
# 系统工程基础

## 第六章 系统优化方法

晁涛 副教授/博士生导师

哈尔滨工业大学 控制与仿真中心

# 回顾

## 5 系统对策方法

- 5.1 系统对策概述
- 5.2 零和对策
- 5.3 非零和对策
- 5.4 典型系统对策例子

# 6 系统优化方法

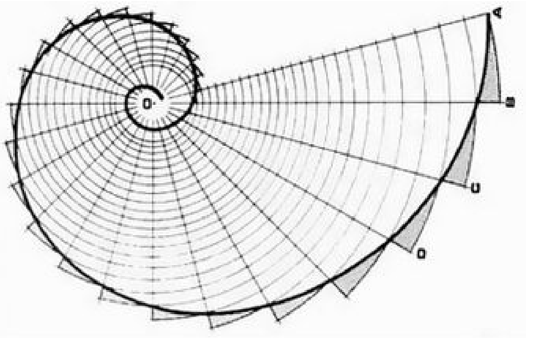
- **6.1 系统优化概述**
- **6.2 线性规划方法**
- **6.3 线性规划方法应用**
- **6.4 非线性规划方法**

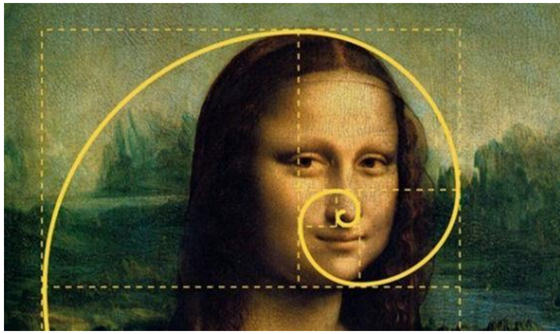
# 6.1 系统优化方法概述

## 基本概念

### 最优化理论的例子

✓1、黄金分割法

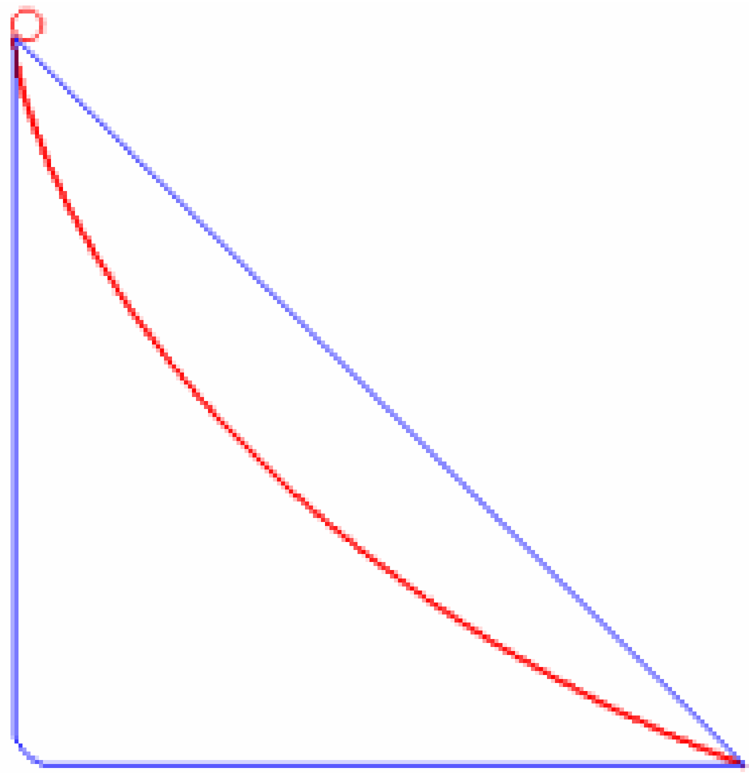




# 6.1 系统优化方法概述

## 基本概念

- 最优化理论的例子
  - ✓2、最速下降曲线



# 6.1 系统优化方法概述

## 基本概念

### 最优化理论的例子

✓3、生产决策问题

- 某厂生产甲乙两种产品
- 已知制成一吨产品
  - 甲需要用资源A 3吨，资源B 4m$^3$
  - 乙需要用资源A 2吨，资源B 6 m$^3$，C资源7个单位
- 若一吨甲和一吨乙的经济价值分别为7万元和5万元
- 三种资源分别为90吨、200 m$^3$和210个单位
- 试决定应生产这两种产品各多少吨
- 才能创造总经济价值最高？

# 6.1 系统优化方法概述

## 基本概念

### 3、生产决策问题

**（1）假定自变量（决策变量）**

$x_1$：生产产品甲的数量（吨）

$x_2$：生产产品乙的数量（吨）

**（2）分析并表达限制条件（约束条件）**

资源$A$ 限制：$3x_1 + 2x_2 \le 90$

资源$B$ 限制：$4x_1 + 6x_2 \le 200$

资源$C$ 限制：$7x_2 \le 210$

非负条件：$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

# 6.1 系统优化方法概述

## 基本概念

### 3、生产决策问题

（3）分析目标

以Z表示生产甲和乙两种产品各为 $x_1$ 和 $x_2$（吨）时产生的经济价值，则有： $z = 7x_1 + 5x_2$

综上可得：

$$\begin{cases} \max z = 7x_1 + 5x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 90 \\ 4x_1 + 6x_2 \le 200 \\ 7x_2 \le 210 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

# 6.1 系统优化方法概述

## 基本概念

### 4、工件加工任务分配问题

- 某车间有两台机床甲和乙，可用于加工三种工件
- 假定这两台机床的可用台时数分别为700和800
- 三种工件的数量分别为300、500和400
- 且已知用不同机床加工单位数量的不同工件所需的台时数和加工费用（见下表）
- 问怎样分配机床的加工任务才能既满足加工工件的要求
- 又使总加工费用最低？

| 机床类型 | 单位工件所需加工台时 | | | 单位工件的加工费用 | | | 可用台时数 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 工件1 | 工件2 | 工件3 | 工件1 | 工件2 | 工件3 | |
| 甲 | 0.4 | 1.1 | 1.0 | 13 | 9 | 10 | 700 |
| 乙 | 0.5 | 1.2 | 1.3 | 11 | 12 | 8 | 800 |

# 6.1 系统优化方法概述

## 基本概念

- 假定这两台机床的可用台时数分别为700和800
- 三种工件的数量分别为300、500和400

### 4、工件加工任务分配问题

- 考虑到问题的目标及本身的限制条件可得数学模型：

$$
\begin{cases}
\max z = 13x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 11x_4 + 12x_5 + 8x_6 \\
x_1 + x_4 = 300 \\
x_2 + x_5 = 500 \\
x_3 + x_6 = 400 \\
0.4x_1 + 1.1x_2 + x_3 \le 700 \\
0.5x_4 + 1.2x_5 + 1.3x_6 \le 800 \\
x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \cdots, 6
\end{cases}
$$

| 机床类型 | 单位工件所需加工台时 | | | 单位工件的加工费用 | | | 可用台时数 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 工件1 | 工件2 | 工件3 | 工件1 | 工件2 | 工件3 | |
| 甲 | 0.4 | 1.1 | 1.0 | 13 | 9 | 10 | 700 |
| 乙 | 0.5 | 1.2 | 1.3 | 11 | 12 | 8 | 800 |

# 6 系统优化方法

- 6.1 系统优化概述
- 6.2 线性规划方法
- 6.3 线性规划方法应用
- 6.4 非线性规划方法

# 6.2 线性规划方法

## 6.2.1 基本概念

1. 用未知自变量表示某种重要的可变因素，变量的一组数据表示一种解决方案，通常要求这些变量取非负值。

2. 存在一定的限定条件（例如材料、人力、设备、时间、费用等的限制），它们可以用自变量的线性不等式和等式来表达

3. 都有一个要达到的目标，它是自变量的线性函数，往往需要这个函数取得最大或是最小

以Z表示生产甲和乙两种产品各为 $x_1$ 和 $x_2$(吨)时产生的经济价值，则有： $z = 7x_1 + 5x_2$

综上可得：

$$
\begin{cases}
\max z = 7x_1 + 5x_2 \\
3x_1 + 2x_2 \le 90 \\
4x_1 + 6x_2 \le 200 \\
7x_2 \le 210 \\
x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0
\end{cases}
$$

# 6.2 线性规划方法

## 6.2.2 线性规划问题的提出及表示

- 线性规划问题实质是求解：由给定条件限定的定义域内的多元线性函数的最值

$$\max\ Z = \sum c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum a_{ij} x_j = b_i & (b_i > 0, i = 1, 2, \cdots, m) \\ x_j \ge 0 & (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

$$\max Z = 2x_1 - x_2 - 3(x_4 - x_5) + 0x_6 + 0x_7$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + (x_4 - x_5) + x_6 = 7 \\ x_1 - x_2 - (x_4 - x_5) - x_7 = 2 \\ 5x_1 - x_2 - 2(x_4 - x_5) = 5 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 \ge 0 \end{cases}$$

- 不是标准形式的处理方法
  - 最小化问题： $Z = -Z'$
  - 约束右端项小于0，等式两端同时乘以-1
  - 约束条件为不等式，如果是小于等于，等式左侧加上入非负松弛变量；如果是大于等于，等式左侧减去非负剩余变量
  - 如果变量无约束，引入 $x_k = x_k' - x_k'', x_k' \ge 0, x_k'' \ge 0$

# 6.2 线性规划方法

## 6.2.2 线性规划问题的 提出及表示

### 不是标准形式的处理方法

- 将下面的问题转化为标准形式

$$\min Z = -2x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 \le 7 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \ge 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = -5 \\ x_1, x_2 \ge 0,\ x_3 \text{ 为无约束（无非负限制）} \end{cases}$$

思考如何转化？

$$\max Z = 2x_1 - x_2 - 3(x_4 - x_5) + 0x_6 + 0x_7$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + (x_4 - x_5) + x_6 = 7 \\ x_1 - x_2 - (x_4 - x_5) - x_7 = 2 \\ 5x_1 - x_2 - 2(x_4 - x_5) = 5 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 \ge 0 \end{cases}$$

# 6.2 线性规划方法

## 6.2.2 线性规划问题的提出及表示

### 不是标准形式的处理方法

- 用x4-x5替换x3，且x4,x5>0
- 引入变量x6,x7,他们分别是松弛变量和剩余变量，都是非负的
- 将第三个约束方程两边乘以-1
- 将极小值问题反号变为极大值问题

$$\min Z = -2x_1 + x_2 + 3x_3 \qquad \max Z = 2x_1 - x_2 - 3(x_4 - x_5) + 0x_6 + 0x_7$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 \le 7 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \ge 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = -5 \\ x_1, x_2 \ge 0, x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + x_2 + (x_4 - x_5) + x_6 = 7 \\ x_1 - x_2 - (x_4 - x_5) - x_7 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2(x_4 - x_5) = 5 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 \ge 0 \end{cases}$$

# 6.2 线性规划方法

## 6.2.2 线性规划问题的提出及表示

### 不是标准形式的处理方法

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ 4x_1 + x_5 = 16 \\ 4x_2 + x_6 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

# 6.2 线性规划方法

## 6.2.3 图解法

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

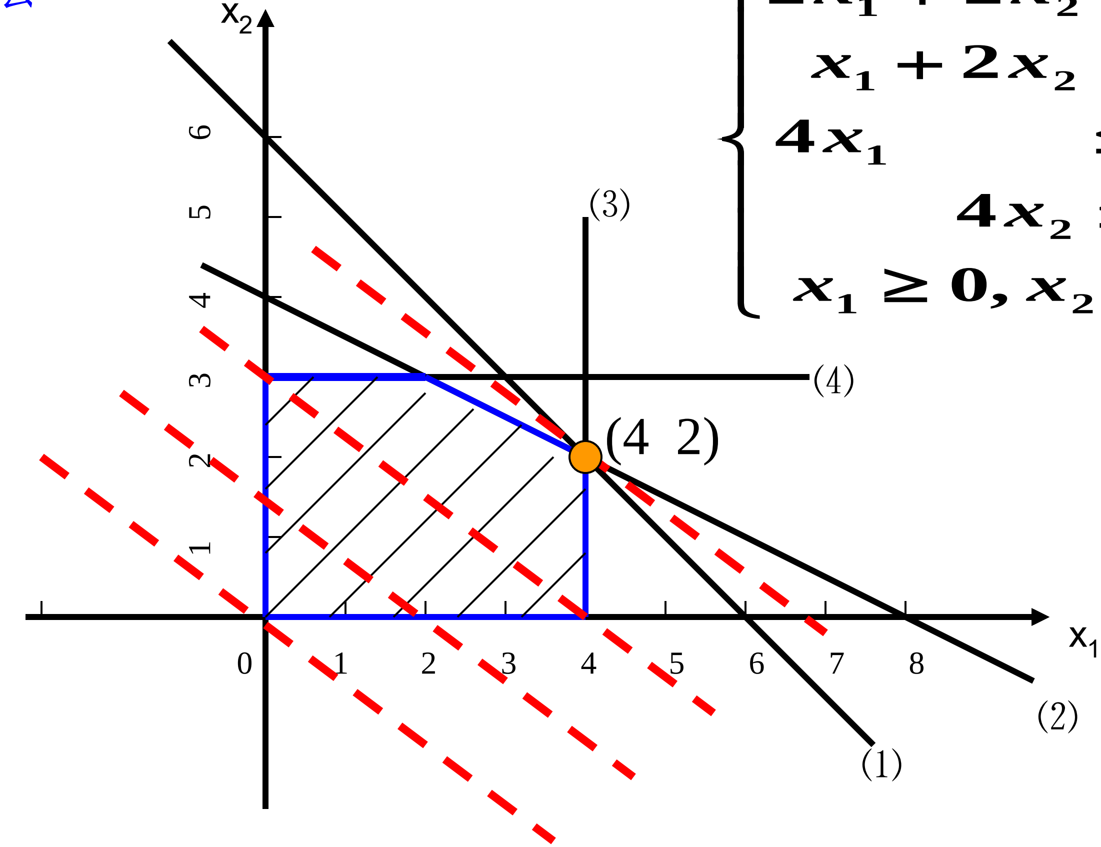
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

# 6.2 线性规划方法

## 6.2.3 图解法

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



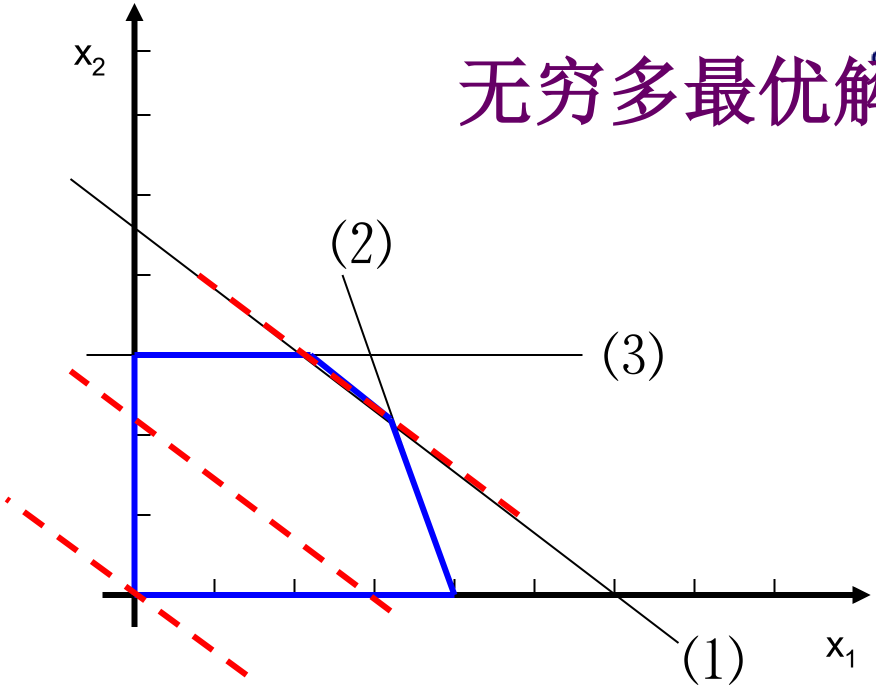

最 优 解：$x_1 = 4$ $x_2 = 2$ 有唯一最优解，$Z = 14$

## 6.2 线性规划方法

### 6.2.3 图解法

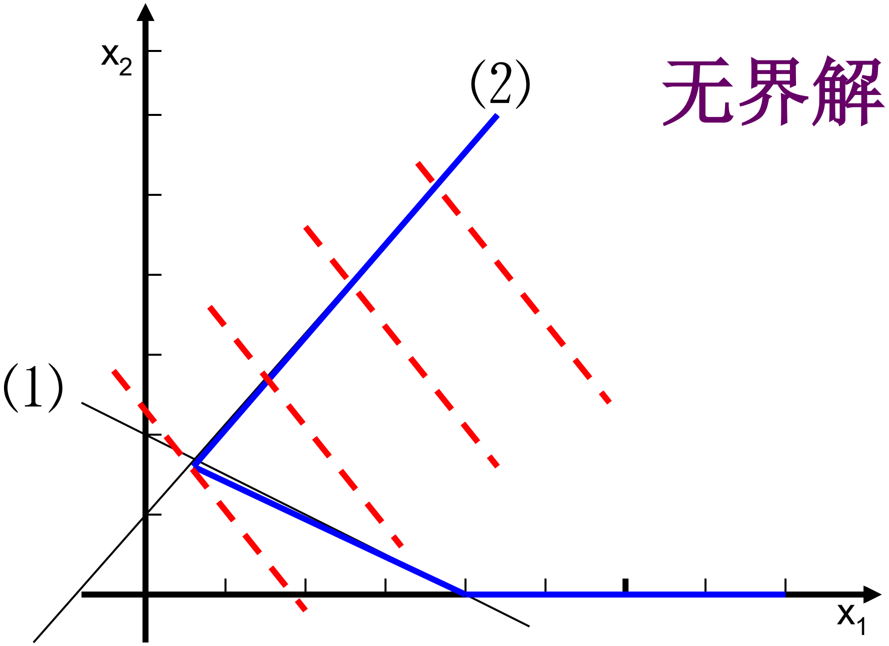
$$\max Z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$




$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

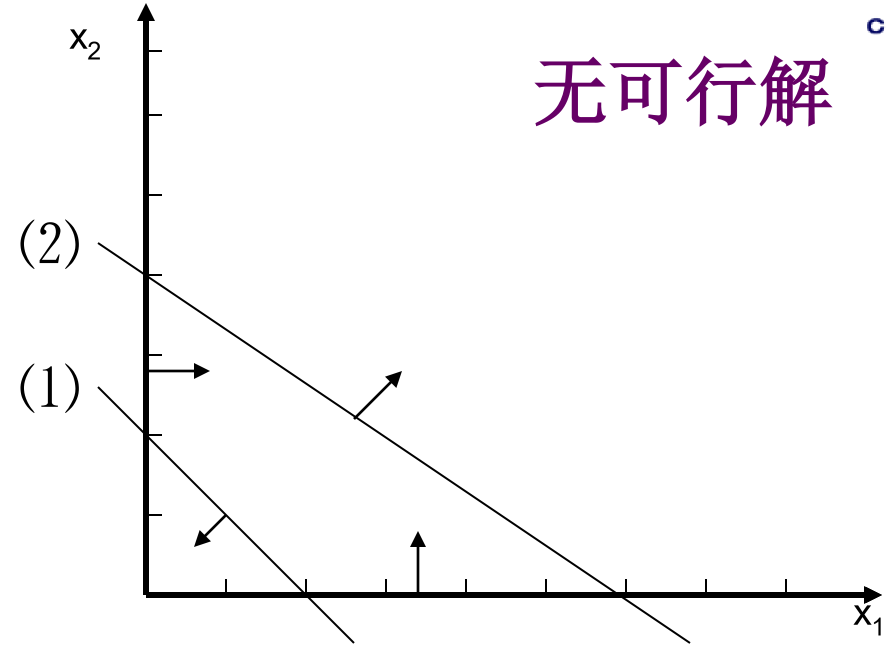


# 6.2 线性规划方法

## 6.2.3 图解法

$$\min Z = 3x_1 - 2x$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$




无可行解

思考

$$\max Z = 10x_1 + 18x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 170 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\ x_1 + 5x_2 \le 150 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ 2x_1 - x_2 \le 3 \\ x_2 \ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

# 6.2 线性规划方法

## 6.2.4 单纯形法

$$\max Z = \sum c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum a_{ij} x_j = b_i & (i=1,2,\dots,m) \\ x_j \ge 0 & (j=1,2,\dots,n) \end{cases}$$

### 几个概念

- 松弛变量
- 基
  - 设B是系数矩阵A中m*m阶非奇异矩阵（B的行列式不为0），则称B为线性规划问题的一个基
  - B由m个线性独立的列向量构成，设$B=(P_1,P_2,\cdots,P_m)$
  - 称$P_j$ ($j=1,2,\cdots,m$)基向量，与其对应的变量$x_j$为 基变量
- 基解
  - 令所有非基变量为0，则由m个约束方程解出m个基变量的唯一解$X=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T$加上0，构成$X=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^T$称为线性规划问题的基解

注意此时的解不一定满足非负的条件！！

# 6.2 线性规划方法

## 6.2.4 单纯形法

几个概念　　不满足最优条件的基解中的变量需要调整！！！

- 基可行解
  - 满足<u>非负约束</u>的基解称为基可行解
- 调入变量
  - 在求解过程中需要变成基变量的非基变量
- 调出变量
  - 在求解过程中需要变成非基变量的当前基变量

$$\max \ Z = \sum c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum a_{ij} x_j = b_i & (b_i > 0, i = 1, 2, \cdots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

# 6.2 线性规划方法

## 6.2.4 单纯形法

### 几条定理

1. 定理一：线性规划的可行解是凸集。
2. 定理二：线性规划的基可行解对应于其可行域的顶点。
3. 定理三：若线性规划问题有可行解，则必有基可行解。
4. 定理四：线性规划问题若有最优解，则一定可在其可行域的顶点上达到；如果在几个顶点上都出现最优解，则在这些顶点的每个凸组合上也达到最优。

# 6.2 线性规划方法

## 6.2.4 单纯形法

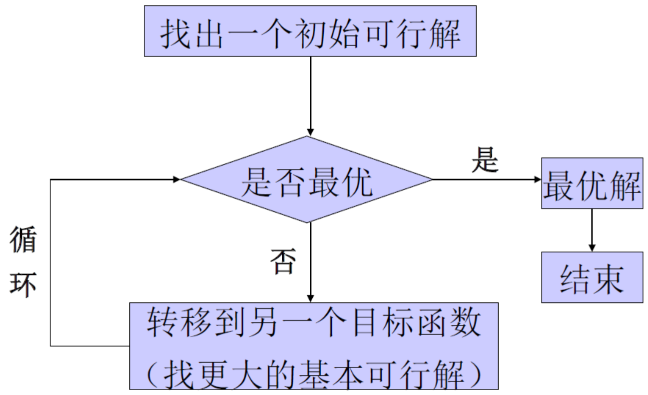
### 基本思想

- 1）将模型的一般形式变成标准形式
- 2）再根据标准型模型，从可行域中找一个基本可行解
- 3）并判断是否是最优
- 如果是，获得最优解
- 如果不是，用一个非基变量替代一个基变量
- 4）转换到另一个基本可行解，继续判断其是否最优
- 当目标函数达到最大时，得到最优解

### 线性规划的标准形式

$$\max \ Z = \sum c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum a_{ij} x_j = b_i & (b_i > 0, i = 1, 2, \cdots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$




直到找出为止，核心是：变量迭代

## 6.2.4 单纯形法

### 实例1

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ 4x_1 + x_5 = 16 \\ 4x_2 + x_6 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

# 6.2 线性规划方法

## 6.2.4 单纯形法

实例1

- 设B是系数矩阵A中m*m阶非奇异矩阵（B的行列式不为0），则称B为线性规划问题的一个基
- B由m个线性独立的列向量构成，设 $B=(P_1,P_2,\cdots,P_m)$
- 称$P_j$ $(j=1,2,\cdots,m)$基向量，与其对应的变量$x_j$为 基变量

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&1&0&0&0\\1&2&0&1&0&0\\4&0&0&0&1&0\\0&4&0&0&0&1\end{bmatrix}=[\boldsymbol{p}_1\quad\boldsymbol{p}_2\quad\boldsymbol{p}_3\quad\boldsymbol{p}_4\quad\boldsymbol{p}_5\quad\boldsymbol{p}_6]$$

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{p}_3\quad\boldsymbol{p}_4\quad\boldsymbol{p}_5\quad\boldsymbol{p}_6]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}$$

$I$ 为单位矩阵且线性独立　　$x_3,x_4,x_5,x_6$　为基变量

$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$　为非基变量

# 6.2 线性规划方法

## 6.2.4 单纯形法

实例2

$$\text{Max } z=2x_1+3x_2$$
$$\text{st.}\quad \begin{cases} x_1+x_2\le 3 \\ x_1+2x_2\le 4 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$

$$\text{Max } z=2x_1+3x_2+0x_3+0x_4$$
$$\text{st.}\quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2+x_4=4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4\ge 0 \end{cases}$$

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

令 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $|B|=-1\neq 0$,

令 $x_2=x_4=0$，则 $x_3=-1$，$x_1=4$，$X=(4,0,-1,0)^T$ ——非基本可行解

几个概念

不满足最优条件的基解中的变量需要调整！！！

- 基可行解
  - 满足**非负约束**的基解称为基可行解

# 6.2 线性规划方法

## 6.2.4 单纯形法

实例2

$$\text{Max}\ z=2x_1+3x_2 \qquad \text{st.}\quad x_1+x_2\le 3,\quad x_1+2x_2\le 4,\quad x_1,x_2\ge 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\text{Max}\ z=2x_1+3x_2+0x_3+0x_4 \qquad \text{st.}\quad x_1+x_2+x_3=3,\quad x_1+2x_2+x_4=4,\quad x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0$$

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}，令\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}，则\ |B|=1\neq 0,$$

然后，找另一个基本可行解。即将非基变量换入基变量中（将非基变量从0变为正数，将被替换的基变量变为0），但保证其余的非负。使得每一个新的解都有可能改变目标函数值。如此循环下去，直到找到最优解为止

为尽快找到最优解，在换入变量时有一定的要求

如将目标系数大的先换入等。另外，先选取松弛变量作为基变量

# 6.2 线性规划方法

## 6.2.4 单纯形法

实例2

$$\text{Max } z=2x_1+3x_2$$

$$\text{st.}\quad \begin{cases} x_1+x_2\le 3 \\ x_1+2x_2\le 4 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\text{Max } z=2x_1+3x_2+0x_3+0x_4$$

$$\text{st.}\quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2+x_4=4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4\ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ A= & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

，令 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $|B|=1\neq 0$,

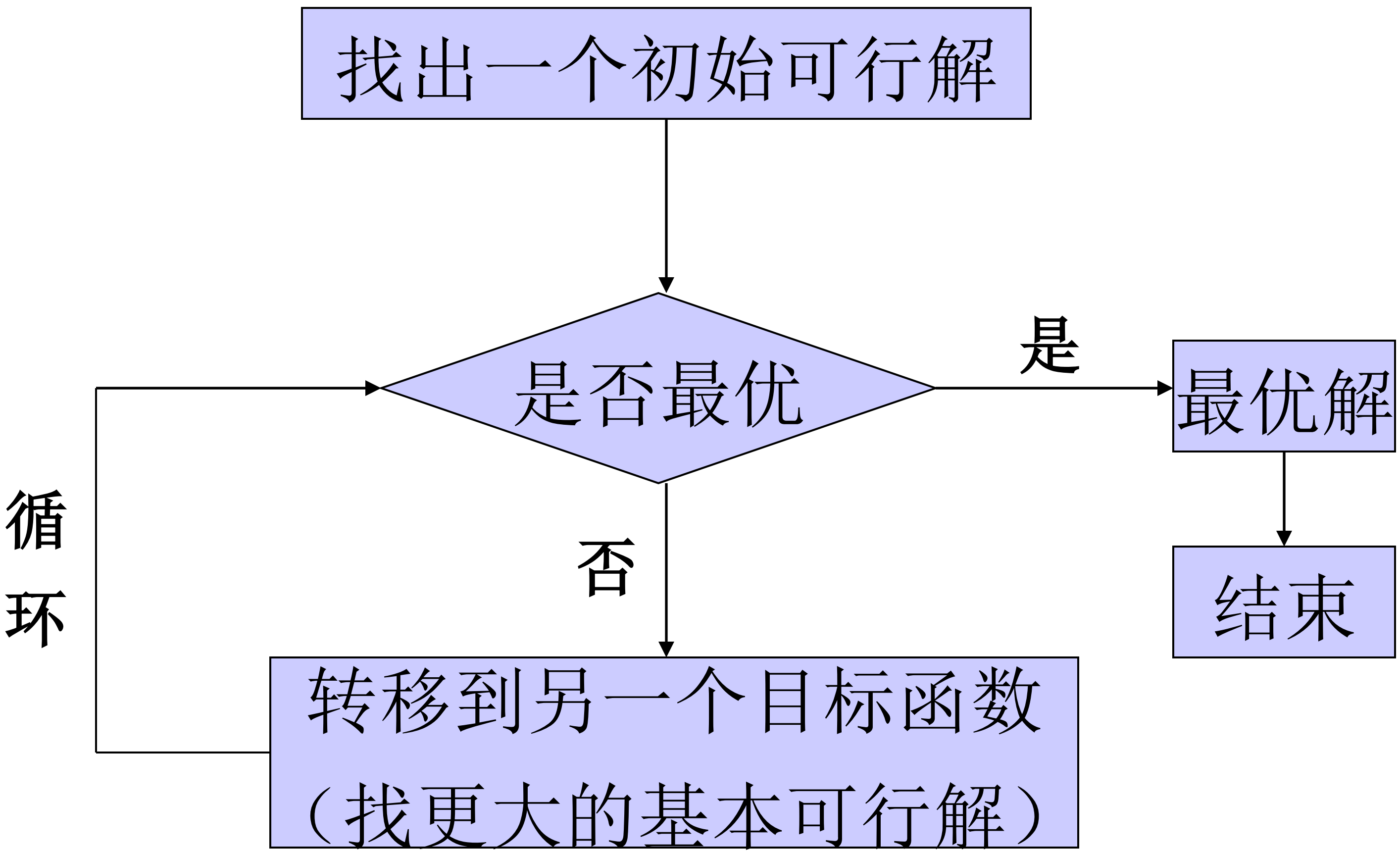
$x_3$ $x_4$ ——基变量

令 $x_1=x_2=0$，则 $x_3=3$, $x_4=4$，得到基可行解 $X=(0,0,3,4)^T$

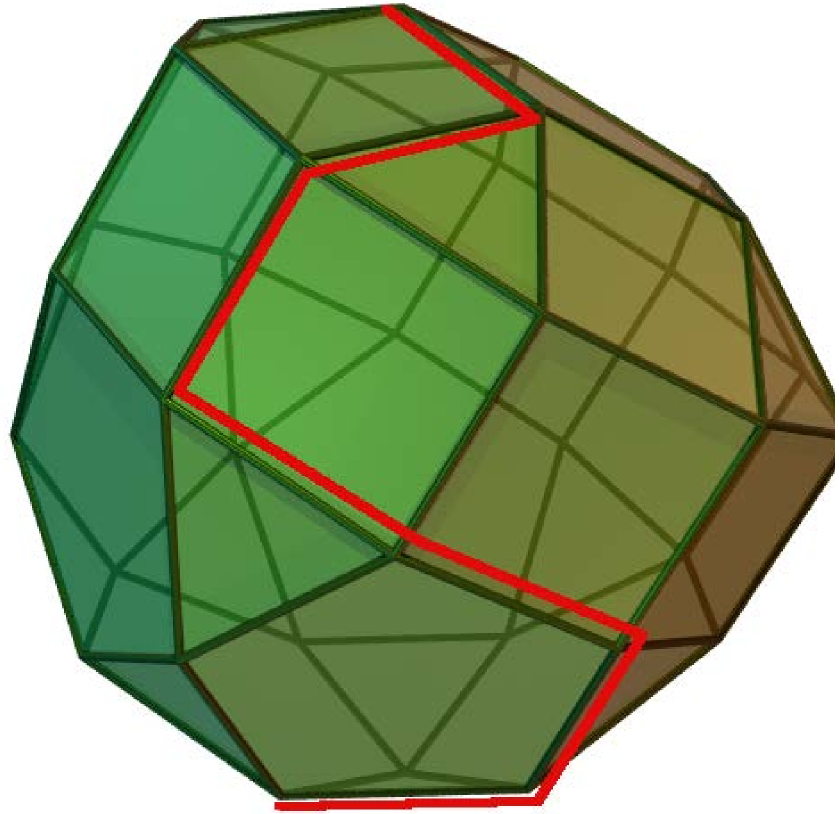
$z=0$

其步骤总结如下：

思考如何实现算法？




直到找出为止，核心是：变量迭代

单纯形是代数拓扑中最基本的概念。
单纯形是三角形和四面体的一种泛化，一个$k$维单纯形是指包含 $k+1$个节点的凸多面体

1维单纯形就是线段；2维单纯形就是三角形；三维单纯形就是四面体

$$\max \ Z = \sum c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum a_{ij} x_j = b_i & (b_i > 0, i=1,2,\ldots,m) \\ x_j \geq 0 & (j=1,2,\ldots,n) \end{cases}$$

步骤1：选取初始可行基，确定初始可行解

步骤2：检验各非基变量$x_j$($j$=m+1,…,n)的检验数$\sigma_j$

步骤3：在$\sigma_j$中，若有某个对应$x_k$的系数列向量$P_k$不大于0，则此问题无解

步骤4：根据max($\sigma_j$)= $\sigma_k$，确定$x_k$为调入变量，按最小 $\theta$ 比值规则计算，确定$x_l$为调出变量

步骤5：用加减消元法化主元$a_{lk}$为1，同列其它为0，把$x_k$所对应的列向量变为$[0\ 0\ \ldots\ 1\ \ldots\ 0]^T$

| $c_j$ | | | $c_1$ | $\cdots\cdots$ | $c_m$ | $c_{m+1}$ | $\cdots\cdots$ | $c_n$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | $X_B$ | $b$ | $x_1$ | $\cdots\cdots$ | $x_m$ | $x_{m+1}$ | $\cdots\cdots$ | $x_n$ | |
| $c_1$ | $x_1$ | $b_1$ | 1 | $\cdots\ \cdots$ | 0 | $a_{1,m+1}$ | $\cdots\ \cdots$ | $a_{1n}$ | $\theta_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $c_m$ | $x_m$ | $b_m$ | 0 | $\cdots\ \cdots$ | 1 | $a_{m,m+1}$ | $\cdots\ \cdots$ | $a_{mn}$ | $\theta_m$ |
| $-Z$ | | $-\sum c_i b_i$ | 0 | $\cdots\cdots$ | 0 | $\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$ | | | |

$$\theta = \min\left(\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0\right)$$

# 6.2 线性规划方法

## 6.2.4 单纯形法

实例3

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 \le 8 \\ x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- 首先将其转化为标准形式

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_4 = 8 \\ x_2 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max \ Z = \sum c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum a_{ij} x_j = b_i & (b_i > 0, i=1,2,\ldots,m) \\ x_j \ge 0 & (j=1,2,\ldots,n) \end{cases}$$

# 6.2 线性规划方法

## 6.2.4 单纯形法

实例3

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_4 = 8 \\ x_2 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

| $C_j$ | | | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | b | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | θi |
| 0 | x3 | 8 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 8/2 |
| 0 | x4 | 8 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8/0 |
| 0 | x5 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3/1 |
| −z | | 0 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | |

$$-\sum c_i b_i$$

$$\sigma_j = c_j - \sum c_i a_{ij}$$

$$\theta = \min\left(\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0\right)$$

$\max(\sigma_j) = \sigma_k$ 本例$k$=2

步骤2：检验各非基变量$x_j$ ($j$=m+1,…,n)的检验数$\sigma_j$

$\sigma_1 = c_1 - (c_3*a_{31}+c_4*a_{41}+c_5*a_{51})=2$

$\sigma_2=3$

# 6.2 线性规划方法

## 6.2.4 单纯形法

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_4 = 8 \\ x_2 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

实例3

- 因为max($\sigma_j$>0)=$\sigma_2$，选$x_2$作为调入变量
- **计算θ=min(4,-,3)=3，其对应的变量是$x_5$，故选$x_5$为调出变量**

步骤4：根据max($\sigma_j$)= $\sigma_k$，确定$x_k$为调入变量，按最小比值规则计算，确定$x_l$为调出变量

| **Cj** | | | **2** | **3** | **0** | **0** | **0** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | b | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | θi |
| 0 | x3 | 8 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| 0 | x4 | 8 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | – |
| 0 | x5 | 3 | 0 | [1] | 0 | 0 | 1 | 3 |
| −z | | 0 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | |

$$\max(\sigma_j) = \sigma_k$$

$$-\sum c_i b_i \qquad \sigma_j = c_j - \sum c_i a_{ij} \qquad \theta = \min(\frac{b_i}{a_{ik}} | a_{ik} > 0)$$

# 6.2 线性规划方法

## 6.2.4 单纯形法

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_4 = 8 \\ x_2 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

实例3

- 通过线性变换，将$a_{52}$转化为1，将其对应列的其它元素转化为0。重新计算单纯形表。将x5替换为x2
- 因为$\max(\sigma_j>0)=\sigma_1$，选$x_1$作为调入变量
- **计算$\theta=\min(4,2,-)=2$，其对应的变量是$x_3$，故选$x_3$为调出变量**

| Cj | | | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | b | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | θi |
| 0 | x3 | 2 | [1] | 0 | 1 | 0 | −2 | 2 |
| 0 | x4 | 8 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| 3 | x2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | − |
| −z | | −9 | 2 | 0 | 0 | 0 | −3 | |

注意消元时b也跟着变化

$$-\sum c_i b_i \qquad \sigma_j = c_j - \sum c_i a_{ij} \qquad \theta = \min\left(\frac{b_i}{a_{kj}} \middle| a_{kj} > 0\right)$$

# 6.2 线性规划方法

## 6.2.4 单纯形法

实例3

- 通过线性变换，将$a_{31}$转化为1，将其对应的列的其它元素转化为0。重新计算单纯形表。将$x_3$替换为$x_1$
- 因为$\max(\sigma_j>0)=\sigma_5$，选$x_5$作为调入变量
- **计算$\theta=\min(-,1,3)=3$，其对应的变量是$x_4$，故选$x_4$为调出变量**

| Cj | | | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | b | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | θi |
| 2 | x1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | −2 | − |
| 0 | x4 | 4 | 0 | 0 | −2 | 1 | [4] | 1 |
| 3 | x2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| −z | | −13 | 0 | 0 | −2 | 0 | 1 | |

$$\max(\sigma_j)=\sigma_k$$

$$\theta=\min\left(\frac{b_i}{a_{ik}}\middle|a_{ik}>0\right)$$

$$-\sum c_i b_i \qquad \sigma_j = c_j - \sum c_i a_{ij}$$

# 6.2 线性规划方法

## 6.2.4 单纯形法

### 实例3

- 通过线性变换，将$a_{45}$转化为1，将其对应的列的其它元素转化为0。重新计算单纯形表。将$x_4$替换为$x_5$
- 得到最终结果z=14，最优解为(4,2,0,0,1)

| Cj | | | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | XB | b | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
| 2 | x1 | 4 | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 0 |
| 0 | x5 | 1 | 0 | 0 | −1/2 | 1/4 | 1 |
| 3 | x2 | 2 | 0 | 1 | 1/2 | −1/4 | 0 |
| −z | | −14 | 0 | 0 | −3/2 | −1/4 | 0 |

$$-\sum c_i b_i \qquad \sigma_j = c_j - \sum c_i a_{ij}$$

均小于零，停止