9.5 带状态观测器的状态反馈系统

状态观测器解决了受控系统的状态重构问题，可使状态反馈系统得以实现。

利用观测器进行状态估值反馈的系统

有何异同?

直接状态反馈系统

9.5.1 带观测器的状态反馈系统的结构

能控能观的受控系统 $\sum_0 = (A, B, C)$

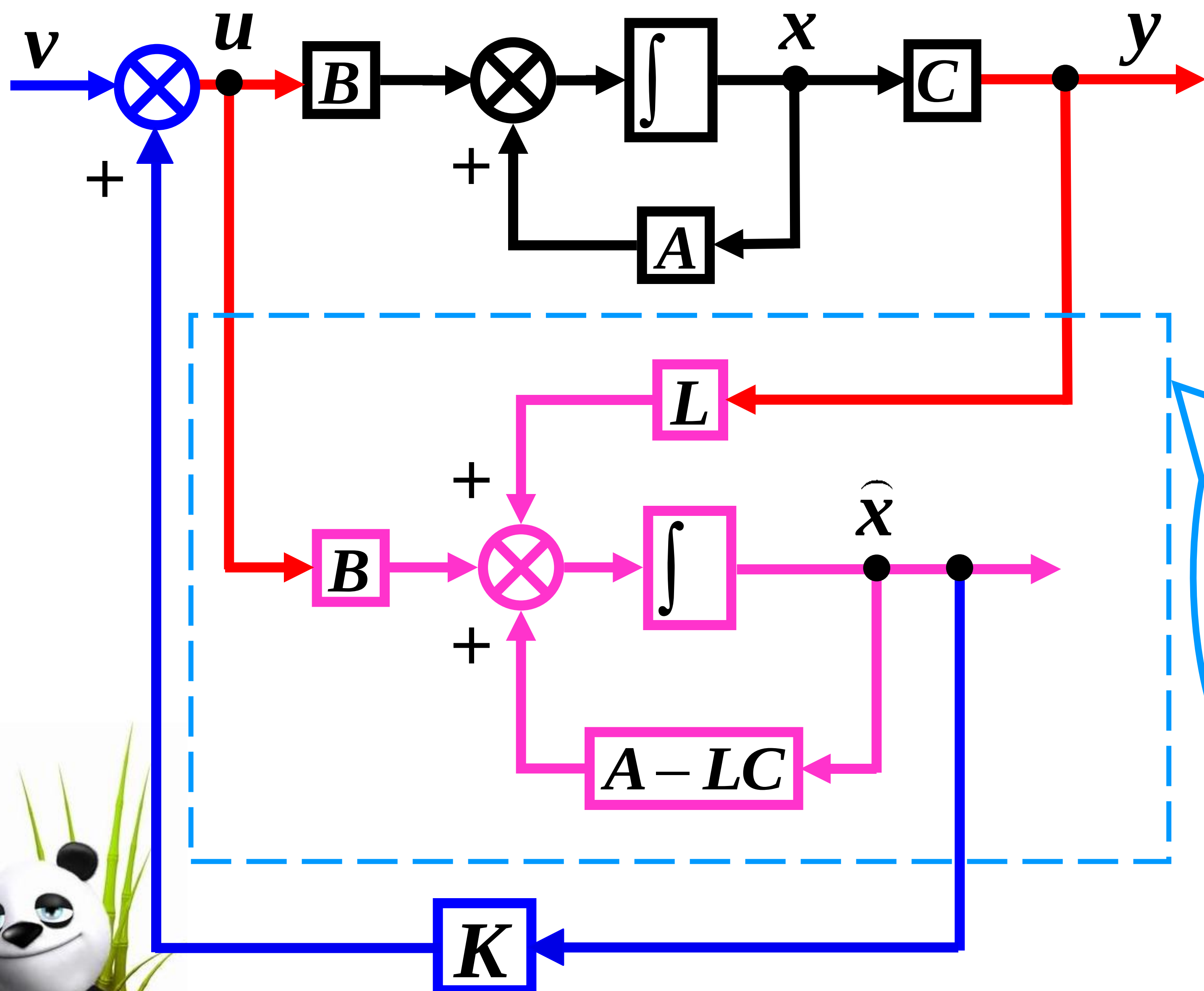
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \text{（1）}$$

状态观测器 Σ_L

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Ly + Bu \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad \text{（2）}$$

反馈控制律

$$u = K\hat{x} + v \quad \text{（3）}$$



带全维状态观测器的状态反馈闭环系统之模拟结构图

式（1）、（2）、（3）

$$\dot{x} = Ax + BK\hat{x} + Bv$$

$$\dot{\hat{x}} = LCx + \left(A - LC + BK\right)\hat{x} + Bv$$

$$y = Cx$$

2n 维的闭环控制系统 Σ_{LK}

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ LC & A - LC + BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\Sigma_{\mathrm{LK}}\left(A_c, B_c, C_c\right)$

9.5.2 带观测器的闭环系统的基本特性

一. 闭环极点配置的分离性

闭环系统的极点包括由 Σ_0 直接状态反馈系统 $\sum_K=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 的极点和观测器 Σ_L 的极点两部分。但是两者相互独立，可以分离进行。

状态估计误差 $\tilde{x} = x - \hat{x}$

引入等效变换

$$\left[\begin{array}{c:c} I & 0 \\ \hdashline I & -I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x \\ \hdashline \hat{x} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} x \\ \hdashline x - \hat{x} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} x \\ \hdashline \tilde{x} \end{array}\right]$$

令变换矩阵为

$$T = \left[\begin{array}{c:c} I & 0 \\ \hdashline I & -I \end{array}\right]$$

$$T^{-1}=\left[\begin{array}{c:c} I & 0 \\ \hdashline I & -I \end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{c:c} I & 0 \\ \hdashline I & -I \end{array}\right]=T$$

Σ_{LK} 线性变换 $\bar{\Sigma}_{\mathrm{LK}}$

$\Sigma_{\mathrm{LK}}\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}},\boldsymbol{B}_{\mathrm{c}},\boldsymbol{C}_{\mathrm{c}}\right)$

$\bar{\Sigma}_{\mathrm{LK}}\left(\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{c}},\bar{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{c}},\bar{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{c}}\right)$

$$\bar{A}_c = T^{-1} A_c T$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline I & -I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} A & BK \\ \hline LC & A - LC + BK \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline I & -I \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} A + BK & BK \\ \hline 0 & A - LC \end{array}\right]$$

$$\bar{B}_c = T^{-1} B_c$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline I & -I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} B \\ \hline B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} B \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

$$\bar{C}_c = C_c T$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} C & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline I & -I \end{array}\right]$$

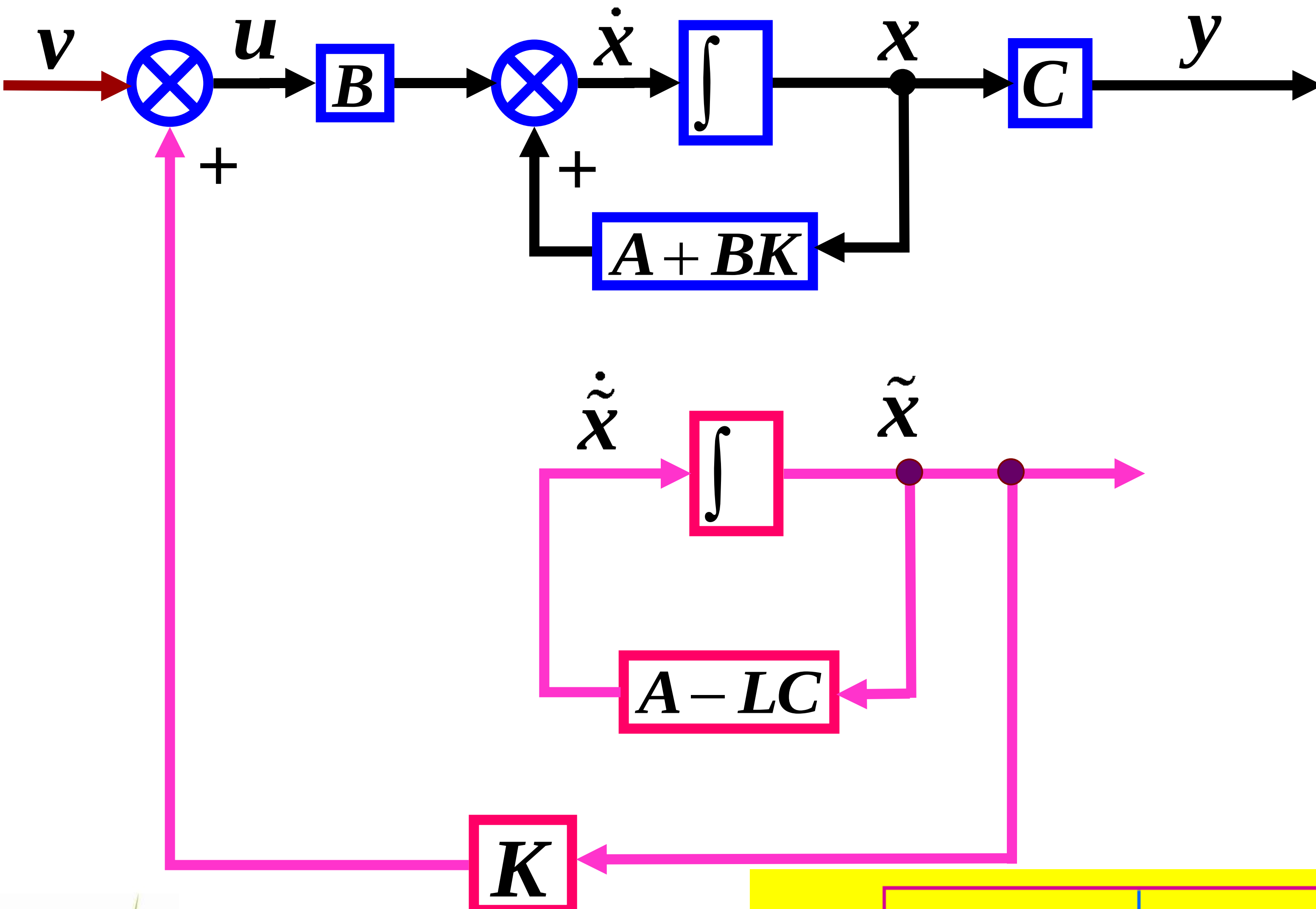
$$= \left[\begin{array}{c|c} C & 0 \end{array}\right]$$

$$\bar{A}_c = \left[\begin{array}{c:c} A+BK & BK \\ \hdashline 0 & A-LC \end{array}\right] \qquad \bar{B}_c = \left[\begin{array}{c} B \\ \hdashline 0 \end{array}\right]$$

$$\bar{C}_c = \left[\begin{array}{c:c} C & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A+BK)x + BK\tilde{x} + Bv \\ \dot{\tilde{x}} = (A-LC)\tilde{x} \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\bar{\Sigma}_{LK}\left(\bar{A}_c, \bar{B}_c, \bar{C}_c\right)$$



带观测器状态反馈系统的等效模拟结构图

$$\begin{cases} \dot{x} = (A+BK)x + BK\tilde{x} + Bv \\ \dot{\tilde{x}} = (A-LC)\tilde{x} \\ y = Cx \end{cases}$$

线性变换 $\Rightarrow$ 特征多项式不变

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}\right)=\det\left(\lambda \boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{c}}\right)$$

$$=\det\left[\begin{array}{c:c} \lambda \boldsymbol{I}-\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\right) & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \\ \hdashline \boldsymbol{0} & \lambda \boldsymbol{I}-\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\right) \end{array}\right]$$

$$=\det\left[\lambda \boldsymbol{I}-\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\right)\right]\det\left[\lambda \boldsymbol{I}-\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\right)\right]$$

$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\right)$ $\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\right)$

由观测器构成状态反馈的闭环系统的极点等于直接状态反馈$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})$的极点和状态观测器$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC})$的极点之总和，而且两者相互独立。

因此，只要系统$\sum_0=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$的状态能控、能观，则系统的状态反馈矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和观测器增益矩阵 $\boldsymbol{L}$ 可分别进行设计。这个性质称为闭环极点配置的**分离性**，也称为线性系统的**分离原理**。

二. 传递函数矩阵的不变性

由观测器构成的状态反馈系统和状态直接反馈系统具有相同的传递函数矩阵。

分块矩阵求逆公式

$$Q=\left[\begin{array}{c:c} R & S \\ \hdashline 0 & T \end{array}\right]$$

$$Q^{-1}=\left[\begin{array}{c:c} R & S \\ \hdashline 0 & T \end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{c:c} R^{-1} & -R^{-1}ST^{-1} \\ \hdashline 0 & T^{-1} \end{array}\right]$$

$\bar{\Sigma}_{\mathrm{LK}}\left(\bar{A}_{\mathrm{c}},\bar{B}_{\mathrm{c}},\bar{C}_{\mathrm{c}}\right)$ 的传递函数矩阵：

$$W(s)=\bar{C}_{\mathrm{c}}\left(sI-\bar{A}_{\mathrm{c}}\right)^{-1}\bar{B}_{\mathrm{c}}$$

$$=\left[C \;\vdots\; 0\right]\left[\begin{array}{c:c} sI-(A+BK) & -BK \\ \hdashline 0 & sI-(A-LC) \end{array}\right]^{-1}\left[\begin{array}{c} B \\ \hdashline 0 \end{array}\right]$$

$$=\left[C \;\vdots\; 0\right]\left[\begin{array}{c:c} \left[sI-(A+BK)\right]^{-1} & \left[sI-(A+BK)\right]^{-1}BK\left[sI-(A-LC)\right]^{-1} \\ \hdashline 0 & \left[sI-(A-LC)\right]^{-1} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} B \\ \hdashline 0 \end{array}\right]$$

$$=C\left[sI-(A+BK)\right]^{-1}B$$

事实上，由观测器构成的状态反馈闭环系统是不完全能控的。但是由于不能控的分状态是估计误差$\tilde{x}$，所以这种不完全能控性并不影响系统的正常工作。

三. 观测器反馈与直接状态反馈的等效性

$$\begin{cases} \dot{x} = (A+BK)x + BK\tilde{x} + Bv \\ \dot{\tilde{x}} = (A-LC)\tilde{x} \\ y = Cx \end{cases}$$

选择 L $(A-LC)$ 的特征值均具有负实部

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{x} = 0$$

$$t \to \infty$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A+BK)x + BK\tilde{x} + Bv \\ \dot{\tilde{x}} = (A-LC)\tilde{x} \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\dot{x} = (A+BK)x + Bv$$

$$y = Cx$$

这表明，带观测器的状态反馈系统只有当 $t \to \infty$，即进入稳态时，才会与直接状态反馈系统完全等价。

但是可以通过选择 L 来加速 $\tilde{x} \to 0$，即 $\hat{x}$ 渐近于 x 的速度。

9.5.3 带观测器的闭环系统设计举例

【例9-14】 受控系统的模型

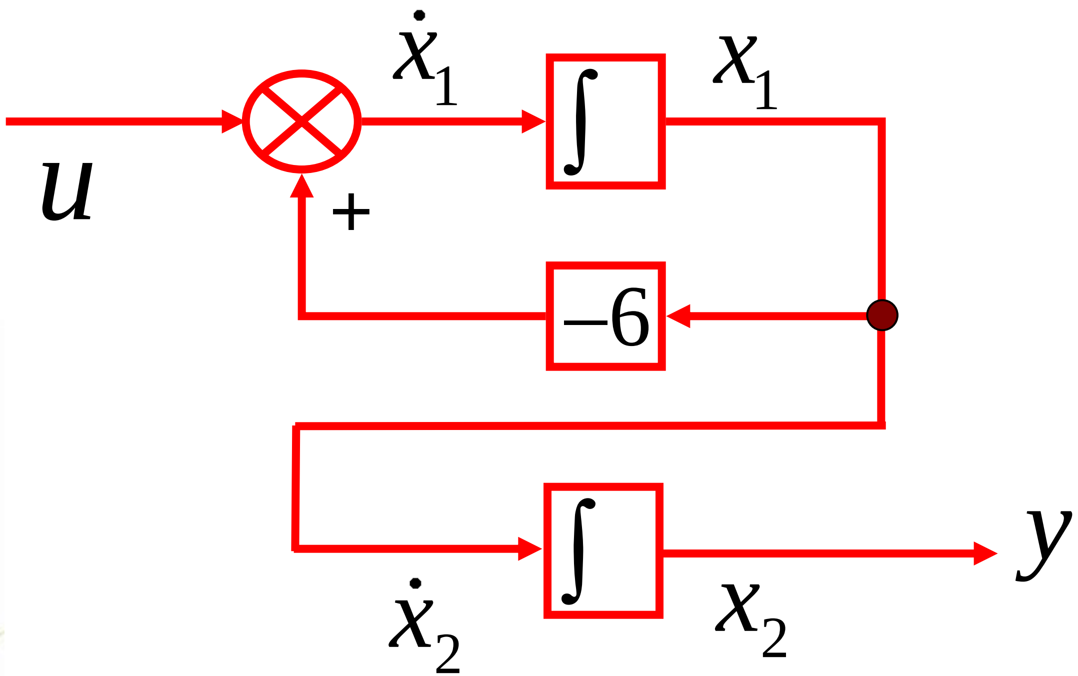
$$W_0(s)=\frac{1}{s(s+6)}$$

假定该系统的两个状态在物理上不可测量，试设计适当的状态反馈控制律及状态观测器，并对闭环系统进行数字仿真。

【解】

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-6 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\qquad d=0$$



开环系统状态结构图

假定期望闭环极点为

$$\lambda_1 = -4 + 6j \qquad \lambda_2 = -4 - 6j$$

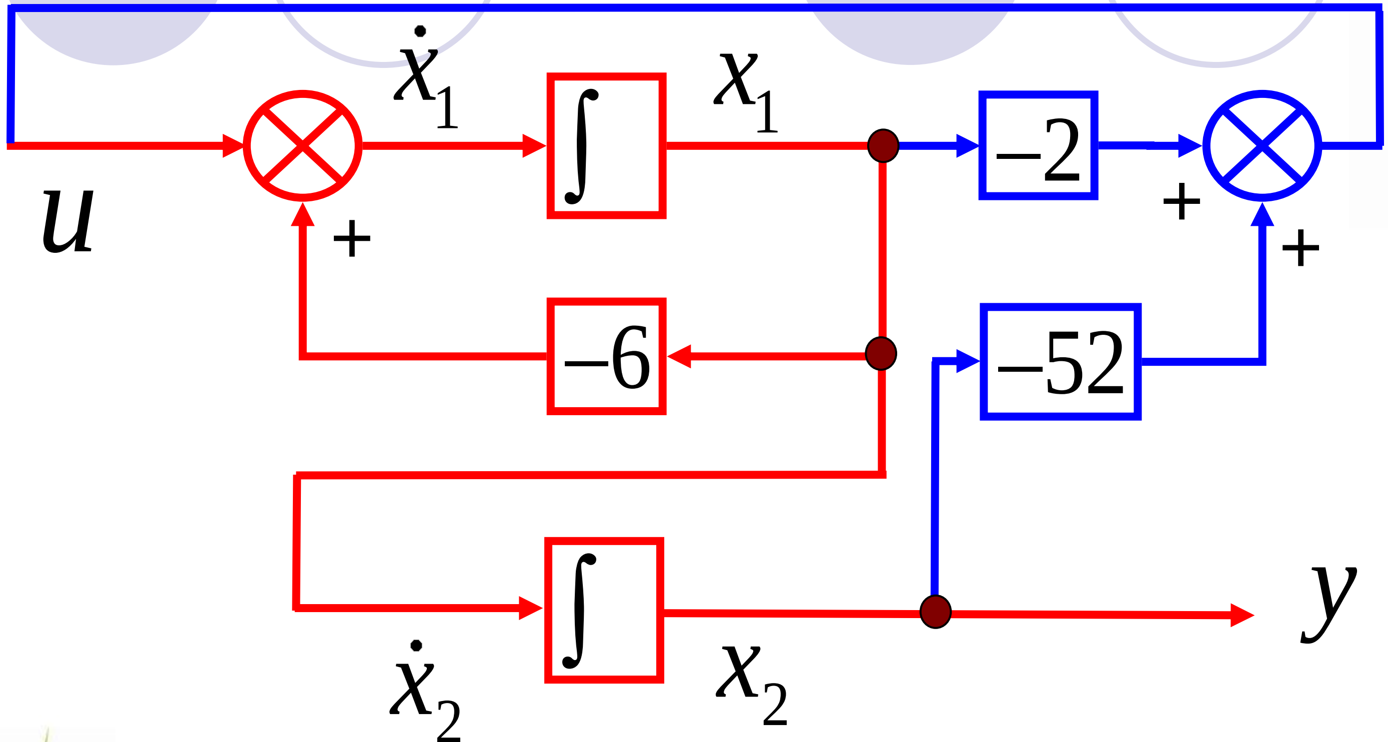
则可设计状态反馈矩阵

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -2 & -52 \end{bmatrix}$$

即得反馈控制律

$$u = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$$

如果系统的状态物理可测，那么闭环系统的结构为



闭环系统状态结构图

实际上该系统的两个状态在物理上不可测量，所以需要设计状态观测器：

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{c})\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{L}y + \boldsymbol{b}u$$

假定期望观测器极点为

$$\hat{\lambda}_1 = -10, \qquad \hat{\lambda}_2 = -12$$

可以求得观测器反馈矩阵

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 24 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Lc}=\begin{bmatrix}-6 & -24\\ 1 & -16\end{bmatrix}$$

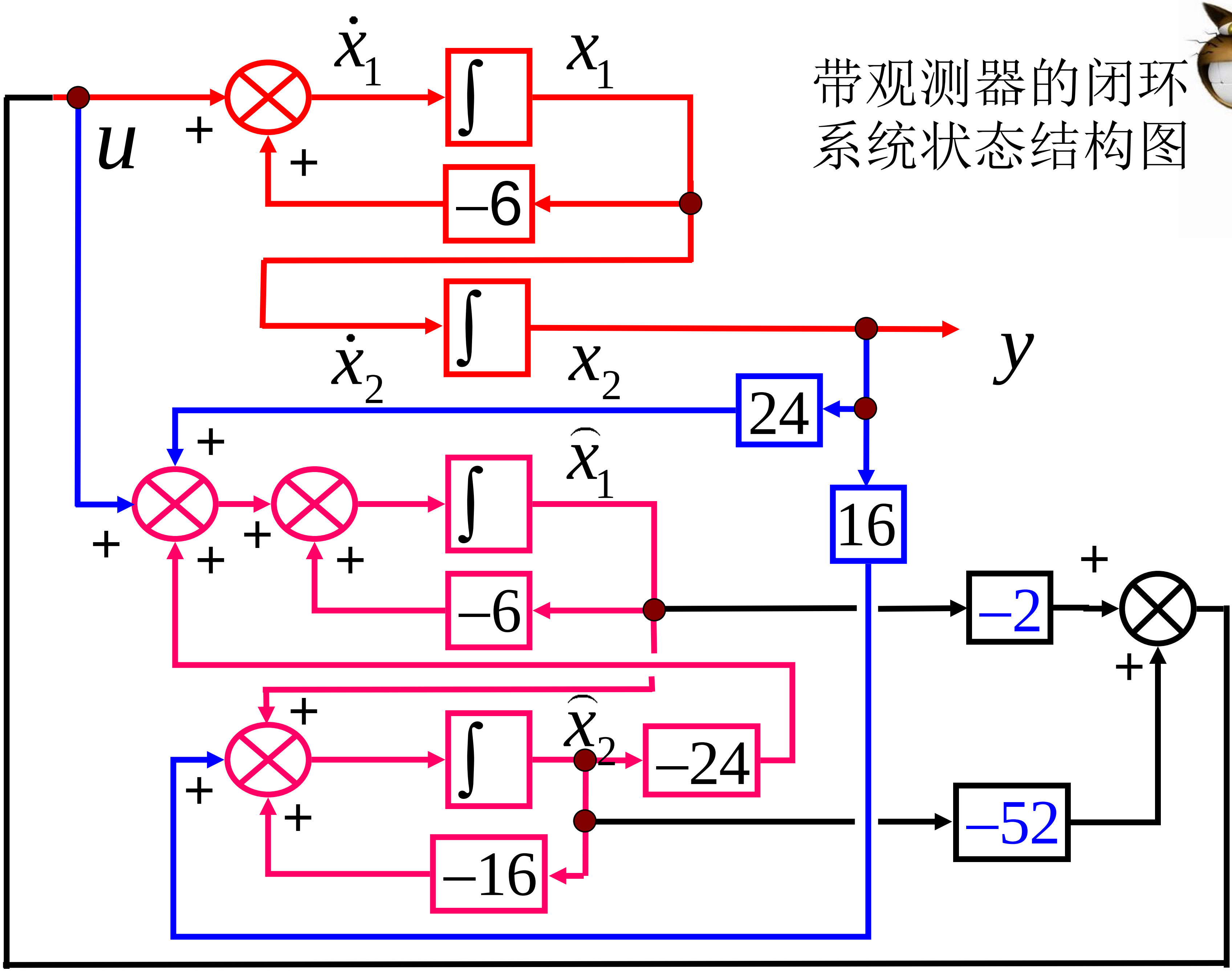
状态观测器：

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}-6 & -24\\ 1 & -16\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}24\\ 16\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$

带有观测器的闭环系统状态空间表达式为

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = -6x_1 + u \\
\dot{x}_2 = x_1 \\
\dot{\hat{x}}_1 = -6\hat{x}_1 - 24\hat{x}_2 + 24y + u \\
\dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_1 - 16\hat{x}_2 + 16y \\
y = x_2 \\
u = -2\hat{x}_1 - 52\hat{x}_2
\end{cases}
$$

带观测器的闭环系统状态结构图



闭环系统的数字仿真

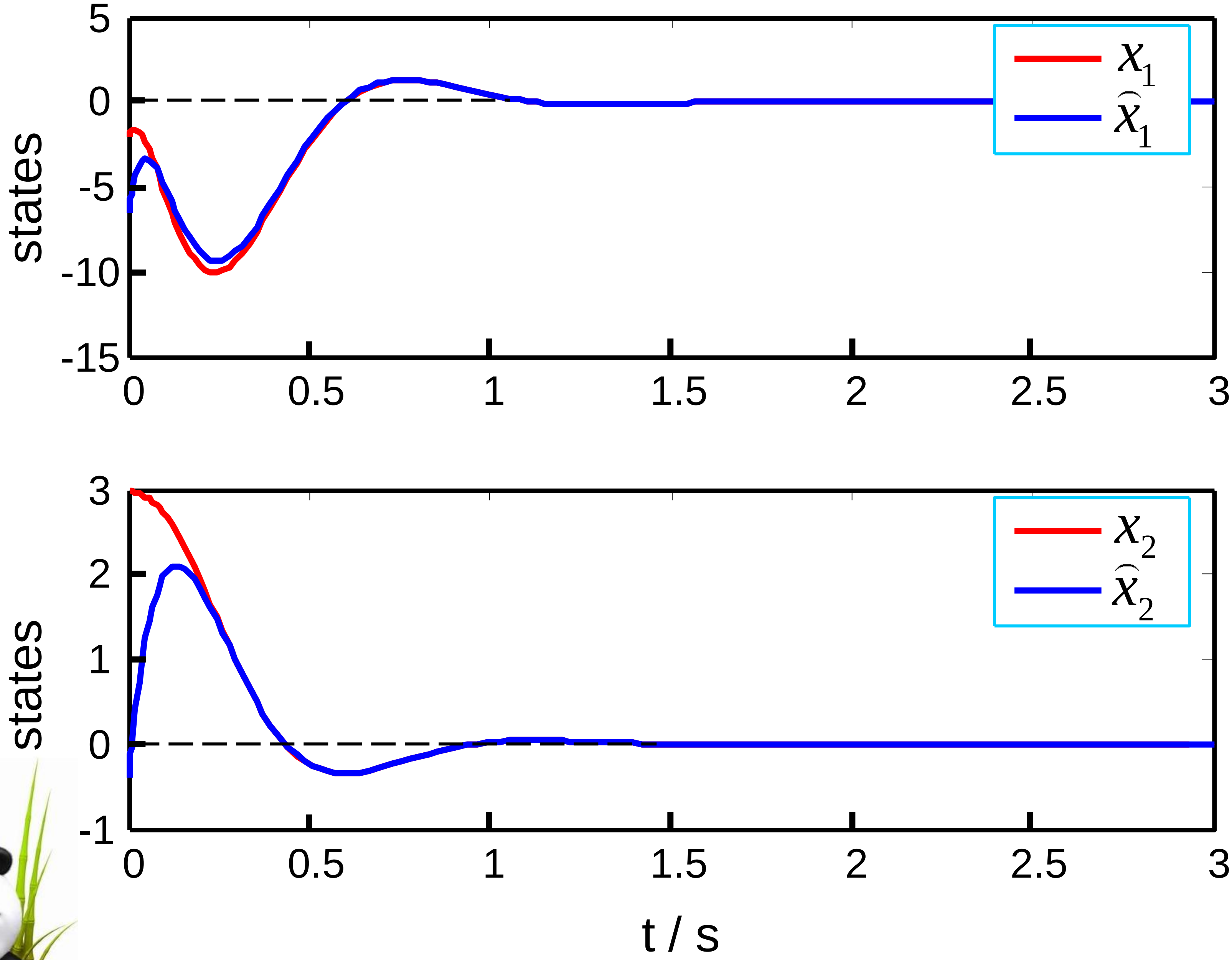
假定原系统的初始状态为

$$x_1(0) = -2 \qquad x_2(0) = 3$$

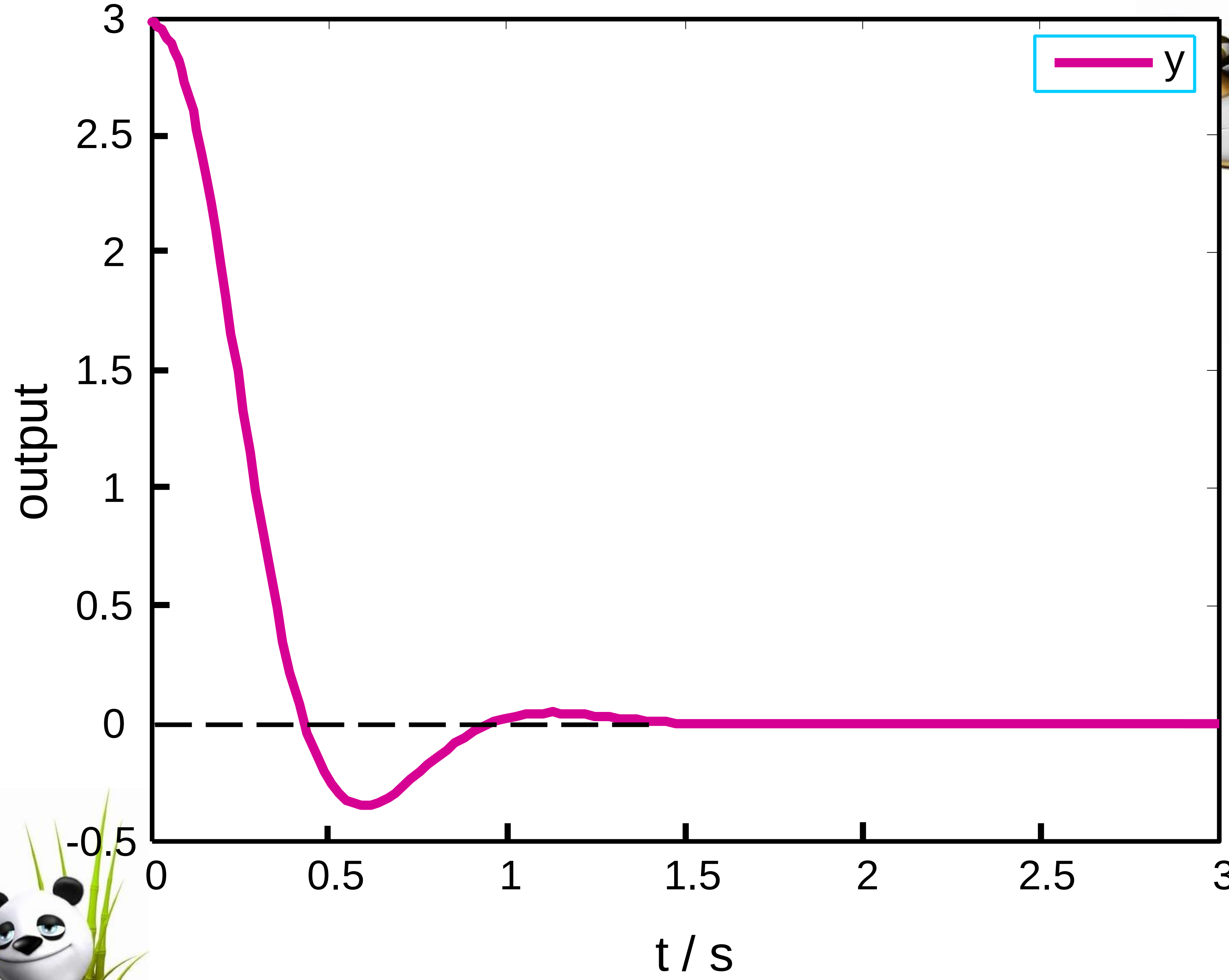
假定状态观测器的初始状态为

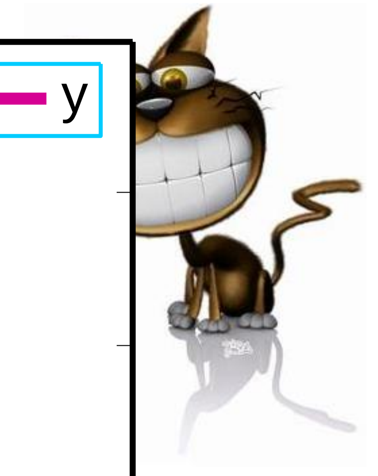
$$\widehat{x}_1(0) = -6.5 \qquad \widehat{x}_2(0) = -0.4$$

仿真结果如下：



5
0
-5
-10
-15
states
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
x_1
$\hat{x}_1$
3
2
1
0
-1
states
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
x_2
$\hat{x}_2$
t / s


y
output
t / s
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3



【例9-15】已知系统的状态空间表达式

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

假定该系统的两个状态在物理上不可测量，试设计状态反馈控制律及状态观测器，使得闭环系统的极点为-2，-3，观测器的极点为-4，-5。并对闭环系统进行数字仿真。

【解】

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad b=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$c=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

检验能控、能观性：

$$Q_c=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\qquad Q_o=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}Q_c=2\qquad \mathrm{rank}Q_o=2$$

系统的状态完全能控、能观。

假设状态反馈增益矩阵为

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}$$

则闭环系统的系统矩阵为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{bK}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ k_1 & k_2+1\end{bmatrix}$$

闭环系统的特征多项式为

$$\det\left[\lambda \boldsymbol{I}-\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{bK}\right)\right]$$

$$=\det\left\{\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & 1\\ k_1 & k_2+1\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1\\ -k_1 & \lambda-k_2-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2+\left(1-k_2\right)\lambda-k_1-2k_2-2$$

闭环系统的期望特征多项式为

$$(\lambda+2)(\lambda+3)=\lambda^2+5\lambda+6$$

比较两个多项式得

$$\begin{cases} 1-k_2=5 \\ -k_1-2k_2-2=6 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} k_1=0 \\ k_2=-4 \end{cases}$$

于是状态反馈增益矩阵为

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \end{bmatrix}$$

理论上，状态反馈控制律为

$$u = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = -4x_2$$

构造全维状态观测器

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{c})\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}u + \boldsymbol{L}y$$

假设状态观测器增益矩阵为

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

状态观测器的系统矩阵为

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 - l_1 & 1 \\ -l_2 & 1 \end{bmatrix}$$

状态观测器特征多项式为

$$\det\left[\lambda \boldsymbol{I}-\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c}\right)\right]$$

$$=\det\left\{\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2-l_1 & 1\\ -l_2 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda+2+l_1 & -1\\ l_2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2+\left(l_1+1\right)\lambda+l_2-l_1-2$$

观测器的期望特征多项式为

$$(\lambda+4)(\lambda+5)=\lambda^2+9\lambda+20$$

比较两个多项式得

$$\begin{cases} l_1+1=9 \\ l_2-l_1-2=20 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_1=8 \\ l_2=30 \end{cases}$$

状态观测器增益矩阵为

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}8\\30\end{bmatrix}$$

于是全维状态观测器方程为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Lc})\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{bu} + \boldsymbol{Ly}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -30 & 1 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} + \begin{bmatrix} 8 \\ 30 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = -10\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + 8y \\ \dot{\hat{x}}_2 = -30\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + u + 30y \end{cases}$$

实际上，状态反馈控制律为

$$u = -4\hat{x}_2$$

带有观测器的闭环系统状态空间表达式为

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + u$$

$$y = x_1$$

$$\dot{\hat{x}}_1 = -10\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + 8y$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = -30\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + u + 30y$$

$$u = -4\hat{x}_2$$

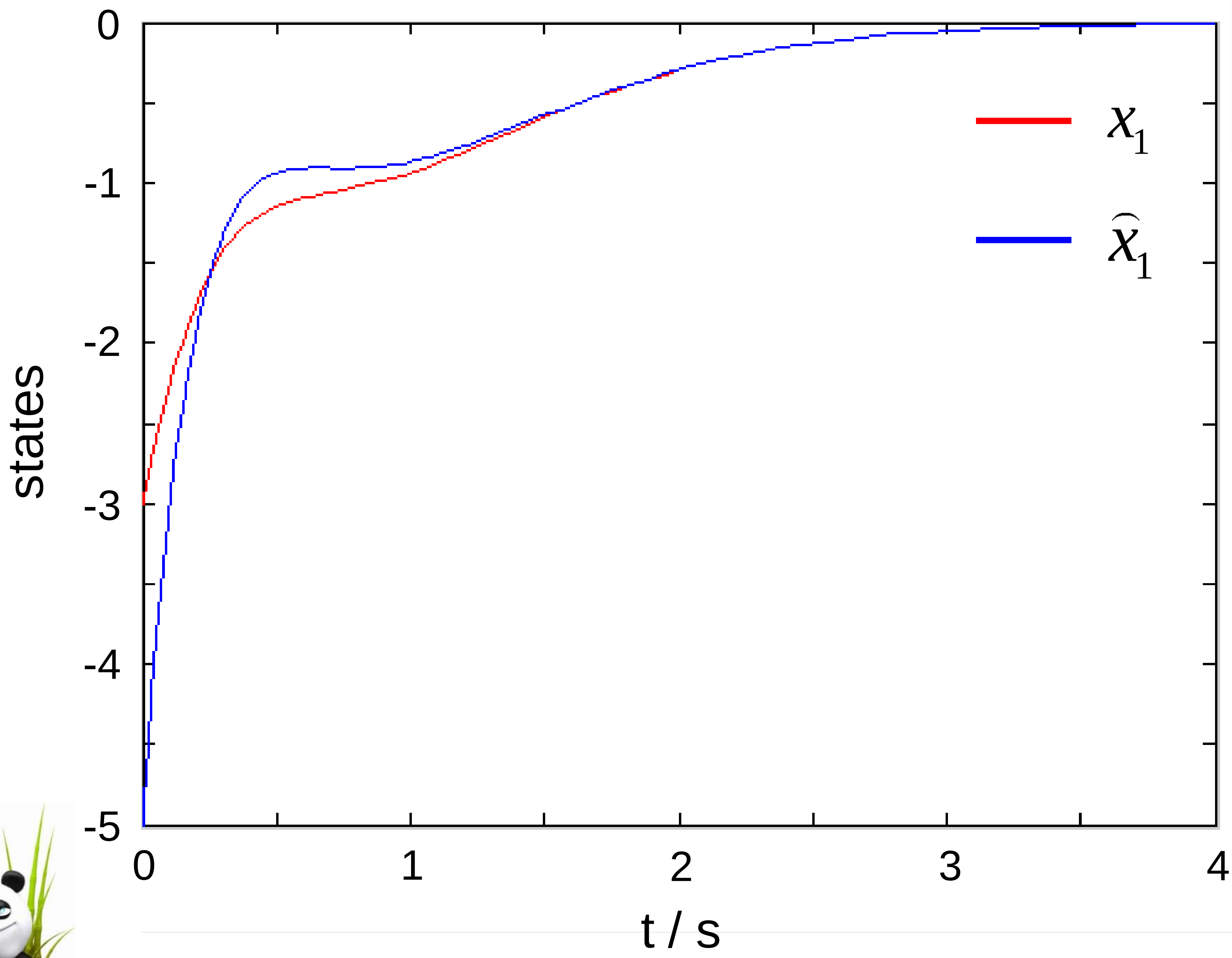
闭环系统的数字仿真

假定原系统的初始状态为

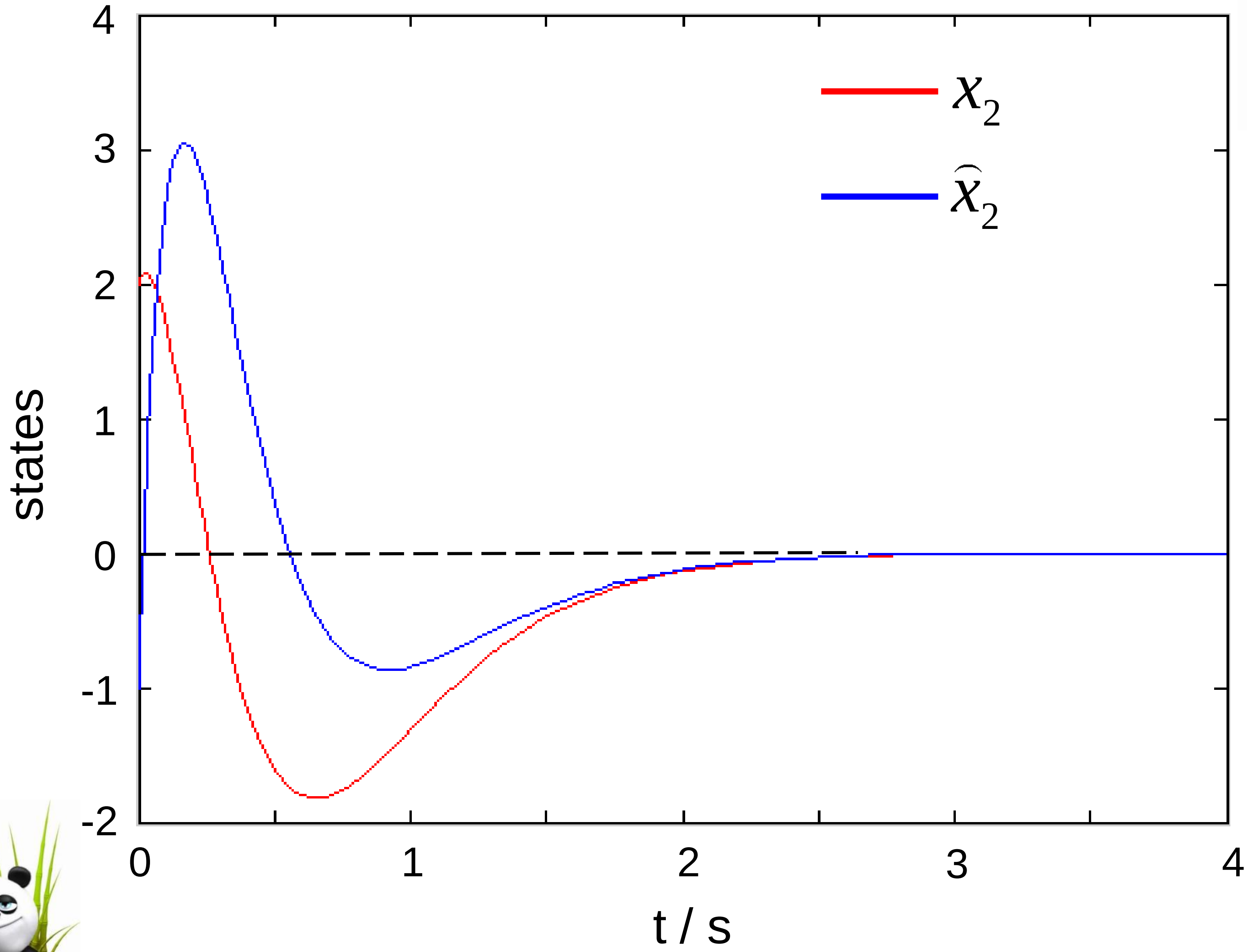
$$x_1(0) = -3 \qquad x_2(0) = 2$$

假定状态观测器的初始状态为

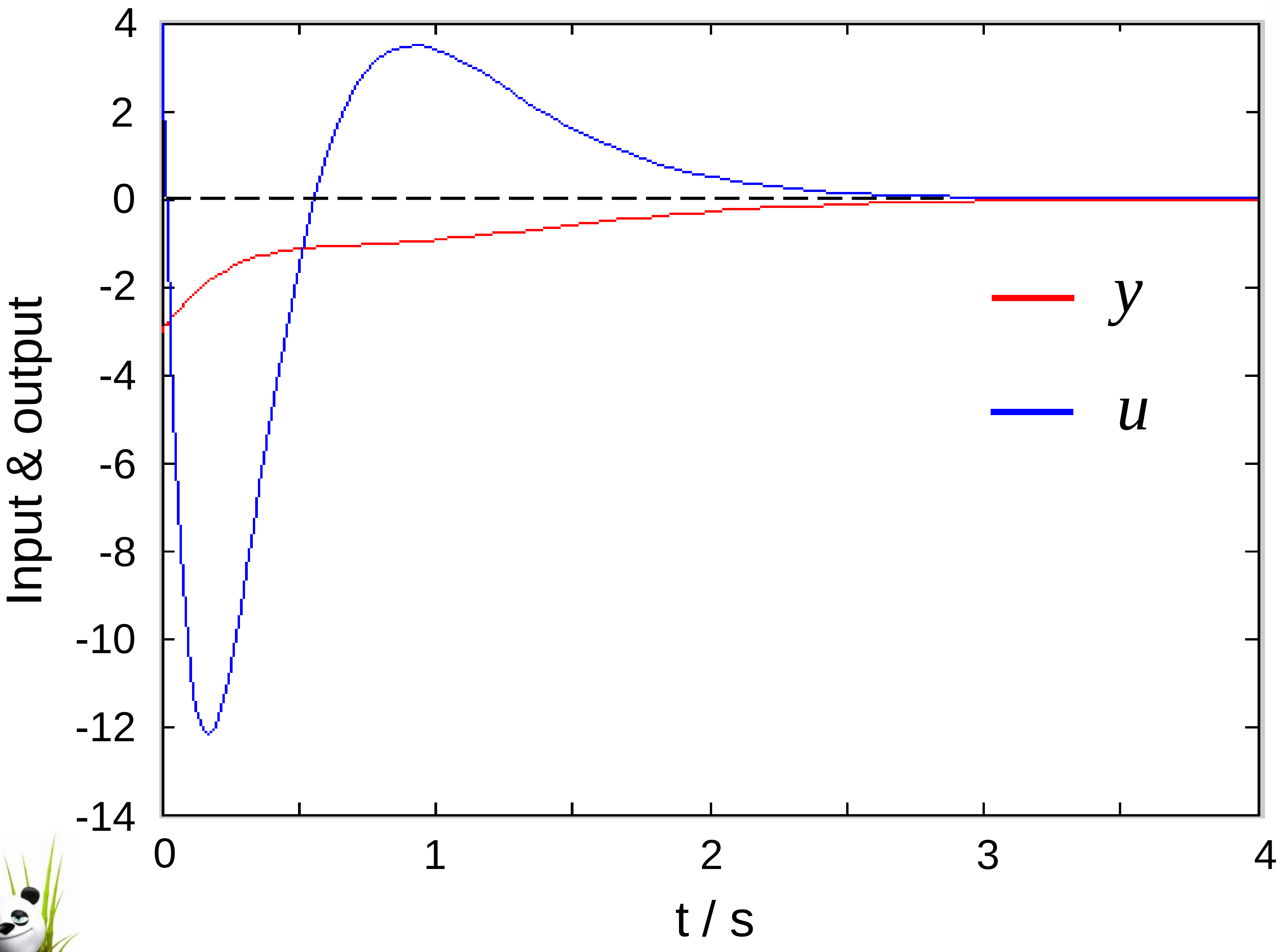
$$\hat{x}_1(0) = -5 \qquad \hat{x}_2(0) = -1$$



0
-1
-2
-3
-4
-5
states
0
1
2
3
4
t / s
x_1
$\hat{x}_1$

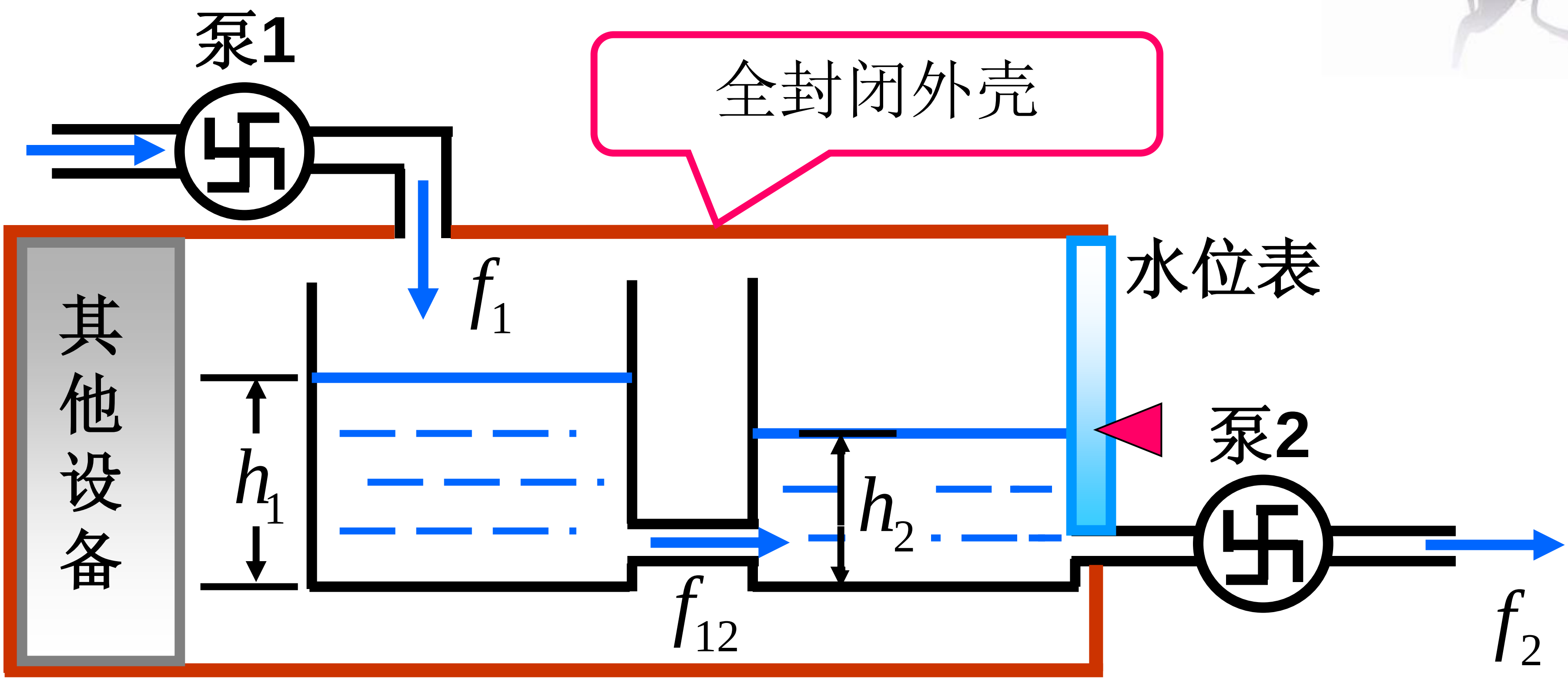


4
3
2
1
0
-1
-2
0
1
2
3
4
states
t / s
x_2
$\hat{x}_2$



Input & output
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
0
1
2
3
4
t / s
y
u

【例9-16】考虑双容水箱的水位调节系统。



偏差状态空间开环模型：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a \\ a & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

降维状态观测器：

$$\dot{z} = -a(1+L)z + a(1-L^2)y + u_1 - Lu_2$$

状态估计的构成：

$$\hat{x}_1 = z + Ly$$

假设状态反馈控制律为：

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

闭环系统的状态方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}-a & k_{12}+a \\ k_{21}+a & k_{22}-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

闭环系统的特征多项式为：

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) = \lambda^2 + \left(2a - k_{11} - k_{22}\right)\lambda \\ -\left(k_{11} + k_{22} + k_{12} + k_{21}\right)a + k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} \end{aligned}$$

假设期望闭环系统的极点为：

$$\lambda_1 = -5+5j \qquad \lambda_2 = -5-5j$$

期望闭环特征多项式为：

$$\varphi^*(\lambda) = \lambda^2 + 10\lambda + 50$$

比较上述两个特征多项式，可得：

$$\begin{cases} 2a - k_{11} - k_{22} = 10 \\ -\left(k_{11} + k_{22} + k_{12} + k_{21}\right)a + k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = 50 \end{cases}$$

上述方程组是一组不定方程，特取

$$k_{12}=k_{21}=0$$

则上述方程组可以化简为：

$$\begin{cases} k_{11}+k_{22}=2a-10 \\ k_{11}k_{22}=2a^2-10a+50 \end{cases}$$

它同解于关于 w 的一元二次方程

$$w^2+(10-2a)w+2a^2-10a+50=0$$

其根的判别式为：$\Delta=-4a^2-100<0$

说明不存在 k_{11} 和 k_{22} 的实数解。

由上述分析可知，反馈增益矩阵不能取对角矩阵。

假设下列实际参数：

两个水箱的水位标称偏差：	$H=0.3\text{m}$
每个水箱的内部横截面积：	$A=1\text{m}^2$
重力加速度：	$g=9.8\text{m/s}^2$

则有 $a=\dfrac{\sqrt{2gH}}{2AH}=4.04\approx 4$

将实际参数代入，可得代数方程组为：

$$\begin{cases} k_{11}+k_{22}=-2 \\ k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}-4\left(k_{12}+k_{21}\right)=42 \end{cases}$$

特取 $k_{11}=k_{22}=-1$，$k_{12}=2$，可得：$k_{21}=-\dfrac{49}{6}$

得出状态反馈增益矩阵为：

$$K=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -\dfrac{49}{6} & -1 \end{bmatrix}$$

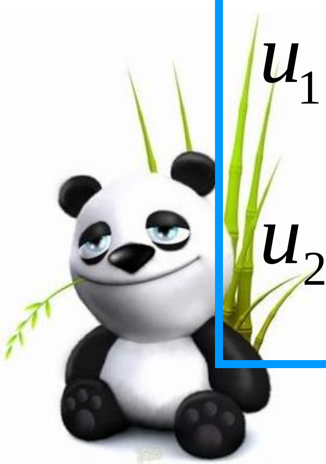
实际的状态反馈控制律为：

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x}_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -\dfrac{49}{6} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x}_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

写成分量形式为：

$$\widehat{x}_1 = z + Ly$$



$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= -\widehat{x}_1 + 2x_2 \\ u_2 &= -\frac{49}{6}\widehat{x}_1 - x_2 \end{aligned}}$$

$$y = x_2$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= -\left(z + Ly\right) + 2y \\ u_2 &= -\frac{49}{6}\left(z + Ly\right) - y \end{aligned}}$$

下面对降维状态观测器进行极点配置：

$$\dot{z}=-a(1+L)z+a\left(1-L^2\right)y+u_1-Lu_2$$

$$a=4$$

$$\dot{z}=-4(1+L)z+4\left(1-L^2\right)y+u_1-Lu_2$$

取降维状态观测器极点为

$$\lambda=-4(1+L)=-2$$

$$L=-0.5$$

得出降维状态观测器方程：

$$\dot{z} = -4(1+L)z + 4(1-L^2)y + u_1 - Lu_2$$

$$\boxed{L = -0.5}$$

$$\dot{z} = -2z + 3y + u_1 + 0.5u_2$$

实际的状态反馈控制律为：

$$u_1 = -\left(z + Ly\right) + 2y$$

$$u_2 = -\frac{49}{6}\left(z + Ly\right) - y$$

$$\boxed{L = -0.5}$$

$$u_1 = -z + 2.5y$$

$$u_2 = -\frac{49}{6}z + \frac{37}{12}y$$

写出完整的闭环系统方程：

$$
\begin{cases}
\begin{cases}
\dot{x}_1 = -4x_1 + 4x_2 + u_1 \\
\dot{x}_2 = 4x_1 - 4x_2 + u_2 \\
y = x_2
\end{cases} \\
\dot{z} = -2z + 3y + u_1 + 0.5u_2 \\
\begin{cases}
u_1 = -z + 2.5y \\
u_2 = -\dfrac{49}{6}z + \dfrac{37}{12}y
\end{cases}
\end{cases}
$$

数字仿真研究

不妨给定下列初始条件（初始水位偏差）

$$x_1(0) = -0.2$$

$$x_2(0) = 0.18$$

$$z(0) = 0.15$$

编写两个MATLAB的M文件

文件simu051.m

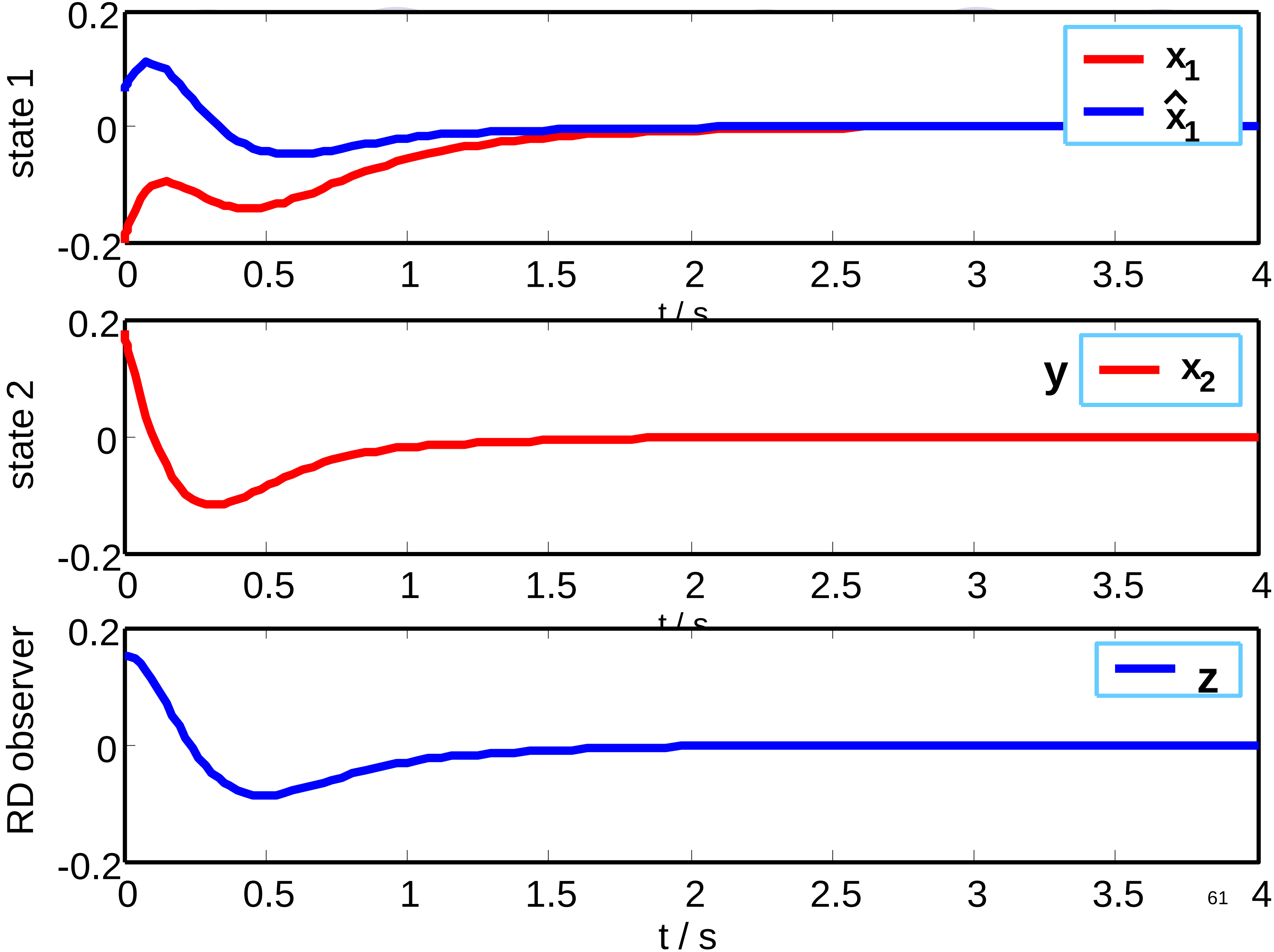
```
function dx = simu051(t,x)
y = x(2);
z = x(3);
u1 = -z + 2.5*y;
u2 = (-49/6)*z + (37/12)*y;

dx(1) = -4*x(1) + 4*x(2) + u1;
dx(2) = 4*x(1) - 4*x(2) + u2;
dx(3) = -2*x(3) + 3*y + u1 + 0.5*u2;

dx = dx';
```

```
[t, x] = ode45( 'simu051', [0,4], [-0.2,0.18,0.15] );
subplot ( 3, 1, 1 );
plot( t, x(:,1), 'r-' );
hold on;
plot( t, x(:,3) - 0.5*x(:,2), 'b-' );
legend( 'x_1', 'x_1_o' );
xlabel( 't / s' );
ylabel( 'state 1' );
subplot( 3, 1, 2 );
plot( t, x(:,2), 'r-' );
legend( 'x_2' );
xlabel( 't / s' );
ylabel( 'state 2' );
subplot( 3, 1, 3 );
plot( t, x(:,3), 'b-' );
legend( 'z' );
xlabel( 't / s' );
ylabel( 'RD observer' );
```

文件do_simu051.m



state 1
0.2
0
-0.2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
t / s
x1
x̂1
state 2
y
x2
RD observer
z

本次课内容总结

- 带观测器的状态反馈系统的结构；
- 带观测器的闭环系统的基本特性；
- 带观测器的闭环系统设计举例。