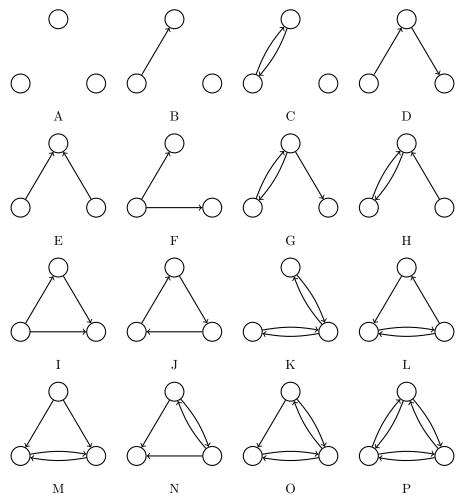
习题 1. 画出具有3个顶点的所有有向图(同构的只算一个)。



习题 2. 具有p个顶点的完全有向图中有多少条弧?

解. p(p-1)。

习题 3. 设D为一个有p个顶点q条弧的有向图。如果D为连通的,证明: $p-1 \leq q \leq p(p-1)$ 。

证明. 由D为连通的知略去D中所有弧的方向所得到的无向图G为连通的,从而 $q \geq p-1$ 。 显然D中弧的条数小于等于具有p个顶点的完全有向图中弧的条数,从而 $q \leq p(p-1)$ 。

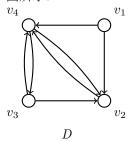
习题 4. 设D为一个有p个顶点q条弧的强连通的有向图,则q至少是多大?

答. 当p=1时, q=0;当p>1时, q至少为p。

当p>1时,由D为强连通的知D中每个顶点至少有一条出弧,因此D中弧的数目大于等于p。

显然由p个顶点 v_1,v_2,\ldots,v_p 依次相连所构成的圈 $v_1v_2\ldots v_pv_1$ 有p条弧。因此q至少为p。

习题 5. 有向图*D*的图解如下图所示:



- (1) 写出D的邻接矩阵及可达矩阵;
- (2) 写出D的关联矩阵。

解. D的邻接矩阵:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

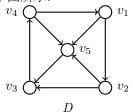
D的可达矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

D的关联矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

习题 6. 有向图D的图解如下图所示:



求从顶点 v_2 到其余每个顶点的长 \leq 4的所有有向通道的条数。

解. 有向图D的邻接矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从v2到每个顶点长度为1的通道的条数为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从v2到每个顶点长度为2的通道的条数为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

从v2到每个顶点长度为3的通道的条数为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

从v2到每个顶点长度为4的通道的条数为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

从v2到每个顶点长度小于等于4的通道的条数为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

所以, v_2 到 v_1 , v_3 , v_4 , v_5 长度小于等于4的通道的条数分别为2,3,2,4。

习题 7. 设T为一棵正则m元有序树,它有 n_0 个叶子,T有多少条弧? 解. 当m=1时,T可以有任意正整数条弧;当m>1时,T有 $\frac{m(n_0-1)}{m-1}$ 条弧。 **习题 8.** 设T为一棵有 n_0 个叶子的二元树,出度为2的顶点数为 n_2 ,试证 $n_0=n_2+1$ 。

证明. 设出度为1的顶点数为 n_1 ,则 $2n_2+n_1=n_2+n_1+n_0-1$,从而 $n_0=n_2+1$ 。

习题 9. 用数学归纳法证明每个比赛图中必有有向哈密顿路。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数p。

- (1) 当p=1时,结论显然成立。
- (2) 假设当 $p=k(k\geq 1)$ 时结论成立,往证当p=k+1时结论也成立。设D=(V,A)为一个包含k+1个顶点的比赛图,v为D的任意一个顶点,则D-v为一个包含k个顶点的比赛图。由归纳假设,D-v有一条有向哈密顿路 $v_1v_2\dots v_k$ 。如果 $(v,v_1)\in A$,那么 $vv_1v_2\dots v_k$ 为有向图D的一条有向哈密顿路;如果 $(v,v)\in A$,那么 $v_1v_2\dots v_k$ 为有向图D的一条有向哈密顿路;如果 $(v,v)\notin A$,那么 $v_1v_2\dots v_k$ 为有向图D的一条有向哈密顿路;如果 $(v,v)\notin A$,由D为比赛图知 $(v_1,v)\in A$ 并且 $(v,v)\in A$,在 $1,2,\dots,k$ 中选取最大的下标i使得 $(v_i,v)\in A$,则 $(v,v_{i+1})\in A$,于是 $v_1,v_2,\dots,v_i,v_i,v_i,v_{i+1},\dots,v_k$ 为D的一条有向哈密顿路。