

习题 1. 设 A, B 为有穷集合且 $|A| = m, |B| = n$ 。

a) 计算 $|A^B| = ?$

b) 从 A 到 A 有多少个双射?

习题 2. 求证: 从一个边长为1的等边三角形中任意选5个点, 那么这5个点中必有2个点, 它们之间的距离至多为 $\frac{1}{2}$ 。而任选10个点中必有2个点, 其距离至多为 $\frac{1}{3}$ 。

习题 3. 求证：在52个整数中，必有两个整数，使这两个整数之和或差能被100整除。

习题 4. 设 $f : X \rightarrow Y$, $C \subseteq Y$, $D \subseteq Y$, 证明: $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$ 。

习题 5. 设 $f: X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq X$ 。证明: $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$ 。

习题 6. 设 $f: X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ 。以下四个小题中, 每个小题均有四个命题, 这四个命题有且仅有一个正确。请找出正确的哪一个。

(1) (a) 若 $f(x) \in f(A)$, 则 x 可能属于 A , 也可能不属于 A ;

(b) 若 $f(x) \in f(A)$, 则 $x \in A$;

(c) 若 $f(x) \in f(A)$, 则 $x \notin A$;

(d) 若 $f(x) \in f(A)$, 则 $x \in A^c$ 。

(2) (a) $f(f^{-1}(B)) = B$;

(b) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$;

(c) $f(f^{-1}(B)) \supseteq B$;

(d) $f(f^{-1}(B)) = B^c$ 。

(3) (a) $f^{-1}(f(A)) = A$;

(b) $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$;

(c) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$;

(d) 以上三个均不对。

(4) (a) $f(A) \neq \phi$;

(b) $f^{-1}(B) \neq \phi$;

(c) 若 $y \in Y$, 则 $f^{-1}(\{y\}) \in X$;

(d) 若 $y \in Y$, 则 $f^{-1}(\{y\}) \subseteq X$ 。

习题 7. 设 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{0, 1\}$, $Z = \{2, 3\}$ 。 $f: X \rightarrow Y$, $f(a) = f(b) = 0$, $f(c) = 1$; $g: Y \rightarrow Z$, $g(0) = 2, g(1) = 3$ 。试求 $g \circ f$ 。

习题 8. 设 $N = \{1, 2, \dots\}$, 试构造两个从集合 N 到集合 N 的映射 f 与 g , 使得 $fg = I_N$, 但 $gf \neq I_N$ 。

习题 9. 设 $f: X \rightarrow Y$ 。

(1) 如果存在唯一的一个映射 $g: Y \rightarrow X$, 使得 $gf = I_X$, 那么 f 是否可逆呢?

(2) 如果存在唯一的一个映射 $g: Y \rightarrow X$, 使得 $fg = I_Y$, 那么 f 是否可逆呢?

- 习题 10. 设 $f: X \rightarrow Y$, X 与 Y 为有穷集合,
- (1) 如果 f 是左可逆的, 那么 f 有多少个左逆映射?
 - (2) 如果 f 是右可逆的, 那么 f 有多少个右逆映射?

习题 11. 是否有一个从 X 到 X 的一一对应 f , 使得 $f = f^{-1}$, 但 $f \neq I_X$?

习题 12. 设 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 。求 $\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_2\sigma_1$, σ_1^{-1} , σ_2^{-1} 。

习题 13. 将置换 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ 分解成对换的乘积。