7.3 线性离散系统的数学描述

一. 引言

离散系统（Discrete system），又称离散时间系统（Discrete-time system）。本节研究线性定常离散系统的数学描述及求解方法，这是分析和综合数控系统的基础。

数学模型

连续系统		离散系统
微分方程	——	差分方程
连续单位脉冲响应	——	离散单位脉冲响应
S传递函数	——	Z传递函数
连续状态空间表达式	——	离散状态空间表达式
频率特性	——	离散频率特性

主要内容：

- 线性定常离散系统的数学模型及其互相转换；
- 线性定常离散系统的求解方法。

二. 线性常系数差分方程(时域表达式)
DIFFERENCE EQUATION

1. 差分方程表达式

第一种形式

表示 $y(kT)$ 与本时刻及前m个时刻输入、前n个时刻 的输出有关，称为n阶常系数差分方程，是在输入输出的最高阶上统一。

$$y(k)+a_1y(k-1)+a_2y(k-2)+\cdots+a_ny(k-n)=b_0u(k)+b_1u(k-1)+\cdots+b_mu(k-m)$$

第二种形式

$$y(k+n)+a_1 y(k+n-1)+\cdots+a_n y(k)=b_0 u(k+m)+b_1 u(k+m-1)+\cdots+b_m u(k)$$

称为 (n,m) 阶差分方程，其中 $m \le n$，是在输入输出的最低阶上统一。

2. 差分方程的解

差分方程的解=通解+特解

通解是齐次方程的解，为零输入解，代表系统在无外力作用下的自由运动，反映了离散系统自身的特性。

特解是由非零输入产生的解，对应于非齐次方程的特解，反映了系统在外部作用下的强迫运动。

差分方程求解有两种方法：解析法与递推法。

解法一：递推法——从初始值递推求解

$$y(k)+a_1y(k-1)+a_2y(k-2)+\cdots+a_ny(k-n)=b_0u(k)+b_1u(k-1)+\cdots+b_mu(k-m)$$

$$\Updownarrow$$

$$y(k)=b_0u(k)+b_1u(k-1)+\cdots+b_mu(k-m)-a_1y(k-1)-a_2y(k-2)-\cdots-a_ny(k-n)$$

$$=\sum_{i=0}^{m}b_iu(k-i)-\sum_{i=1}^{n}a_iy(k-i)$$

【例7-1】 $$y(k+1)=ay(k)+bu(k)$$

假设 $y(0),u(k)$ 已知，解该差分方程。

【解】 $k=0$ $$y(1)=ay(0)+bu(0)$$

$k=1$ $$y(2)=ay(1)+bu(1)$$

$$=a\left[ay(0)+bu(0)\right]+bu(1)$$

$$=a^2y(0)+abu(0)+bu(1)$$

$\vdots$

$$y(k)=\underbrace{a^k y(0)}_{\text{通解}}+\underbrace{\sum_{i=0}^{k-1}a^{k-1-i}bu(i)}_{\text{特解}}$$

解法二：解析法

【略】

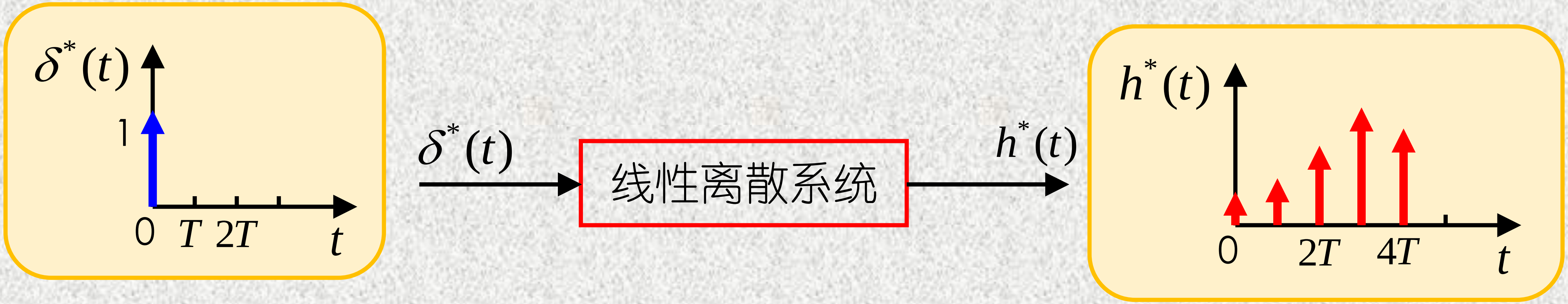
三. 脉冲响应与卷积和

Impulse response —— convolution summation

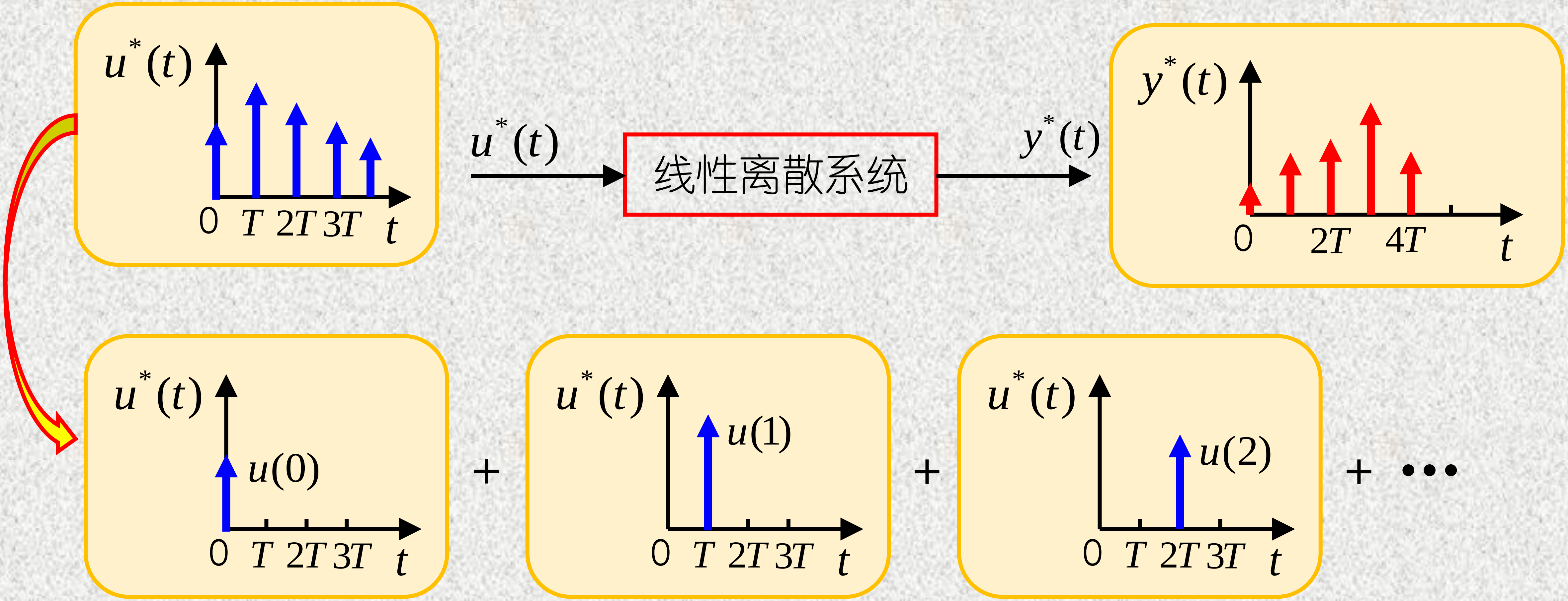
给系统输入单位脉冲序列 $\delta^*(t)=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases}$

其输出脉冲序列 $h^*(t)$ 称为系统的**单位脉冲响应**，也称为**权序列**。

(Weighting Sequence)



若已知系统的单位脉冲响应 $h^*(t)$，就可以求出任意输入脉冲序列 $u^*(t)$ 对应的响应 $y^*(t)$。



$$y^*(t) = u(0)h^*(t) + u(1)h^*(t-T) + \cdots + u(k)h^*(t-kT) + \cdots$$

叠加原理

$$y^*(t) = u(0)h^*(t) + u(1)h^*(t-T) + \cdots + u(k)h^*(t-kT) + \cdots$$

$$y(k) = u(0)h(k) + u(1)h(k-1) + \cdots + u(k)h(0)$$

$$y(k) = \sum_{j=0}^{k} u(j)h(k-j)$$

$$= \sum_{m=0}^{k} h(m)u(k-m)$$

$$= h(k) * u(k)$$

卷积和

【例7-2】 已知某线性离散系统的单位脉冲响应 $h(k)$，求该系统在单位阶跃序列 $u^*(t)=1^*(t)$ 作用下的输出 $y^*(t)$ 。

$$u^*(t)=1^*(t)=\begin{cases}1, & k\geq 0\\ 0, & k<0\end{cases}$$

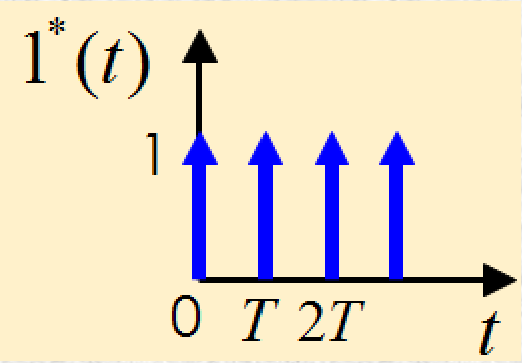
【解】

$$y(k)=h(k)*u(k)=\sum_{j=0}^{k}u(j)h(k-j)$$

卷积和

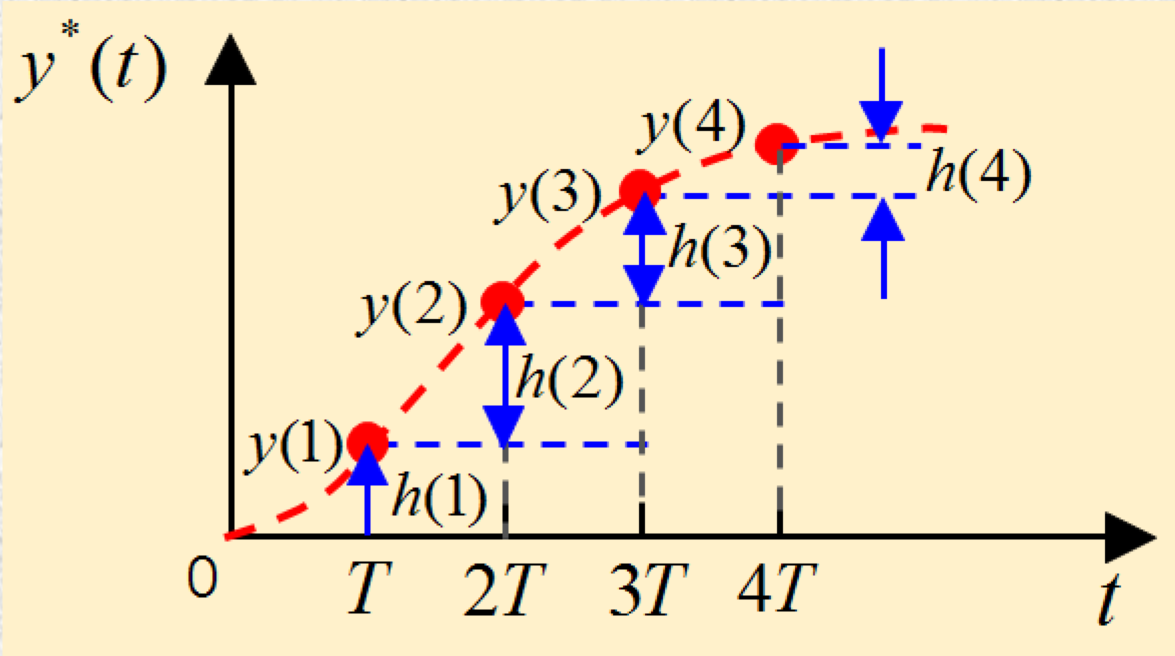
$$=\sum_{j=0}^{k}h(k-j)$$

$$=\sum_{m=0}^{k}h(m)$$



$1^*(t) \longrightarrow$ 线性离散系统 $\xrightarrow{y^*(t)}$ 单位阶跃响应

单位脉冲响应$h(k)$



【注】 若已知某线性离散系统的单位阶跃响应 $y(k)$，也可求得系统的单位脉冲响应序列 $h(k)$。

$$h(k) = y(k) - y(k-1)$$

四. Z变换

1. Z变换的定义

采样过程 $f^*(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} f\left(kT\right)\delta\left(t-kT\right)$

$\Big\Downarrow$ 拉氏变换

$$F^*(s)=\sum_{k=0}^{+\infty} f\left(kT\right)e^{-kTs}$$

引入变量 $z=e^{Ts}$， $F^*(s) \xrightarrow{\text{记为}} F(z)$

$$F^*(s)=\sum_{k=0}^{+\infty} f(kT)e^{-kTs}$$

$$F(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} f(kT)z^{-k}$$

$$\mathbb{Z}[f(t)]=\mathbb{Z}\left[f^*(t)\right]=F(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} f(kT)z^{-k}$$

- 若两个信号具有相同的采样点，则其Z变换相同。Z变换存在必须满足收敛性，即上式极限存在。

2. Z变换的计算

（1）级数求和法（依据Z变换的定义）

【例7-3】

$$\mathbb{Z}[1(t)]=\sum_{k=0}^{+\infty}1(kT)z^{-k}=1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1},\quad |z|>1$$

$$\mathbb{Z}\left[e^{-at}\right]=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-akT}z^{-k}=1+e^{-aT}z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}+\cdots=\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}=\frac{z}{z-e^{-aT}},\quad |z|>e^{-aT}$$

$$\mathbb{Z}\left[e^{-at}\right]=\frac{z}{z-e^{-aT}},\quad |z|>e^{-aT}$$

$$\mathbb{Z}[\sin \omega t]=\mathbb{Z}\left[\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\right]$$

$$=\frac{1}{2j}\left\{\mathbb{Z}\left[e^{j\omega t}\right]-\mathbb{Z}\left[e^{-j\omega t}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega T}}-\frac{z}{z-e^{-j\omega T}}\right)$$

$$=\frac{z\sin \omega T}{z^{2}-2z\cos \omega T+1}$$

（2）部分分式法

已知连续函数$f(t)$的拉氏变换$F(s)$，若可分解为部分分式，则可由Z变换表求得 $f(t)$ 的Z变换。

【例7-4】 求 $F(s)=\dfrac{a}{s(s+a)}$ 的Z变换。

【解】

$$F(z)=\mathbb{Z}[F(s)]=\mathbb{Z}\left[\frac{a}{s(s+a)}\right]=\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right]$$

查表得

$$=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}=\frac{z\left(1-e^{-aT}\right)}{z^2-\left(1+e^{-aT}\right)z+e^{-aT}}$$

（3）留数计算法

已知连续函数 $f(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$ 及其全部极点 s_i，则可用留数公式求得 $f(t)$ 的Z变换：

$$F(z)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}\left[F(s_i)\frac{z}{z-e^{s_iT}}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}s^{m-1}}\left[\left(s-s_i\right)^m F(s)\frac{z}{z-e^{sT}}\right]\right\}_{s=s_i}$$

m — 重极点 s_i 的个数

n — 彼此不等的极点个数

【例7-5】求 $F(s)=\dfrac{a}{s(s+a)}$ 的Z变换。

【解】

$$\mathbb{Z}\left[\frac{a}{s(s+a)}\right]=\left[s\frac{a}{s(s+a)}\frac{z}{z-e^{sT}}\right]_{s=0}+\left[(s+a)\frac{a}{s(s+a)}\frac{z}{z-e^{sT}}\right]_{s=-a}$$

$$=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}$$

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s^2}\right]=\frac{1}{(2-1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(s-0)^2\frac{1}{s^2}\frac{z}{z-e^{sT}}\right]_{s=0}=\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

3. Z变换的性质

（1）叠加原理

$$\mathbb{Z}\left[f_1(t)+f_2(t)\right]=\mathbb{Z}\left[f_1(t)\right]+\mathbb{Z}\left[f_2(t)\right]=F_1(z)+F_2(z)$$

（2）初值定理

$$f(0)=\lim_{z\to+\infty}F(z)$$

（3）移位定理

- 超前一步 $\mathbb{Z}\left[f(k+1)\right]=zF(z)-zf(0)$

- 超前 m 步

$$\mathbb{Z}\left[f(k+m)\right]=z^{m}F(z)-z^{m}f(0)-z^{m-1}f(1)-z^{m-2}f(2)-\cdots-zf(m-1)$$

- 迟后一步 $\mathbb{Z}\left[f(k-1)\right]=z^{-1}F(z)$

- 迟后 m 步 $\mathbb{Z}\left[f(k-m)\right]=z^{-m}F(z)$

(4) 终值定理

$$\lim_{k\to+\infty} f(k) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)F(z)\right]$$

(5) 离散卷积定理

$$y(k) = u(k) * g(k)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(z) = U(z)G(z)$$

4. Z反变换

已知 $F(z)$，求 $f(k)$

方法 $\begin{cases} \text{长除法} \\ \text{部分分式法} \\ \text{留数计算法} \end{cases}$

(1) 长除法

$$F(z) = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \cdots + f(k)z^{-k} + \cdots$$

将 $F(z)$ 展成无穷级数，便可得 $f(k)$ 序列。

【例7-6】 $F(z) = \dfrac{10z}{(z-1)(z-2)}$，求 $f(k)$。

【解】

$$F(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)} \Rightarrow F(z) = \frac{10z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$$

$$\Rightarrow F(z) = 10z^{-1} + 30z^{-2} + 70z^{-3} + 150z^{-4} + \cdots$$

（2）部分分式法

将 $\dfrac{F(z)}{z}$ 展成部分分式后，查表求取Z反变换。

【例7-7】 $F(z)=\dfrac{10z}{(z-1)(z-2)}$ ，求 $f(k)$ 。

【解】 $\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{10}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{-10}{z-1}+\dfrac{10}{z-2}$ $\Rightarrow$ $F(z)=\dfrac{-10z}{z-1}+\dfrac{10z}{z-2}$

$$\xrightarrow[\text{查表}]{} \quad f(k)=-10+2^k\times 10$$

（3）留数计算法

$$f(k)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c}F(z)z^{k-1}\mathrm{d}z$$

$$=\sum \mathrm{Res}\left[F(z)z^{k-1}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{l}\left\{\frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left[\left(z-p_i\right)^m F(z)z^{k-1}\right]\right\}_{z=p_i}$$

【例7-8】 $F(z)=\dfrac{10z}{(z-1)(z-2)}$ ，求 $f(k)$ 。

【解】

$$f(k)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c F(z)z^{k-1}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{10z}{(z-1)(z-2)}z^{k-1}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c \left(\frac{-10z}{z-1}+\frac{10z}{z-2}\right)z^{k-1}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c\left(\frac{-10z}{z-1}+\frac{10z}{z-2}\right)z^{k-1}\mathrm{d}z$$

$$=\mathrm{Res}\left(\frac{-10z}{z-1}\cdot z^{k-1}\right)_{z=1}+\mathrm{Res}\left(\frac{10z}{z-2}\cdot z^{k-1}\right)_{z=2}$$

$$=10\times\left(-1+2^k\right)$$

5. 差分方程的Z变换求解法

【例7-9】 用Z变换法解下列差分方程

$$y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=0$$

初始条件： $y(0)=0$， $y(1)=1$

【解】 根据Z变换的超前移位定理

$$\left[z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)\right]+\left[3zY(z)-3zy(0)\right]+2Y(z)=0$$

代入初始条件，并整理可得

$$Y(z)=\frac{z}{z^2+3z+2}=\frac{z}{z+1}-\frac{z}{z+2}$$

$$\Downarrow$$

$$y(k)=\left(-1\right)^k-\left(-2\right)^k$$

本次课内容总结

- 线性常系数差分方程
- 脉冲响应与卷积和
- Z变换

  定义　　计算　　性质
- Z反变换