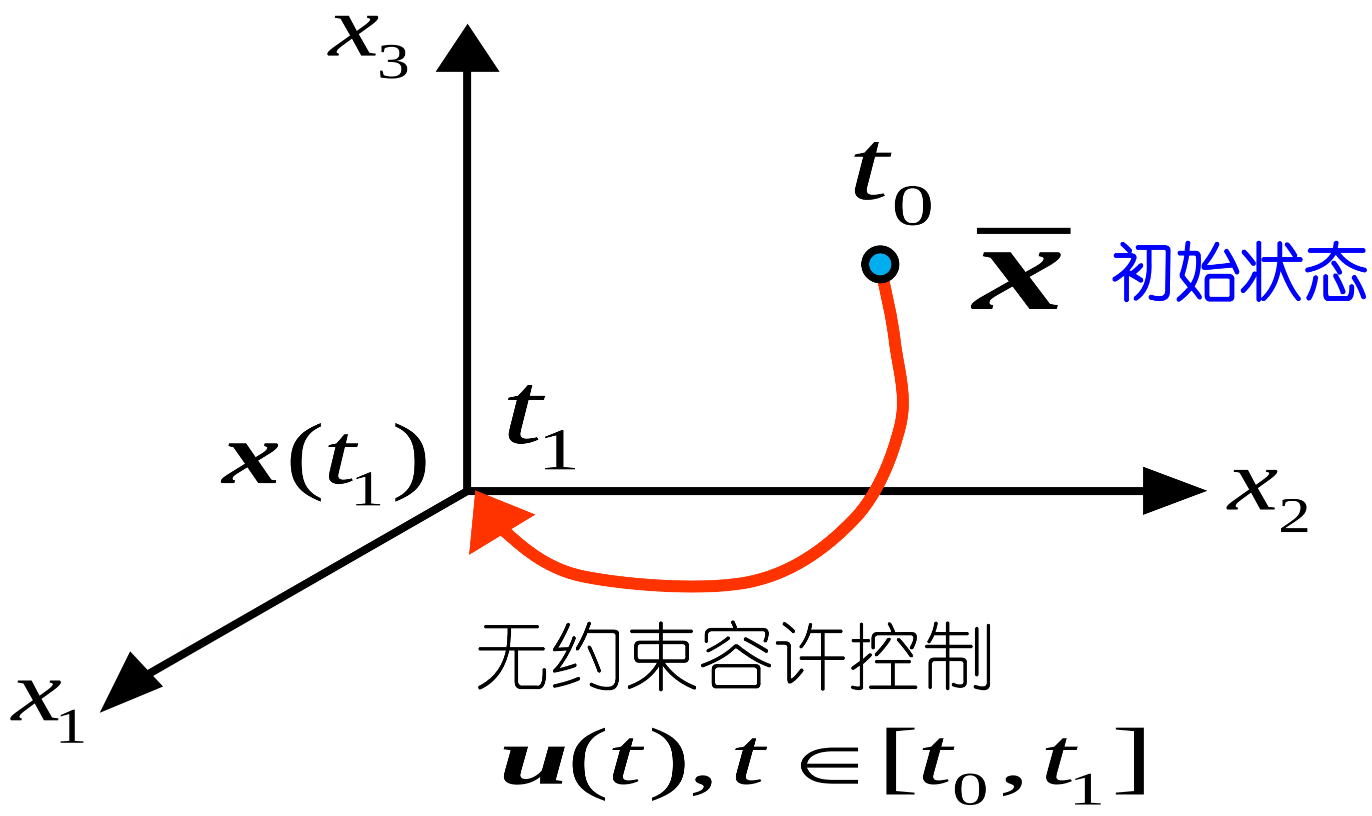
8.3 线性系统的能控性、能观性及对偶原理

8.3.1 线性系统的能控性

一. 状态能控性的定义

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}, \qquad t \geq t_0$$

1



$\bar{\boldsymbol{x}}$ —— t_0时刻的一个能控状态

2

任意非零初态

状态空间内 $\overline{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ 均为能控状态

t_0

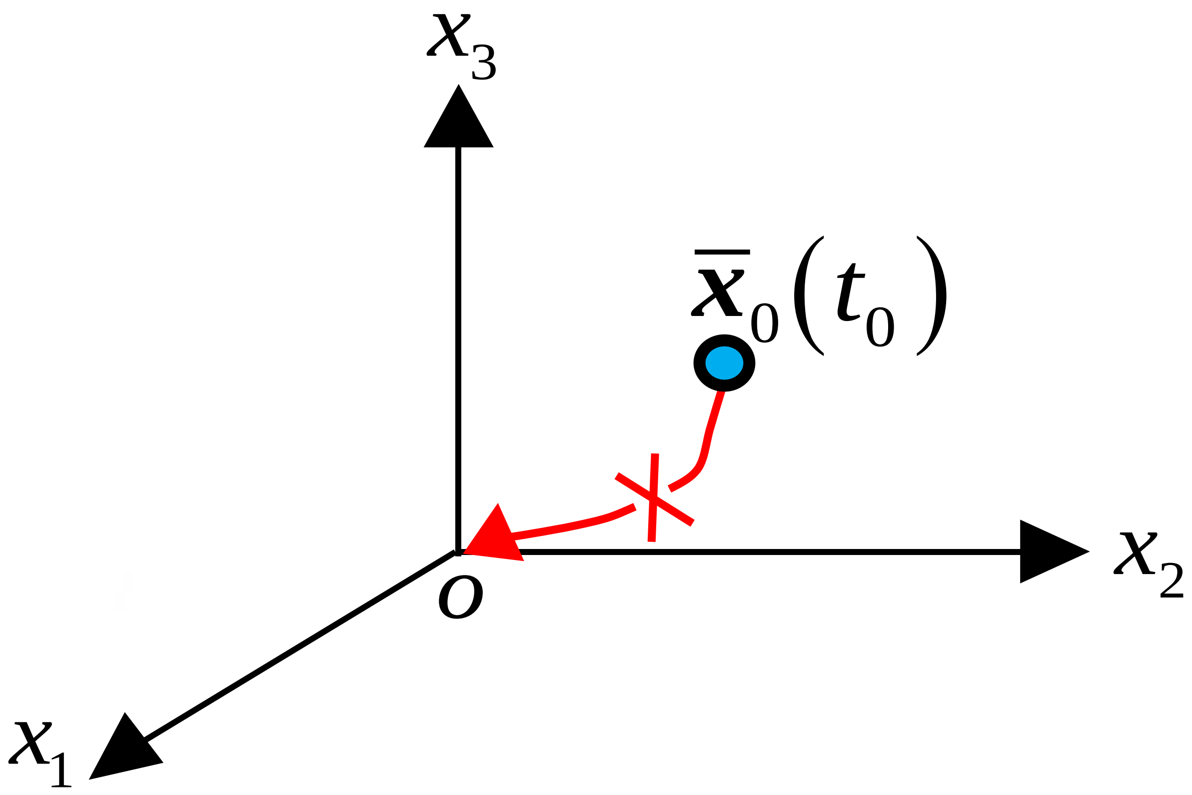
此系统在 t_0 时刻完全能控

$$\forall t_0 \in [T_1, T_2]$$

系统均是在t_0时刻能控的

系统在区间 $[T_1, T_2]$是完全能控的

3



此系统在t_0时刻不完全能控

二. 线性定常系统的状态能控性判据

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}, \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, t \geq t_0 \qquad (1)$$

$\boldsymbol{x}$ —— n 维状态向量

$\boldsymbol{u}$ —— r 维输入向量

$\boldsymbol{A}$ —— $n \times n$ 维系统矩阵

$\boldsymbol{B}$ —— $n \times r$ 维输入矩阵

1 [能控性矩阵判据]

线性定常系统（1）完全能控的**充分必要**条件是

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_c = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} = n$$

其中 $\boldsymbol{Q}_c = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$称为能控性矩阵。

rank

矩阵的秩

证明从略

注

(1) 单输入系统 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{Q}_c$ $n\times n$

(2) 多输入系统 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{Q}_c$ $n\times nr$

$$\operatorname{rank}\underset{n\times nr}{\boldsymbol{Q}_c} = \operatorname{rank}\left(\underbrace{\boldsymbol{Q}_c\boldsymbol{Q}_c^{\mathrm{T}}}_{n\times n}\right)$$

判断它的秩！

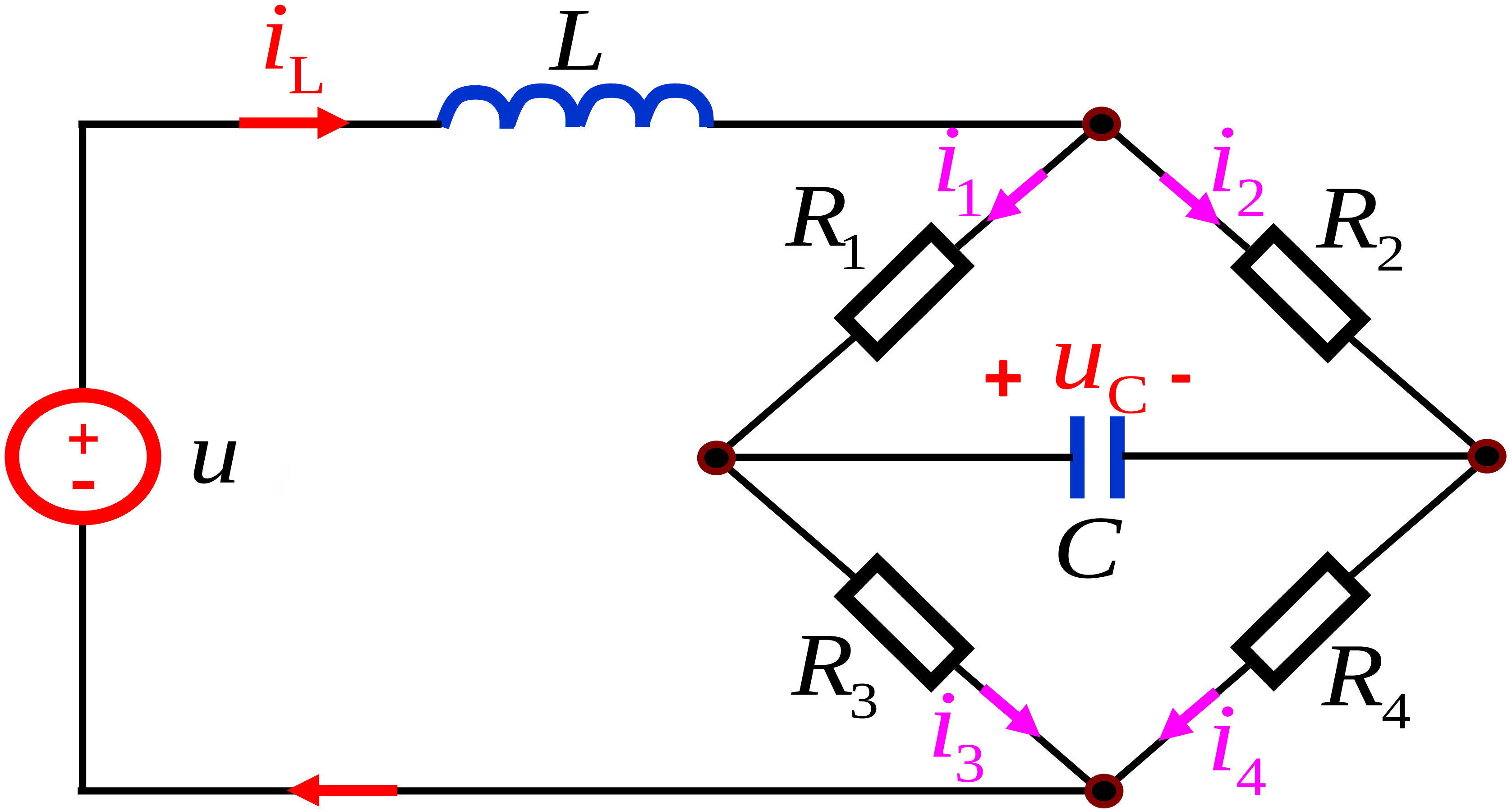
【例8-9】判断下列系统的能控性

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

【例8-10】 判断下列3阶2输入系统的能控性。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

【例8-11】 判断桥式电路系统的能控性。



$$x_1 = i_L \qquad\qquad x_2 = u_C$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{L}\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}\right)x_1 + \frac{1}{L}\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}-\frac{R_3}{R_3+R_4}\right)x_2 + \frac{1}{L}u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}-\frac{R_4}{R_3+R_4}\right)x_1 - \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1+R_2}-\frac{1}{R_3+R_4}\right)x_2$$

$$\boldsymbol{Q}_c = [\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{Ab}] = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} & -\dfrac{1}{L^2}\left(\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}+\dfrac{R_3R_4}{R_3+R_4}\right) \\ 0 & -\dfrac{1}{LC}\left(\dfrac{R_4}{R_3+R_4}-\dfrac{R_2}{R_1+R_2}\right) \end{bmatrix}$$

结论

- 当 $\dfrac{R_4}{R_3+R_4} \neq \dfrac{R_2}{R_1+R_2}$，即 $R_4R_1 \neq R_2R_3$ 时

  系统的状态完全能控；

- 当 $\dfrac{R_4}{R_3+R_4} = \dfrac{R_2}{R_1+R_2}$，即 $R_4R_1 = R_2R_3$ 时

  系统的状态不完全能控。

物理解释

当 $R_4R_1 = R_2R_3$时，电桥达到平衡，此时第二个状态变量 $x_2 = u_C$显然恒为零，它不受输入电压的影响。即这个状态不能控。

2 【Jordan标准型判据】

线性定常系统（1）完全能控的**充分必要**条件是：

1) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 两两互异，由系统（1）经线性变换导出的对角标准型

$$\dot{\boldsymbol{z}}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}\boldsymbol{z}+\tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}$$

的 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ 不包含元素全为零的行。

举例

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\ 0\\ 3.2\end{bmatrix}u$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\lambda_1 x_1+3u\\ \dot{x}_2=\lambda_2 x_2\\ \dot{x}_3=\lambda_3 x_3+3.2u\end{cases}$$

显然，状态 x_2 不能控，即整个系统状态不完全能控。

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & 4\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\lambda_1 x_1+u_2\\ \dot{x}_2=\lambda_2 x_2+3u_1+4u_2\\ \dot{x}_3=\lambda_3 x_3\end{cases}$$

显然，状态 x_3不能控，即整个系统状态不完全能控。

2） 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有重根，由系统（1）经线性变换导出的Jordan标准型

- 在 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ 中对应于相同特征值的部分，它与每个Jordan块最后一行相对应的一行的元素没有全为零的；

- 在 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ 中对应于相异特征值的部分，它的各行的元素没有全为零的。

【例8-12】 判断下列系统的能控性

（1）

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ \hline 3.6 \end{array}\right] u$$

答：能控

（2）

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

答：能控

（3） $$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

答：不完全能控

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + x_2 + u_1 + 7u_2 \\ \dot{x}_2 = \lambda_1 x_2 \\ \dot{x}_3 = \lambda_3 x_3 - 3u_1 + 2u_2 \end{cases}$$

状态 x_2 不能控

(4)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} -2 \\ 0.6 \\ 2.3 \\ \hline -2.8 \\ 0 \end{array}\right] u$$

答：不完全能控

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + x_2 - 2u \\ \dot{x}_2 = \lambda_1 x_2 + x_3 + 0.6u \\ \dot{x}_3 = \lambda_1 x_3 + 2.3u \\ \dot{x}_4 = \lambda_4 x_4 + x_5 - 2.8u \\ \dot{x}_5 = \lambda_4 x_5 \end{cases}$$

状态 x_5不能控。

8.3.2 线性系统的能观性

一. 状态能观性的定义

考虑线性连续系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}, & \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{2}$$

$t \in [t_0, t_f]$

$\boldsymbol{y}(t)$

$\boldsymbol{x}(t_0)$

$\boldsymbol{x}(t_0)$ 能观测

- 若系统的每一个状态都是能观测的，则称系统是状态完全能观测的，简称能观。
- 状态能观测　　状态能测量

数学概念　　物理概念

如何理解

二. 线性定常系统状态能观性的判别

1 【能观性矩阵判据】

线性定常系统（2）完全能观的**充分必要**条件是

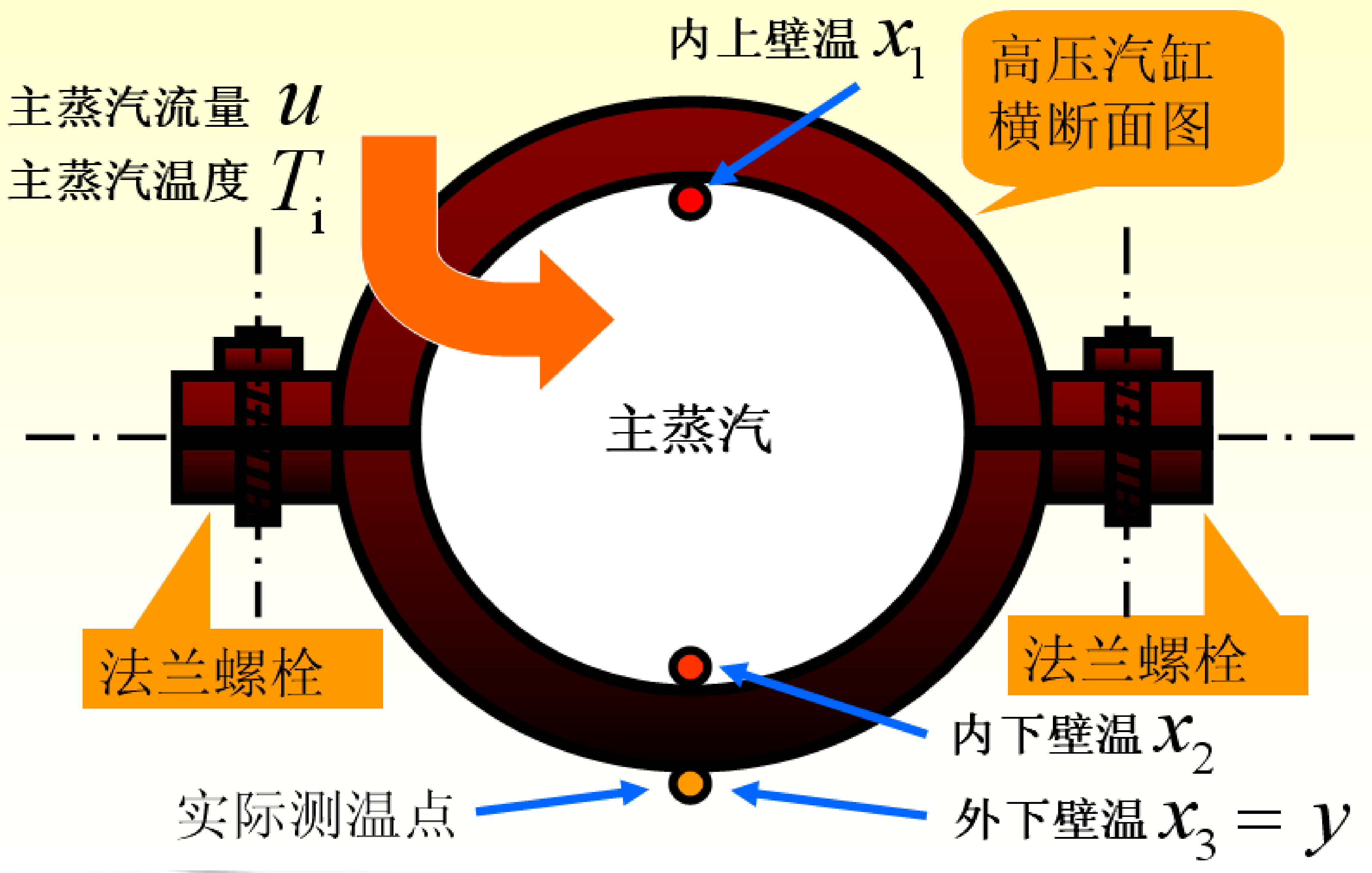
$$\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{o}} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{o}}$ —— 能观性矩阵

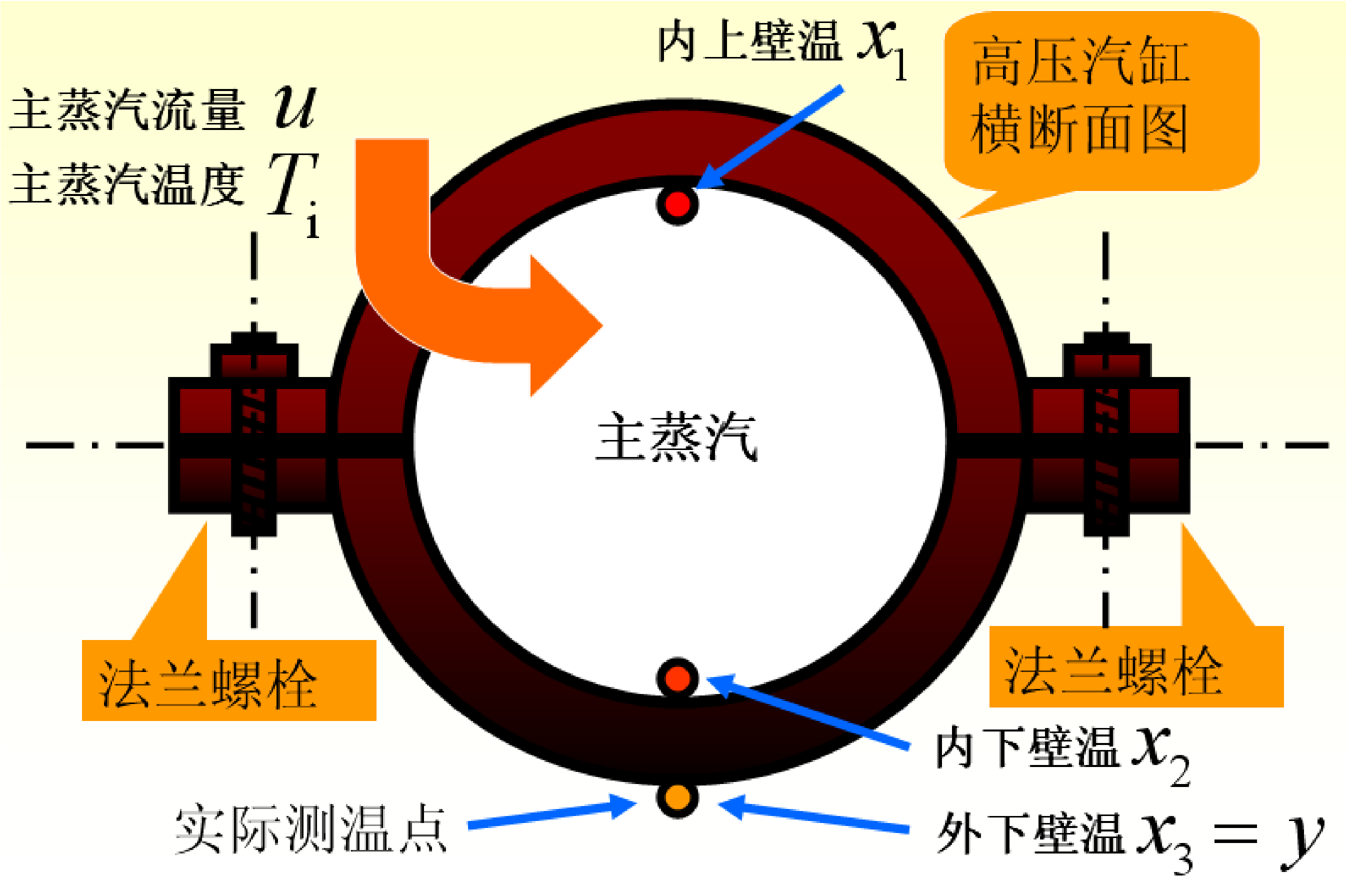
【例8-13】 判断下列系统的能观性。

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

【例8-14】 考虑汽轮机高压汽缸金属壁温调节系统。



金属壁温调节系统的数学模型可以近似为：



$$\frac{X_1(s)}{U(s)}=\frac{K_1T_i}{\tau_1 s+1}$$

$$\frac{X_2(s)}{U(s)}=\frac{K_2T_i}{\tau_2 s+1}$$

$$\frac{X_3(s)}{X_2(s)}=\frac{K_3}{\tau_3 s+1}$$

$$Y(s)=X_3(s)$$

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{K_1 T_i}{\tau_1 s + 1}$$

$$\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{K_2 T_i}{\tau_2 s + 1}$$

$$\frac{X_3(s)}{X_2(s)} = \frac{K_3}{\tau_3 s + 1}$$

$$Y(s) = X_3(s)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{\tau_1} x_1 + \dfrac{K_1 T_i}{\tau_1} u \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{\tau_2} x_2 + \dfrac{K_2 T_i}{\tau_2} u \\ \dot{x}_3 = -\dfrac{1}{\tau_3} x_3 + \dfrac{K_3}{\tau_3} x_2 \\ y = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{\tau_1}x_1 + \dfrac{K_1T_\mathrm{i}}{\tau_1}u \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{\tau_2}x_2 + \dfrac{K_2T_\mathrm{i}}{\tau_2}u \\ \dot{x}_3 = -\dfrac{1}{\tau_3}x_3 + \dfrac{K_3}{\tau_3}x_2 \\ y = x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\tau_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\tau_2} & 0 \\ 0 & \dfrac{K_3}{\tau_3} & -\dfrac{1}{\tau_3} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \dfrac{K_1T_\mathrm{i}}{\tau_1} \\ \dfrac{K_2T_\mathrm{i}}{\tau_2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{cA} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{K_3}{\tau_3} & -\dfrac{1}{\tau_3} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{cA}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{K_3}{\tau_2\tau_3} - \dfrac{K_3}{\tau_3^2} & \dfrac{1}{\tau_3^2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{cA} \\ \boldsymbol{cA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{K_3}{\tau_3} & -\dfrac{1}{\tau_3} \\ 0 & -\dfrac{K_3}{\tau_2\tau_3} - \dfrac{K_3}{\tau_3^2} & \dfrac{1}{\tau_3^2} \end{bmatrix}$$

秩为**2**，不满秩

结论：系统不完全能观。

系统不完全能观的物理解释

第一个状态变量，即内上壁温 x_1不能由输出信号 y，即实际测温点的测量值信息来反映。

2 【Jordan标准型判据】

1） 若系统（2）为对角标准型，其矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值两两互异，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \\
\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}
\end{cases}
$$

且 $\boldsymbol{C}$不包含元素全为零的列。 $\Longleftrightarrow$ 系统能观

举例

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\\ y=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\end{cases}$$

状态 x_1 不能观。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

状态x_3不能观。

2） 若系统（2）为**Jordan**标准型，则

- 在C中对应于相同特征值的部分，它与每个**Jordan**块最前一列相对应的一列的元素没有全为零的；

- 在C中对应于相异特征值的部分，它的各列的元素没有全为零的。

$\Updownarrow$

系统能观

【例8-15】 判断下列系统的能观性

（1）

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
y = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
\end{cases}
$$

答：能观

（2）

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}
\end{cases}
$$

答：不完全能观　　x_1不能观

（3）

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

答：能观

（4）

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}
\end{cases}
$$

答：不完全能观　　x_4不能观

8.3.3　能控性与能观性的关系
——对偶原理

一. 对偶系统的概念

$$\Sigma_1 \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{I}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{I}} \boldsymbol{u}_{\mathrm{I}} \\ \boldsymbol{y}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{I}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{I}} \end{cases} \qquad \Sigma_2 \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{II}} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{II}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{II}} \boldsymbol{u}_{\mathrm{II}} \\ \boldsymbol{y}_{\mathrm{II}} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{II}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{II}} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}} \qquad \boldsymbol{B}_{\mathrm{II}} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}} \qquad \boldsymbol{C}_{\mathrm{II}} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}$$

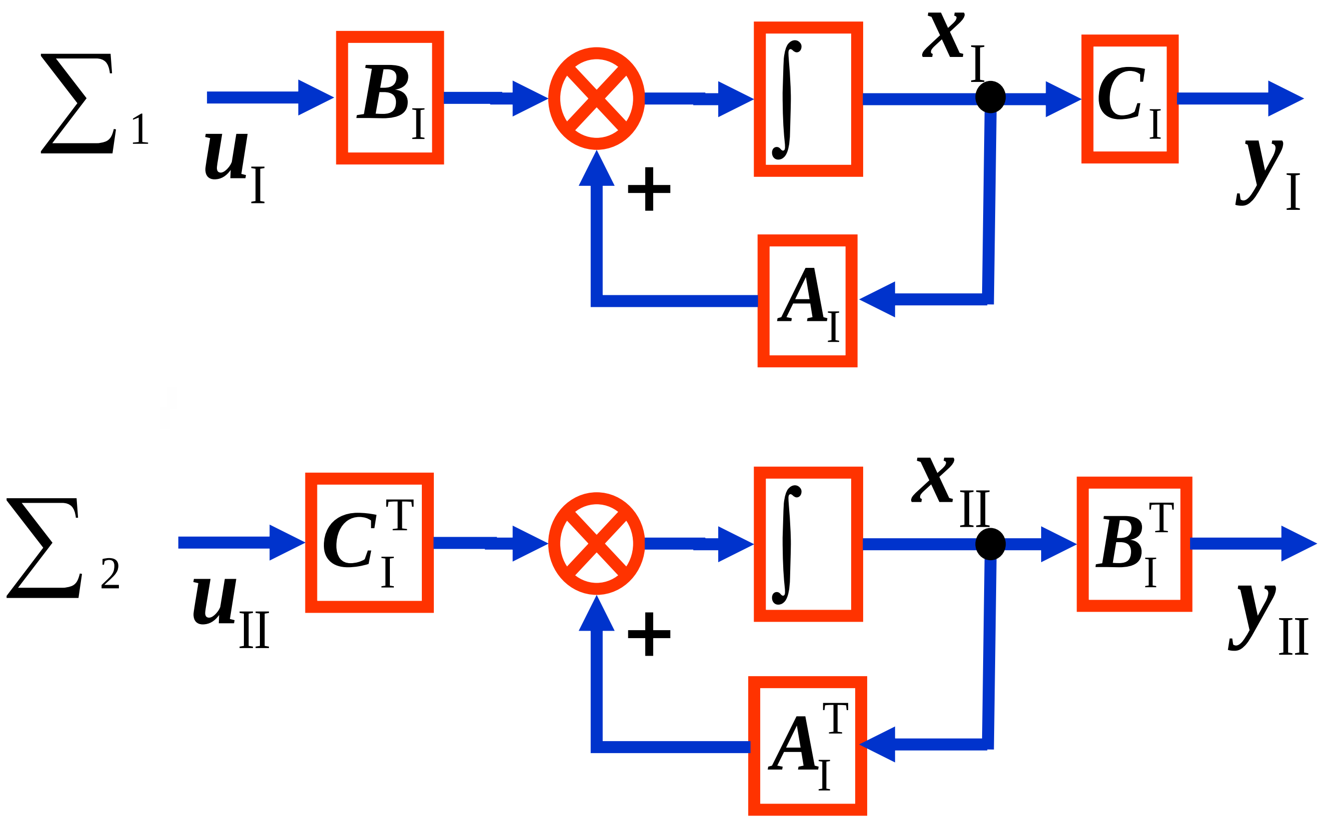
$\Downarrow$

Σ_1与Σ_2是互为对偶系统

注意

Σ_1 —— r 输入 m 输出 n 阶系统

Σ_2 —— m 输入 r 输出 n 阶系统



对偶系统结构原理图

二. 对偶系统的性质

性质1 对偶系统的传递函数矩阵是互为转置的。

$$\boldsymbol{W}_1(s)=\boldsymbol{C}_{\mathrm{I}}\left(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\right)^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{W}_2(s)=\boldsymbol{W}_1^{\mathrm{T}}(s)}$$

$$\boldsymbol{W}_2(s)=\boldsymbol{C}_{\mathrm{II}}\left(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\right)^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}$$

性质2 对偶系统的特征方程是相同的。

$$\det\left(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\right)=\det\left(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\right)$$

三. 对偶原理

对偶

$$\Sigma_1 = (A_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{I}}) \Leftrightarrow \Sigma_2 = (A_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{II}}, C_{\mathrm{II}})$$

$\Downarrow$

Σ_1 的能控性 $\Leftrightarrow$ Σ_2 的能观性

等价

Σ_1 的能观性 $\Leftrightarrow$ Σ_2 的能控性

等价

本次课内容总结

- 线性系统能控性的定义；
- 线性定常系统能控性的判别；
- 线性系统能观性的定义；
- 线性定常系统能观性的判别；
- 对偶系统的概念及性质；
- 线性系统的对偶原理。