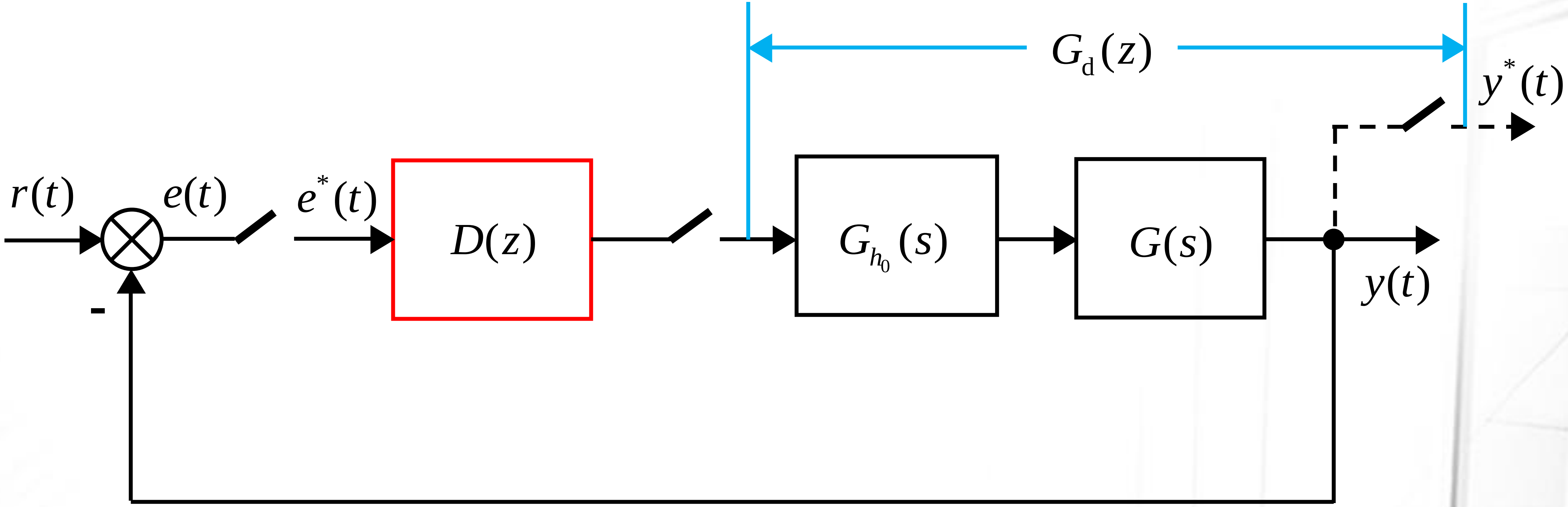
7.6 数字控制器的离散化设计

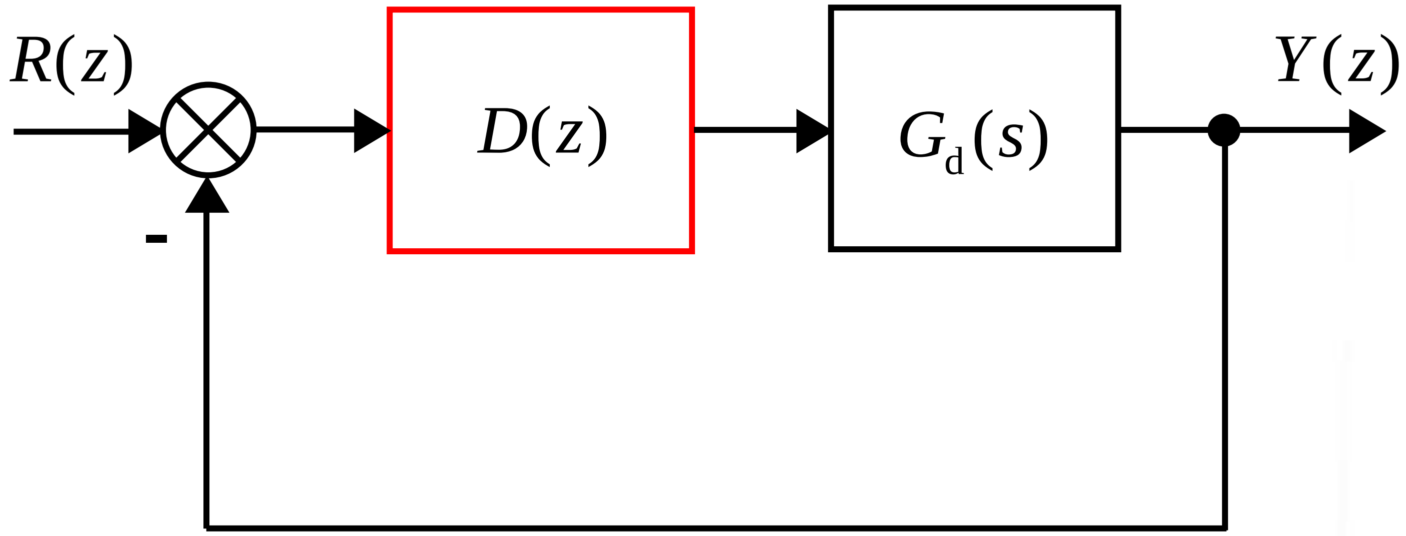
一. 引言



闭环Z传递函数为 $H(z)=\dfrac{D(z)G_d(z)}{1+D(z)G_d(z)}=D(z)H_e(z)G_d(z)$

$$=D(z)G_d(z)\left[1-H(z)\right]$$

误差Z传递函数



数字控制系统的离散化设计也称为**Z**域设计法。

已知：对象特性、对控制系统的性能指标，设计数字控制器。

1. 设计步骤

1 求取带零阶保持器的连续对象的Z传递函数 $G_{\mathrm{d}}(s)$ 。

2 按照性能指标的要求，构造闭环Z传递函数 $H(z)$ 和（或）。闭环误差Z传递函数 $H_e(z)$ 。

3 $$D(z)=\frac{H(z)}{G_{\mathrm{d}}(z)[1-H(z)]}=\frac{1-H_e(z)}{G_{\mathrm{d}}(z)H_e(z)}=\frac{H(z)}{G_{\mathrm{d}}(z)H_e(z)}$$

4 系统检验，若未达标，则还需再设计。

注意：采样周期 T 的选择仍然很重要。

2. 对 $H(z)$ 和 $H_e(z)$ 的约束

对象的离散化特性用零极点形式表示：

$$G_{\mathrm{d}}(z)=\frac{k_{\mathrm{d}}B_{\mathrm{d}}(z)}{A_{\mathrm{d}}(z)}=\frac{k_{\mathrm{d}}\prod_{i=1}^{m}\left(z-z_i\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(z-p_i\right)}$$

构造 $H(z)$ 可归结为确定其增益、极点和零点的过程。

1 $H(z)$ 应是稳定的。因此，若 $G_d(z)$ 有在单位圆上与圆外的极点，不应包含在 $H(z)$ 的极点中。$H_e(z)$ 应把 $G_d(z)$ 在单位圆上与圆外的极点作为其零点。

$$H(z)=\frac{D(z)G_d(z)}{1+D(z)G_d(z)}$$

$$H_e(z)=\frac{1}{1+D(z)G_d(z)}$$

$$\Downarrow$$

$$H(z)=D(z)G_d(z)H_e(z)$$

2 $D(z)$ 应是稳定的。因此，若 $G_{\mathrm{d}}(z)$ 有在单位圆上与圆外的零点，不应用 $D(z)$ 的极点补偿，而应作为 $H(z)$ 的零点。

$$H(z) = D(z)G_{\mathrm{d}}(z)H_e(z)$$

3 $H(z)$ 分子与分母的阶次差应与 $G_d(z)$ 的阶次差相同。这样设计的 $D(z)$ 是物理可实现的，且 $D(z)$ 的分子与分母是同阶的，即 $D(z)$ 在 kT 时刻的输出与该时刻及以前时刻的输入有关。

$$H(z)=\frac{D(z)G_d(z)}{1+D(z)G_d(z)}$$

二. 有限拍控制系统设计

有限拍控制系统（**Deadbeat Control System**）也称为时间最佳系统。

设计准则

系统在典型输入信号（阶跃、斜坡、加速度）作用下，经过有限拍（有限个采样周期），使其输出的稳态误差为零。

1. $H_e(z)$的一般模型

误差**Z**传递函数为

$$H_e(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+D(z)G_{\mathrm{d}}(z)}$$

$$E(z)=H_e(z)R(z)=e(0)+e(1)z^{-1}+e(2)z^{-2}+\cdots+e(N)z^{-N}+\cdots$$

$$e(k)=0, k\geq N$$

典型输入信号为

$r(t)$	$R(z)$
$1(t)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$
t	$\dfrac{Tz^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$
$\dfrac{1}{2}t^2$	$\dfrac{T^2z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}{2\left(1-z^{-1}\right)^3}$

$R(z)$ 的一般形式

$$\frac{A(z)}{\left(1-z^{-1}\right)^m}$$

不含 $\left(1-z^{-1}\right)$ 因式的 z^{-1} 的有限多项式

$$E(z) = H_e(z)R(z) = \boxed{H_e(z)}\frac{A(z)}{\left(1-z^{-1}\right)^m}$$

$H_e(z)$的一般模型： $H_e(z) = \left(1-z^{-1}\right)^p F(z)$

$$p \ge m$$

$F(z)$ — 不含$\left(1-z^{-1}\right)$因式的 z^{-1} 的有限次多项式

系统设计的目的

如何确定 $F(z)$ 与 p

2. 系统设计

$$H(z)=1-H_e(z)=D(z)G_{\mathrm{d}}(z)H_e(z)$$

1 在有限拍控制设计中，$H_e(z)$ 的一般模型只包含 $z=0$ 的极点，其极点不能补偿 $G_{\mathrm{d}}(z)$ 单位圆上或圆外的零点。为使 $D(z)$ 稳定，$G_{\mathrm{d}}(z)$ 单位圆上或圆外的零点也不能用 $D(z)$ 的极点来补偿。因此，$G_{\mathrm{d}}(z)$ 单位圆上或圆外的零点只能保留在 $H(z)$ 的零点中。

$$H(z)=1-H_e(z)=D(z)G_d(z)H_e(z)$$

2 为了使 $H(z)$ 稳定，$H_e(z)$ 应该把 $G_d(z)$ 单位圆上或圆外的极点作为其零点。因此，若 $G_d(z)$ 的分母含有 $\left(1-z^{-1}\right)^n$ 的因式，则取 p 为 m 与 n 的较大者。

$$E(z)=H_e(z)R(z)=H_e(z)\frac{A(z)}{\left(1-z^{-1}\right)^m}$$

$$H_e(z)=\left(1-z^{-1}\right)^p F(z)$$

$$H(z)=1-H_e(z)=D(z)G_{\mathrm{d}}(z)H_e(z)$$

3　$H(z)$ 也只包含 $z=0$ 的极点，为 z^{-1} 的有限次多项式。

【例7-28】对象 $G(s)=\dfrac{10}{s(s+1)}$ ，采样周期 $T=1$ s。

（1）在 $r(t)=1(t)$ 、t 、$\dfrac{1}{2}t^2$ 输入下，分别设计 $D(z)$ 。

（2）分析（1）设计的三个系统，对其他典型输入的误差。

【解】 $G(s)=\dfrac{10}{s(s+1)}$ $\Rightarrow$ $G_d(z)=\dfrac{3.68z^{-1}\left(1+0.718z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0.368z^{-1}\right)}$

分子分母阶次差1次

（1）在 $r(t)=1(t)$ 输入下

$$E(z)=H_e(z)R(z)=H_e(z)\frac{1}{1-z^{-1}}$$

选择 $H(z)=z^{-1}$，分子分母阶次差与 $G_\mathrm{d}(z)$ 的相同，均差**1**次。

$$H_e(z)=1-z^{-1}$$

则 $E(z)=1$　　调整时间为 T

$$D(z)=\frac{H(z)}{G_\mathrm{d}(z)H_e(z)}=\frac{z^{-1}}{G_\mathrm{d}(z)\left(1-z^{-1}\right)}=\frac{1-0.368z^{-1}}{3.68\left(1+0.718z^{-1}\right)}$$

在 $r(t)=t$ 输入下

$$E(z)=H_e(z)R(z)=H_e(z)\frac{Tz^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}=H_e(z)\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

选择$H(z)=K_H z^{-1}\left(1+bz^{-1}\right)$，分子分母阶次差与$G_d(z)$的相同，均差**1**次。

选择$H_e(z)=\left(1-z^{-1}\right)^p F(z)$，$G_d(z)$分母含$\left(1-z^{-1}\right)$因式，即 $n=1$

$R(z)$ 分母含 $\left(1-z^{-1}\right)^2$因式，即 $m=2$

故选$p=m=2$，由于$G_d(z)$无不稳定极点，故$F(z)=1$

故 $H_e(z)=\left(1-z^{-1}\right)^2$，$H(z)+H_e(z)=1$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned}K_H&=2\\ b&=-0.5\end{aligned}}$ $\Rightarrow$ $H(z)=2z^{-1}\left(1-0.5z^{-1}\right)$

则 $E(z)=z^{-1}$，调整时间为 $2T$

$$D(z)=\frac{H(z)}{G_{\mathrm{d}}(z)H_e(z)}=\frac{0.543\left(1-0.5z^{-1}\right)\left(1-0.368z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+0.718z^{-1}\right)}$$

在 $r(t)=\frac{1}{2}t^2$ 输入下

$$E(z)=H_e(z)R(z)=H_e(z)\frac{T^2z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}{2\left(1-z^{-1}\right)^3}=H_e(z)\frac{z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}{2\left(1-z^{-1}\right)^3}$$

选择 $H(z)=K_H z^{-1}\left(1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}\right)$，分子分母阶次差与 $G_{\mathrm{d}}(z)$ 的相同，均差**1**次。

选择 $H_e(z)=\left(1-z^{-1}\right)^p F(z)$， $G_{\mathrm{d}}(z)$ 分母含 $\left(1-z^{-1}\right)$ 因式，即 $n=1$

$R(z)$ 分母含 $\left(1-z^{-1}\right)^3$ 因式，即 $m=3$

故选 $p=m=3$，由于 $G_{\mathrm{d}}(z)$ 无不稳定极点，故 $F(z)=1$

故 $H_e(z)=\left(1-z^{-1}\right)^3$，

$$H(z)+H_e(z)=1 \Rightarrow \begin{array}{l} K_H=3 \\ b_1=-1 \\ b_2=\dfrac{1}{3} \end{array}$$

$$H(z)=3z^{-1}\left(1-z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}\right)$$

$$E(z)=H_e(z)\frac{z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}{2\left(1-z^{-1}\right)^3}=\left(1-z^{-1}\right)^3\frac{z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}{2\left(1-z^{-1}\right)^3}=0.5z^{-1}+0.5z^{-2}$$

调整时间为 $3T$

$$D(z)=\frac{H(z)}{G_{\mathrm{d}}(z)H_e(z)}=\frac{\left(3-3z^{-1}+z^{-2}\right)\left(1-0.368z^{-1}\right)}{3.68\left(1-z^{-1}\right)^2\left(1+0.718z^{-1}\right)}$$

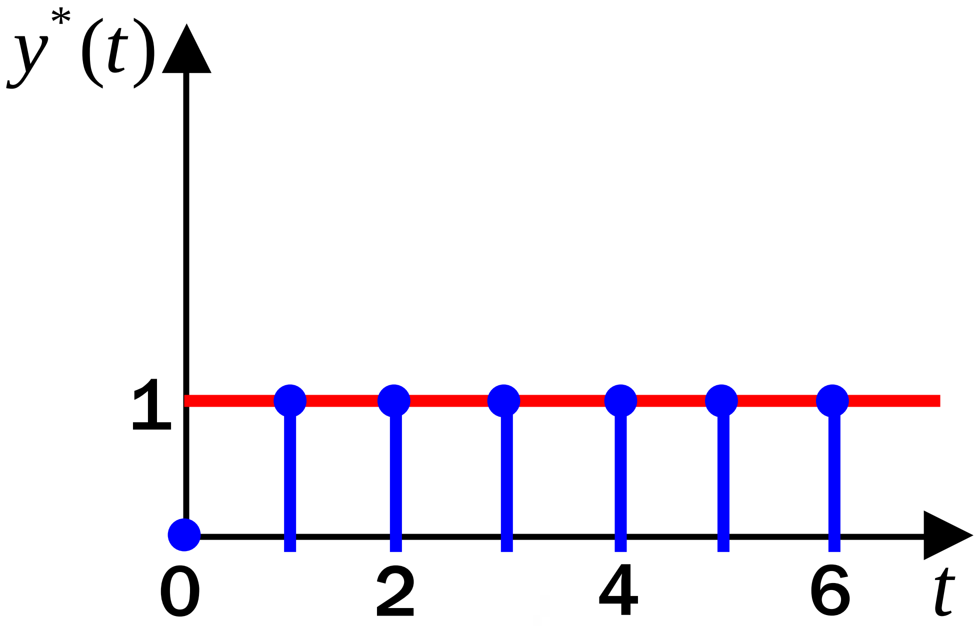
（2）分析（1）设计的三个系统，对其他典型输入的误差

按照 $r(t)=1(t)$ 设计的系统

如果输入单位斜坡信号，则

$$E(z)=H_e(z)R(z)=\left(1-z^{-1}\right)\frac{Tz^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

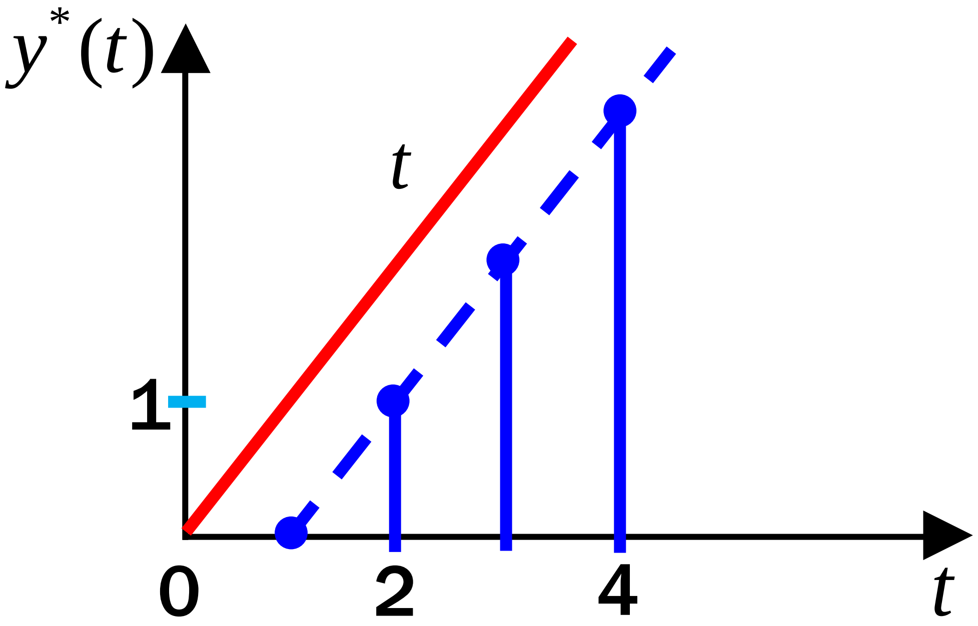
$$=z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots$$



跟踪单位阶跃信号

$E(z)=1$　　调整时间为 T

稳态误差为零



跟踪单位斜坡信号

$$E(z)=z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots$$

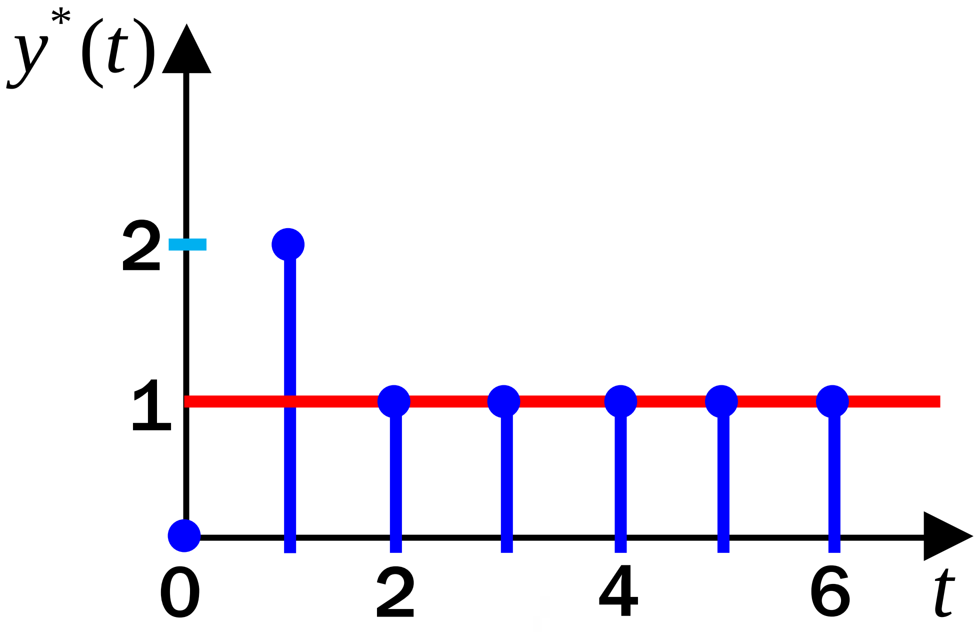
出现常值误差

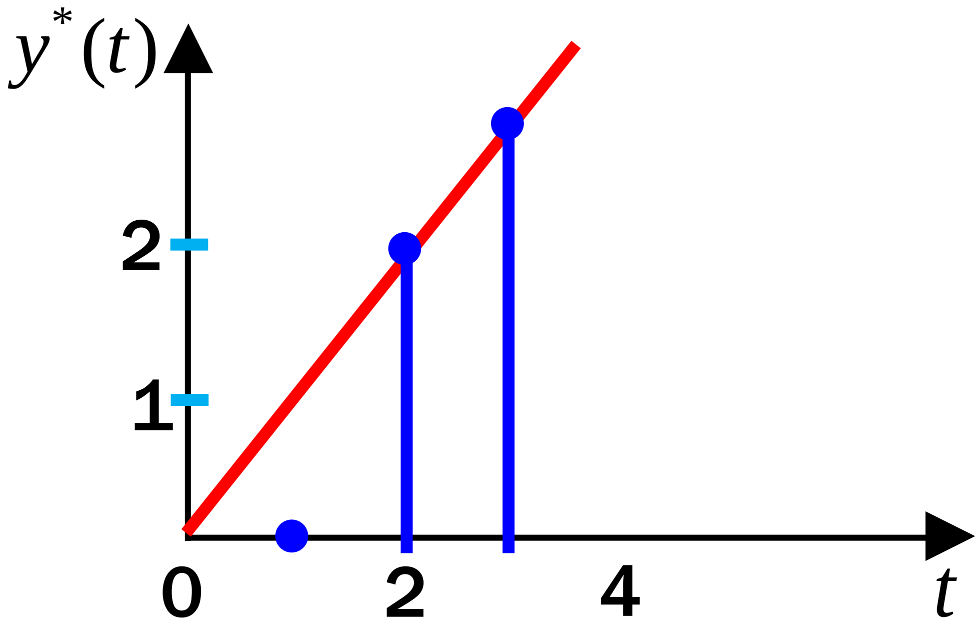
按照 $r(t)=t$ 设计的系统

如果输入单位阶跃信号，则

$$E(z)=H_e(z)R(z)=\left(1-z^{-1}\right)^2\frac{1}{1-z^{-1}}=1-z^{-1}$$

跟踪时间为 $2T$





跟踪单位阶跃信号

$E(z)=1-z^{-1}$ 调整时间为$2T$

稳态误差为零

跟踪单位斜坡信号

$E(z)=z^{-1}$, 调整时间为 $2T$

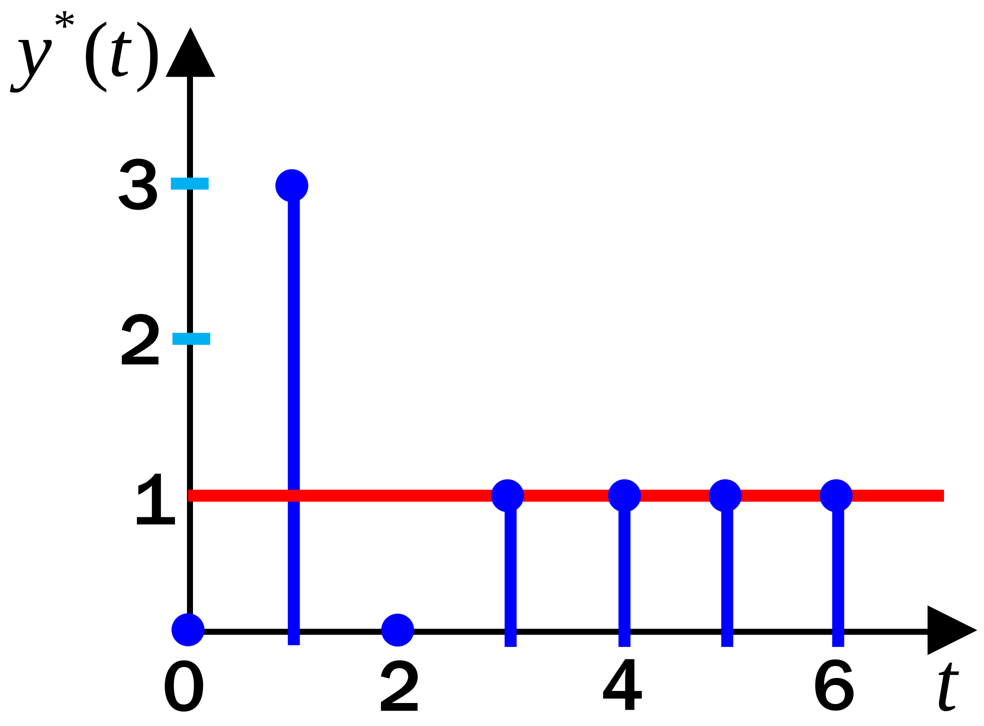
稳态误差为零

按照 $r(t)=\frac{1}{2}t^2$ 设计的系统

如果输入单位阶跃信号，则

$$E(z)=H_e(z)R(z)=\left(1-z^{-1}\right)^3\frac{1}{1-z^{-1}}=1-2z^{-1}+z^{-2}$$

跟踪时间为 $3T$



跟踪单位阶跃信号

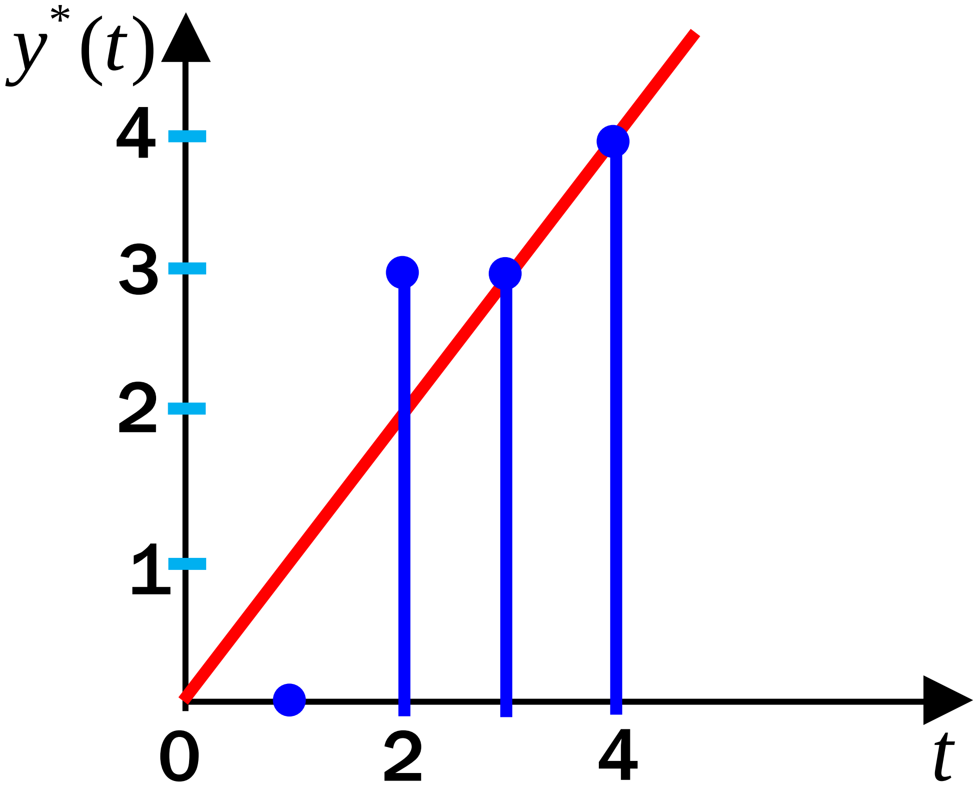
$E(z)=1-2z^{-1}+z^{-2}$ 调整时间为 $3T$

稳态误差为零

如果输入单位斜坡信号，则

$$E(z)=H_e(z)R(z)=\left(1-z^{-1}\right)^3\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}=z^{-1}-z^{-2}$$

跟踪时间为 $3T$



跟踪单位斜坡信号

$E(z)=z^{-1}-z^{-2}$，调整时间为 $3T$

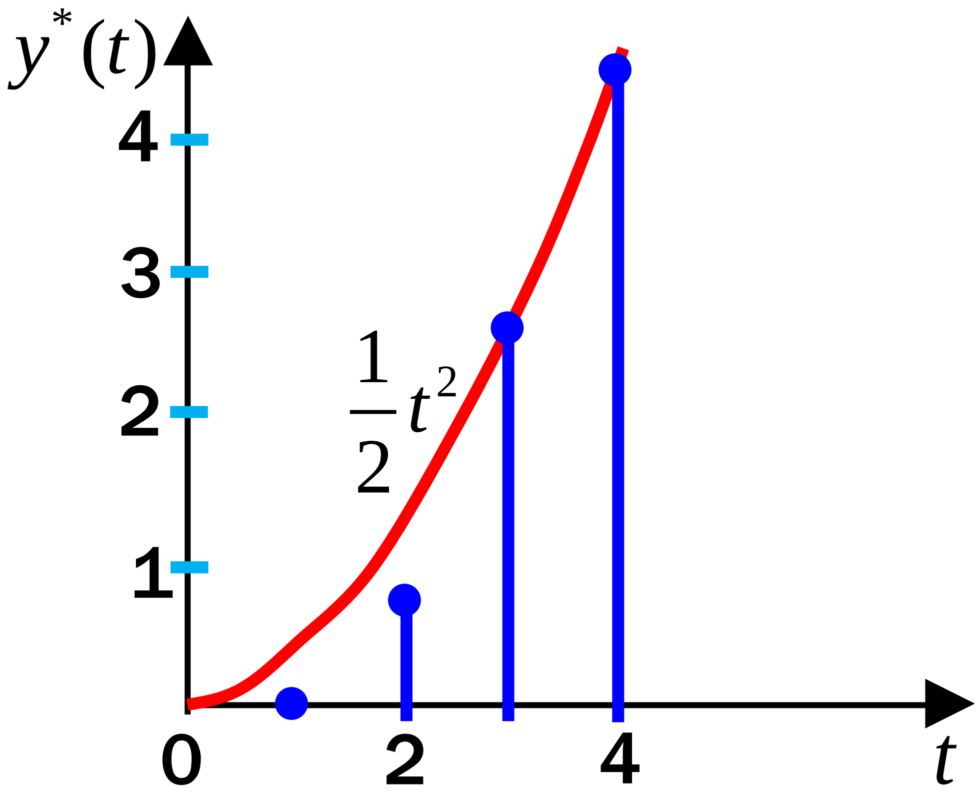
稳态误差为零

如果输入单位加速度信号，则

$$E(z)=H_e(z)R(z)=0.5z^{-1}+0.5z^{-2}$$

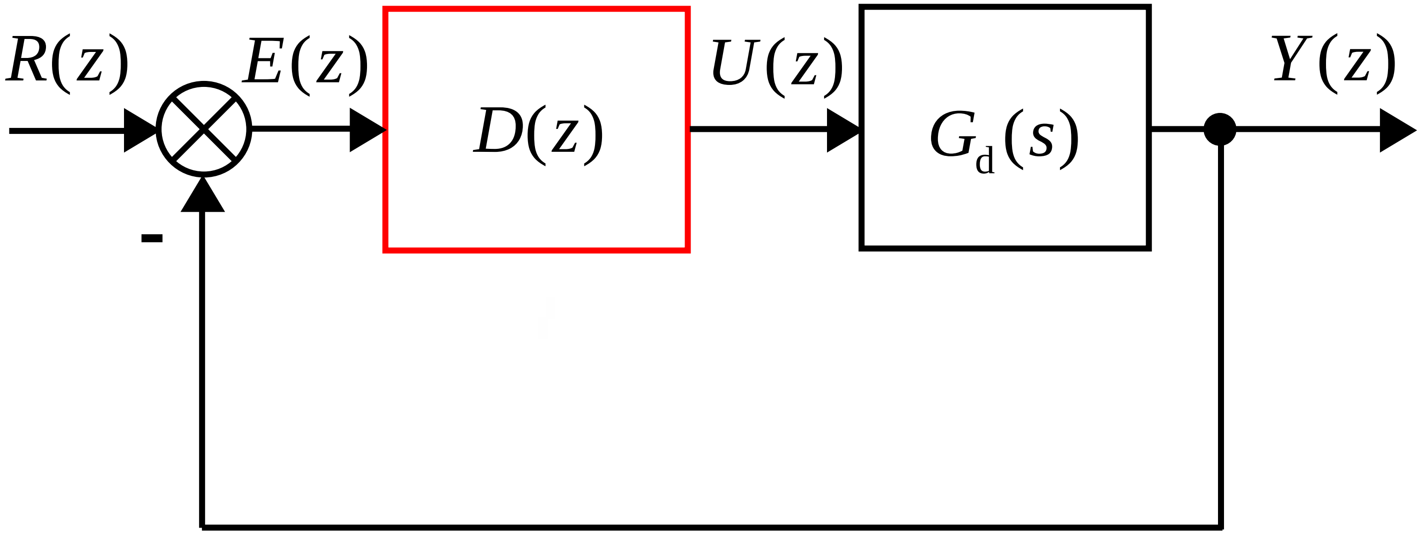
跟踪时间为 $3T$

稳态误差为零



【例7-29】对上例阶跃输入的设计，求保持器的输出及系统的输出。

【解】



控制器的输出为

$$U(z)=D(z)E(z)$$

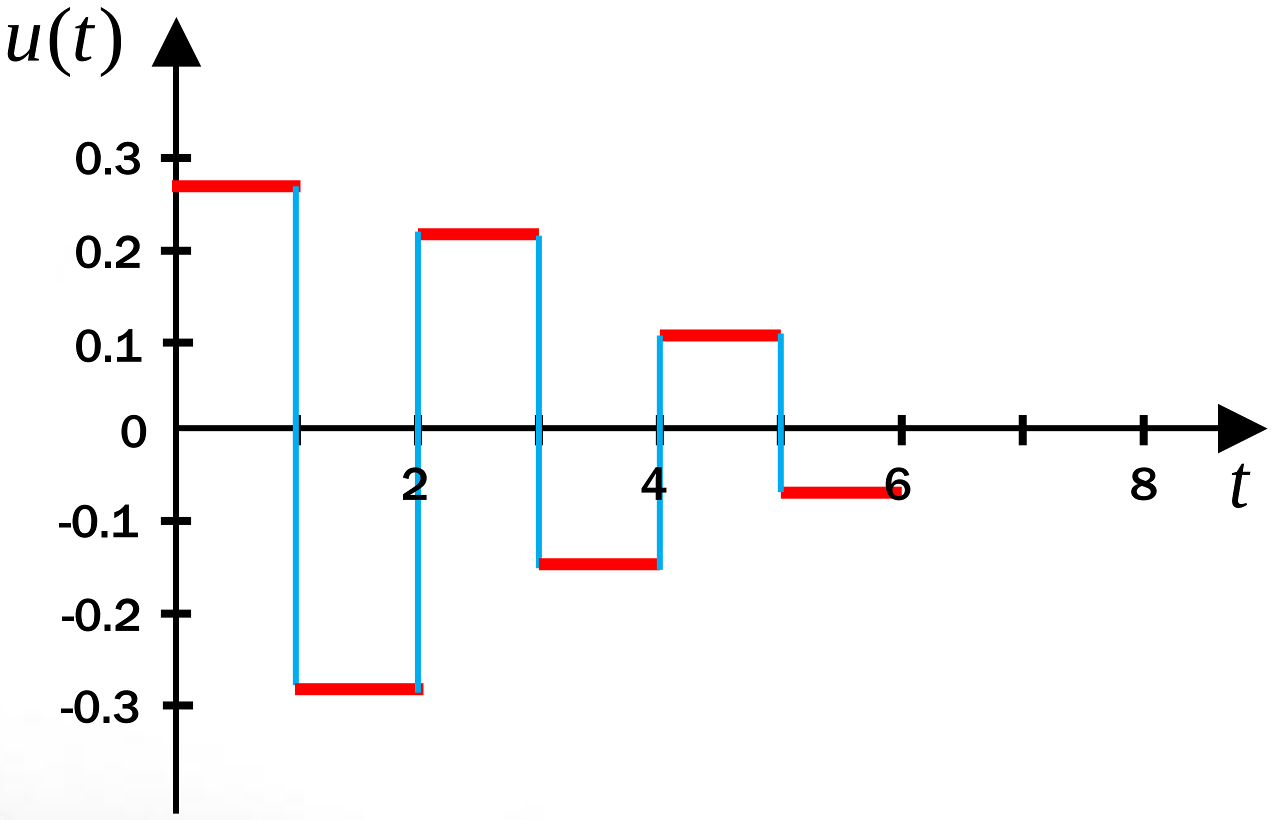
$$=\frac{1-0.368z^{-1}}{3.68\left(1+0.718z^{-1}\right)}\cdot 1$$

$$=\frac{1-0.368z^{-1}}{3.68\left(1+0.718z^{-1}\right)}$$

$$=0.272-0.295z^{-1}+0.212z^{-2}-0.152z^{-3}+0.109z^{-4}-0.078z^{-5}+\cdots$$

$$U(z)=0.272-0.295z^{-1}+0.212z^{-2}-0.152z^{-3}+0.109z^{-4}-0.078z^{-5}+\cdots$$

上式的各项系数即为控制器输出采样点的值 $u(k)$，使用平推法即得保持器的输出信号 $u(t)$。



求输出采样点之间的Z变换 $Y(z,\Delta)$

$$Y(z,\Delta)=G_{\mathrm{d}}(z,\Delta)U(z)$$

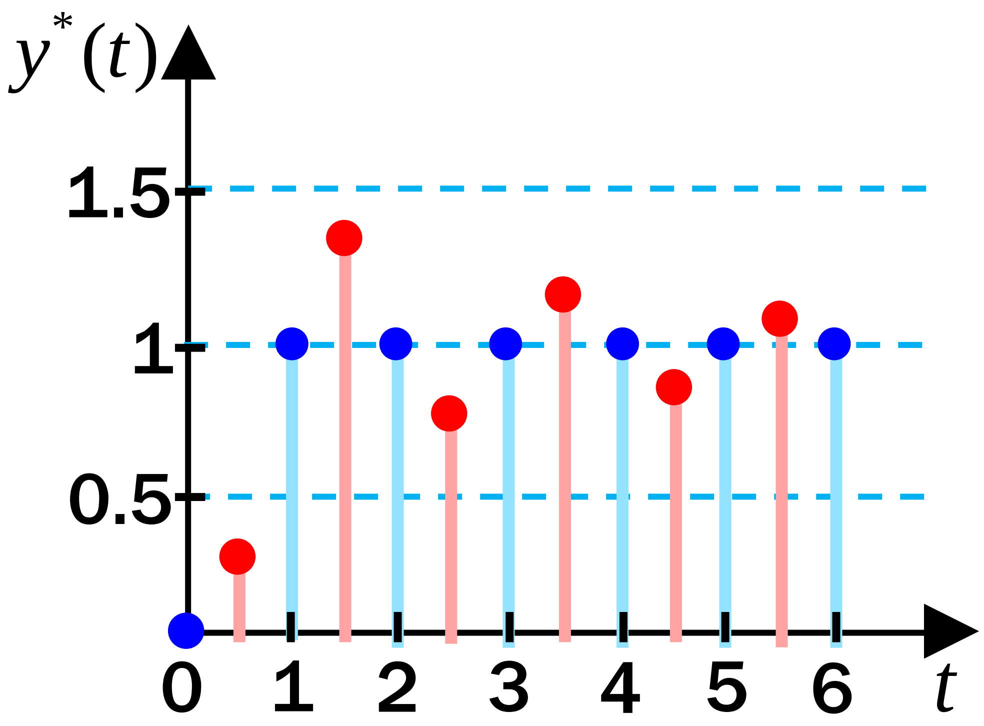
$$=\boxed{10\left[(\Delta-1)+\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}+\frac{\left(1-z^{-1}\right)e^{-\Delta}}{1-0.368z^{-1}}\right]}\cdot\frac{1-0.368z^{-1}}{3.68\left(1+0.718z^{-1}\right)}$$

见【例7-16】

以 $\Delta=0.5$ 为例，用长除法展开可得

$$Y(z,0.5)=0.289+1.361z^{-1}+0.740z^{-2}+1.186z^{-3}+0.866z^{-4}+1.096z^{-5}+0.931z^{-6}+\cdots$$

对应 $t=0.5$ $t=1.5$ $t=2.5$ $t=3.5$ $t=4.5$ $t=5.5$ $t=6.5$



有限拍控制只是在采样点上无差，但在采样点之间时刻是有振荡的。

【例7-30】已知被控对象 $G(s)=\dfrac{10}{s(0.1s+1)(0.05s+1)}$

设计单位阶跃输入下的有限拍控制器 $D(z)$，采样周期 $T=0.2$ s。

【解】

$$G_{\mathrm{d}}(z)=\frac{0.76z^{-1}\left(1+0.045z^{-1}\right)\left(1+1.14z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0.135z^{-1}\right)\left(1-0.0183z^{-1}\right)}$$

构造 $H(z)=K_H z^{-1}\left(1+1.14z^{-1}\right)$

包含 $G_{\mathrm{d}}(z)$ 单位圆外的零点，且分子分母阶次差与 $G_{\mathrm{d}}(z)$ 相同，均差**1**次。

构造 $H_e(z)=\left(1-z^{-1}\right)\left(1+az^{-1}\right)$

因为 $n=1$ 　所以取 $p=1$
$m=1$

$G_{\mathrm{d}}(z)$无不稳定极点，

为了使$H_e(z)$与$H(z)$为 z^{-1} 的同次多项式，故配置待定因式

$$F(z)=\left(1+az^{-1}\right)$$

令 $H(z)+H_e(z)=1$ $\Rightarrow$ $K_H z^{-1}\left(1+1.14z^{-1}\right)+\left(1-z^{-1}\right)\left(1+az^{-1}\right)=1$

$$\Downarrow$$

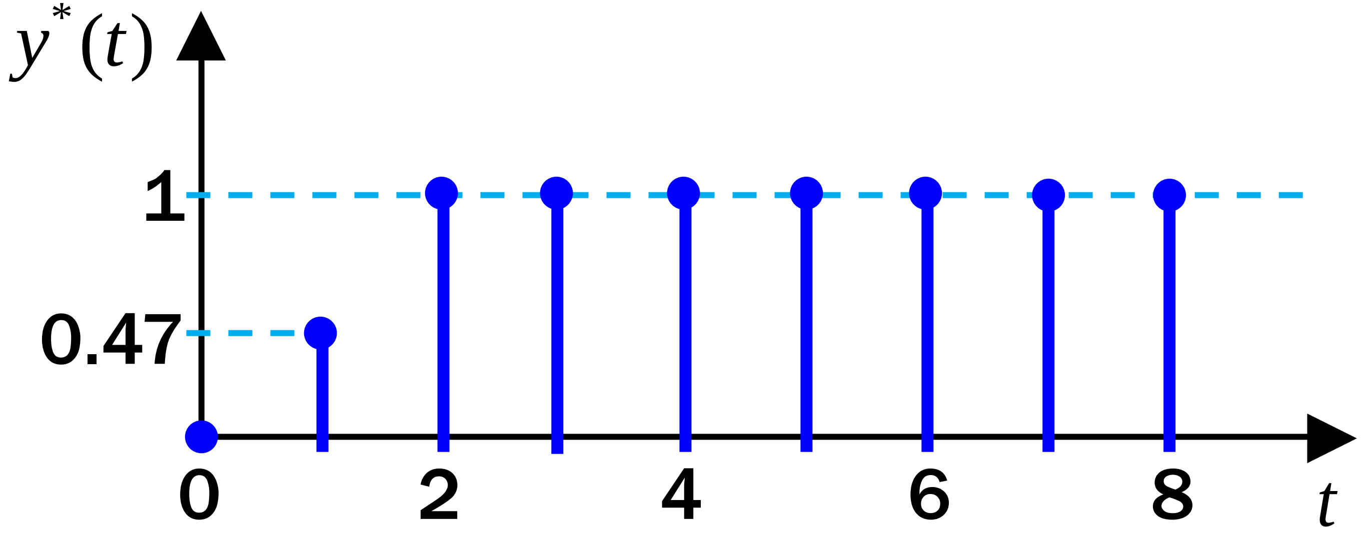
$$\begin{cases} K_H=0.47 \\ a=0.53 \end{cases}$$

$$D(z)=\frac{H(z)}{G_d(z)H_e(z)}=\frac{0.62\left(1-0.135z^{-1}\right)\left(1-0.0183z^{-1}\right)}{\left(1+0.045z^{-1}\right)\left(1+0.53z^{-1}\right)}$$

检验 $E(z)=H_e(z)R(z)$

$$=\left(1-z^{-1}\right)\left(1+0.53z^{-1}\right)\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$=1+0.53z^{-1}$$



3. 几点结论

1 同一对象，对于三种典型输入，设计的 $D(z)$ 不同，分别经过一、二、三拍后，系统在采样点的误差 $e(k)=0$。

2 某一典型输入下设计的 $D(z)$，仅对该输入达到时间最佳控制（最少拍控制）。

3 误差Z传递函数 $H_e(z)$ 的最简单情况是 $p=m$，$F(z)=1$，即

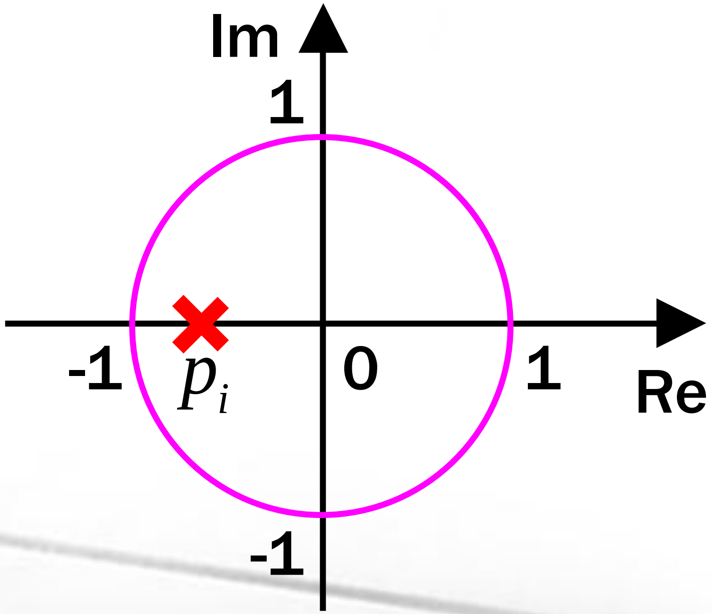
$$H_e(z)=\left(1-z^{-1}\right)^m$$

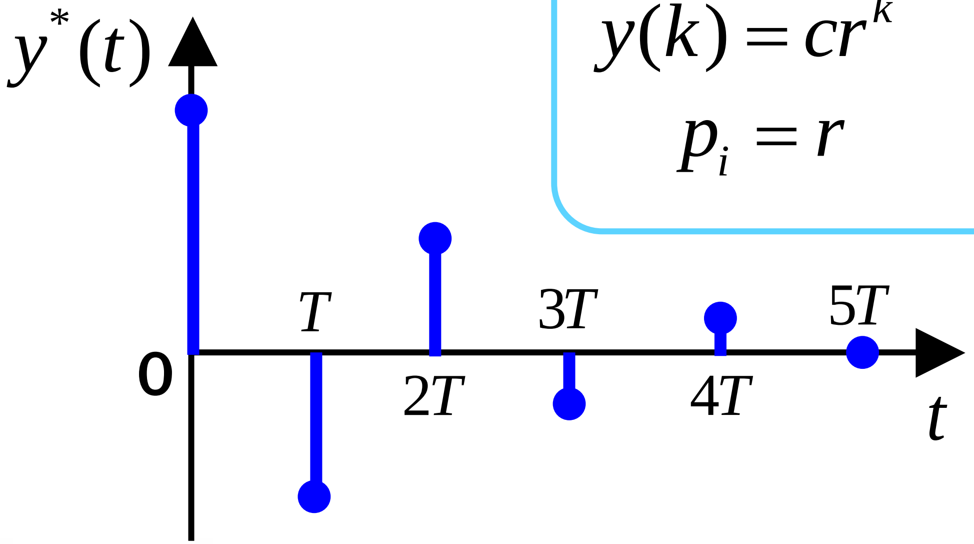
4 仅由有限拍稳态误差为零准则设计的系统，输出 $y(t)$ 是有振荡的，这种振荡在采样点上是观测不到的，称为**隐藏振荡**（**Hidden Oscillation**），也称为**样点间脉动**。

三. 有限拍无振荡控制系统设计

$$H(z)=1-H_e(z)=D(z)G_d(z)H_e(z)$$

如果控制器 $D(z)$ 存在单位圆内负实轴上的极点，即区间（**-1,0**）上的极点，则闭环系统 $H(z)$ 也必含此极点，从而导致控制器的输出产生振荡，系统的输出也就产生振荡。





$$y(k)=cr^k \qquad \text{常数 } c>0$$

$$p_i=r \qquad (-1<r<0)$$

- $y(t)$ 采样点间的衰减振荡是由控制器的输出振荡产生的。

- 有限拍无振荡系统的设计准则

↓

系统在典型输入信号作用下，经过有限拍，控制器的输出无振荡，系统输出稳态误差为零。

1. 系统设计

有限拍无振荡系统对 $H(z)$ 的设计约束

充分条件

$H(z)$ 应保留 $G_d(z)$ 的所有零点。

$$H(z)=1-H_e(z)=D(z)G_d(z)H_e(z)$$

$G_d(z)$ 的（**-1,0**）的零点不能用 $D(z)$ 的极点去抵消，

这样 $D(z)$ 就没有（**-1,0**）的极点，也就消除了样点间脉动。

【例7-31】 已知带保持器对象的脉冲传递函数为（同上例）

$$G_{\mathrm{d}}(z)=\frac{3.68z^{-1}\left(1+0.718z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0.368z^{-1}\right)}$$

采用周期为 $T=1$ s， 在 $r(t)=1(t)$ 、$r(t)=t$ 输入下设计无振荡系统。

【解】（1） 在 $r(t)=1(t)$ 输入下

（-1,0）的零点

首先构造 $H(z)$ $$H(z)=K_H z^{-1}\boxed{\left(1+0.718z^{-1}\right)}$$

再构造 $H_e(z)$ $$H_e(z)=\left(1-z^{-1}\right)\left(1+az^{-1}\right)$$

$$p=m=n=1 \qquad F(z)=1+az^{-1}$$

令 $H(z)+H_e(z)=1 \Rightarrow K_H z^{-1}\left(1+0.718z^{-1}\right)+\left(1-z^{-1}\right)\left(1+az^{-1}\right)=1$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} K_H = 0.582 \\ a = 0.418 \end{cases}$$

$$H(z)=0.582z^{-1}\left(1+0.718z^{-1}\right) \qquad H_e(z)=\left(1-z^{-1}\right)\left(1+0.418z^{-1}\right)$$

$$D(z)=\frac{H(z)}{G_d(z)H_e(z)}=\frac{0.158\left(1-0.368z^{-1}\right)}{\left(1+0.418z^{-1}\right)}$$

$$E(z)=H_e(z)R(z)=\left(1-z^{-1}\right)\left(1+0.418z^{-1}\right)\frac{1}{1-z^{-1}}=1+0.418z^{-1}$$

（2） $\boxed{\text{在 } r(t)=t \text{ 输入下}}$

首先构造 $H(z)$ $$H(z)=K_H z^{-1}\left(1+0.718z^{-1}\right)$$

再构造 $H_e(z)$ $$H_e(z)=\left(1-z^{-1}\right)^2$$

$$p=m=2 \qquad F(z)=1$$

令 $H(z)+H_e(z)=1$ $\Rightarrow$ $K_H z^{-1}\left(1+0.718z^{-1}\right)+\left(1-z^{-1}\right)^2=1$

$\Downarrow$

K_H 无解！

重新构造 $H(z)$ $$H(z)=K_H z^{-1}\left(1+0.718z^{-1}\right)\left(1+bz^{-1}\right)$$

再构造 $H_e(z)$ $$H_e(z)=\left(1-z^{-1}\right)^2\left(1+az^{-1}\right)$$

$$p=m=2 \qquad F(z)=1+az^{-1}$$

令 $H(z)+H_e(z)=1$ $\Rightarrow$ $$K_H z^{-1}\left(1+0.718z^{-1}\right)\left(1+bz^{-1}\right)+\left(1-z^{-1}\right)^2\left(1+az^{-1}\right)=1$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} K_H = 1.407 \\ a = 0.593 \\ b = -0.586 \end{cases}$$

$$D(z)=\frac{H(z)}{G_{\mathrm{d}}(z)H_e(z)}=\frac{0.382\left(1-0.368z^{-1}\right)\left(1-0.586z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+0.593z^{-1}\right)}$$

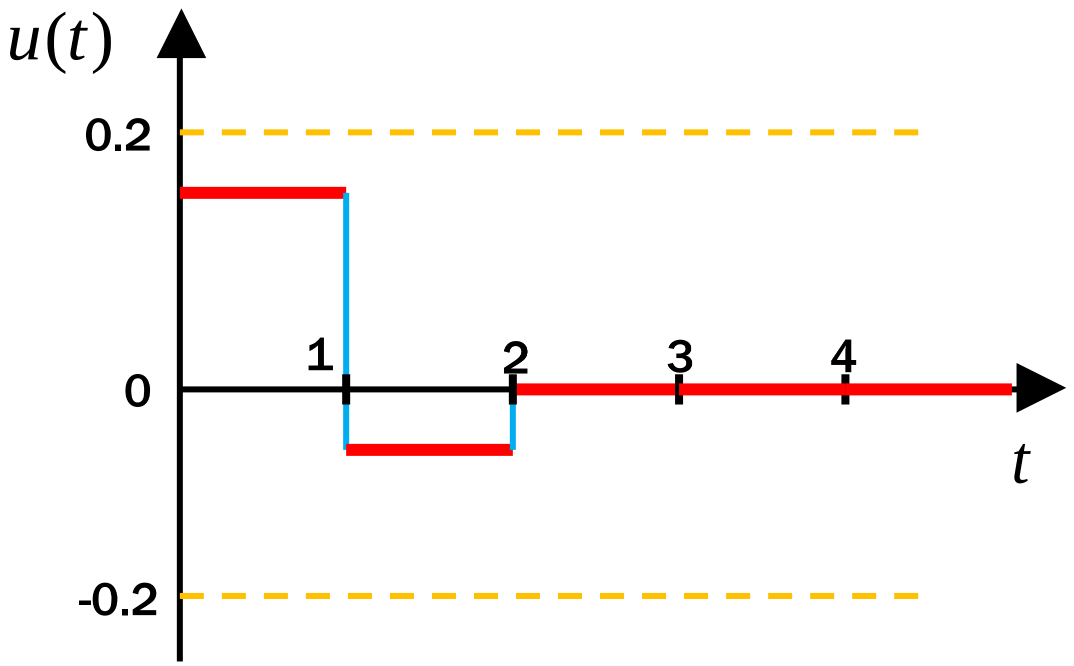
$$E(z)=H_e(z)R(z)=\left(1-z^{-1}\right)^2\left(1+0.593z^{-1}\right)\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

$$=z^{-1}+0.593z^{-2}$$

（3）检验——按 $r(t)=1(t)$ 设计

单位阶跃输入

控制器输出的Z变换为



$$U(z)=D(z)E(z)=\frac{0.158\left(1-0.368z^{-1}\right)}{\left(1+0.418z^{-1}\right)}\cdot\left(1+0.418z^{-1}\right)=0.158-0.058z^{-1}$$

$k\geq 2$ 之后，控制器输出 $u(k)=0$ 无振荡。

系统输出的**Z**变换为

$$Y(z,\Delta)=G_{\mathrm{d}}(z,\Delta)U(z)$$

$$=10\left[(\Delta-1)+\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}+\frac{\left(1-z^{-1}\right)e^{-\Delta}}{1-0.368z^{-1}}\right]\left(0.158-0.058z^{-1}\right)$$

$$=1.58\left(\Delta-1+e^{-\Delta}\right)+\left(2.164-0.582\Delta-1.58e^{-\Delta}\right)z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots$$

$k\geq 2$ 之后，系统输出$y(k)=r(t)=1(t)$ 完全跟踪输入，样点间无脉动。

单位斜坡输入

【略】

（4）检验——按 $r(t)=t$ 设计

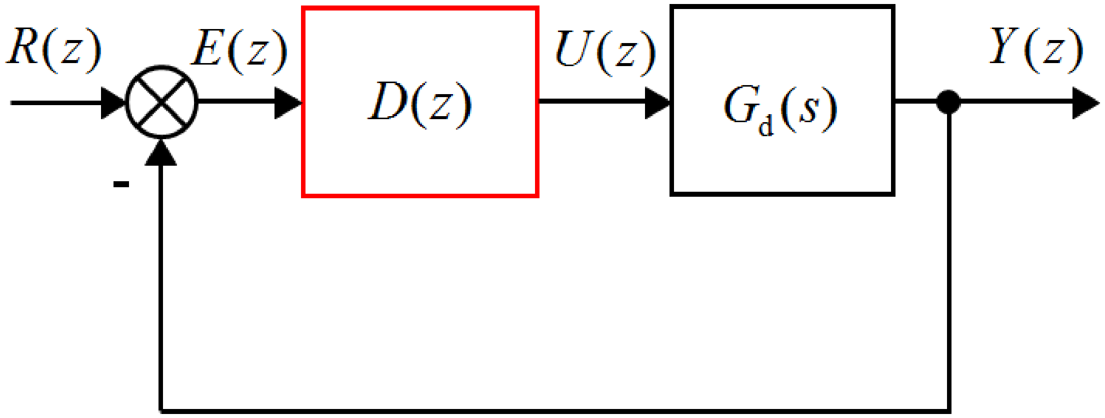
【略】

2. 几点结论

1 同一对象，同一典型输入，有限拍无振荡与有振荡设计相比，调整时间延长一拍。

2 无振荡设计的控制器极点不包含对象的零点。

3 无振荡设计，$U(z)$ 对 $R(z)$ 的传递函数 $H_u(z)=\dfrac{U(z)}{R(z)}=\dfrac{D(z)}{1+D(z)G_d(z)}$ 是 z^{-1} 的升幂有限多项式，$u(k)$ 无振荡。



4 某一典型输入下的有限拍无振荡设计，在其他典型输入下，输出也无振荡。

四.　直接设计法

设计准则

1. 构造闭环 $H(z)$，其分子分母阶次差与 $G_d(z)$ 相同。

2. $H(z)$ 包含 $G_d(z)$ 单位圆附近及圆外零点，$H(z)$ 的极点可按照相应连续系统的闭环极点转换而配置。

3. $H(z)$ 应当满足系统稳态误差的要求。

以I 型系统为例，

单位阶跃输入下的稳态误差为零，必须满足$H(z)\big|_{z=1}=H(1)=1$

单位斜坡输入下的稳态误差为常数，必须满足

$$e_{ss}=T\cdot\frac{-\mathrm{d}H(z)}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=1}=\frac{1}{K_v}$$

【例7-32】 已知对象特性 $G(s)=\dfrac{10}{s(s+1)}$ ，输入 $r(t)=0.01t$ 时稳态误差为 $e_{ss}=0.01$ rad，具有接近连续系统 $\zeta=0.5$ $\omega_n=1$ 的动态特性。试用直接法设计系统。

【解】

1

$$\left.\begin{array}{l}\omega_n=1\\ \zeta=0.5\end{array}\right\} \Rightarrow s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=s^2+s+1=0$$

对应于Z平面的特征根 $p_{1,2}=re^{\pm j\theta}$

$$r=e^{-\zeta\omega_n T}=e^{-0.5T}$$

$$\theta=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}T=\frac{\sqrt{3}}{2}T$$

2 采样周期的确定

按照经验，在闭环阶跃响应的每一周期内采样点数约为 $N=8\sim16$

$$2\pi = N\theta = N\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)$$

取 $T=1$ s，则按上式可解得 $N\approx7.3$，基本符合要求。

3 $H(z)$ 的特征方程为 $(z-p_1)(z-p_2)=0$

$$\left(z-re^{j\theta}\right)\left(z-re^{-j\theta}\right)=0$$

$$r=e^{-0.5T}=e^{-0.5}=0.607$$

$$\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}T=\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866$$

$$\left(z-0.607e^{j0.866}\right)\left(z-0.607e^{-j0.866}\right)=0$$

$$z^2-0.607z\left(e^{j0.866}+e^{-j0.866}\right)+0.607^2=0$$

$$z^2-2\times0.607z\cos0.866+0.607^2=0$$

$$z^2-0.787z+0.368=0$$

4 $T=1$，则对象Z传递函数为

$$G_d(z)=\frac{0.04837\left(z+0.9673\right)}{\left(z-1\right)\left(z-0.9048\right)}$$

5 按照设计准则，闭环Z传递函数为

$$H(z)=K_H\frac{(z+b)(z+0.9673)}{z\left(z^2-0.787z+0.368\right)}$$

按照稳态误差指标，为I型系统，且 $\frac{1}{K_v}=1$

$$\begin{cases} H(1)=1 \\ T\cdot\left.\frac{-\mathrm{d}H(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=1}=\frac{1}{K_v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_H=0.4667 \\ b=-0.368 \end{cases}$$

$$H(z)=\frac{0.4667(z-0.368)(z+0.9673)}{z\left(z^2-0.787z+0.368\right)}$$

6 求得控制器为

$$D(z)=\frac{H(z)}{G_{\mathrm{d}}(z)\left[1-H(z)\right]}=\frac{9.649\left(z-0.9048\right)\left(z-0.368\right)}{z^{2}-0.253z-0.165}$$

7 检验

参见教材第**141**页，在此略。

课后思考题5

若某数字控制器 $D(z)$ 的分子、分母是同阶的，则该控制器是物理可实现的，为什么？

课后思考题6

若某数字控制器 $D(z)$ 的分子、分母是同阶的，则该控制器的Z传递函数一般具有什么形式？

课后思考题7

为什么闭环**Z**传递函数 $H(z)$ 与被控对象 $G_d(z)$ 总是具有相同的分子、分母阶次差？

本次课内容总结

- 数字控制器的离散化设计
  - 对 $H(z)$和 $H_e(z)$ 的一般约束
  - 有限拍控制系统设计
  - 有限拍无振荡控制系统设计
  - 直接设计法