

习题 1. 给出一个既不是自反的又不是反自反的二元关系？

习题 2. 是否存在一个同时不满足自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性的二元关系？

习题 3. 设 R 和 S 为集合 X 上的二元关系，下列命题哪些成立：

- a) 如果 R 与 S 为自反的，则 $R \cup S$ 和 $R \cap S$ 也为自反的；
- b) 如果 R 与 S 为反自反的，则 $R \cup S$ 和 $R \cap S$ 也为反自反的；
- c) 如果 R 与 S 为对称的，则 $R \cup S$ 和 $R \cap S$ 也为对称的；
- d) 如果 R 与 S 为反对称的，则 $R \cup S$ 和 $R \cap S$ 也为反对称的；
- e) 如果 R 与 S 为传递的，则 $R \cup S$ 和 $R \cap S$ 也为传递的；
- f) 如果 R 与 S 不是自反的，则 $R \cup S$ 不是自反的；
- g) 如果 R 为自反的，则 R^c 为反自反的；
- h) 如果 R 与 S 为传递的，则 $R \setminus S$ 为传递的。

习题 4. 设 R 与 S 为集合 X 上的二元关系，证明：

- a) $(R^{-1})^{-1} = R$;
- b) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$;
- c) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;
- d) 如果 $R \subseteq S$ ，则 $R^{-1} \subseteq S^{-1}$ 。

习题 5. 设 R 为集合 X 上的二元关系。证明： $R \cup R^{-1}$ 为集合 X 上对称的二元关系。

习题 6. “父子”关系的平方是什么关系？

习题 7. 设 R 与 S 为集合 X 上的二元关系, 下列哪些命题为真?

- a) 如果 R, S 都是自反的, 则 $R \circ S$ 也是自反的;
- b) 如果 R, S 都是反自反的, 则 $R \circ S$ 也是反自反的;
- c) 如果 R, S 都是对称的, 则 $R \circ S$ 也是对称的;
- d) 如果 R, S 都是反对称的, 则 $R \circ S$ 也是反对称的;
- e) 如果 R, S 都是传递的, 则 $R \circ S$ 也是传递的。

习题 8. 设 R, S 为集合 X 上的两个满足 $R \circ S \subseteq S \circ R$ 的对称关系。证明: $R \circ S = S \circ R$ 。

习题 9. 设集合 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$, $S = \{f | f : X \rightarrow Y\}$ 。 S 上的二元关系 \cong 定义如下: $\forall f, g \in S, f \cong g$ 当且仅当

$$f(1) + f(2) + f(3) = g(1) + g(2) + g(3)$$

证明 \cong 为 S 上的等价关系, 并求出等价类之集。

习题 10. 设集合 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$, $S = \{f | f : X \rightarrow Y\}$ 。 S 上的二元关系 \cong 定义如下: $\forall f, g \in S$, $f \cong g$ 当且仅当

$$\{f^{-1}(\{y\}) | y \in Y\} = \{g^{-1}(\{y\}) | y \in Y\}$$

证明 \cong 为 S 上的等价关系, 并求出等价类之集。

习题 11. 由置换 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 8 & 1 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ 确定了集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 上的一个二元关系 \cong : 对任意的 $i, j \in X$, $i \cong j$ 当且仅当 i 与 j 在 σ 的循环分解式的同一个循环置换中。 证明: \cong 为集合 X 上的等价关系, 求 X / \cong 。

习题 12. 给出集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 上的两个等价关系 R 与 S , 使得 $R \circ S$ 不是等价关系。

习题 13. 设 R 为集合 X 上的一个二元关系, 试证: R 为一个等价关系, 当且仅当以下两条成立 (1) 对任意的 x , xRx ; (2) 如果 xRy 且 xRz , 则 yRz 。

习题 14. 设 X 为一个集合, $|X| = n$, 试求:

- a) 集合 X 上自反二元关系的个数;
- b) 集合 X 上反自反二元关系的个数;
- c) 集合 X 上对称二元关系的个数;
- d) 集合 X 上反对称二元关系的个数。

习题 15. 是否存在一个偏序关系 \leq , 使 (X, \leq) 中有唯一极大元素, 但没有最大元素? 如果有, 请给出一个具体例子; 如果没有, 请证明之。

习题 16. 令 $S = \{1, 2, \dots, 12\}$, 画出偏序集 $(S, |)$ 的 $Hasse$ 图, 其中 $|$ 为整除关系。它有几个极大(小)元素? 列出这些极大(小)元素。