习题 1. 设G为一个有k个支的平面图。如果G的顶点数、边数、面数分别为p，q和f，试证：

$$p - q + f = k + 1$$

证明. 设G的的k个支分别为G_1，G_2，…，G_k，其中G_i有p_i个顶点，q_i条边，f_i个面（$1 \le i \le k$）。

由欧拉公式知，

$$\begin{aligned} p_1 - q_1 + f_1 &= 2 \\ p_2 - q_2 + f_2 &= 2 \\ &\cdots \\ p_k - q_k + f_k &= 2 \end{aligned}$$

以上各式相加得：

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_k) - (q_1 + q_2 + \ldots + q_k) + (f_1 + f_2 + \ldots + f_k) = 2k$$

由G只有一个外部面知

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_k = f + (k - 1)$$

从而

$$p - q + f + (k - 1) = 2k$$

即

$$p - q + f = k + 1$$

□

习题 2. 如果G为顶点数$p \ge 11$的可平面图，试证G^c不是可平面图。

证明. 用反证法，假设G^c也是可平面图。设G有q条边，由G为可平面图知

$$q \le 3p - 6$$

设G^c有q_1条边，由G^c为有p个顶点的可平面图知

$$q_1 \le 3p - 6$$

于是

$$q + q_1 \le 6p - 12$$

即

$$\begin{aligned} \frac{p(p-1)}{2} &\le 6p - 12 \\ p^2 - p &\le 12p - 24 \\ p^2 - 13p + 24 &\le 0 \end{aligned}$$

当$p \geq 11$时，

$$
\begin{aligned}
&p^2 - 13p + 24 \\
=&(p - \frac{13}{2})^2 - \frac{169}{4} + 24 \\
\geq&(11 - \frac{13}{2})^2 - \frac{169}{4} + 24 \\
=&\frac{81}{4} - \frac{169}{4} + 24 \\
=&2 > 0
\end{aligned}
$$

矛盾。 □

习题 3. 不存在7条棱的凸多面体。

证明. 用反证法，假设存在7条棱的凸多面体，其对应的平面图有p个顶点，则

$$7 \leq 3p - 6$$

于是

$$p \geq \frac{13}{3}$$

又由每个顶点的度大于等于3知

$$3p \leq 2 * 7$$

于是

$$p \leq \frac{14}{3}$$

由于不存在正整数p使得$\frac{13}{3} \leq p \leq \frac{14}{3}$，结论得证。 □

习题 4. 设G为一个没有三角形的可平面图。证明G中存在一个顶点v使得$\deg v \leq 3$。

证明. 当图G的顶点数$p = 1, 2$时，结论显然成立。 当$p \geq 3$时，用反证法证明结论也成立。假设$\delta(G) \geq 4$，设G有q条边，则

$$2q \geq 4p$$

于是

$$q \geq 2p$$

由G为没有三角形的可平面图知

$$q \leq 2p - 4$$

矛盾。 □

习题 5. 设G为一个没有三角形的可平面图。应用数学归纳法证明G为4-可着色的。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p = k(k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设G为包含$k + 1$个顶点，没有三角形的可平面图，则G中存在一个顶点v，$\deg v \leq 3$。显然，$G - v$为包含k个顶点，没有三角形的可平面图，由归纳假设，$G - v$为4可着色的。假设已经用至多4种颜色对$G - v$进行了顶点着色，使得任意相邻的顶点着不同的颜色，那么此时在G中与v邻接的顶点用了至多3种颜色，用另外一种不同的颜色对顶点v进行着色，从而用至多4种颜色就可以对G的顶点进行着色使得相邻的顶点着不同的颜色，即G为4可着色的。

□