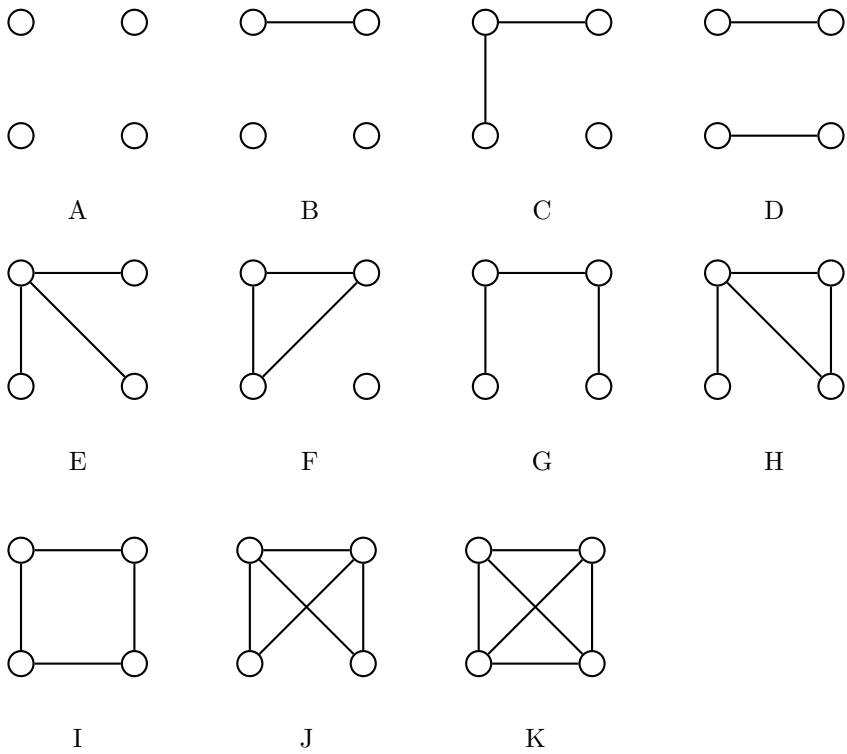
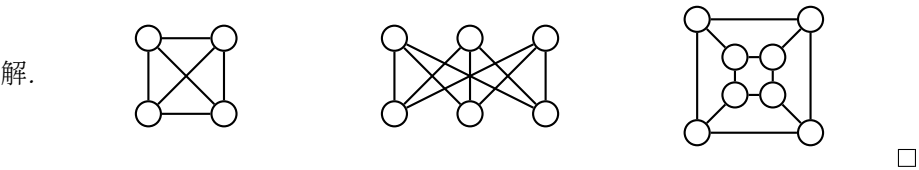


第六章作业题

习题 1. 画出具有4个顶点的所有无向图（同构的只算一个）。



习题 2. 画出具有4个、6个、8个顶点的三次图。



习题 3. 某次宴会上，许多人互相握手，证明：握过奇数次手的人数为偶数（注意，0为偶数）。

证明. 每个人用一个顶点表示。如果两个人之间握过手, 则在他们之间连一条边。在所得到的图中, 度为奇数的顶点的数目为偶数, 这说明握过奇数次手的人数为偶数。 \square

习题 4. 设 u 与 v 为图 G 的两个不同的顶点, 若 u 与 v 间有两条不同的通道 (迹), 则 G 中是否有圈?

答. 设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道, 则 G 中不一定有圈。举例如下: 考虑 $G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$, 则 uv 和 $uvuv$ 为 u 与 v 间两条不同的通道, 但 G 中没有圈。

如果 u 与 v 间有两条不同的迹, 则 G 中一定有圈。证明如下: 设 u 与 v 间有两条不同的迹 T_1 和 T_2 。如果 T_1 和 T_2 都为路, 则 G 中有圈; 如果 $T_1 = uv_1v_2 \dots v_nv$ 不是路, 设 $v_j = v_i (i < j)$ 为第一个重复的顶点, 则 $v_iv_{i+1} \dots v_j$ 构成 G 中的一个圈; 同理, 如果 T_2 不是路, G 中有圈。 \square

习题 5. 若 G 是一个 (p, q) 图, $q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$, 试证 G 是连通图。

证法一. 用反证法。假设 G 不连通, 则至少有两个连通分量。设其中一个连通分量为 $G_1 = (V_1, E_1)$, 其余的连通分量构成的子图为 $G_2 = (V_2, E_2)$ 。取 G_1 中的一个顶点 u 和 G_2 中的一个顶点 v , 将 G_1 中与 u 相关联的边替换为与 v 相关联的边 (边的另一个顶点保持不变) 所得到的图为 G' , 则 G 中的边数等于 G' 中的边数。显然 G' 中的边数小于等于 K_{p-1} 中的边数, 从而 G 中的边数小于等于 K_{p-1} 中的边数, 即

$$q \leq \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$$

矛盾。 \square

证法二. 用反证法。假设 G 不连通, 则至少有两个连通分量。设其中一个连通分量的顶点数为 p_1 , 边数为 q_1 , 所有其他连通分量的顶点数为 p_2 , 边数为 q_2 。则

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(p-1)(p-2) \\ &= \frac{1}{2}(p_1 + p_2 - 1)(p_1 + p_2 - 2) \\ &= \frac{1}{2}(p_1 + p_2 - 1)((p_1 - 1) + (p_2 - 1)) \\ &= \frac{1}{2}(p_1(p_1 - 1) + p_1(p_2 - 1) + p_2(p_1 - 1) + p_2(p_2 - 1) - (p_1 - 1) - (p_2 - 1)) \\ &= \frac{1}{2}(p_1(p_1 - 1) + p_2(p_2 - 1) + 2(p_1 - 1)(p_2 - 1)) \\ &= \frac{p_1(p_1 - 1)}{2} + \frac{p_2(p_2 - 1)}{2} + (p_1 - 1)(p_2 - 1) \\ &\geq \frac{p_1(p_1 - 1)}{2} + \frac{p_2(p_2 - 1)}{2} \\ &\geq q \end{aligned}$$

矛盾。 \square

习题 6. 设 G 为图。证明：若 $\delta(G) \geq 2$ ，则 G 包含长度至少为 $\delta(G) + 1$ 的圈。

证明. 设 $P = v_0 v_1 \dots v_n$ 为 G 中的一条最长路，则 v_0 只能与 P 中的顶点相邻接，否则假设 v_0 与不在 P 中的顶点 u 邻接，则 $uv_0 v_1 \dots v_n$ 构成了 G 中一条更长的路，与 P 为 G 中的最长路矛盾。取最大的 s 使得 v_0 与 v_s 相邻接，则 $C = v_0 v_1 \dots v_s v_0$ 为长度至少为 $\delta(G) + 1$ 的圈，这是因为 v_0 至少与 $\delta(G)$ 个顶点相邻接，而所有这些与 v_0 邻接的顶点均在圈 C 中。□

习题 7. 证明：如果 G 不是连通图，则 G^c 是连通图。

证明. 设 u 和 v 为 G^c 中的任意两个不同的顶点。如果 u 和 v 不在 G 的同一个连通分量中，则 uv 不是 G 的一条边，于是 uv 为 G^c 的一条边，从而在 G^c 中 u 和 v 之间存在一条路；如果 u 和 v 在 G 的同一个连通分量中，取 G 的另外一个连通分量中的一个顶点 w ，则 uw 和 wv 都不是 G 中的边，从而为 G^c 中的边，于是 uvw 构成了 G^c 中 u 和 v 之间的一条路。□

习题 8. 每一个自补图有 $4n$ 或 $4n + 1$ 个顶点。

证明. 设 G 为自补图，有 p 个顶点，则 G 和 G^c 共有 $p(p - 1)/2$ 条边。由 G 为自补图知， G 和 G^c 有相同的边数，从而 $p(p - 1)/2$ 能被2整除。只有当 $p = 4n$ 或 $p = 4n + 1$ 时， $p(p - 1)/2$ 能被2整除，结论得证。□

习题 9. 给出一个10个顶点的非哈密顿图的例子，使得每一对不邻接的顶点的 u 和 v ，均有： $\deg u + \deg v \geq 9$ 。

解. K_9 外再连接一个顶点。□

习题 10. 试求 K_p 中不同的哈密顿圈的个数。

解. $\frac{(p-1)!}{2}$ □

习题 11. 完全偶图 $K_{m,n}$ 为哈密顿图的充分必要条件是什么？

解. $m = n > 1$ 。 □

习题 12. 证明：具有奇数顶点的偶图不是哈密顿图。

证明. 设 G 为偶图，其顶点可以划分为两个集合 V_1 和 V_2 ，使得任意一条边一个顶点在 V_1 中，另外一个顶点在 V_2 中。如果 G 有奇数个顶点，则 $|V_1| \neq |V_2|$ 。不妨设 $|V_1| < |V_2|$ ，则 $\omega(G - V_1) > |V_1|$ ，从而 G 不是哈密顿图。□