第八章　线性系统的状态空间分析

8.1 线性系统的状态空间描述

8.1.1 线性系统的状态空间描述

1. 状态变量

- n 个独立变量
- n 阶线性常微分方程
- t_0 时刻 —— n 个独立的初始条件

2. 状态向量

$$x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t)$$

$$\boldsymbol{x}(t)$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

3. 状态空间

$$x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t)$$

n 个坐标轴

n 维线性空间

$\boldsymbol{x}(t_0)$ $\boldsymbol{x}(t)$

状态轨线或状态轨迹

4. 状态方程

一阶线性常微分方程组

n 个状态变量

状态方程的列写举例

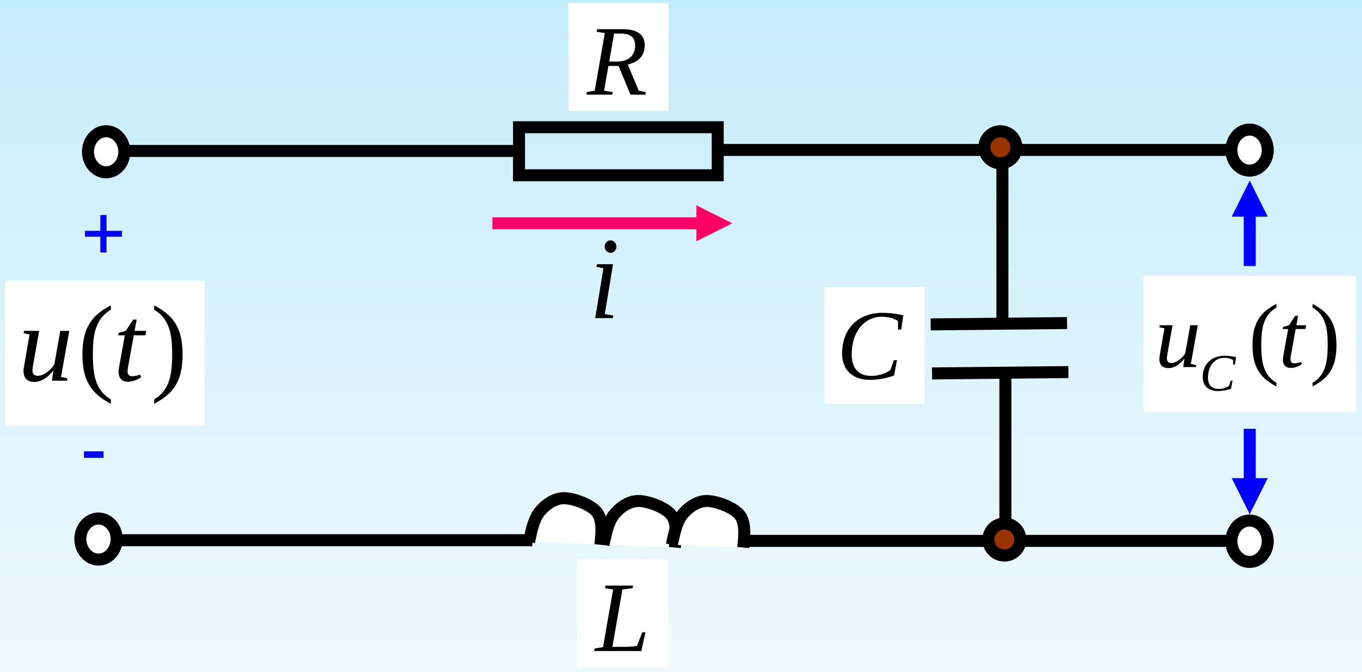
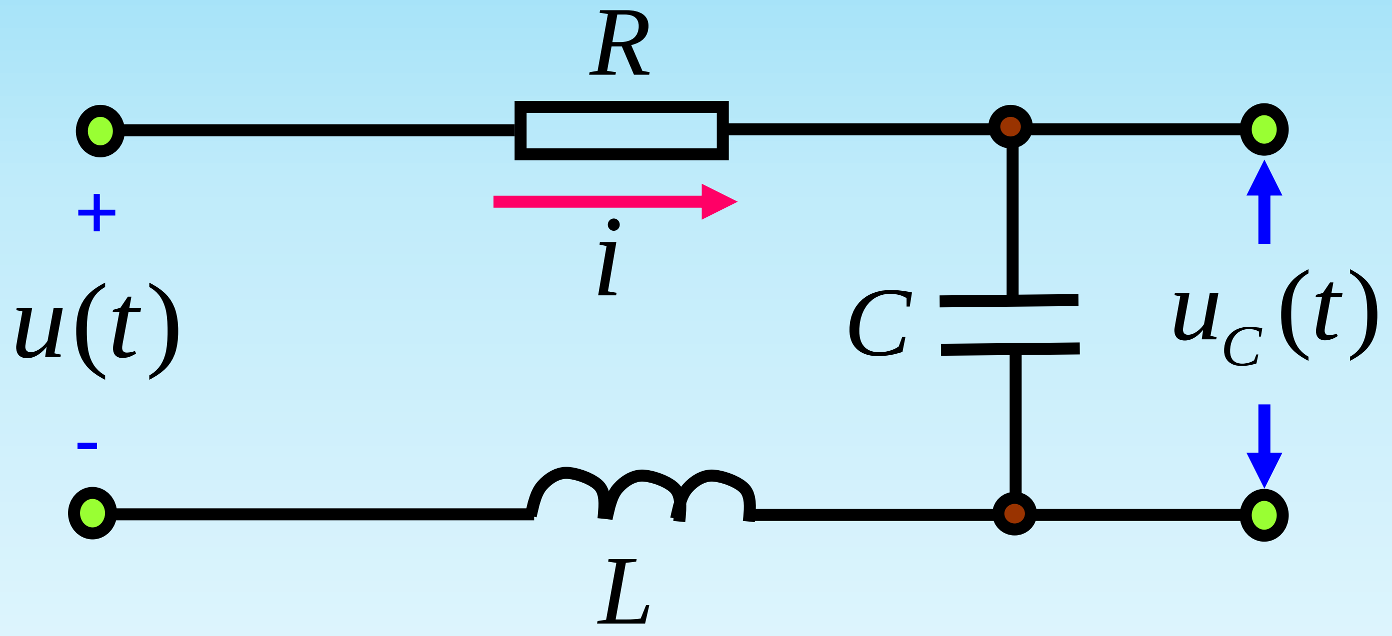


图1 典型的 *RLC* 电路



$$C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}=i$$

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+u_c=u$$

$$C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}=i$$

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+u_c=u$$

$$\begin{cases}\dot{u}_c=\dfrac{1}{C}i\\ \dot{i}=-\dfrac{1}{L}u_c-\dfrac{R}{L}i+\dfrac{1}{L}u\end{cases}$$

定义 $x_1 = u_c$ $x_2 = i$

$$\begin{cases} \dot{u}_c = \dfrac{1}{C} i \\ \dot{i} = -\dfrac{1}{L} u_c - \dfrac{R}{L} i + \dfrac{1}{L} u \end{cases}$$

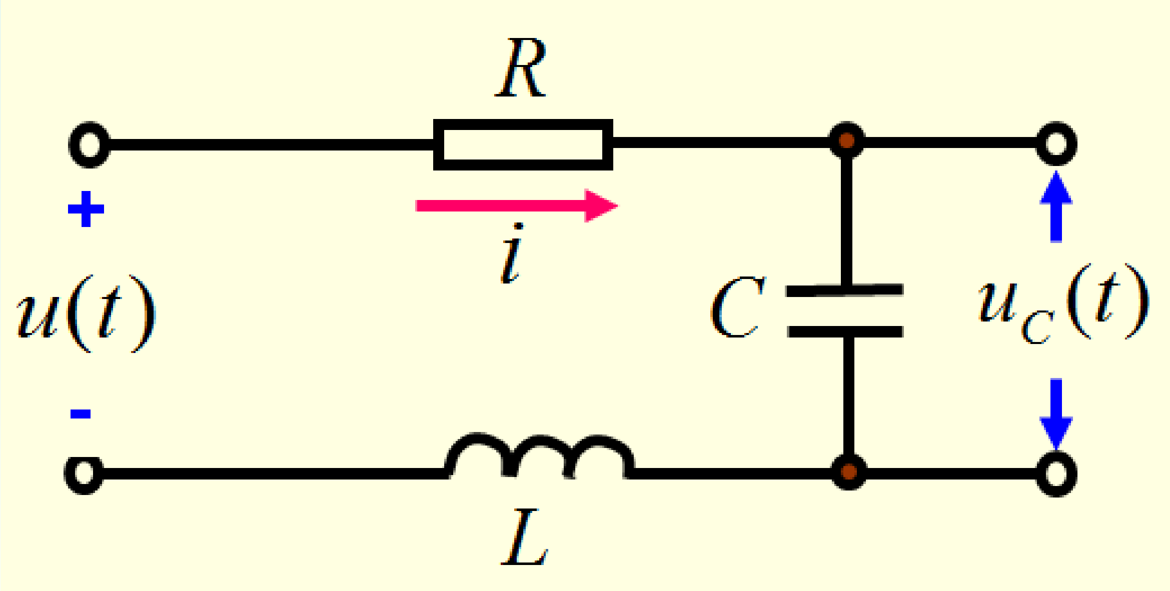
状态方程：$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} u$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}$$

5. 输出方程

输出变量与状态变量间的函数关系式。



$$y = u_c$$

$$y = x_1$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. 状态空间表达式

状态方程和输出方程总合起来，构成对一个系统完整的动态描述 —— 系统的状态空间表达式。

状态空间表达式

传递函数描述

$$\begin{cases} \dot{u}_c = \dfrac{1}{C} i \\ \dot{i} = -\dfrac{1}{L} u_c - \dfrac{R}{L} i + \dfrac{1}{L} u \end{cases}$$

消去变量 i

$$\ddot{u}_c + \frac{R}{L}\dot{u}_c + \frac{1}{LC} u_c = \frac{1}{LC} u$$

$$\ddot{u}_c + \frac{R}{L}\dot{u}_c + \frac{1}{LC}u_c = \frac{1}{LC}u$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{U_c(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

状态空间表达式

传递函数描述

状态变量选择的非唯一性！

对上例选择不同状态变量

$$x_1 = u_c \qquad x_2 = \dot{u}_c$$

$$\dot{x}_1 = \dot{u}_c = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{u}_c = -\frac{1}{LC}u_c - \frac{R}{L}\dot{u}_c + \frac{1}{LC}u$$

$$= -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{LC}u$$

新的状态方程

$$\dot{x}_1 = \dot{u}_c = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{LC}u$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix}u$$

同一个系统的两个不同状态方程！

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} u \quad \Leftarrow \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} u_c \\ i \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{LC} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{LC} \end{bmatrix} u \quad \Leftarrow \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} u_c \\ \dot{u}_c \end{bmatrix}$$

状态变量的选取有什么原则？

实际上

- 物理可量测
- 物理意义明确

理论上

任意选择

单输入单输出状态空间表达式的一般形式

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 u \\
\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 u \\
\vdots \\
\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n u
\end{cases}
$$

$$
y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n
$$

矩阵形式

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u \\ y = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

r 输入 m输出情形

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \cdots + b_{1r}u_r \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{2r}u_r \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \cdots + b_{nr}u_r\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \cdots + d_{1r}u_r \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + d_{22}u_2 + \cdots + d_{2r}u_r \\ \vdots \\ y_m = c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n + d_{m1}u_1 + d_{m2}u_2 + \cdots + d_{mr}u_r\end{cases}$$

多输入多输出系统状态空间表达式的矩阵形式

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix}$$

7．状态空间表达式的系统方块图

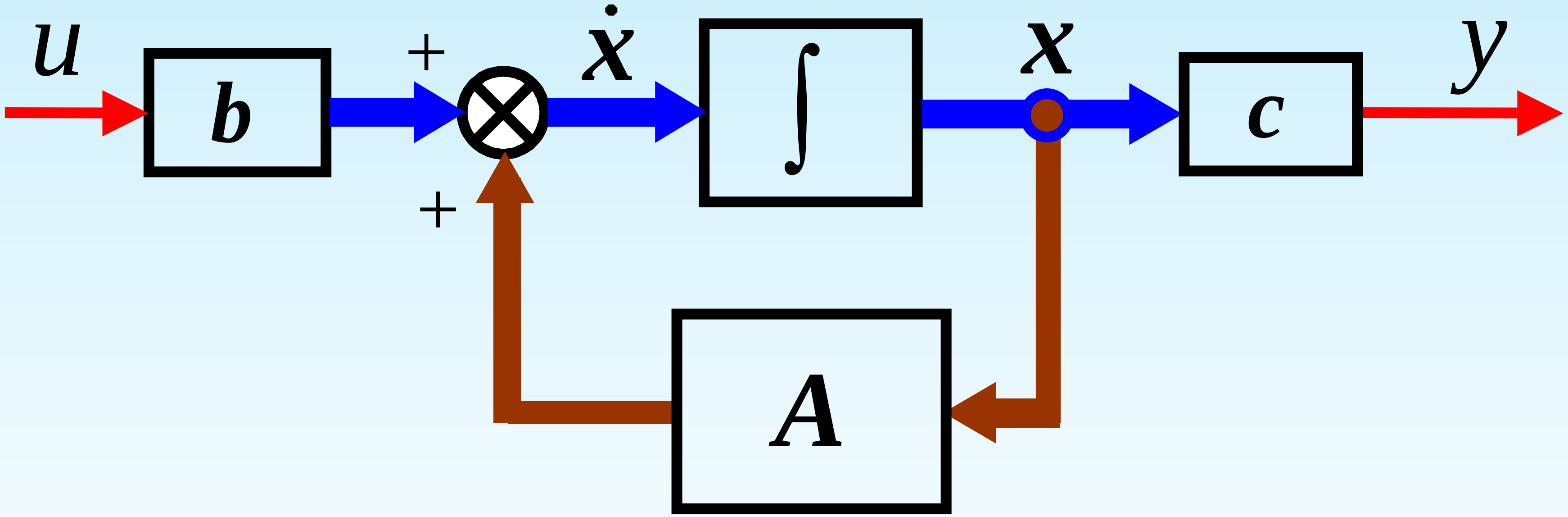


图2 单输入单输出线性系统模拟结构图

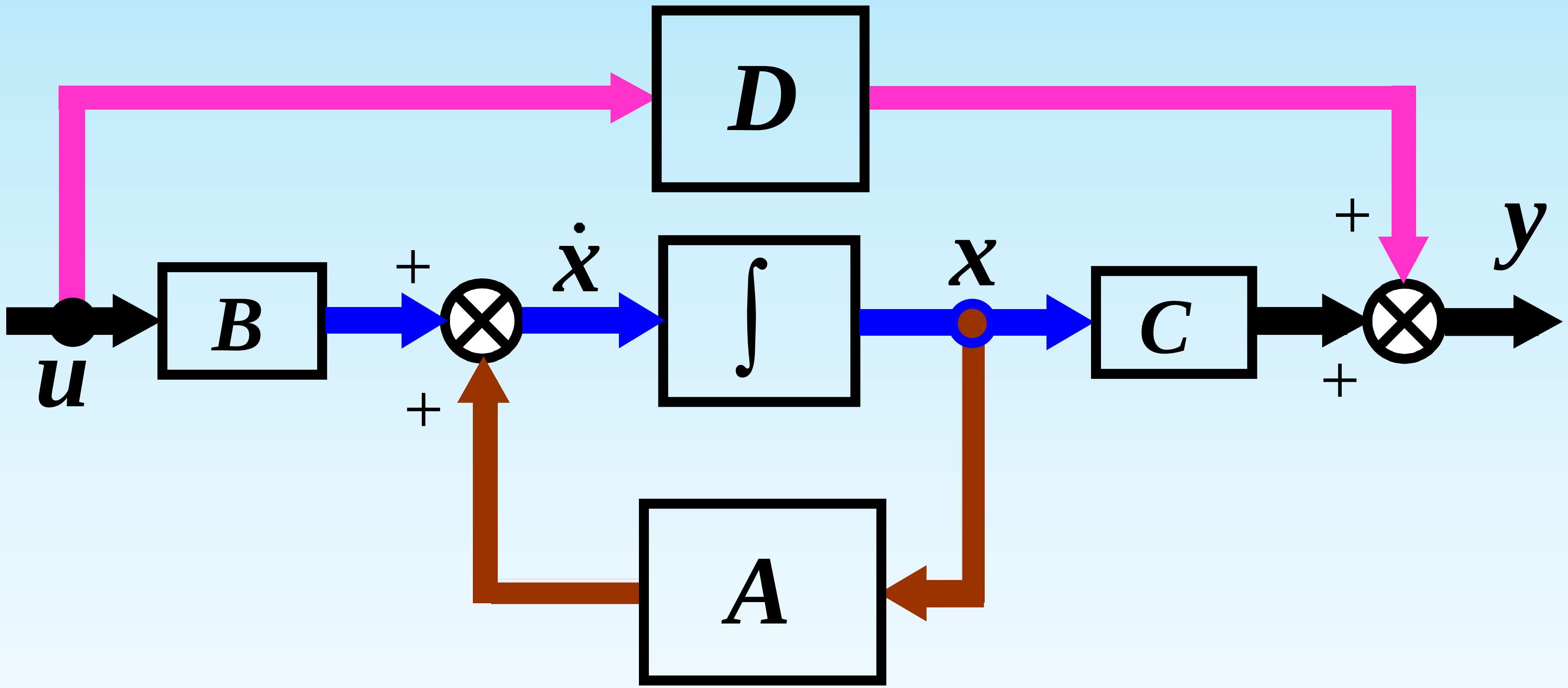


图3 多输入多输出线性系统模拟结构图

状态空间表达式的本质

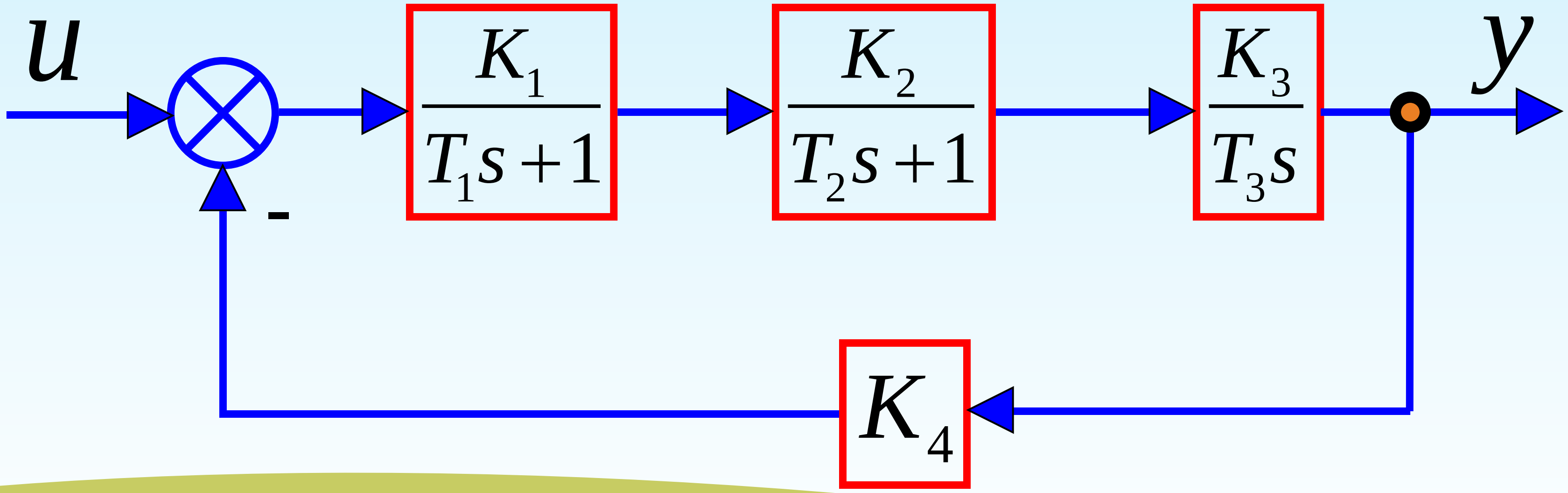
系统的一种**完全描述**

- 外部输入与输出的关系
- 内部状态变量与外部信号的关系

8.1.2 线性系统的状态空间表达式的建立

1. 根据系统的方块图建立状态空间表达式

【例8-1】给定单输入单输出系统的方块图如下



试写出其状态空间表达式。

【解】

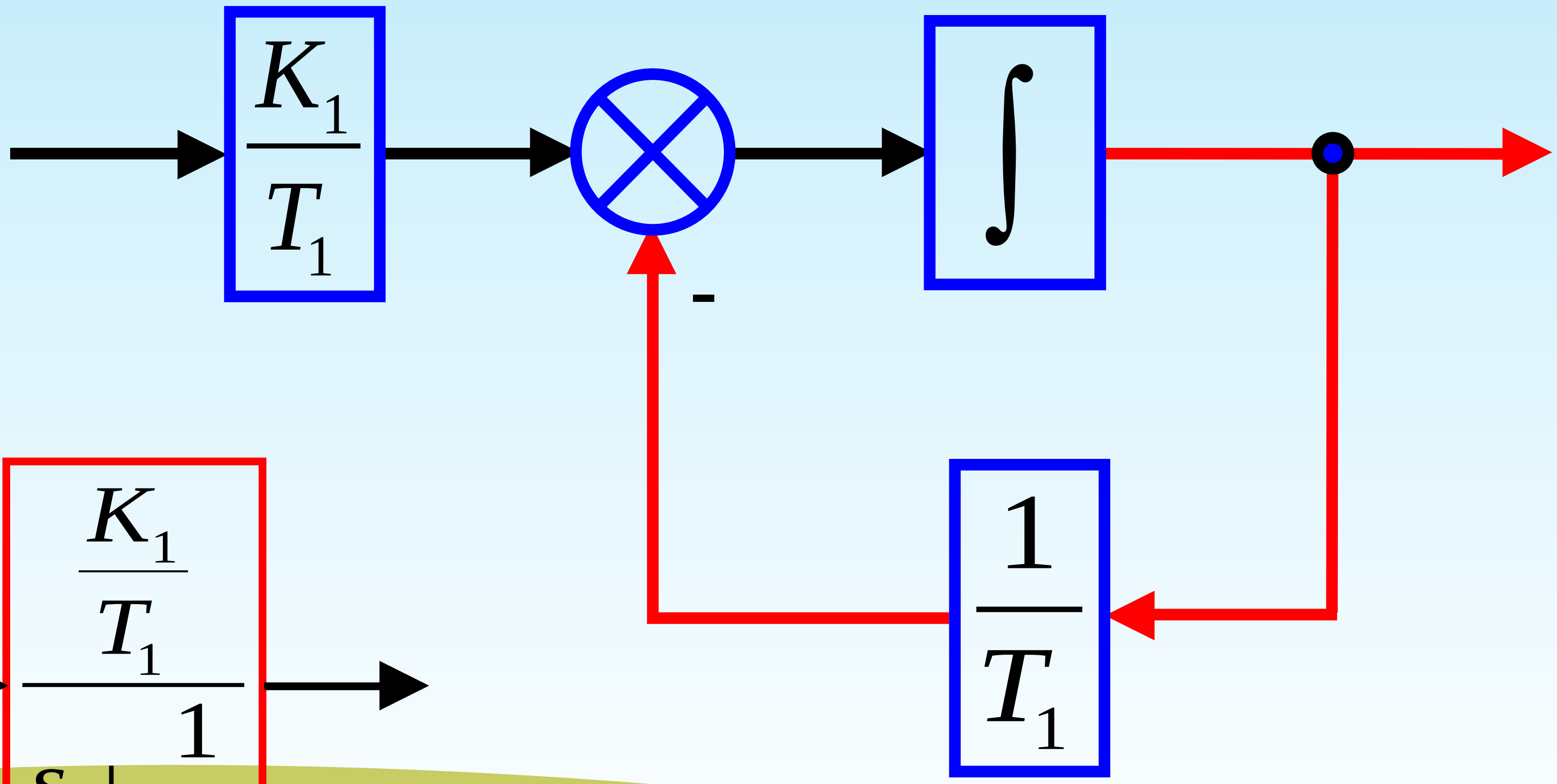
第一步：将方块图改画成模拟结构图

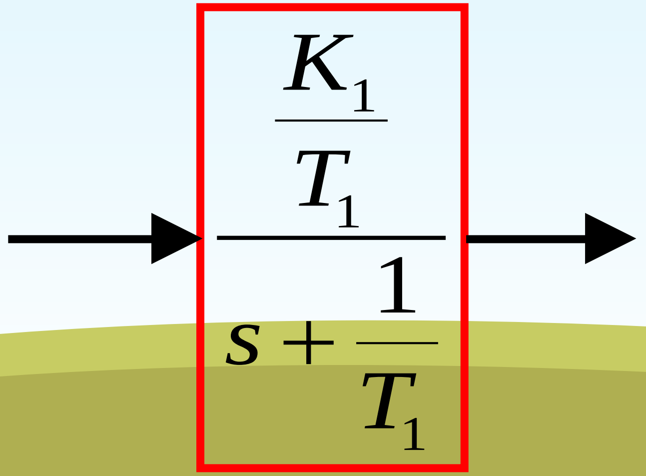
首先考虑一个子模块

$$\longrightarrow \boxed{\dfrac{K_1}{T_1 s+1}} \longrightarrow$$

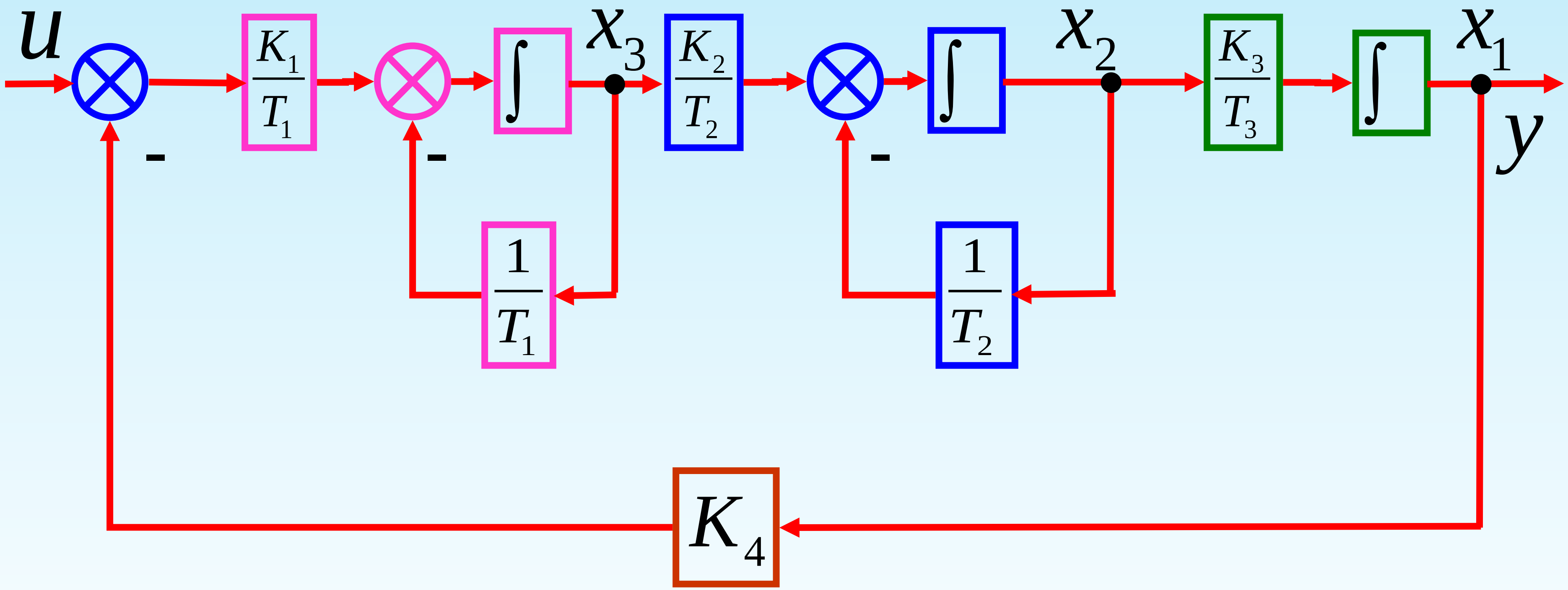
$$\longrightarrow \boxed{\dfrac{\dfrac{K_1}{T_1}}{s+\dfrac{1}{T_1}}} \longrightarrow$$

该子模块的模拟结构图为





整个系统的模拟结构图为



第二步：根据模拟结构图写出状态方程

$$\dot{x}_1 = \frac{K_3}{T_3} x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T_2} x_2 + \frac{K_2}{T_2} x_3$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{T_1} x_3 - \frac{K_1 K_4}{T_1} x_1 + \frac{K_1}{T_1} u$$

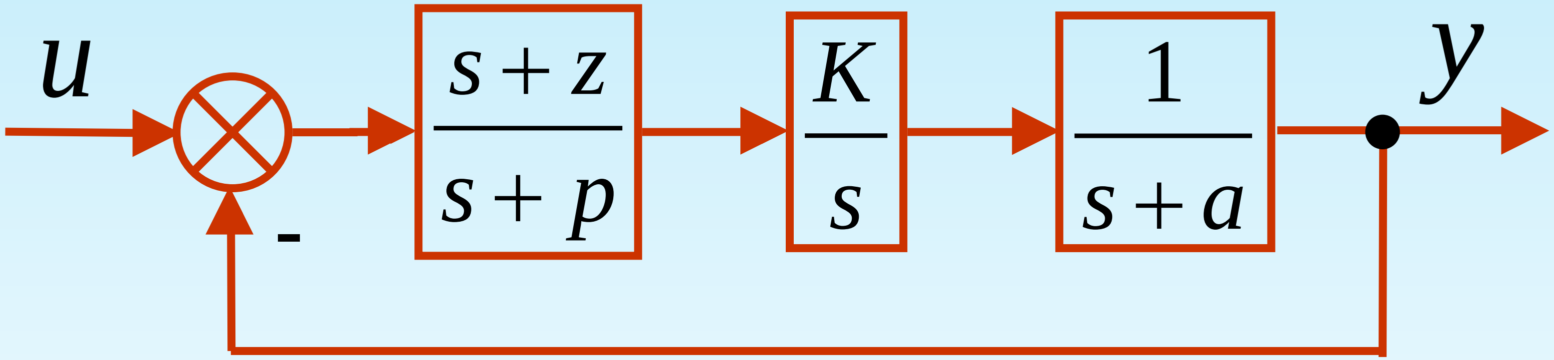
$$y = x_1$$

矩阵形式

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{K_3}{T_3} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{T_2} & \dfrac{K_2}{T_2} \\ -\dfrac{K_1K_4}{T_1} & 0 & -\dfrac{1}{T_1} \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{K_1}{T_1} \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

【例8-2】考虑一个含有零点的单输入单输出系统的方块图

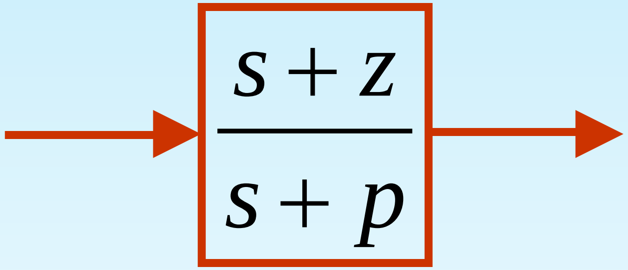


试写出其状态空间表达式。

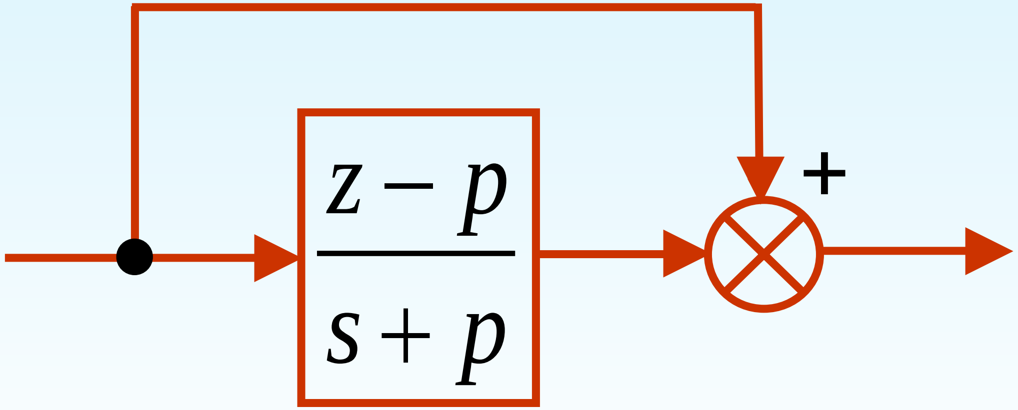
【解】

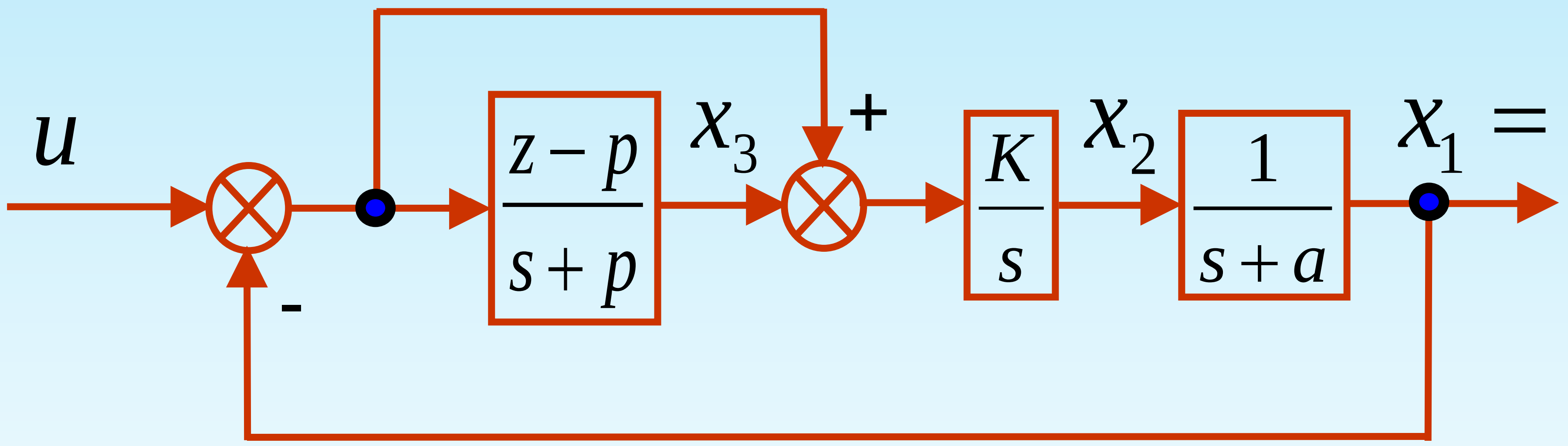
第一步：将方块图改画成模拟结构图

首先考虑含有零点的模块

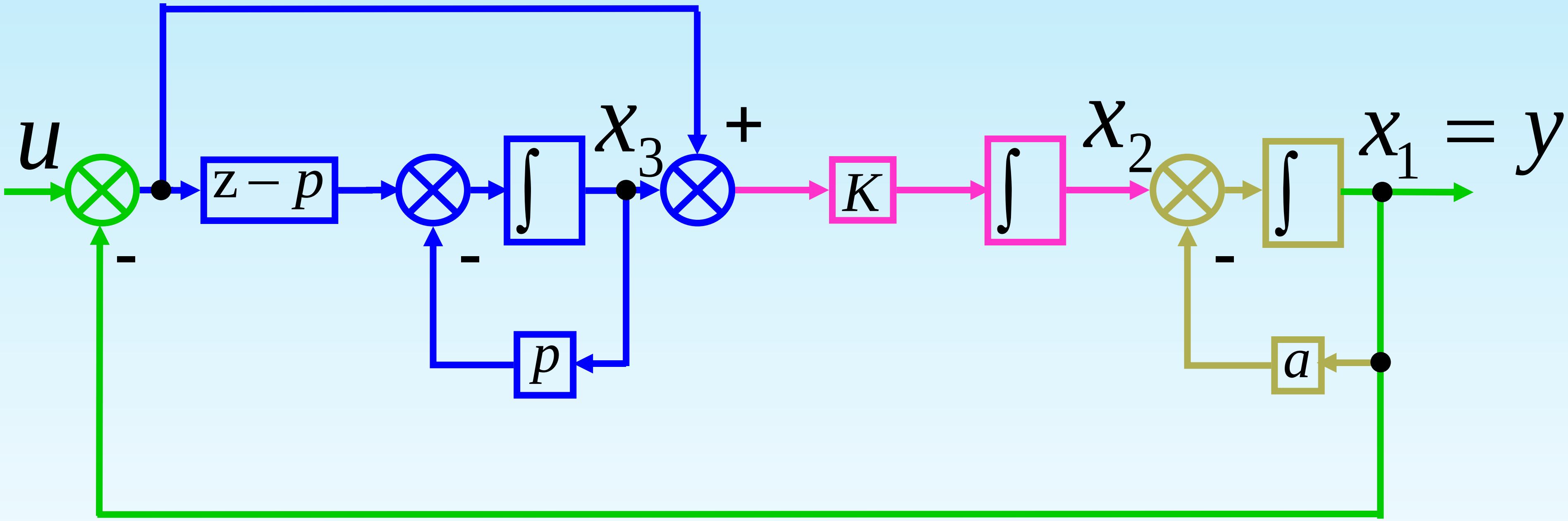


$$\frac{s+z}{s+p}=1+\frac{z-p}{s+p}$$





画出原系统的模拟结构图如下：



u
-
z − p
-
∫
p
x3
+
K
∫
x2
-
∫
a
x1 = y

第二步：根据模拟结构图写出状态方程

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}-a & 1 & 0\\ -K & 0 & K\\ -(z-p) & 0 & -p\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\ K\\ z-p\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

2．根据系统的机理建立状态空间表达式

控制系统按照能量属性分类：

电气　机械　机电　气动液压　热力

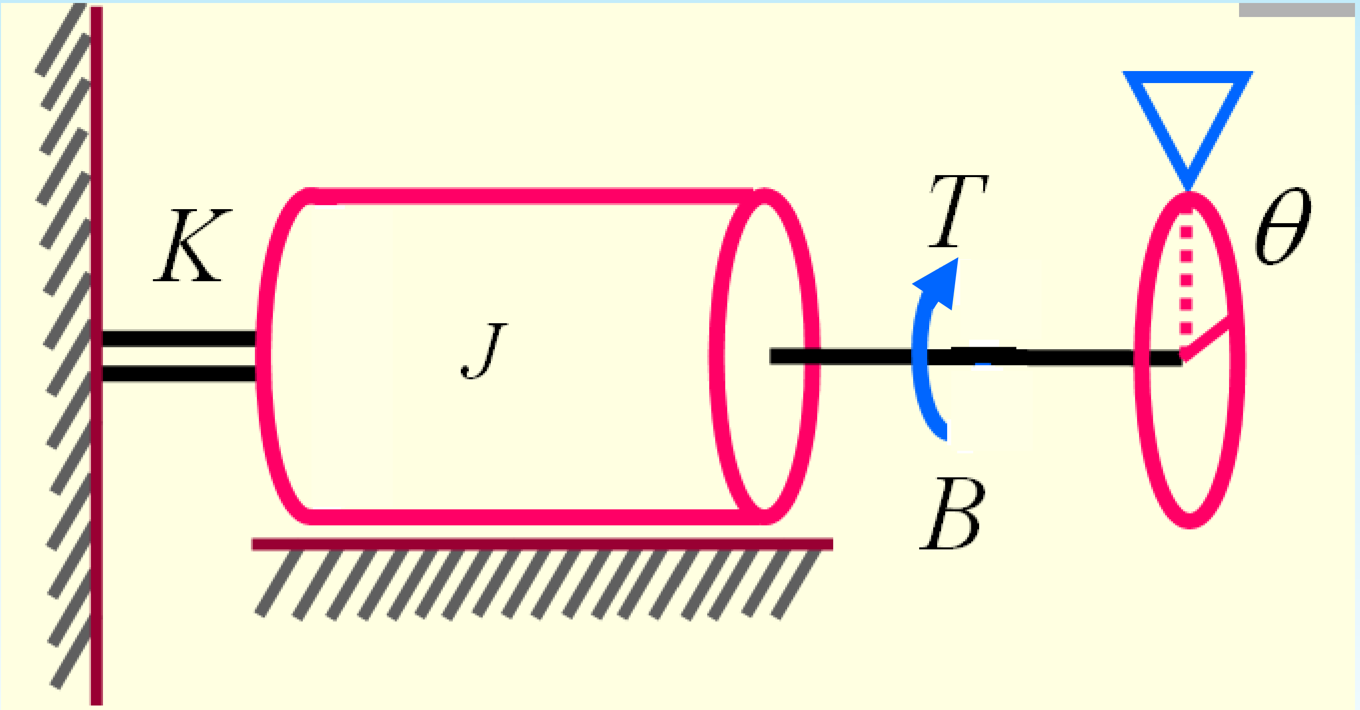
物理定理定律

牛顿定律

能量守恒定律 → 状态空间表达式

基尔霍夫定律

【例8-3】 试列写如图所示机械旋转运动模型的状态空间表达式。



J —— 转动惯量　　B —— 粘性阻尼系数

K —— 扭转轴的刚性系数

T —— 施加于扭转轴上的力矩

【解】

定义

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \omega = \dot{\theta}$$

$$u = T$$

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{K}{J}\theta - \frac{B}{J}\dot{\theta} + \frac{1}{J}T$$

牛顿第二定律！

$$\dot{x}_1 = x_2$$

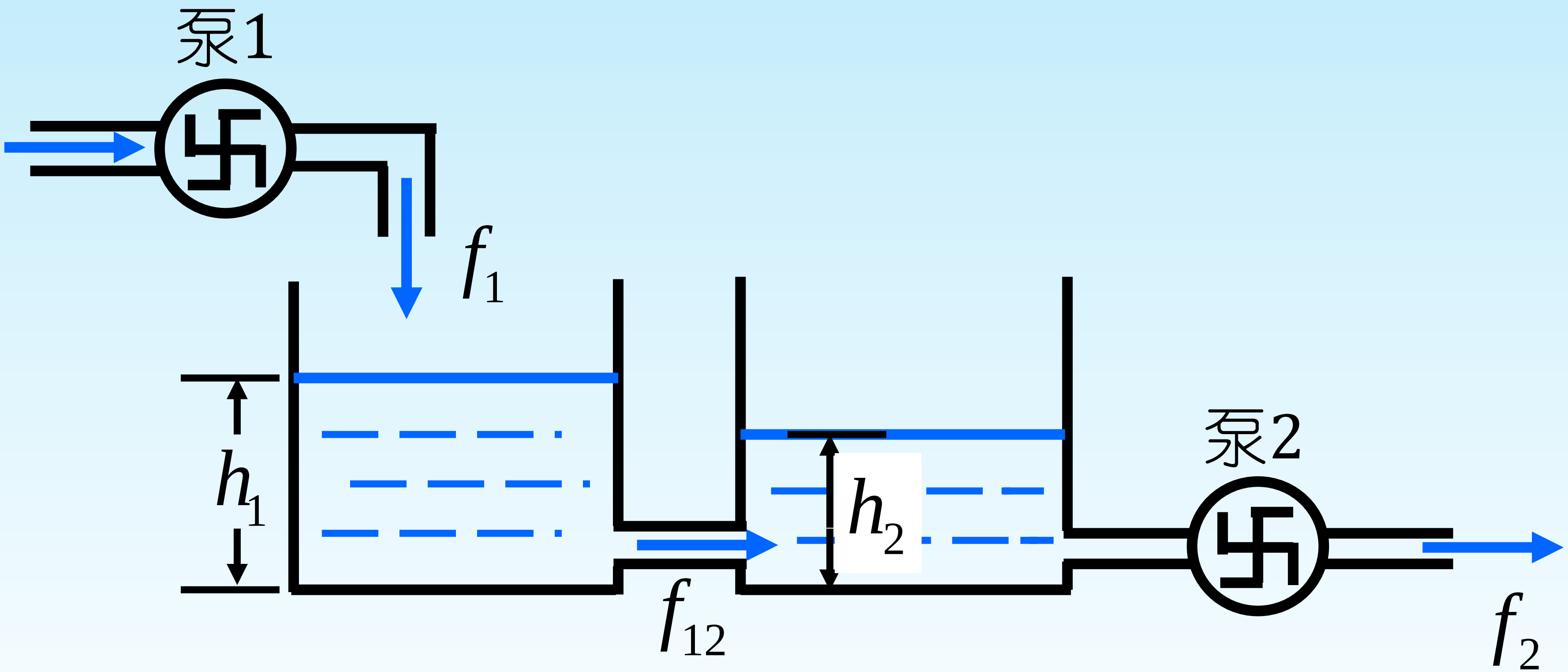
$$\dot{x}_2 = -\frac{K}{J}x_1 - \frac{B}{J}x_2 + \frac{1}{J}u$$

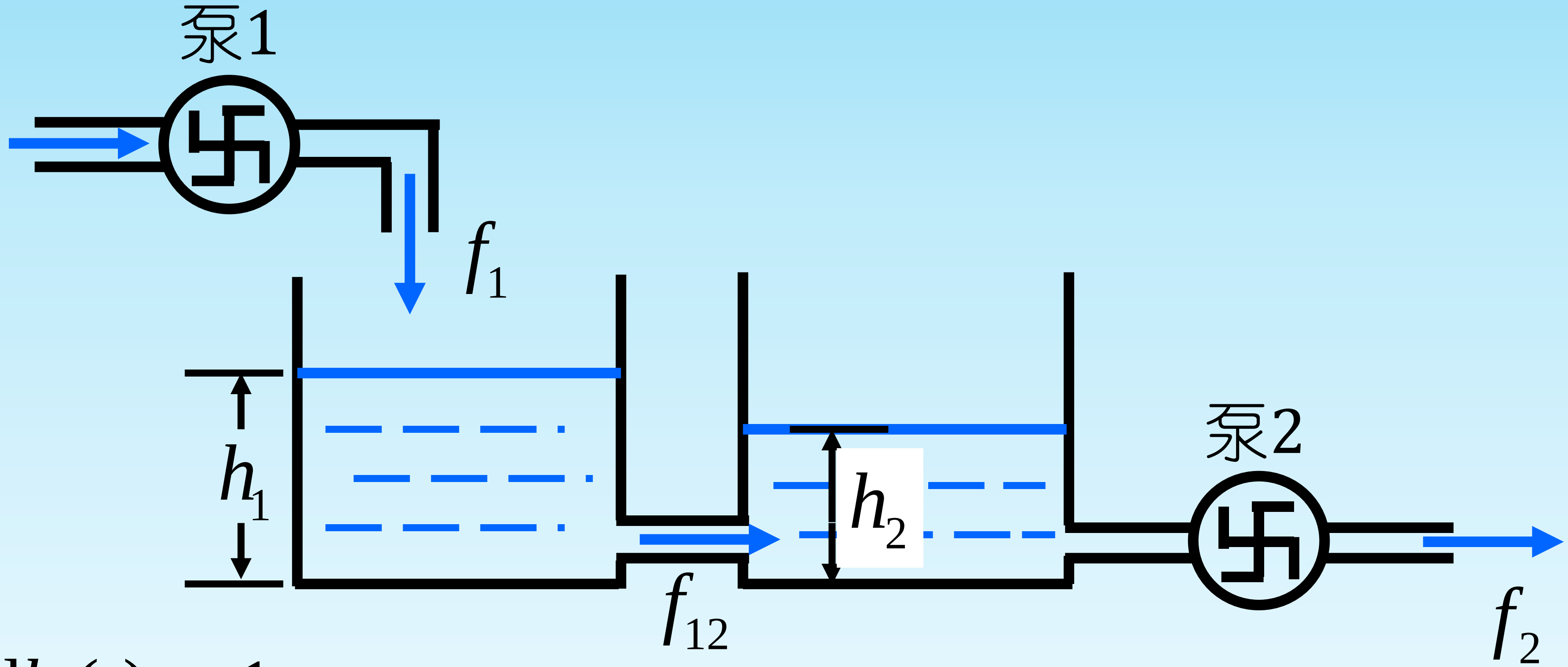
$$y = x_1$$

矩阵形式

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{J} & -\dfrac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{J} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

【例8-4】研究双容水箱水位调节系统的数学模型。





$$\frac{\mathrm{d}h_1(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{A}\left[f_1(t)-f_{12}(t)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}h_2(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{A}\left[f_{12}(t)-f_2(t)\right]$$

水箱横截面积

近似为自由落体速度

$$f_{12}(t)\approx\sqrt{2g\left[h_1(t)-h_2(t)\right]}$$

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{1}{A}\left[f_1(t) - f_{12}(t) \right]$$

$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{1}{A}\left[f_{12}(t) - f_2(t) \right]$$

$$f_{12}(t) = \sqrt{2g\left[h_1(t) - h_2(t)\right]}$$

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{1}{A}\left[f_1(t) - \sqrt{2g\left[h_1(t) - h_2(t)\right]} \right]$$

$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{1}{A}\left[\sqrt{2g\left[h_1(t) - h_2(t)\right]} - f_2(t) \right]$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}h_1(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{A}\sqrt{2g\left[h_1(t)-h_2(t)\right]} + \dfrac{1}{A} f_1(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}h_2(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{A}\sqrt{2g\left[h_1(t)-h_2(t)\right]} - \dfrac{1}{A} f_2(t) \end{cases}$$

注意：大多数系统属于非线性系统。

课后思考题1：如何将上述非线性模型线性化？

本次课内容总结

- 状态变量的概念；
- 状态空间表达式的概念；
- 如何从方块图入手求得状态空间表达式；
- 如何用机理建模的方法求取状态空间表达式。