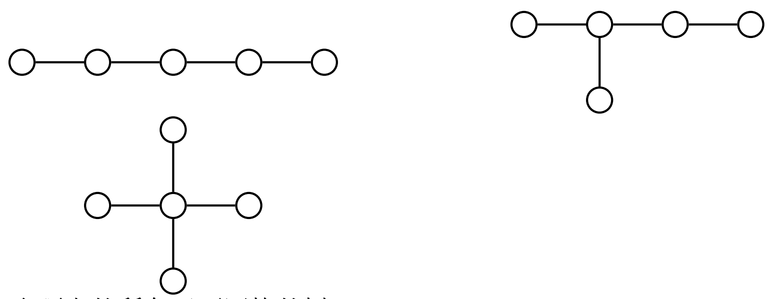
第七章作业题

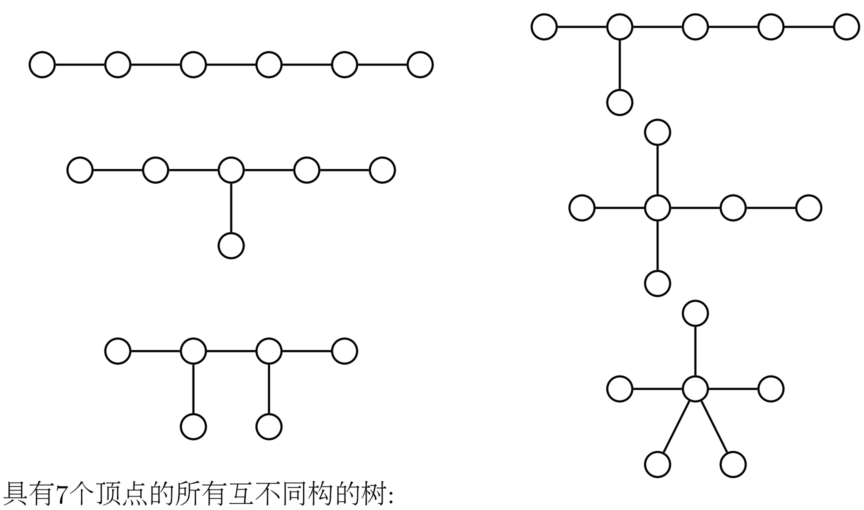
习题 1. 分别画出具有4个，5个，6个，7个顶点的所有树（同构的只算一个）。

解. 具有4个顶点的所有互不同构的树:

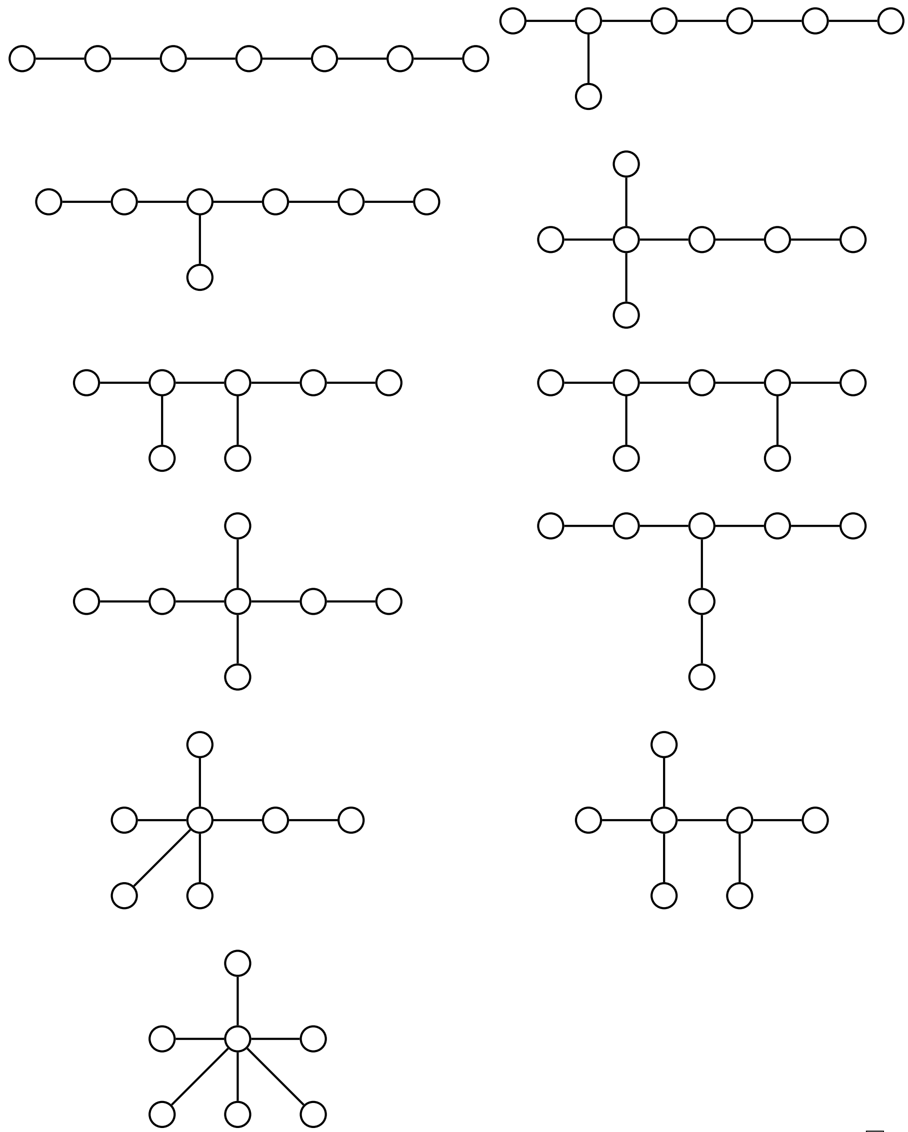
具有5个顶点的所有互不同构的树:



具有6个顶点的所有互不同构的树:



具有7个顶点的所有互不同构的树:



□

习题 2. 设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq$

$k+1$，$a_i \ge 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \ge 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1} = 1$。此时必存在$t$，$1 \le t \le k$，$a_t > 1$。否则,$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$，于是$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$，矛盾。不妨设$a_k > 1$。于是$a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k - 1$为正整数，并且$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + (a_k - 1) = 2(k-1)$。由归纳假设，存在一棵具有$k$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_{k-1}$，$a_k - 1$。在其度为$a_k - 1$的顶点上联结一条边和一个顶点，便得到了一个一棵具有$k+1$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}。 □

习题 3. 设G为一棵树且$\Delta(G) \ge k$，证明G中至少有k个度为1的顶点。

证明. 设G中有x个度为1的顶点，进一步，设G中有p个顶点，它们的度依次为d_1，d_2，$\ldots$，d_p，则

$$\sum_{i=1}^{p} d_i = 2(p-1) \ge k + x + 2(p-1-x)$$

解得$x \ge k$。 □

习题 4. 设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G) \ge k$，则G有一个同构于T的子图。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于k。

（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，在G中取任意一个顶点u，该顶点自身为G的一个与T同构的子图。

（2）假设当$k=n$时结论成立，往证当$k=n+1$时结论也成立。设T是一棵$n+1+1$个顶点的树，去掉一个叶子顶点v，得到一棵树T'，则T'是一棵有$n+1$个顶点的树。图G的最小度$\delta(G) \ge n+1 \ge n$，由归纳假设，G中存在一个同构于T'的子图G'。设在T中与其叶子顶点v邻接的顶点为u，在T'与G'的同构中，与u对应的顶点为u'。在G中，$\deg u' \ge n+1$，由于G'中有$n+1$个顶点，u'在G'中至多有n条与之关联的边，因此u'与G中除去G'中的顶点之外的其他某个顶点v'邻接，在G'中添加顶点v'和边$u'v'$，则得到一个与T同构的子图。 □

习题 5. 令G是一个有p个顶点，k个支的森林，证明G有$p-k$条边。

证明. 设G的k个支的顶点数依次为p_1，p_2，$\ldots$，p_k，边数依次为q_1，q_2，$\ldots$，q_k，则$q_1 + q_2 + \ldots + q_k = (p_1 - 1) + (p_2 - 1) + \ldots + (p_k - 1)$，即$q = p - k$。 □

习题 6. 设树T中有$2n$个度为1的顶点，$3n$个度为2的顶点，n个度为3的顶点，那么这棵树有多少个顶点，多少条边呢?

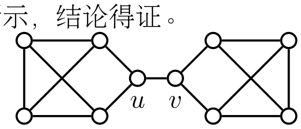
证明. 在树T中，边数＝顶点数－１，从而$(2n \times 1 + 3n \times 2 + n \times 3)/2 = 2n + 3n + n - 1$，解得$n=2$，顶点数=12，边数=11。 □

习题 7. 一棵非平凡树T有n_2个度为2的顶点，n_3个度为3的顶点，$\ldots$，n_k个度为k的顶点，则T有多少个度为1的顶点?

证明. 设非平凡树T有n_1个度为1的顶点，则由边数＝顶点数－１知，$(n_1 + 2n_2 + \ldots + kn_k)/2 = n_1 + n_2 + \ldots + n_k - 1$，从而$n_1 = n_3 + 2n_4 + \ldots + (k-2)n_k + 2$。 □

习题 8. 证明：有一条桥的三次图中至少有10个顶点。

证明. 设uv为三次图G的一座桥，则$G-uv$包含两个支，其中一个支包含顶点u，另一个顶点包含顶点v。 在包含顶点u的支中，至少含有一个顶点度为3，因此至少包含4个顶点。此时，如果该支中只包含4个顶点，则它们的度依次为$2,3,3,3$，这是不可能的（任意一个图中度为奇数的顶点的个数必为偶数）。因此，该支中至少包含5个顶点。同理，包含v的支至少包含5个顶点，如下图所示，结论得证。



□

习题 9. 有割点的连通图是否一定不是欧拉图？是否一定不是哈密顿图？有桥的连通图是否一定不是欧拉图和哈密顿图？

解. 有割点的连通图可能为欧拉图；有割点的连通图一定不是哈密顿图。有桥的连通图一定不是欧拉图；有桥的连通图一定不是哈密顿图。 □