - 1$$

$$k_2 = p_2 - 1$$

以上两式相加,两边再同时加 1 , 得

$$k_1 + k_2 + 1 = p_1 + p_2 - 1$$

从而

$$k = p - 1$$

即当 $q = k$ 时结论也成立。

$2 \Rightarrow 3$

只需证 G 中无圈。用反证法。假设图 G 中有圈, 则去掉圈上的一条边, 得到的图仍然为连通的。如果新得到的图仍然有圈, 在圈上再去掉一条边, 又会得到一个新的连通的图。如此继续下去, 最终会得到一个连通的没有圈的图。由从 1 到 2 的证明知最后得到的图中有 $p - 1$ 条边, 这与去掉边之前图 G 中的边数 $q = p - 1$ 矛盾。

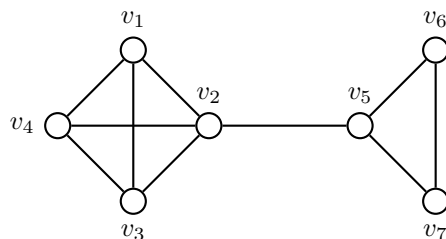
$3 \Rightarrow 1$

只需证 G 连通。设图 G 有 k 个支, 则图 G 中的每个支连通且没有圈。设第 i 个支中含有 p_i 个顶点, q_i 条边。由 1 到 2 的证明知在第 i 个支中 $q_i = p_i - 1$ 。将所有支的边数和顶点数相加, 可得 $q = p - k$ 。于是 $k = 1$, 从而 G 为连通的。 \square

定义 3. 设 $G = (V, E)$ 为一个图, G 的一个生成子图 $T = (V, F)$ 如果是树, 则称 T 为 G 的生成树。

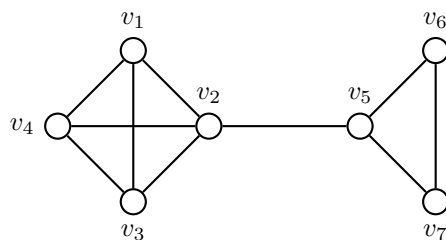
定理 3. 图 G 有生成树的充分必要条件是 G 为一个连通图。

定义 4. 设 v 为图 G 的一个顶点, 如果 $G - v$ 的支数大于 G 的支数, 则称顶点 v 为图 G 的一个割点。

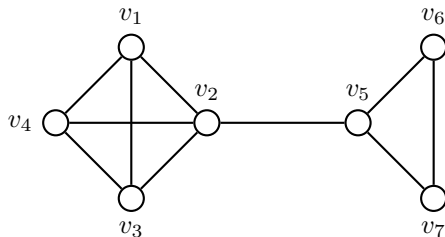


定理 4. 设 v 为连通图 $G = (V, E)$ 的一个割点, 则下列命题等价:

1. v 为图 G 的一个割点;
2. 集合 $V \setminus \{v\}$ 有一个二划分 $\{U, W\}$, 使得对任意的 $u \in U$, $w \in W$, v 在联结 u 和 w 的每条路上;
3. 存在与 v 不同的两个顶点 u 和 w , 使得 v 在每一条 u 与 w 间的路上。

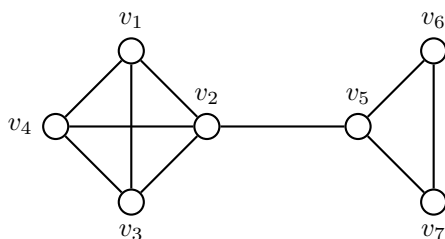


定义5. 图 G 的一条边 x 称为 G 的一座**桥**, 如果 $G - x$ 的支数大于 G 的支数。

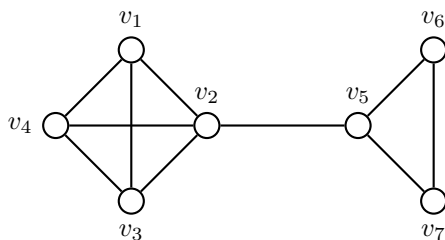


定理5. 设 x 为连通图 $G = (V, E)$ 的一条边, 则下列命题等价:

1. x 为 G 的桥;
2. x 不在 G 的任一圈上;
3. 存在 V 的一个划分 $\{U, W\}$, 使得对任意的 $u \in U, w \in W$, x 在每一条联结 u 与 w 的路上;
4. 存在 G 的不同顶点 u 和 v , 使得边 x 在联结 u 和 v 的每条路上。



定义6. 设 $G = (V, E)$ 为图, $S \subseteq E$ 。如果从 G 中去掉 S 中的所有边得到的图 $G - S$ 的支数大于 G 的支数, 而去掉 S 的任一真子集中的边得到的图的支数不大于 G 的支数, 则称 S 为 G 的一个**割集**。



练习1. 恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明. 设连通图 G 有 p 个顶点, 恰有两个顶点不是割点, 往证 G 为一条路。
由 G 连通知, G 有一棵生成树 T 。取树 T 的一条最长路 $P: v_1 v_2 \cdots v_k$, 则 v_1 和 v_k 在 T 中的度必为1, 它们都不是 T 的割点, 从而也不是图 G 的割点。由 G 中恰有两个顶点不是割点知, T 中除了 v_1 和 v_k 之外没有其他度为1的顶点, 由此可得

出 T 中所有顶点的度小于等于2。否则，假设 T 中存在一个度大于等于3的顶点，则 T 中所有顶点的度数之和 $\geq 3+2+2(p-3) = 2p-1 > 2(p-1)$ ，矛盾。由 T 中所有顶点的度小于等于2知，路 P 中包含了 T 中所有的顶点，即路 P 中包含了 G 中所有的顶点。事实上， G 就是路 P 。否则，在路 P 中，设 v_i 和 $v_j(j > i+1)$ 之间在 G 中有一条边，则 v_{i+1} 不是 G 的割点，与 G 中只有两个顶点 v_1 和 v_k 不是割点矛盾。 \square