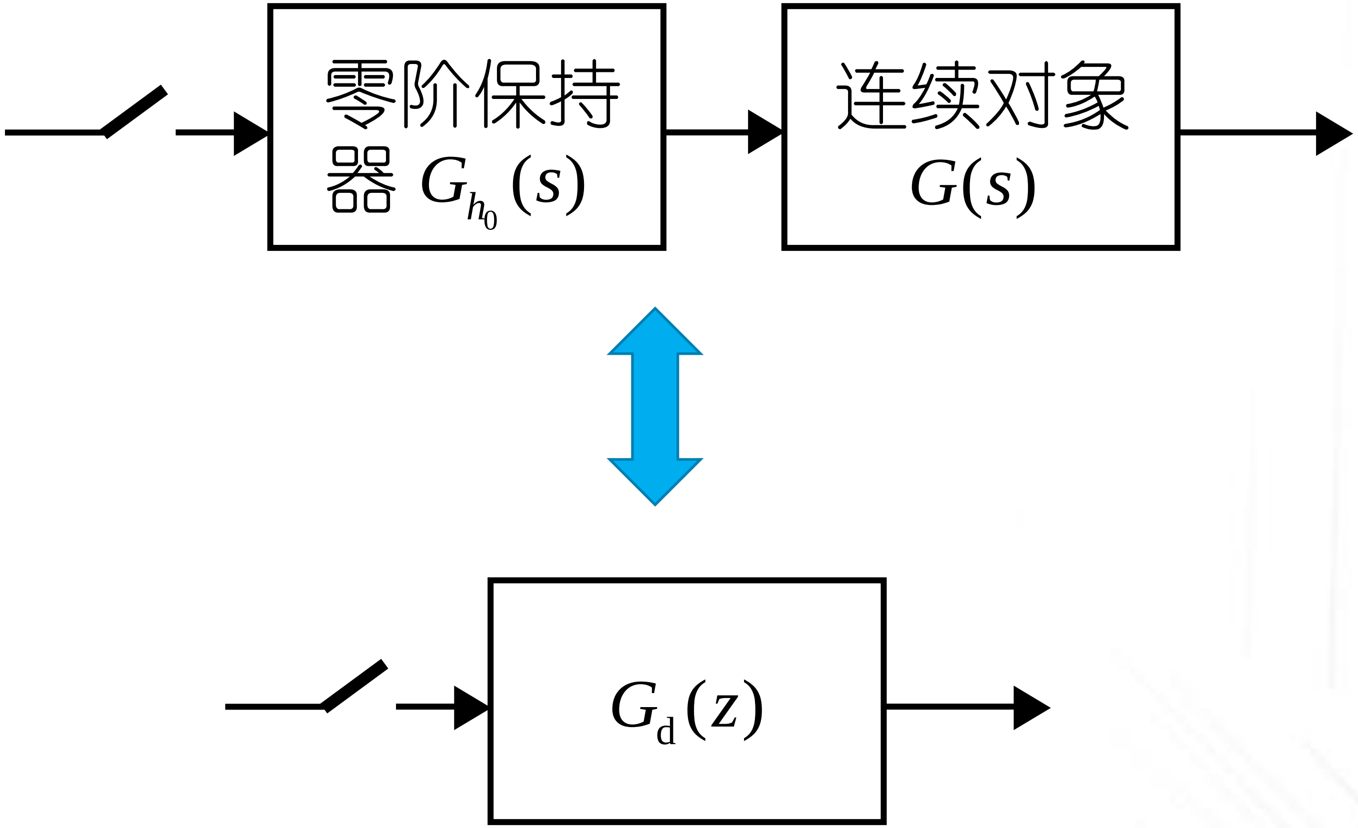
# 三. 带零阶保持器的连续对象的Z传递函数

具有零阶保持器的控制系统的一个重要特征

控制信号在一个采样周期内是恒定的。

## 1. 解析法



$$G_{\mathrm{d}}(z) = \mathbb{Z}\left[G_{h_0}(s)G(s)\right]$$

$$= \mathbb{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}G(s)\right]$$

$$= \mathbb{Z}\left[\frac{1}{s}G(s) - \frac{e^{-Ts}}{s}G(s)\right] = \mathbb{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] - \mathbb{Z}\left[e^{-Ts}\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$= \left(1-z^{-1}\right)\mathbb{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$\boxed{G_{\mathrm{d}}(z) = \left(1-z^{-1}\right)\mathbb{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]}$$

带有零阶保持器的连续对象在单位阶跃序列$1^*(t)$作用下的输出

$$u^*(t)=1^*(t)$$

$$Y(z)=G_d(z)U(z)$$

$$=\left(1-z^{-1}\right)\mathbb{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$=\mathbb{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]=\mathbb{Z}\left[G(s)\frac{1}{s}\right]$$

$$y^*(t)=\mathbb{Z}^{-1}\left[Y(z)\right]$$

**结论**

带有零阶保持器的连续对象在单位阶跃序列$1^*(t)$作用下的输出，等于连续对象在阶跃信号 $1(t)$ 作用下的输出。

【例7-14】 已知连续对象 $G(s)=\dfrac{a}{s+a}$，求 $G_{\mathrm{d}}(z)$ 。

【解】

$$G_{\mathrm{d}}(z)=\left(1-z^{-1}\right)\mathbb{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$=\left(1-z^{-1}\right)\mathbb{Z}\left[\frac{a}{s\left(s+a\right)}\right]$$

$$=\left(1-z^{-1}\right)\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right]$$

$$=\left(1-z^{-1}\right)\frac{1-e^{-aT}}{\left(z-e^{-aT}\right)\left(1-z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}$$

【例7-15】 已知连续对象$G(s)=\dfrac{a}{s+a}e^{-\tau s}$，求 $G_{\mathrm{d}}(z)$ 。

$0<\tau<T$

【解】

$$G_{\mathrm{d}}(z)=\left(1-z^{-1}\right)\mathbb{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$=\left(1-z^{-1}\right)\mathbb{Z}\left[\frac{a}{s\left(s+a\right)}e^{-\tau s}\right]$$

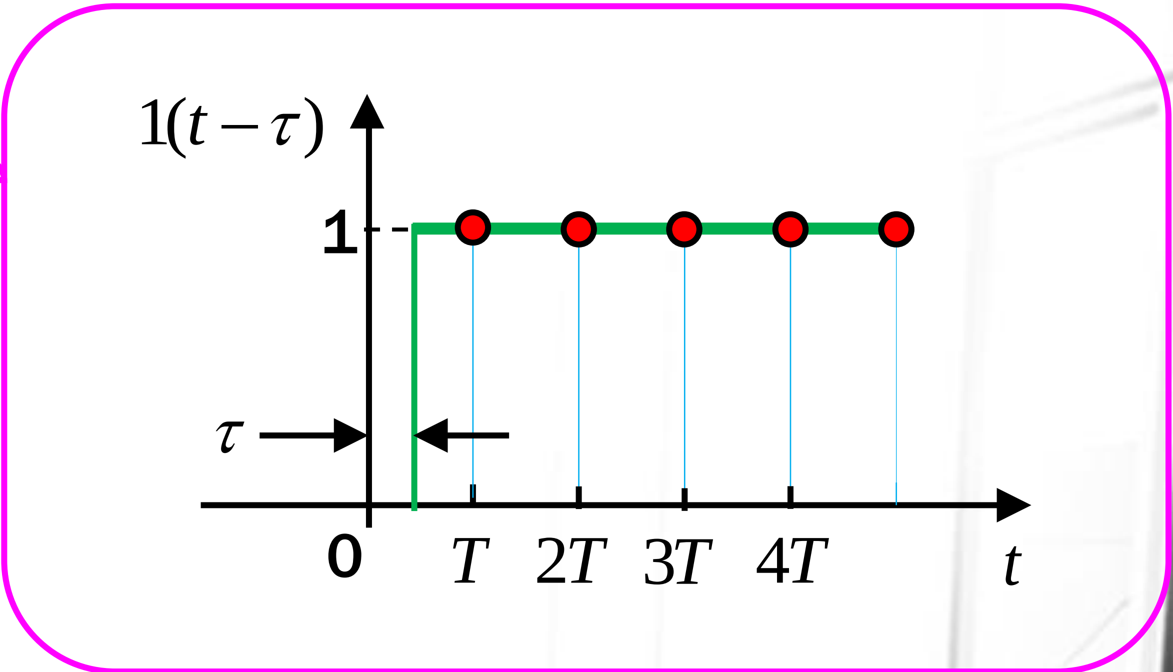
$$=\left(1-z^{-1}\right)\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s}e^{-\tau s}-\frac{1}{s+a}e^{-\tau s}\right]$$

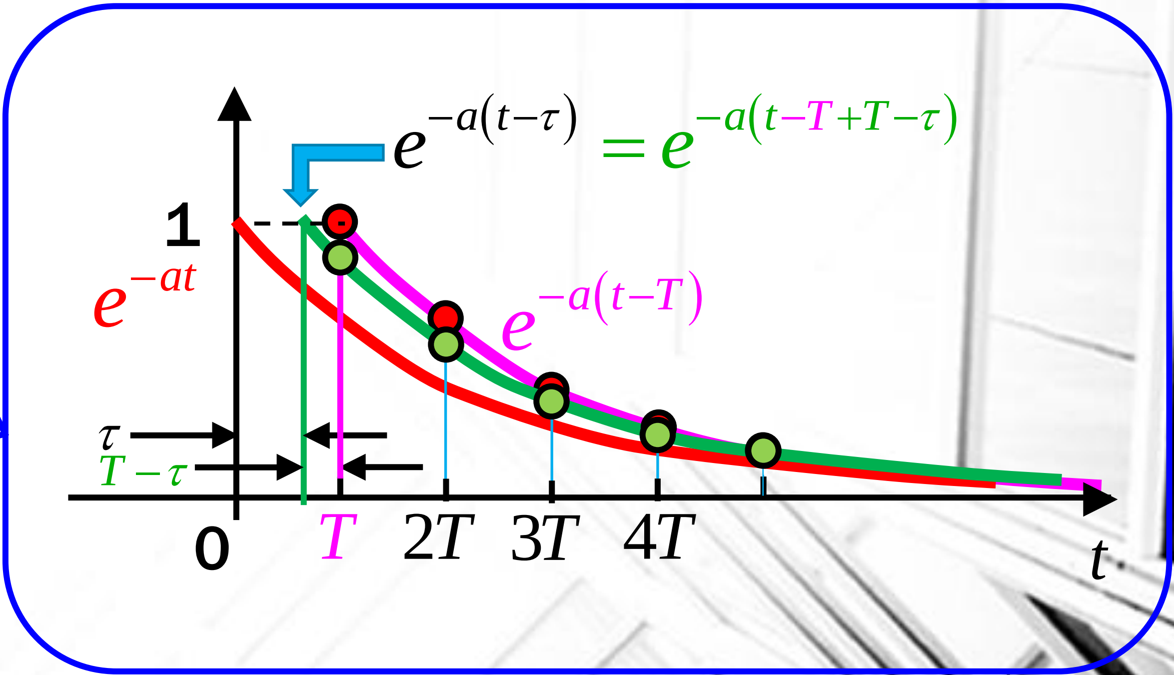
$$=\left(1-z^{-1}\right)\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s}e^{-\tau s}-\frac{1}{s+a}e^{-Ts}e^{(T-\tau)s}\right]$$

$$=\left(1-z^{-1}\right)\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s}e^{-\tau s}-\frac{1}{s+a}e^{-Ts}e^{(T-\tau)s}\right]$$

$$=\left(1-z^{-1}\right)\left[\frac{1}{z-1}-\frac{e^{-a(T-\tau)}}{z-e^{-aT}}\right]$$

$$=\frac{z\left[1-e^{-a(T-\tau)}\right]+\left[e^{-a(T-\tau)}-e^{-aT}\right]}{z\left(z-e^{-aT}\right)}$$



# 几点说明

- 若对象迟后$\tau = nT + \Delta\tau$，$0 < \Delta\tau < T$，则带零阶保持器的对象的Z传递函数为$G_d(z) = z^{-n}G_{d\Delta}(z)$。
- 一阶和二阶环节的$G_d(z)$，分子的阶次比分母的阶次都低一阶，$h(0)=0$，$y(0)=0$，即带有零阶保持器的对象至少是迟后一步才有响应。

*为什么？*

例如一阶连续对象 $G(s)=\dfrac{a}{s+a}$，它的 $G_{\mathrm{d}}(z)$ 为 $G_{\mathrm{d}}(z)=\dfrac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}$

若输入 $U(z)$，则其输出为

$$Y(z)=G_{\mathrm{d}}(z)U(z)=\frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}U(z)=\frac{\left(1-e^{-aT}\right)z^{-1}}{1-e^{-aT}z^{-1}}U(z)$$

$$\left(1-e^{-aT}z^{-1}\right)Y(z)=\left(1-e^{-aT}\right)z^{-1}U(z)$$

$$y(k)-e^{-aT}y(k-1)=\left(1-e^{-aT}\right)u(k-1)$$

$$y(k)=e^{-aT}y(k-1)+\left(1-e^{-aT}\right)u(k-1)$$

这就是迟后一步，$y(0)$ 只能等于零，因为没有 $y(-1)$ 和 $u(-1)$！

- $G_{\mathrm{d}}(z)$ 与采样周期有关，同一个$G(s)$，采样周期$T$ 不同，则 $G_{\mathrm{d}}(z)$ 也不同。

- 分子分母阶次差指的是 $z$ 的阶次差，而不是 $z^{-1}$ 的阶次差。

例如，某对象的**Z**传递函数为

$$G_{\mathrm{d}}(z)=\frac{3.68z^{-1}\left(1+0.718z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0.368z^{-1}\right)}$$

如果按照 $z^{-1}$ 而言，其分子、分母均为 $z^{-1}$ 的二次多项式，分子、分母阶次差显然为零。

*真的是这样吗？*

事实上，

$$G_{\mathrm{d}}(z)=\frac{3.68z^{-1}\left(1+0.718z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0.368z^{-1}\right)}$$

简单的整理 ⬇

$$G_{\mathrm{d}}(z)=\frac{3.68\left(z+0.718\right)}{\left(z-1\right)\left(z-0.368\right)}$$

按照 *Z* 而言，其分子、分母分别为 *Z* 的一次、二次多项式，

分子、分母阶次差显然为**1**，换言之，从该对象的输入到输出

必然迟后一步（或称一拍）。

# 一个小小的规律

所以我们更偏爱关于 $z^{-1}$ 的传递函数形式。

事实上，从形如

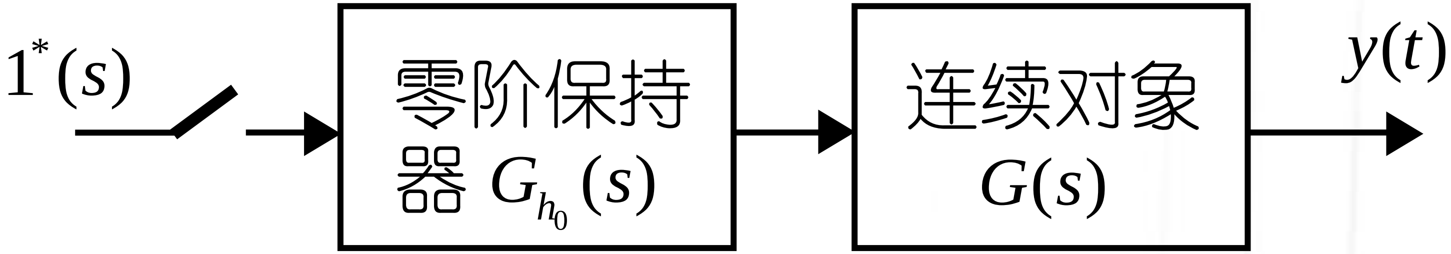
$$G_d(z)=\frac{Kz^{-p}\left(1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_mz^{-m}\right)}{\left(1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_nz^{-n}\right)}$$

的模型，可以直接看出：分子、分母阶次差为 $p$ ，即从输入到输出迟后 $p$ 步。

## 2. 试验法——阶跃响应法

试验法的本质是属于系统辨识问题，即依据对象的输入输出数据建模的方法。

1




或

2

$$y(t) \xrightarrow{\text{采样}} y(k)$$

3

根据离散卷积定理求 $h(k)$：

$$h(k) = y(k) - y(k-1)$$

4

得到带有保持器的连续对象的Z传递函数

$$G_{\mathrm{d}}(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \cdots$$

## 5 对上述无穷级数近似求和

$$G_{\mathrm{d}}(z)=h(0)+h(1)z^{-1}+h(2)z^{-2}+\cdots+\boxed{h(k)z^{-k}+h(k+1)z^{-(k+1)}+\cdots}$$

等于零

$k>i$ （一般 $i=3\sim 4$ ）

近似看成等比级数

系数的公比为 $p=\dfrac{h(k+1)}{h(k)}$

级数的公比为 $pz^{-1}$

$$G_{\mathrm{d}}(z)=\underset{0}{h(0)}+\underbrace{h(1)z^{-1}+h(2)z^{-2}+\cdots+h(k-1)z^{-(k-1)}}_{\text{没有规律}}+\underbrace{h(k)z^{-k}+h(k+1)z^{-(k+1)}+\cdots}_{\text{等比级数求和}}$$

$$\frac{h(k)z^{-k}}{1-pz^{-1}}$$

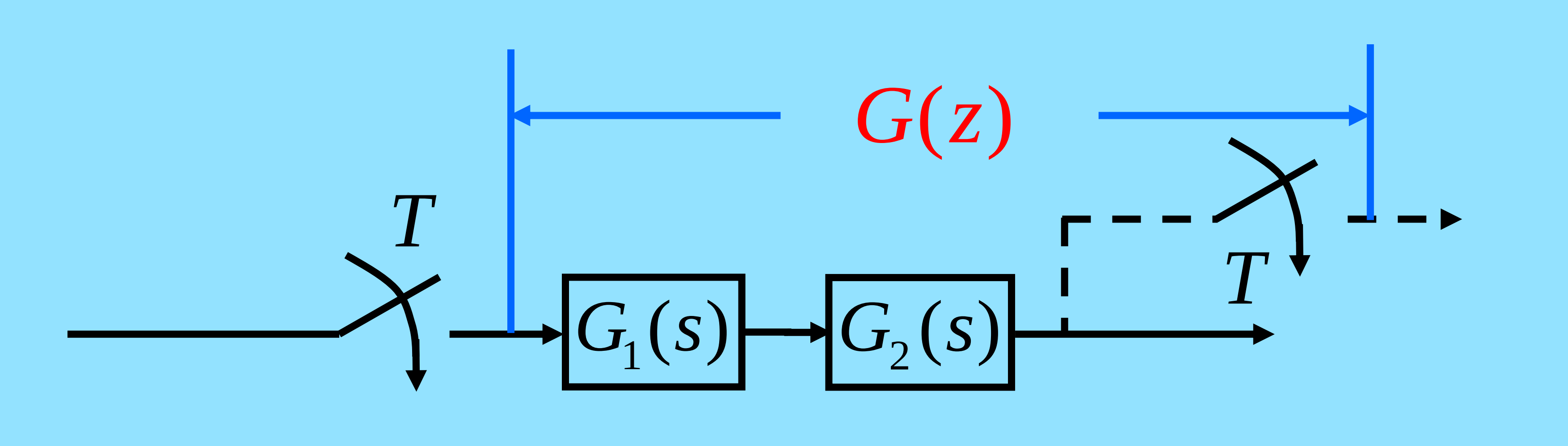
$$G_{\mathrm{d}}(z)=h(1)z^{-1}+h(2)z^{-2}+\cdots+h(k-1)z^{-(k-1)}+\frac{h(k)z^{-k}}{1-pz^{-1}}$$

$$=\frac{h(1)\left(1-pz^{-1}\right)z^{-1}+h(2)\left(1-pz^{-1}\right)z^{-2}+\cdots+h(k-1)\left(1-pz^{-1}\right)z^{-(k-1)}+h(k)z^{-k}}{1-pz^{-1}}$$

# 四. 数字控制系统的闭环Z传递函数

## 1. 串并联连续环节的Z传递函数

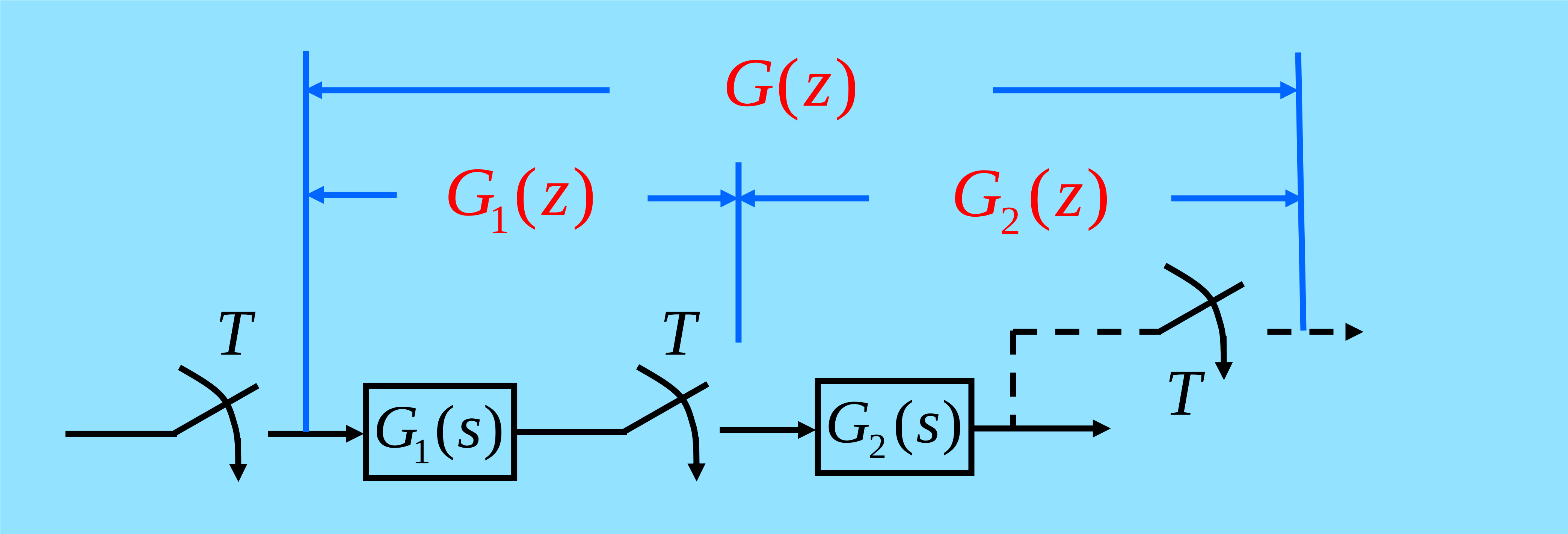
1 若干连续环节串联，之间无采样开关




$$G(z)=\mathbb{Z}\left[G_1(s)G_2(s)\right]\triangleq G_1G_2(z)$$

推广：$G(z)=Z\left[G_1(s)G_2(s)\cdots G_n(s)\right]\triangleq G_1G_2\cdots G_n(z)$

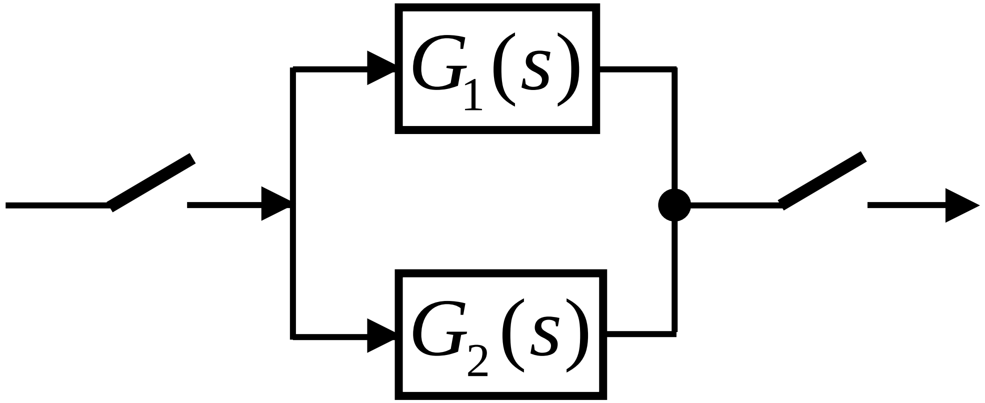
## 2 若干连续环节串联，之间有采样开关




$$G(z) = G_1(z)G_2(z)$$

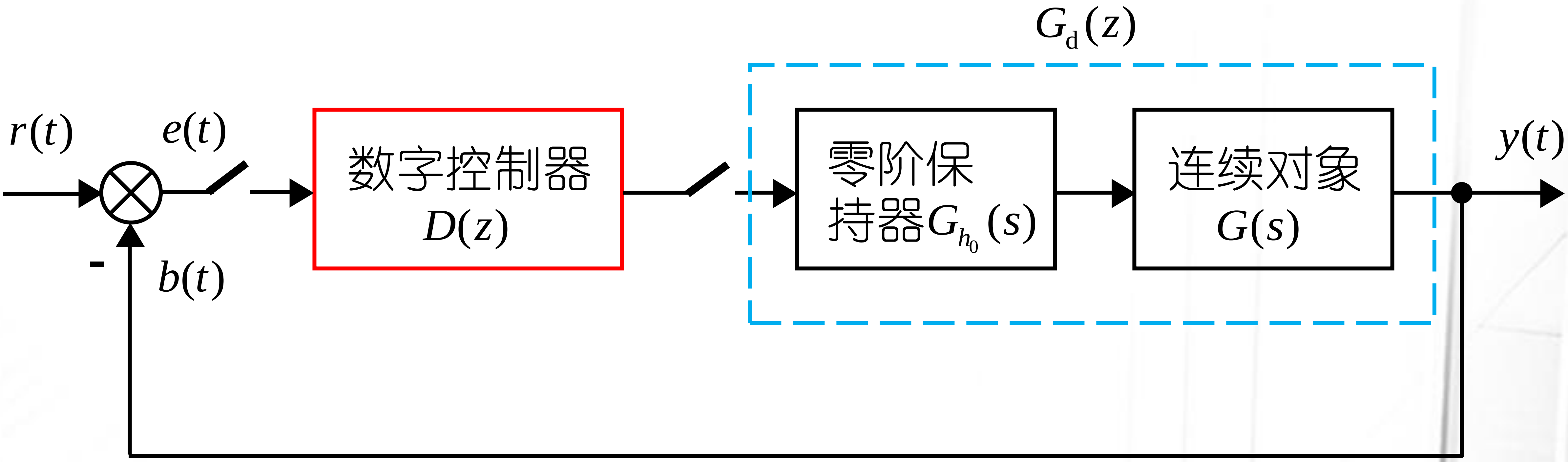
**推广：** $G(z) = G_1(z)G_2(z)\cdots G_n(z)$

## 3 若干连续环节并联

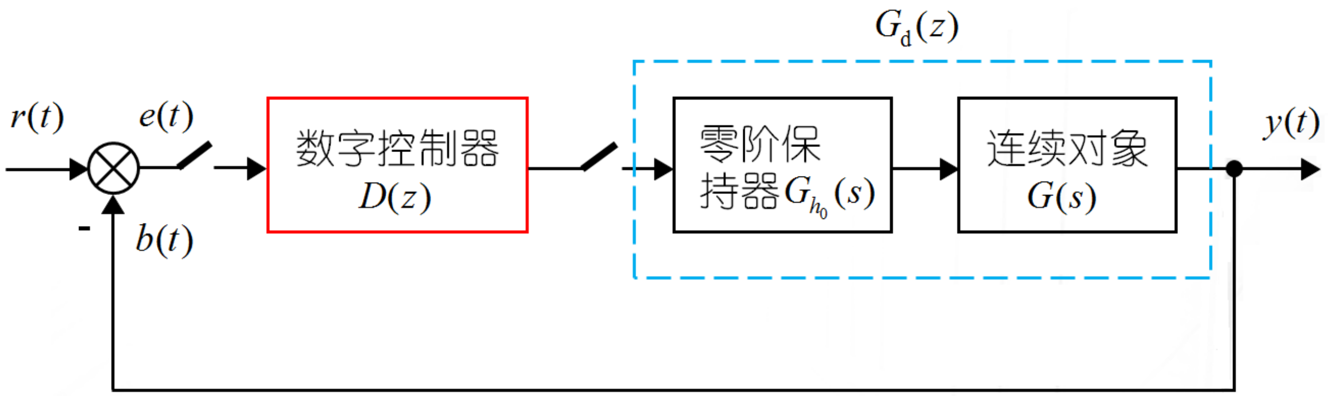



$$G(z) = \mathbb{Z}\left[G_1(s) + G_2(s)\right] = G_1(z) + G_2(z)$$

## 2. 闭环Z传递函数（单位反馈）



# 计算步骤




1. 计算带零阶保持器的连续对象的Z传递函数 $G_d(z)$

2. 求取前向通道的Z传递函数：$\dfrac{Y(z)}{E(z)} = D(z)G_d(z)$

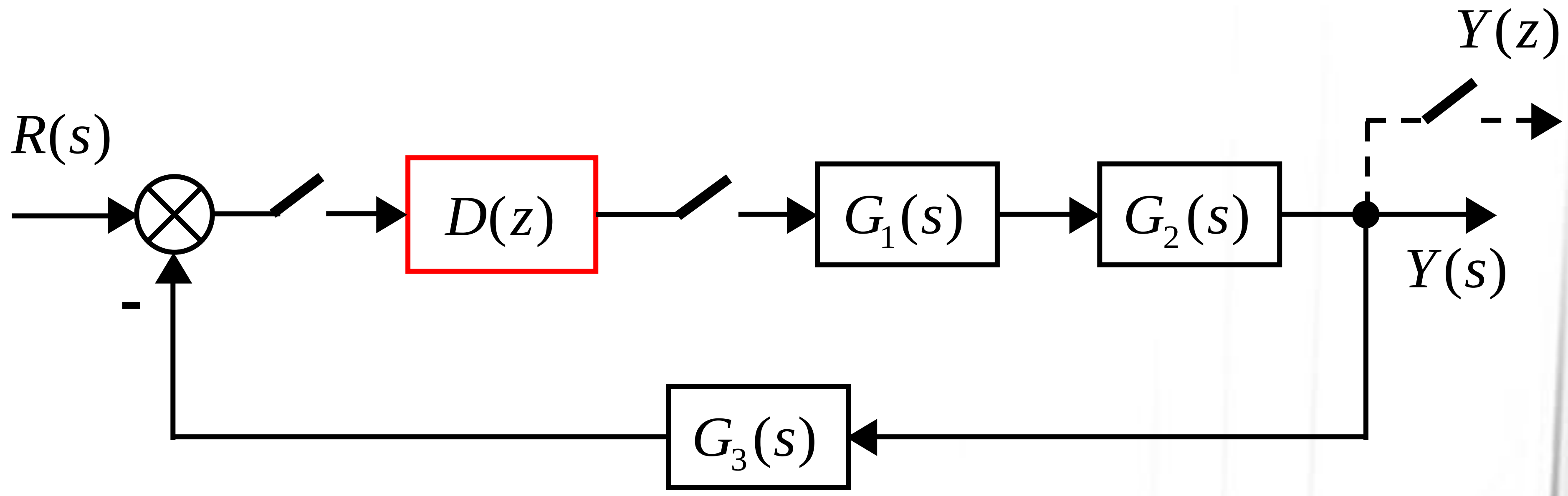
3. 求取误差Z传递函数：$H_e(z) = \dfrac{E(z)}{R(z)} = \dfrac{1}{1+D(z)G_d(z)}$

4. 求取开环Z传递函数（单位反馈）：$\dfrac{B(z)}{E(z)} = D(z)G_d(z)$

5. 求取闭环Z传递函数：$H(z) = \dfrac{Y(z)}{R(z)} = \dfrac{D(z)G_d(z)}{1+D(z)G_d(z)} = 1 - H_e(z)$

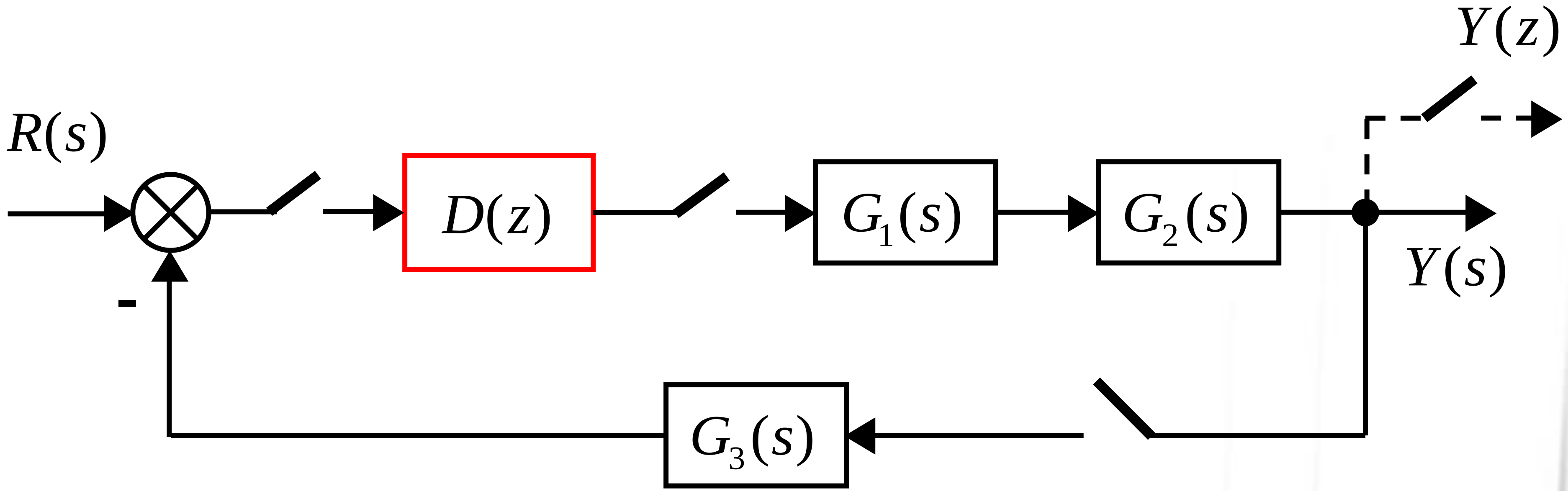
# 几种闭环系统的Z传递函数

1



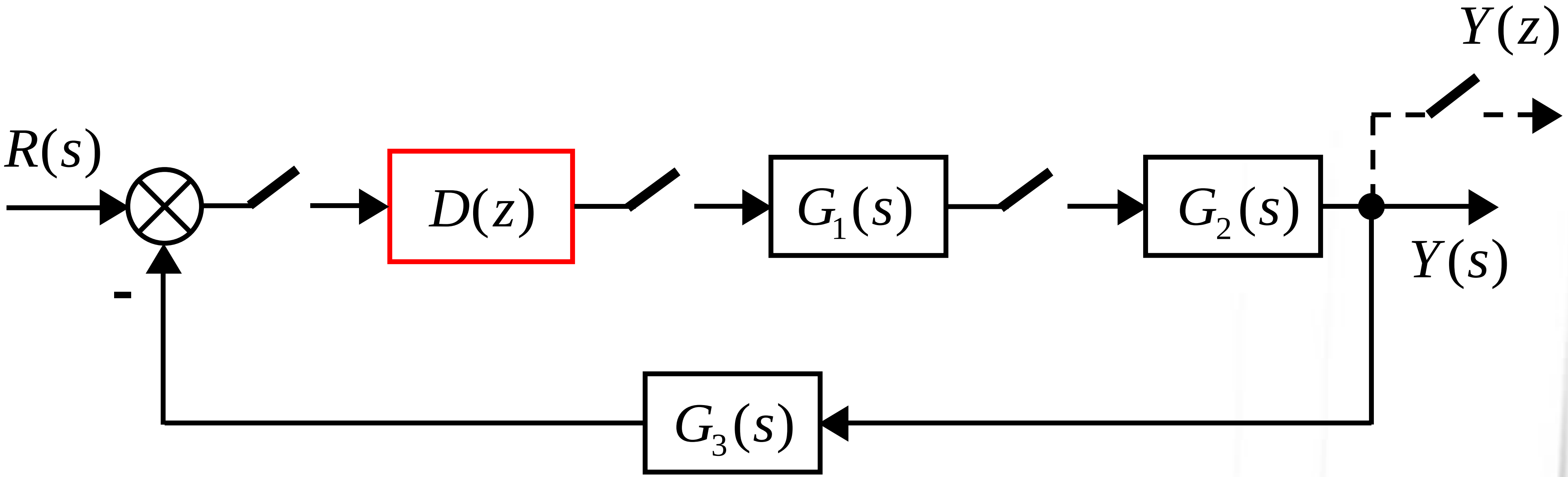

$$H(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{D(z)G_1G_2(z)}{1+D(z)G_1G_2G_3(z)}$$

2



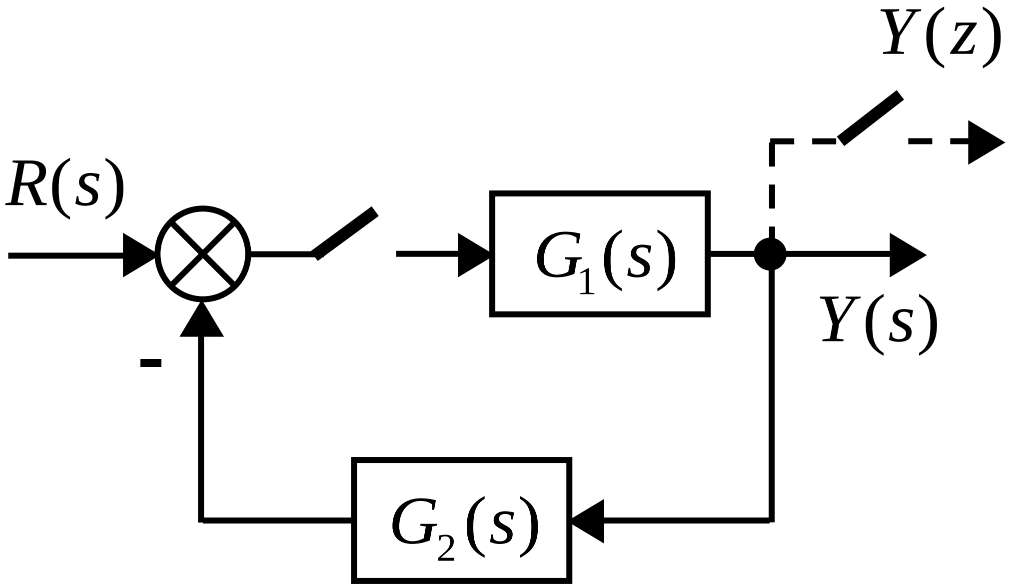

$$H(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{D(z)G_1G_2(z)}{1+D(z)G_1G_2(z)G_3(z)}$$

3




$$H(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{D(z)G_1(z)G_2(z)}{1+D(z)G_1(z)G_2G_3(z)}$$

4



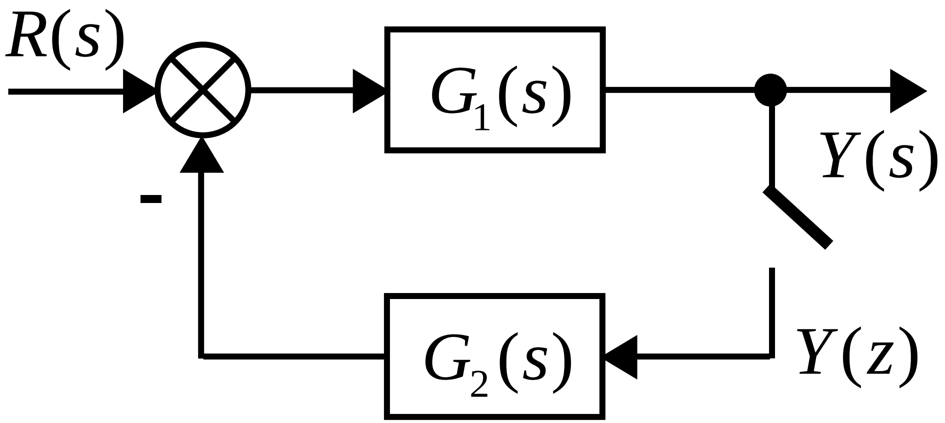

$$H(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z)}{1 + G_1G_2(z)}$$

求得闭环**Z**传递函数以后，就可以得到输出

$$Y(z)=H(z)R(z)$$

$$y(k)=\mathbb{Z}^{-1}\left[Y(z)\right]$$

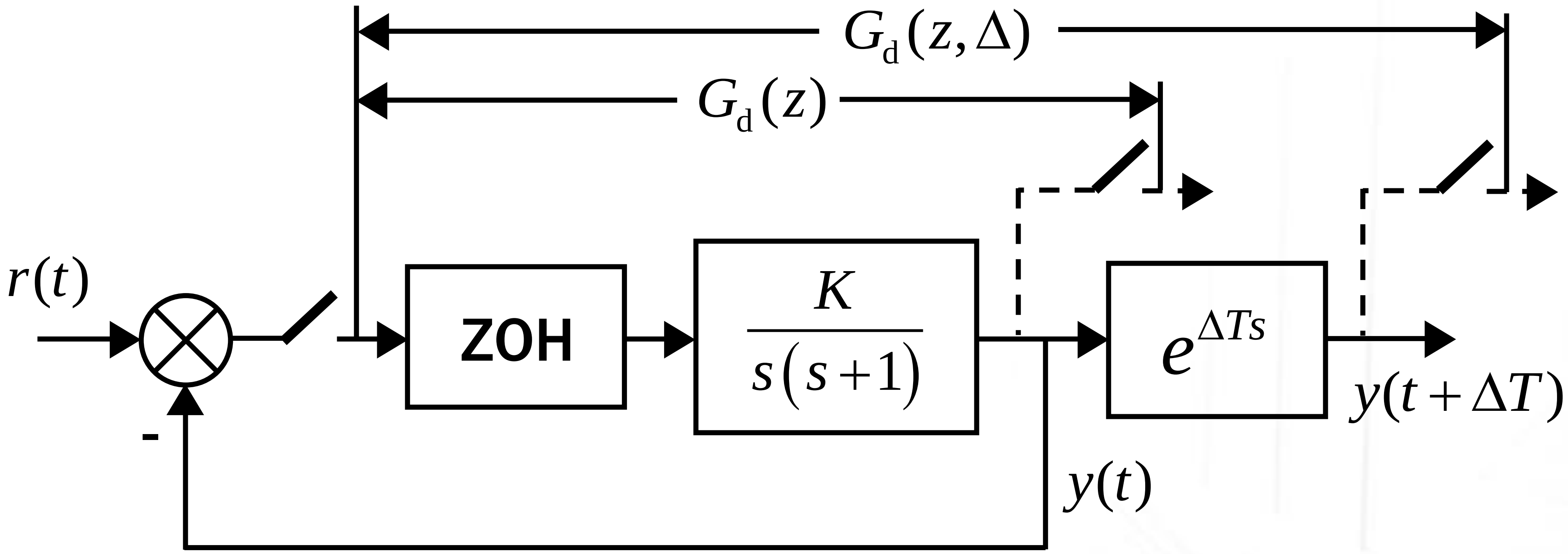
5




$$Y(z) = \frac{RG_1(z)}{1 + G_1G_2(z)}$$

【例7-16】 求闭环Z传递函数及单位阶跃响应，采样周期为

$T=1$秒。



【解】

1 计算 $G_{\mathrm{d}}(z)$

$$G_{\mathrm{d}}(z)=\left(1-z^{-1}\right)\mathbb{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$=\left(1-z^{-1}\right)\mathbb{Z}\left[\frac{K}{s^{2}\left(s+1\right)}\right]$$

$$=K\left(1-z^{-1}\right)\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s^{2}}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right]$$

$$=K\left(1-z^{-1}\right)\left[\frac{Tz}{\left(z-1\right)^{2}}-\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z-e^{-T}}\right]$$

$$= K\left(1-z^{-1}\right)\left[\frac{Tz}{\left(z-1\right)^{2}}-\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z-e^{-T}}\right]$$

$K=1 \quad T=1$

$$=\left(1-z^{-1}\right)\left[\frac{z}{\left(z-1\right)^{2}}-\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z-e^{-1}}\right]$$

$$=\frac{0.368z+0.264}{\left(z-1\right)\left(z-0.368\right)}$$

2 计算闭环Z传递函数 $H(z)$

$$H(z)=\frac{G_{\mathrm{d}}(z)}{1+G_{\mathrm{d}}(z)}=\frac{0.368z+0.264}{z^2-z+0.632}$$

3 求单位阶跃响应的采样点输出

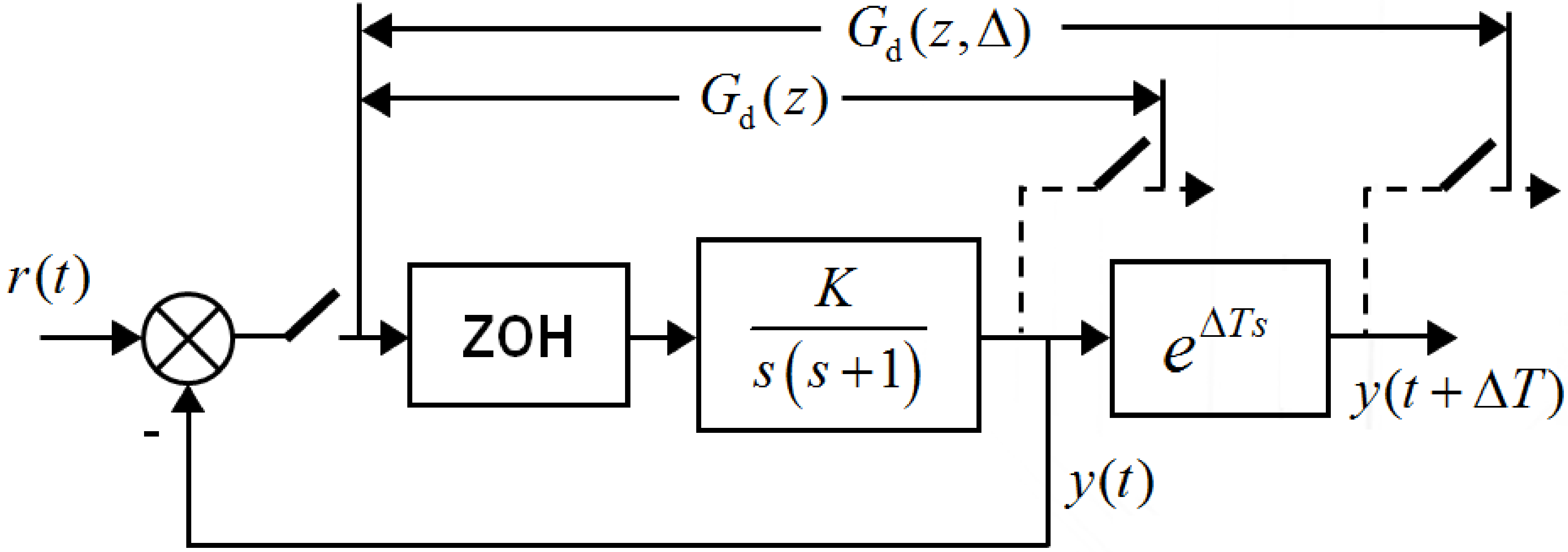
$$Y(z)=H(z)R(z)=\frac{0.368z+0.264}{z^2-z+0.632}\cdot\frac{z}{z-1}$$

长除法

$$=0.368z^{-1}+z^{-2}+1.3994z^{-3}+1.3994z^{-4}+\cdots$$

## 4 运用超前改进Z变换求采样点之间任意时刻的响应

$$Y(z,\Delta)=G_{\mathrm{d}}(z,\Delta)E(z)=G_{\mathrm{d}}(z,\Delta)\frac{1}{1+G_{\mathrm{d}}(z)}R(z)$$



$$G_{\mathrm{d}}(z,\Delta)=\left(1-z^{-1}\right)\mathbb{Z}\left[\frac{G(s)}{s}e^{\Delta Ts}\right]$$

$$=\left(1-z^{-1}\right)\mathbb{Z}\left[\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right)e^{\Delta Ts}\right]$$

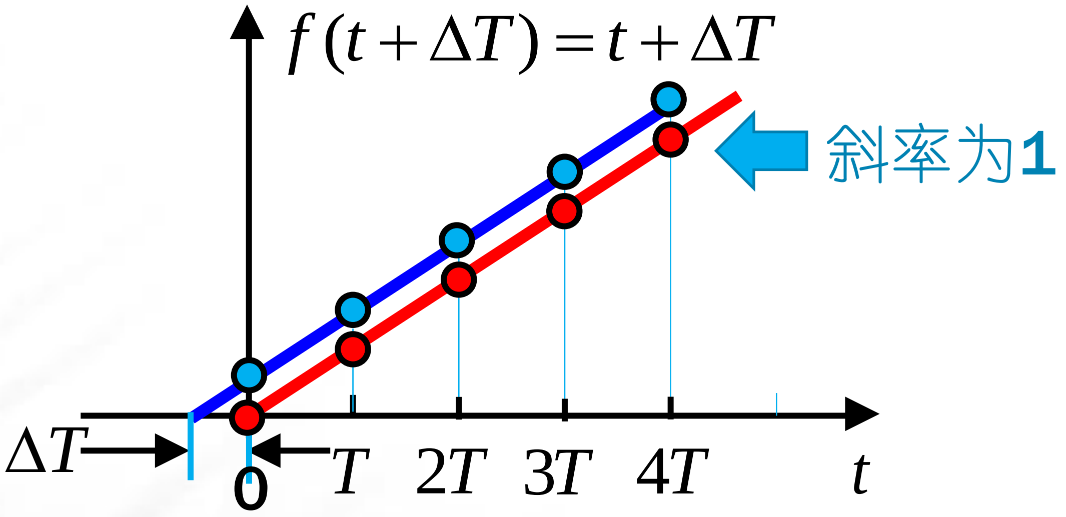
$$=\left(1-z^{-1}\right)\left\{\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s^2}e^{\Delta Ts}\right]-\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s}e^{\Delta Ts}\right]+\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s+1}e^{\Delta Ts}\right]\right\}$$

先看看 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s^2}e^{\Delta Ts}\right]$ 如何计算？

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s^2}e^{\Delta Ts}\right]=\mathbb{Z}[t+\Delta T]$$

单位斜坡信号来了个时间超前！

超前 $\Delta T<T$，即超前不到一步。




超前 $\Delta T$，所有采样点均未丢失，但幅值均有抬高，每步均抬高 $\Delta T$。

相当于一个单位斜坡信号的Z变换叠加上一个幅值为 $\Delta T$ 的常值（阶跃信号）的Z变换。

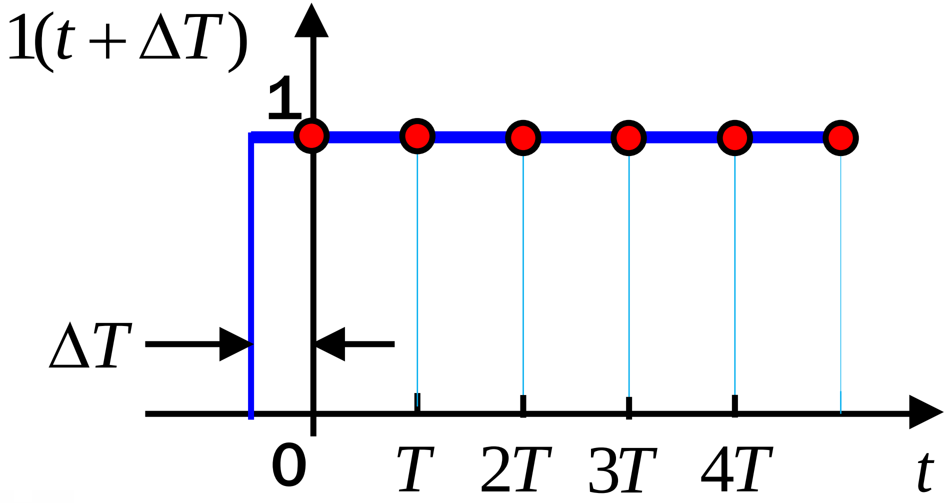
$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s^2}e^{\Delta Ts}\right]=\mathbb{Z}\left[t+\Delta T\right]=\mathbb{Z}\left[t\right]+\mathbb{Z}\left[\Delta T\right]=\mathbb{Z}\left[t\right]+\Delta T\cdot\mathbb{Z}\left[1(t)\right]$$

$$=\frac{Tz}{\left(z-1\right)^2}+\Delta T\cdot\frac{z}{z-1}$$

$$\xrightarrow{T=1}\quad=\frac{z}{\left(z-1\right)^2}+\Delta\cdot\frac{z}{z-1}$$

再看看 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s}e^{\Delta Ts}\right]$ 如何计算？

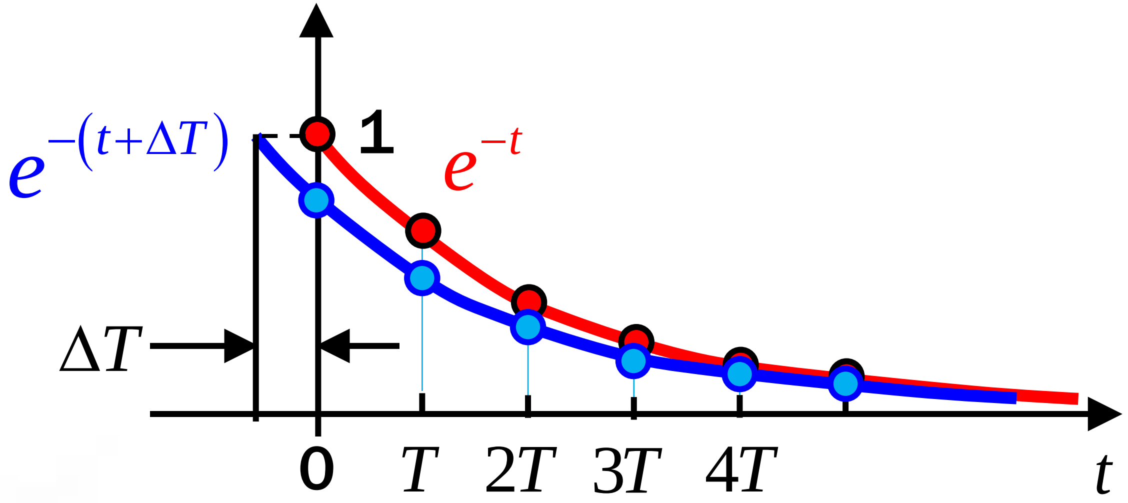
$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s}e^{\Delta Ts}\right]=\frac{z}{z-1}$$



最后看看 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s+1}e^{\Delta Ts}\right]$ 如何计算？

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s+1}e^{\Delta Ts}\right]=e^{-\Delta T}\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s+1}\right]=e^{-\Delta T}\mathbb{Z}\left[e^{-t}\right]$$

$$=e^{-\Delta T}\cdot\frac{z}{z-e^{-T}}$$




$T=1$

$$=\frac{e^{-\Delta}z}{z-e^{-1}}$$

$$G_{\mathrm{d}}(z,\Delta)=\left(1-z^{-1}\right)\left\{\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s^{2}}e^{\Delta Ts}\right]-\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s}e^{\Delta Ts}\right]+\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s+1}e^{\Delta Ts}\right]\right\}$$

$$=\left(1-z^{-1}\right)\left\{\left[\frac{z}{\left(z-1\right)^{2}}+\Delta\cdot\frac{z}{z-1}\right]-\frac{z}{z-1}+\frac{e^{-\Delta}z}{z-e^{-1}}\right\}$$

最终可以求得 $Y(z,\Delta)$，再利用长除法求得 $y(k)$ 。

## 课后思考题2

具有零阶保持器的控制系统的一个重要特征：

控制信号在一个采样周期内是恒定的。

为什么？

## 课后思考题3

带有零阶保持器的连续对象在单位阶跃序列 $1^*(t)$ 作用下的输出，等于连续对象在阶跃信号 $1(t)$ 作用下的输出。

为什么？

# 本次课内容总结

- 带ZOH的连续对象的Z传递函数
- 数字控制系统的闭环Z传递函数