第八章连通度和匹配

陈建文

April 27, 2023

定义1. 图G的**顶点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少顶点数目, 记为$\kappa(G)$。

定义2. 图G的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少边的数目, 记为$\lambda(G)$。

定理1. 对任一图G，有$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

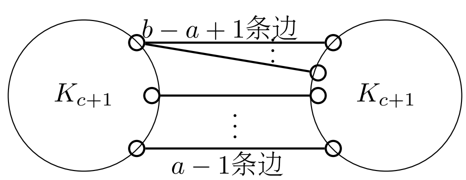
证明. 先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$。如果$\delta(G) = 0$，则$G$不连通或者为平凡图，此时$\lambda(G) = 0$，$\lambda(G) \leq \delta(G)$成立。如果$\delta(G) > 0$，不妨设$\deg v = \delta(G)$,从$G$中去掉与$v$关联的$\delta(G)$条边之后，得到的图中$v$为孤立顶点，所以$\lambda(G) \leq \delta(G)$。因此，对任意的图$G$，$\lambda(G) \leq \delta(G)$。

接下来证明$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。如果$G$不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，所以$\kappa(G) = 1$。最后假定$\lambda(G) \geq 2$，则$G$中有$\lambda(G)$条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的$\lambda(G) - 1$条边后得到一个图，它有一条桥$x = uv$。对于这$\lambda(G) - 1$条边中每一条，选取一个关联于它但与u和v都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这$\lambda(G) - 1$条边。如果这样产生的图是不连通的，则$\kappa(G) < \lambda(G)$。否则，x是这样产生的图的一条桥，从而移去u或v就产生了一个不连通图或平凡图。所以，在任何情况下，$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。 □

定理2. 对任何整数a, b, c， $0 < a \leq b \leq c$， 存在一个图G使得

$$\kappa(G) = a, \lambda(G) = b, \delta(G) = c$$

证明.



□

定理3. 设$G = (V, E)$有p个顶点且$\delta(G) \geq [\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G) = \delta(G)$。

证明. $\lambda(G)\le\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\ge\delta(G)$。

因为$\delta(G)\ge[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图， 则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。

由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\le[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\le[\frac{p}{2}]$。不妨设$|A|\le[\frac{p}{2}]$。由于$\delta(G)\ge[\frac{p}{2}]$，$A$中的每个顶点至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接。否则，如果$A$中的某个顶点$u$只与$A$中的顶点邻接，则$\deg u\le|A|-1\le[\frac{p}{2}]-1<\delta(G)$，矛盾。设$v$为$A$中的任一顶点，$v$与$V\setminus A$中的$x$个顶点邻接，与$A$中的$y$个顶点邻接，则$\deg v=x+y$。$v$与$V\setminus A$中的$x$个顶点邻接，所对应的边的集合记为$F_1$，则$F_1\subseteq F$；$v$与$A$中的$y$个顶点邻接，而这$y$个顶点中的每个顶点都至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接，所对应的边的集合记为$F_2$，则$F_2\subseteq F$ 并且$F_1\cap F_2=\phi$，从而

$$\lambda(G)\ge|F_1|+|F_2|=x+y=\deg v\ge\delta(G)$$

□

定义3. 设G为一个图，如果$\kappa(G)\ge n$，则称G为n-**顶点连通**的，简称n-连通;如果$\lambda(G)\ge n$，则称G为n-**边连通**的。

定理4. 设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\ge3$，则G为*2*-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在G的同一个圈上。