8.4 线性系统的能控规范型和能观测规范型

8.4.1 单输入系统的能控规范型

给定 n 维单输入单输出系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u \\ y = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} \end{cases} \qquad (1)$$

当该系统的状态完全能控时，可以变换成能控规范型。

一．能控规范I型

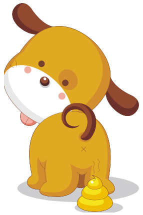
针对系统（1），令非奇异变换

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{c1}}\bar{\boldsymbol{x}}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{c1}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{b} & \cdots & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2 & & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

可得能控规范I型 $\begin{cases} \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{b}}u \\ y = \bar{\boldsymbol{c}}\bar{\boldsymbol{x}} \end{cases}$ （2）

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{c1}}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{\mathrm{c1}} = \left[\begin{array}{c|ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \hline -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{array}\right]$$



$$\bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{c1}}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{T}_{\mathrm{c1}} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

$$\alpha_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

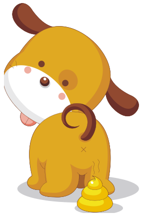
$$\beta_{n-1} = \boldsymbol{cb}$$

$$\beta_{n-2} = \boldsymbol{cAb} + \alpha_{n-1}\boldsymbol{cb}$$

$$\vdots$$

$$\beta_1 = \boldsymbol{cA}^{n-2}\boldsymbol{b} + \alpha_{n-1}\boldsymbol{cA}^{n-3}\boldsymbol{b} + \cdots + \alpha_2\boldsymbol{cb}$$

$$\beta_0 = \boldsymbol{cA}^{n-1}\boldsymbol{b} + \alpha_{n-1}\boldsymbol{cA}^{n-2}\boldsymbol{b} + \cdots + \alpha_1\boldsymbol{cb}$$



注

根据能控规范I型可以很方便地写出传递函数

$$W(s)=\bar{c}\left(s\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}}\right)^{-1}\bar{b}$$

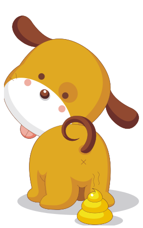
$$=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\beta_{n-2}s^{n-2}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0}$$

[例8-16] 将下列状态空间表达式变换为能控规范I型

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

[解] 先判断系统的能控性

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{Ab} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$



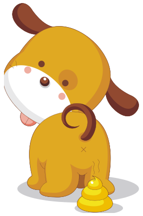
$$\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{c}} = 3$$

所以系统是能控的。

计算系统的特征多项式：

$$\det\left(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right) = \lambda^3 - 9\lambda + 2$$

$$\alpha_2 = 0, \alpha_1 = -9, \alpha_0 = 2$$



$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & 1 \\ 12 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

能控规范I型如下：

$$\begin{cases} \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$

二. 能控规范II型

针对系统（1），令非奇异变换

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}_{c2}\overline{\boldsymbol{x}}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \overline{\boldsymbol{x}}$$

系统（1）被变换成能控规范II型

$$\begin{cases} \dot{\overline{\boldsymbol{x}}} = \overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{x}} + \overline{\boldsymbol{b}}u \\ y = \overline{\boldsymbol{c}}\overline{\boldsymbol{x}} \end{cases} \qquad (3)$$

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}_{c2}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{c2} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ \hline 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{array}\right]$$

$$\bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{T}_{c2}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{T}_{c2} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

其中 $\alpha_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 为特征多项式

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

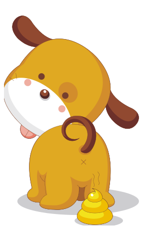
的各项系数。

[例8-17] 将下列状态空间表达式变换为能控规范II型

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

[解] 在上例中已经求得

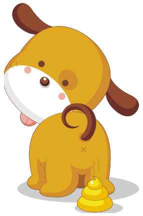
$$\alpha_2 = 0, \alpha_1 = -9, \alpha_0 = 2$$



$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{cb} & \boldsymbol{cAb} & \boldsymbol{cA}^2\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



能控规范II型如下：

$$\begin{cases} \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 12 \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$

8.4.2 单输出系统的能观规范型

给定 n 维单输入单输出系统(1)，当该系统的状态完全能观时，可以变换成能观规范型。

讨论它的两种能观规范型：

——能观规范I型和能观规范II型

能观规范I型 $\Longleftrightarrow$ 能控规范II型

对偶

能观规范II型 $\Longleftrightarrow$ 能控规范I型

一. 能观规范I型

针对系统（1），令非奇异变换

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}_{o1}\tilde{\boldsymbol{x}}$$

系统（1）被变换成能观规范I型

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{b}}u \\ y = \tilde{\boldsymbol{c}}\tilde{\boldsymbol{x}} \end{cases} \qquad （4）$$

其中的变换矩阵为

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{o1}}^{-1} = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{o}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{cA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{cA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

相关的矩阵为

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{o1}}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{\mathrm{o1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{o}1}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{T}_{\mathrm{o}1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $\alpha_i (i = 0,1,2,\cdots,n-1)$ 为特征多项式

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

的各项系数。

二. 能观规范II型

针对系统（1），令非奇异变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}_{\mathrm{o}2}\tilde{\boldsymbol{x}}$$

其中的变换矩阵为

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{o}2}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_2 & \alpha_1\\ 0 & 1 & \ddots & & \alpha_2\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 1 & \alpha_{n-1}\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{cA}^{n-1}\\ \boldsymbol{cA}^{n-2}\\ \vdots \\ \boldsymbol{cA}\\ \boldsymbol{c}\end{bmatrix}$$

系统（1）被变换成能观规范II型

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{b}}u \\ y = \tilde{\boldsymbol{c}}\tilde{\boldsymbol{x}} \end{cases} \quad (5)$$

相关的矩阵为

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}_{o2}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{T}_{o2}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{T}_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[例8-18] 将下列状态空间表达式变换为能观规范型

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}
\end{cases}
$$

[解] 先判断系统的能观性

$$
\boldsymbol{Q}_{\mathrm{o}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{cA} \\ \boldsymbol{cA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}
$$

易知 $\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_o = 3$。

系统完全能观，系统可变换为能观规范型。

1）变换为能观规范I型

容易求得

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad \tilde{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

能观规范I型为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$

2）变换为能观规范II型

容易求得

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

能观规范II型为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$

结 论

单输入-单输出线性定常系统的

能控规范I型

直接写出

对偶

传递函数

能观规范II型

直接写出

$$\alpha_i, \qquad (i=0,1,\cdots,n-1)$$

$$\beta_i, \qquad (i=0,1,\cdots,n-1)$$

$$W(s)=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\beta_{n-2}s^{n-2}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0}$$

本次课内容总结

- 单输入单输出系统的能控规范型

能控规范I型　　　　能控规范II型

对　　　　偶

能观规范I型　　　　能观规范II型

单输入单输出系统的能观规范型