7.5 数字控制器的模拟化设计

一.引言

已知对象特性

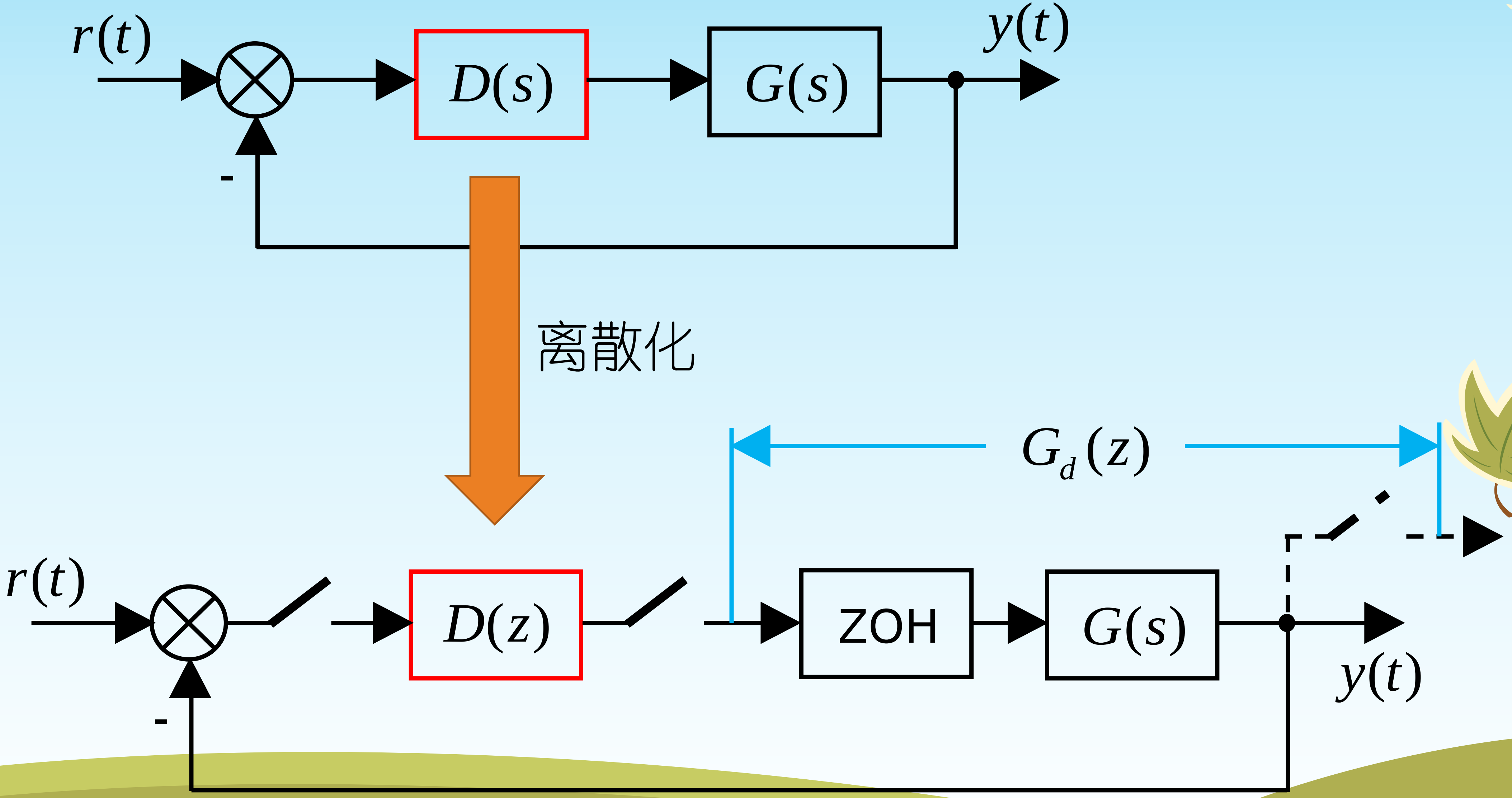
↓

动态和稳态性能指标

↓

设计数字控制器

离散系统的模拟化设计也称为连续-离散化设计。



$r(t)$
$D(s)$
$G(s)$
$y(t)$
-
离散化
$G_d(z)$
$r(t)$
$D(z)$
ZOH
$G(s)$
$y(t)$
-

设计连续控制器 $D(s)$

$D(s) \xrightarrow{\text{离散化}} D(z)$

检验闭环系统性能

这是一种近似方法

- $D(s) \xrightarrow{\text{离散化}} D(z)$ 近似
- 没有考虑ZOH的影响 近似

尽量减小采样周期 T

零阶保持器ZOH的传递函数可以作如下近似

$$H_0(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s} = \frac{1}{s}\left(1-\frac{e^{-sT/2}}{e^{sT/2}}\right)$$

$$\approx \frac{1}{s}\left(1-\frac{1-sT/2}{1+sT/2}\right)$$

$$= \frac{T}{1+\frac{sT}{2}}$$

二. 数字滤波器法

模拟控制器 $D(s)$ 也称为模拟滤波器

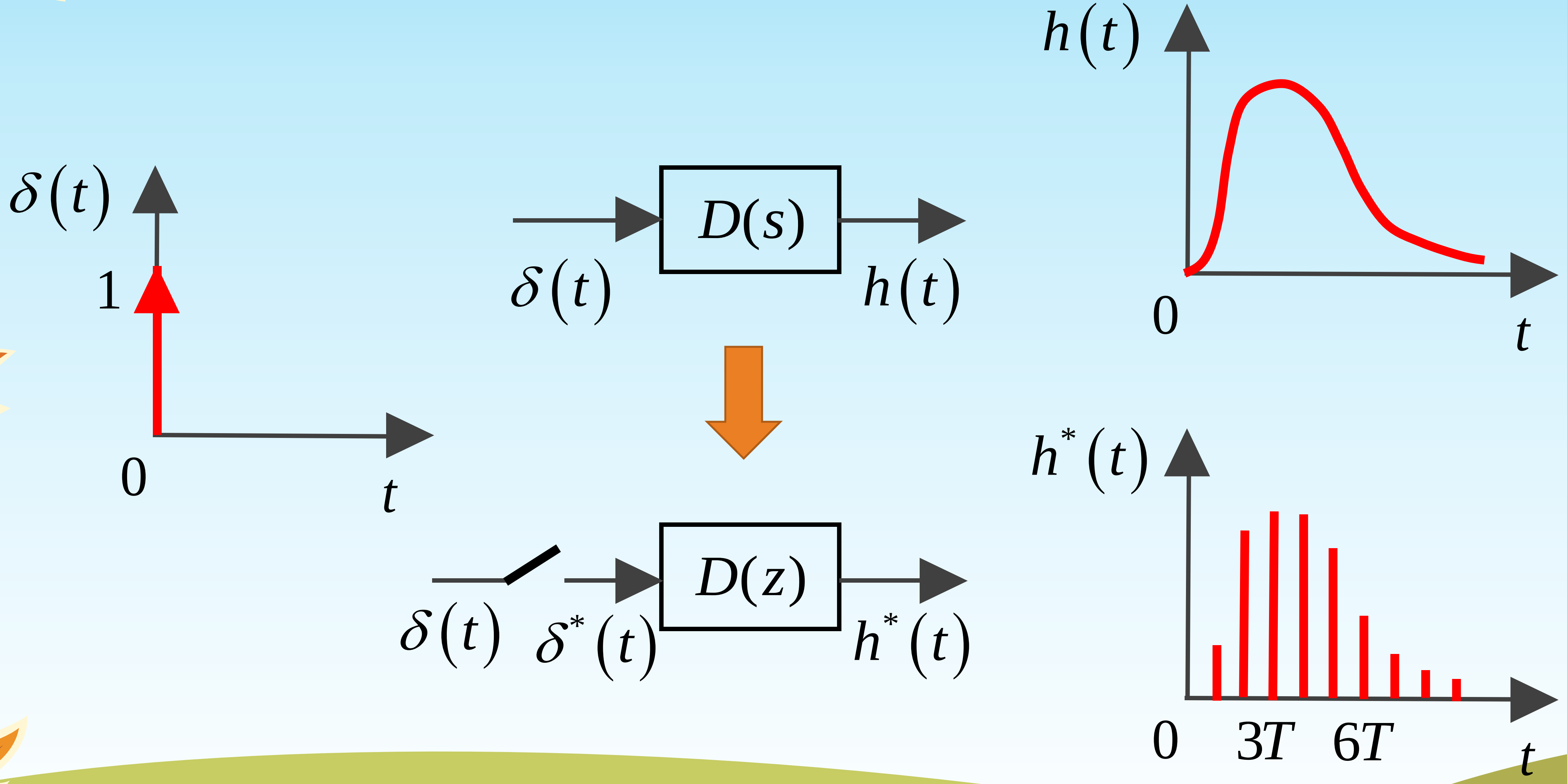
数字控制器 $D(z)$ 也称为数字滤波器

本节主要介绍由模拟滤波器设计数字滤波器 $D(z)$ 的方法。

1. 脉冲不变法

设计准则

所设计的数字滤波器$D(z)$ 的脉冲响应与模拟滤波器$D(s)$ 的脉冲响应在采样点上的值相等。



$\delta(t)$
1
0
t
$D(s)$
$\delta(t)$
$h(t)$
$D(z)$
$\delta(t)$
$\delta^*(t)$
$h^*(t)$
$h(t)$
0
t
$h^*(t)$
0
$3T$
$6T$
t

由 $D(s)$ 求取 $D(z)$ 的步骤

1. 将 $D(s)$ 分解为部分分式

$$D(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s+a_i}=H(s)$$

2. 求 $D(s)$ 也就是$H(s)$ 的拉氏反变换

$$h(t)=L^{-1}[D(s)]=L^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s+a_i}\right]=\sum_{i=1}^{n}A_i e^{-a_i t}$$

$h(t)$ 即为 $D(s)$ 的单位脉冲响应。

3　求 $h(t)$ 采样点的值 $h(k)$

$$h(k)=\sum_{i=1}^{n}A_i e^{-a_i kT}$$

4　求 $h(k)$ 的Z变换$H(z)$，即为$D(z)$

$$D(z)=H(z)=\mathbb{Z}\left[h(k)\right]=\mathbb{Z}\left[h^{*}(t)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}A_i\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-a_i kT}\right)z^{-k}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i z}{z-e^{-a_i T}}$$

脉冲不变法实际上就是求连续环节 $D(s)$ 的Z变换之过程。

【例7-20】 已知 $D(s)=\dfrac{a}{s+a}$，求 $D(z)$ 。

【解】 直接查表可得

$$D(z)=\frac{az}{z-e^{-aT}}$$

【例7-21】 已知 $D(s)=\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$ ，求 $D(z)$ 。

【解】 部分分式展开

$$D(s)=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+(a+j\omega_0)}+\frac{1}{s+(a-j\omega_0)}\right]$$

求Z变换： $D(s)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+(a+j\omega_0)}+\frac{1}{s+(a-j\omega_0)}\right]$

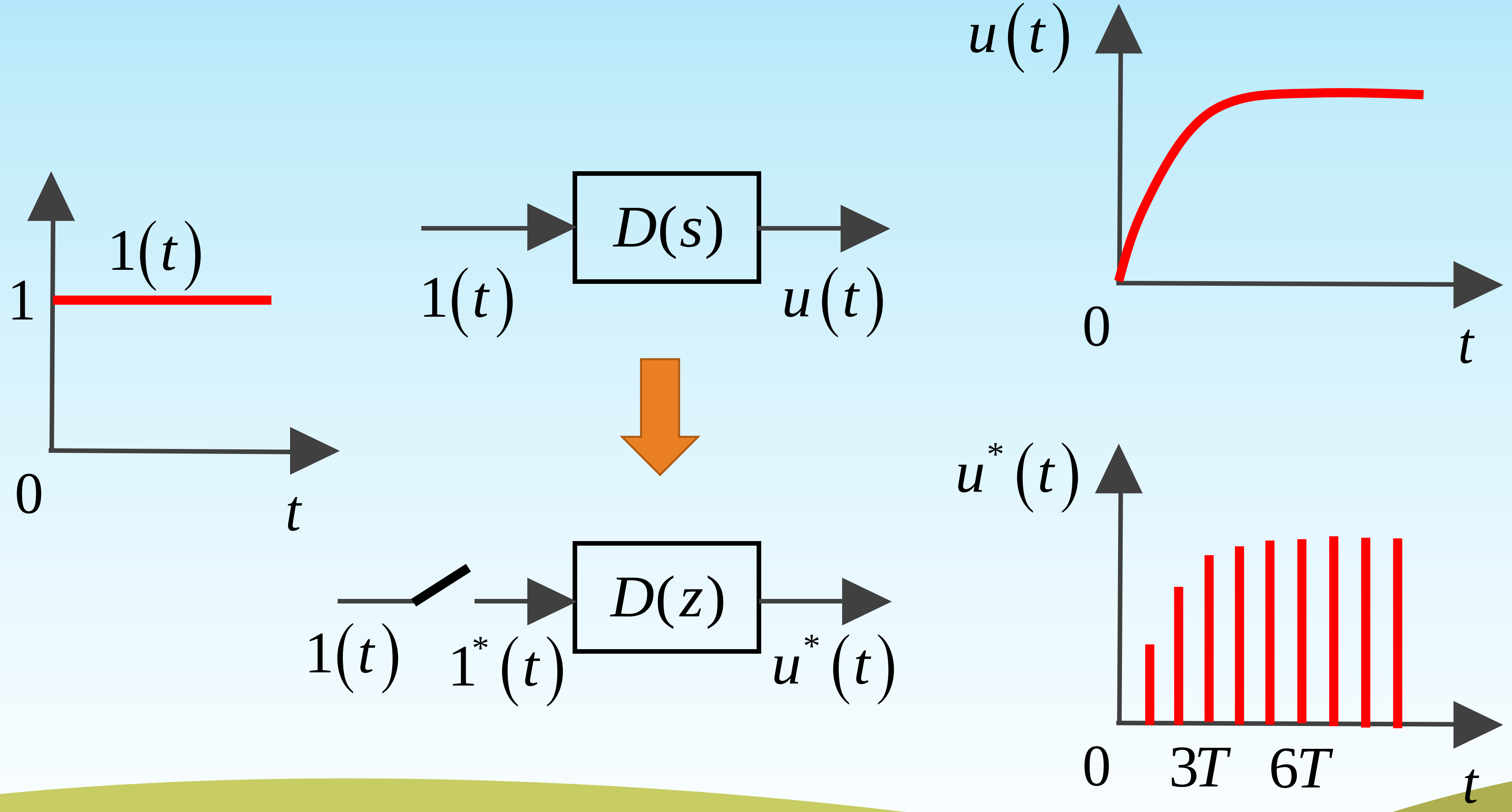
$$D(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-e^{-(a+j\omega_0)T}}+\frac{z}{z-e^{-(a-j\omega_0)T}}\right]$$

$$=\frac{z\left[z-e^{-aT}\cos(\omega_0 T)\right]}{z^2-2ze^{-aT}\cos(\omega_0 T)+e^{-2aT}}$$

2. 保持器等效法

设计准则

所设计的数字滤波器$D(z)$的阶跃响应与模拟滤波器$D(s)$的阶跃响应在采样点上的值相等。



1
1(t)
0
t
D(s)
1(t)
u(t)
D(z)
1(t)
1*(t)
u*(t)
u(t)
0
t
u*(t)
0
3T
6T
t

由 $D(s)$ 求取 $D(z)$ 的算法

$$D(z) = \mathbb{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}D(s)\right]$$

$$=\left(1-z^{-1}\right)\mathbb{Z}\left[\frac{D(s)}{s}\right]$$

【例7-22】 已知 $D(s)=\dfrac{a}{s+a}$，求 $D(z)$ 。

【解】

$$D(z)=\left(1-z^{-1}\right)\mathbb{Z}\left[\frac{D(s)}{s}\right]$$

$$=\left(1-z^{-1}\right)\mathbb{Z}\left[\frac{a}{s\left(s+a\right)}\right]$$

$$=\frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}$$

说明

- 若 $D(s)$ 稳定，则 $D(z)$ 稳定，两者极点对应；
- $D(s)$ 与 $D(z)$ 的频率特性不同；
- 同一个 $D(s)$，以不同的准则设计得到的 $D(z)$ 不同；
- $D(z)$ 与采样周期 T 有关。

3. 数值积分法

设计准则

将 $D(s)$ 中的 s 用相应的 s 与 z 的转换关系代入，

求得 $D(z)$ 。

- 向前矩形积分 $s=\dfrac{z-1}{T}$
- 向后矩形积分 $s=\dfrac{z-1}{Tz}$
- 梯形积分 $s=\dfrac{2(z-1)}{T(z+1)}$

【例7-23】 已知 $D(s)=\dfrac{a}{s+a}$，求 $D(z)$ 。

【解】 向前矩形积分 $D(z)=\dfrac{a}{\dfrac{z-1}{T}+a}=\dfrac{aT}{z-1+aT}$

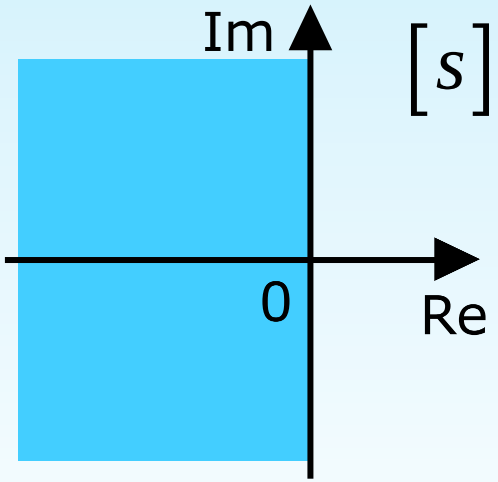
向后矩形积分 $D(z)=\dfrac{a}{\dfrac{z-1}{Tz}+a}=\dfrac{aTz}{(1+aT)z-1}$

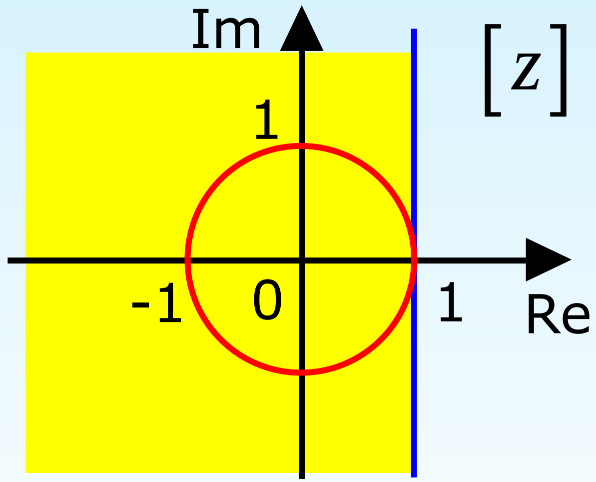
梯形积分 $D(z)=\dfrac{a}{\dfrac{2(z-1)}{T(z+1)}+a}=\dfrac{aT(z+1)}{(aT+2)z+aT-2}$

说明

- 向前矩形积分 $s=\dfrac{z-1}{T}$ ⟹ $z=1+sT$

当 $s=j\omega$ 时， $z=1+j\omega T$





当 $D(s)$ 稳定时， $D(z)$ 不一定稳定。

向后矩形积分 $s=\dfrac{z-1}{Tz}$ $\Rightarrow$ $z=\dfrac{1}{1-sT}$

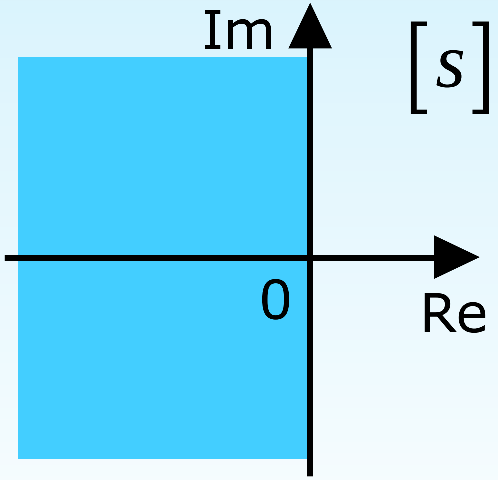
当 $s=j\omega$ 时， $z=\dfrac{1}{1-j\omega T}$

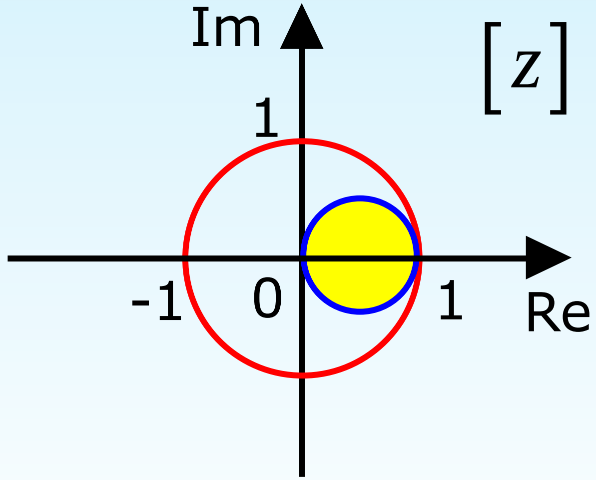
$$z=\frac{1+j\omega T}{1+\omega^2T^2}$$

令 $z=x+jy$

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{1+\omega^2T^2} \\ y=\dfrac{\omega T}{1+\omega^2T^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{1+\omega^2T^2} \\ y = \dfrac{\omega T}{1+\omega^2T^2} \end{cases} \xrightarrow{\text{消去 } \omega T} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

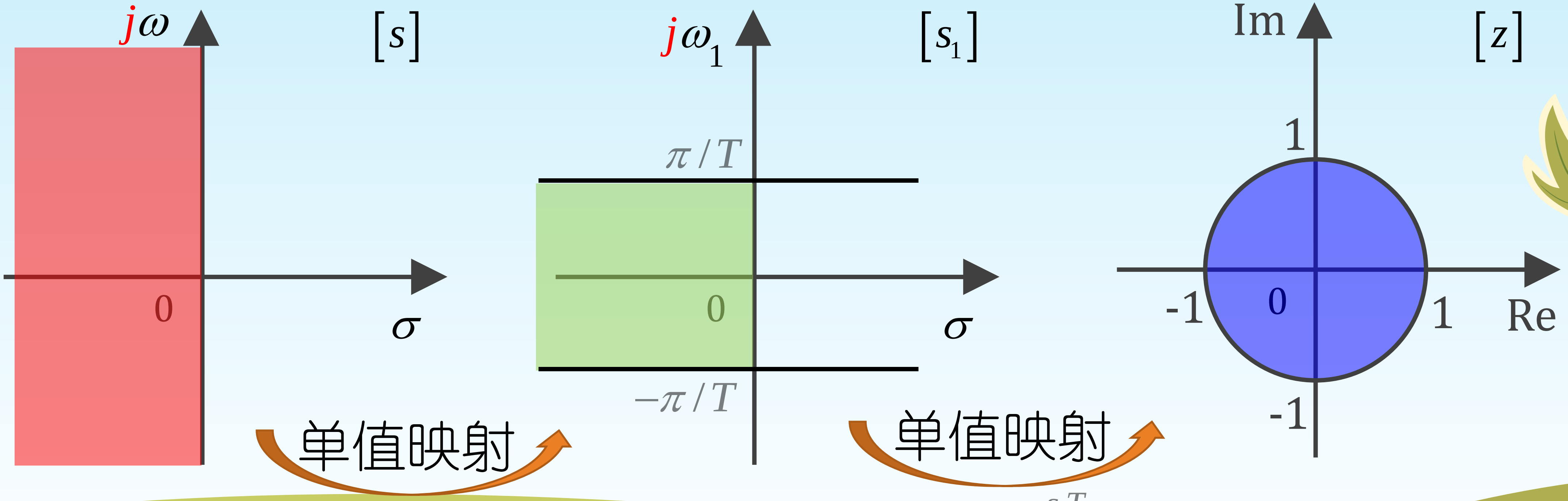




当 $D(s)$ 稳定时， $D(z)$ 一定稳定。

- 梯形积分 $s=\dfrac{2(z-1)}{T(z+1)}=\dfrac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}$

梯形积分也称为双线性变换【过程略】



$$\frac{\omega T}{2}=\tan\frac{\omega_1 T}{2}$$

$$z=e^{s_1T}$$

- 梯形积分是 s 与 z 之间的一一对应单值关系；
- S平面的$j\omega$轴单值对应于Z平面单位圆一周；
- 当 $D(s)$ 稳定时， $D(z)$ 一定稳定；
- 双线性变换（梯形积分）会产生频率失真现象。

频率失真的预防

为了预防双线性变换产生的频率失真，可以对双线性变换进行修改。

准则：

$D(s)$与$D(z)$在所要求的频率点上具有相同的频率特性。

令

$$s=\frac{2A\left(1-z^{-1}\right)}{T\left(1+z^{-1}\right)}$$

$$s=\frac{2A\left(1-z^{-1}\right)}{T\left(1+z^{-1}\right)}$$

$$s=j\omega_0$$

$$z=e^{sT}=e^{j\omega_0 T}$$

$$A=\frac{T}{2}\cdot\frac{\omega_0}{\tan\frac{\omega_0 T}{2}}$$

$$\boxed{s=\frac{\omega_0}{\tan\frac{\omega_0 T}{2}}\cdot\frac{\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1+z^{-1}\right)}}$$

$$s=\frac{\omega_0}{\tan\frac{\omega_0 T}{2}}\cdot\frac{\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1+z^{-1}\right)}$$

数字滤波器 $D(z)=D(s)\big|_{s=}$

则必有

$$D(j\omega_0)=D(e^{j\omega_0 T})$$

三. 匹配Z变换

$$D(s)=\frac{k_s\left(s-z_1\right)\left(s-z_2\right)\cdots\left(s-z_m\right)}{\left(s-p_1\right)\left(s-p_2\right)\cdots\left(s-p_n\right)}$$ 零极点形式

零极点匹配
或称根匹配

$$D(z)$$

设计准则

直接将$D(s)$在S平面上的零极点由Z变换映射到Z平面上，成为$D(z)$的零极点。

$z = e^{sT}$

- 对于S平面上的实数零极点 $-a$

$$s+a \Rightarrow z-e^{-aT}$$

对于S平面上的共轭复数零极点 $-a \pm j\omega_0$

$$\left[s+\left(a+j\omega_0\right)\right]\left[s+\left(a-j\omega_0\right)\right]=\left(s+a\right)^2+\omega_0^2$$

$$\Downarrow$$

$$\left[z-e^{(-a+j\omega_0)T}\right]\left[z-e^{(-a-j\omega_0)T}\right]=z^2-2ze^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}$$

增益 k_s 的求取准则

$D(s)$ 与 $D(z)$ 在同一类型典型输入信号作用下的响应终值（有限值）在采样点上相等。

$$\lim_{s\to 0} sD(s)R(s) = \lim_{z\to 1}\left(z-1\right)D(z)R(z)$$

考虑零极点的匹配

1 $D(s)$ 的分子分母同阶，即 $m=n$

$$D(z)=\frac{k_z\left(z-e^{z_1T}\right)\left(z-e^{z_2T}\right)\cdots\left(z-e^{z_mT}\right)}{\left(z-e^{p_1T}\right)\left(z-e^{p_2T}\right)\cdots\left(z-e^{p_nT}\right)}$$

2 $D(s)$ 的分子分母不同阶，即 $m<n$

匹配 $n-m$ 个零点有三种方式：

方式一： 将 $n-m$ 个零点匹配在 $z=0$ 处

$$D(z)=\frac{k_z\left(z-e^{z_1T}\right)\left(z-e^{z_2T}\right)\cdots\left(z-e^{z_mT}\right)z^{n-m}}{\left(z-e^{p_1T}\right)\left(z-e^{p_2T}\right)\cdots\left(z-e^{p_nT}\right)}$$

思路来源： $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s}\right]=\frac{z}{z-1}$ $\mathbb{Z}\left[\frac{a}{s+a}\right]=\frac{az}{z-e^{-aT}}$

相当于认为 $D(s)$ 在实轴 $-\infty$ 远处有 $n-m$ 个零点。

方式二： 将 $n-m$ 个零点匹配在 $z=-1$ 处

$$D(z)=\frac{k_z\left(z-e^{z_1T}\right)\left(z-e^{z_2T}\right)\cdots\left(z-e^{z_mT}\right)\left(z+1\right)^{n-m}}{\left(z-e^{p_1T}\right)\left(z-e^{p_2T}\right)\cdots\left(z-e^{p_nT}\right)}$$

思路来源：连续积分与梯形积分的关系 $\frac{1}{s}\rightarrow\frac{T\left(z+1\right)}{2\left(z-1\right)}$

方式三：　将 $n-m$ 个零点匹配在 $0\sim-1$ 处

$$D(z)=\frac{k_z\left(z-e^{z_1T}\right)\left(z-e^{z_2T}\right)\cdots\left(z-e^{z_mT}\right)\left(z+\delta\right)^{n-m}}{\left(z-e^{p_1T}\right)\left(z-e^{p_2T}\right)\cdots\left(z-e^{p_nT}\right)}$$

此时 k_z 与 δ 的确定准则：在某一采样周期 T 与某一频率 ω 处 $D(s)$ 与 $D(z)$ 的频率响应相同。

【例7-24】 已知 $D(s)=\dfrac{s}{(s+1)^2}$，求 $D(z)$ 。

【解】 $m=1 \quad n=2$

用三种方式匹配 $n-m=1$ 个零点

方式一： 将1个零点匹配在 $z=0$ 处

$$D(s)=\frac{s}{(s+1)^2}$$

⇩

$$D(z)=\frac{k_z(z-1)z}{(z-e^{-T})^2}$$

输入单位斜坡信号 t 以确定 k_z 。

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{s\to 0}\left[s\frac{s}{(s+1)^2}\frac{1}{s^2}\right] = 1$$

$$\lim_{k\to\infty} u(k) = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{k_z(z-1)z}{\left(z-e^{-T}\right)^2}\frac{Tz}{(z-1)^2}\right] = \frac{Tk_z}{\left(1-e^{-T}\right)^2}$$

$$1 = \frac{Tk_z}{\left(1-e^{-T}\right)^2} \Rightarrow k_z = \frac{\left(1-e^{-T}\right)^2}{T} \Rightarrow D(z) = \frac{\left(1-e^{-T}\right)^2(z-1)z}{T\left(z-e^{-T}\right)^2}$$

方式二：　将1个零点匹配在 $z=-1$ 处

$$D(s)=\frac{s}{(s+1)^2}$$

$$D(z)=\frac{k_z(z-1)(z+1)}{\left(z-e^{-T}\right)^2}$$

同方式一可求得 $k_z=\dfrac{\left(1-e^{-T}\right)^2}{2T}$，

$$D(z)=\frac{\left(1-e^{-T}\right)^2(z-1)(z+1)}{2T\left(z-e^{-T}\right)^2}$$

方式三： 将1个零点匹配在$0\sim-1$处

$$D(s)=\frac{s}{(s+1)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$D(z)=\frac{k_z(z-1)(z+\delta)}{\left(z-e^{-T}\right)^2}$$

假设要求当 $T=1$，$\omega=1$时，$D(s)$与$D(z)$的频率响应相同。

$$D(s)=\frac{s}{(s+1)^2}$$ 的频率响应

$$D(j\omega)=\frac{j\omega}{(j\omega+1)^2}=\frac{j\omega}{1-\omega^2+2j\omega}$$

$$D(z)=\frac{k_z(z-1)(z+\delta)}{(z-e^{-T})^2}$$ 的频率响应

$$D(e^{j\omega T})=\frac{k_z(e^{j\omega T}-1)(e^{j\omega T}+\delta)}{(e^{j\omega T}-e^{-T})^2}$$

考虑 $\begin{matrix} T=1 \\ \omega=1 \end{matrix}$

$$\begin{cases} |D(j1)|=|D(e^{j1\times1})| \\ \angle D(j1)=\angle D(e^{j1\times1}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_z=0.2828 \\ \delta=0.5272 \end{cases}$$

$$D(z)=\frac{0.2828(z-1)(z+0.5272)}{(z-0.368)^2}$$

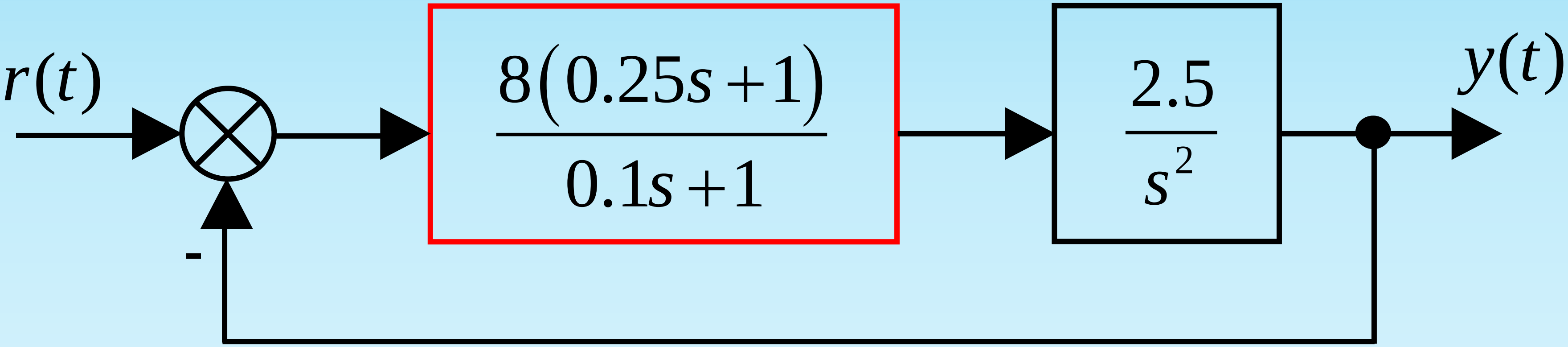
说明

- 按照匹配Z变换设计 $D(z)$ 时，需将 $D(s)$ 用零极点形式表示；
- 与脉冲不变法相比，两者 $D(z)$ 的极点均由 $z = e^{sT}$ 匹配而得，因此极点相同，而零点不同；
- 当 $D(s)$ 稳定时，$D(z)$ 一定稳定；
- 匹配Z变换在如下情况下不宜采用：若 $D(s)$ 具有共轭复数零点 $s = a \pm j\omega_0$ 其中 $\omega_0 > \dfrac{\omega_s}{2}$，$\omega_s$ 为采样角频率，即 $D(s)$ 有位于S平面主频带以外的零点，此时设计的 $D(z)$ 其频率特性将产生混叠现象。

四. 系统设计举例

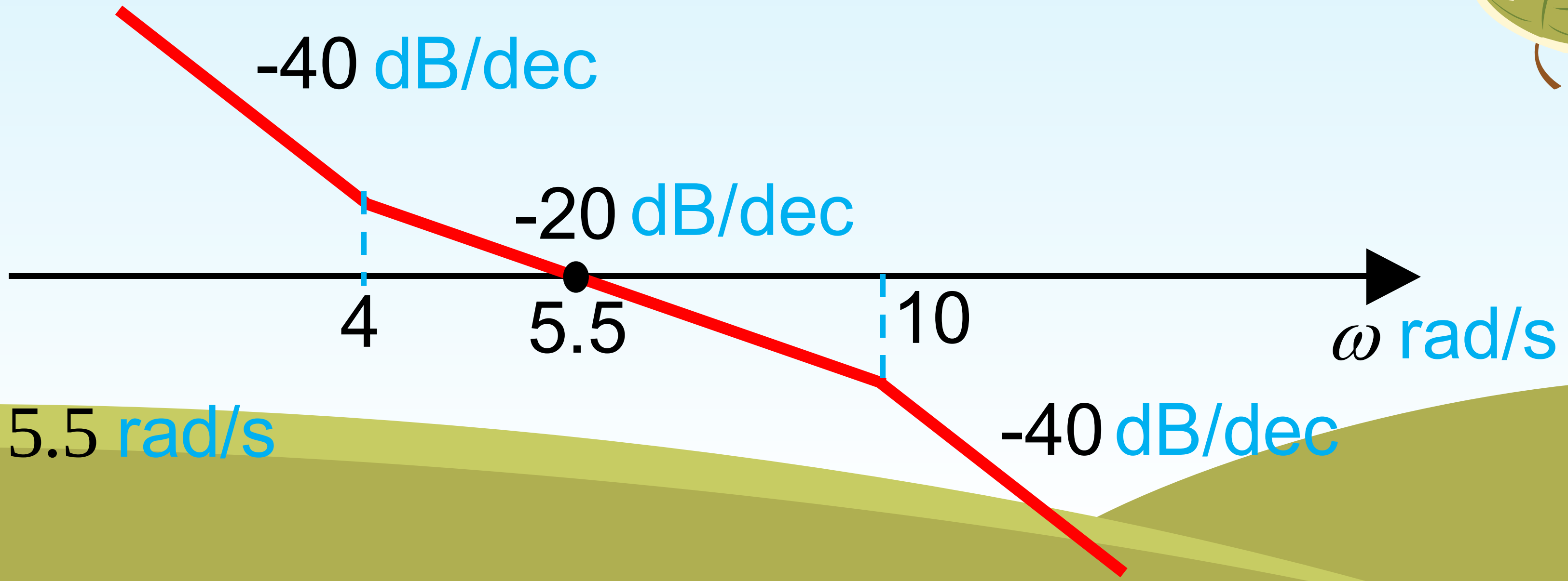
本节通过两个具体的例子说明数字控制系统的连续-离散化设计过程。

【例7-25】 某连续控制系统如图所示，试设计相应的数字控制系统。



【解】 1 选择采样周期 T

画出系统的开环渐近幅频特性图



开环剪切频率 $\omega_c = 5.5$ rad/s

一般情况的原则：$\omega_s \geq 10\omega_c = 10 \times 5.5 = 55$ rad/s

取 $T = 0.015$ s， 则 $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T} = 418.67$ ， 已远大于$10\omega_c$

2 设计 $D(z)$

$$D(s) = \frac{8(0.25s+1)}{0.1s+1} = \frac{20(s+4)}{s+10}$$

按照匹配Z变换

$$D_1(z) = \frac{k_z\left(z - e^{-4T}\right)}{z - e^{-10T}} \approx \frac{k_z(z-0.94)}{z-0.86}$$

$D(s)$与$D_1(z)$在单位阶跃输入下的终值相等

$$\lim_{s\to 0} sD(s)\frac{1}{s}=\lim_{z\to 1}\left(z-1\right)D_1(z)\frac{z}{z-1}$$

$$\lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{20\left(s+4\right)}{s+10}\cdot\frac{1}{s}\right]=\lim_{z\to 1}\left[\left(z-1\right)\cdot\frac{k_z\left(z-0.94\right)}{z-0.86}\cdot\frac{z}{z-1}\right]$$

$$k_z\approx 18.7$$

$$D_1(z)=\frac{18.7\left(z-0.94\right)}{z-0.86}$$

按照双线性变换

$$D(s)=\frac{20\left(s+4\right)}{s+10}$$

$$D_2(z)=\frac{20\left(\frac{2}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1}+4\right)}{\frac{2}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1}+10}$$

$$=\frac{19.16\left(z-0.94\right)}{z-0.86}$$

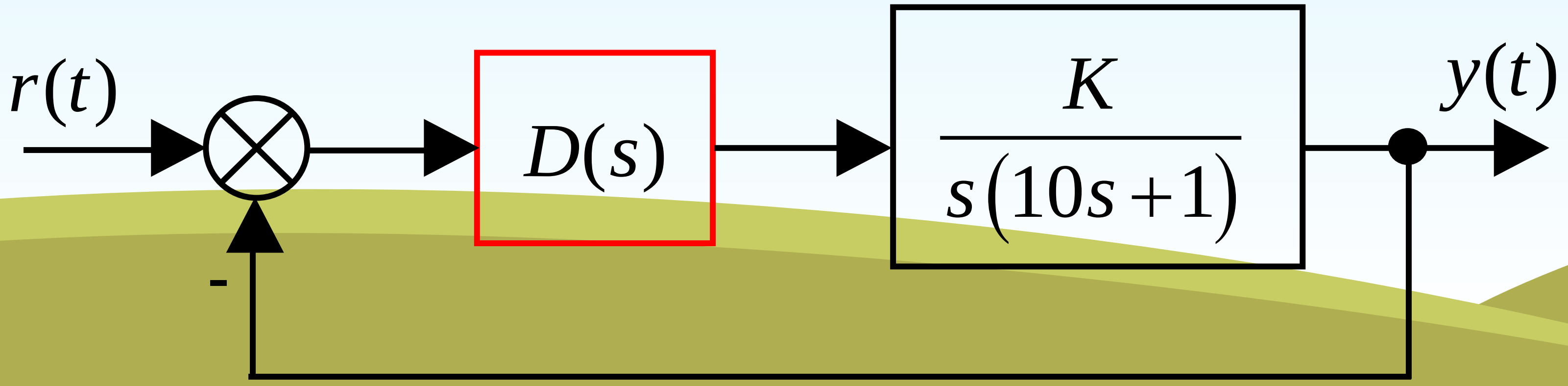
由于采样周期很小，因此 $D_1(z)$ 与 $D_2(z)$ 相差很小。

【例7-26】 已知被控对象的传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(10s+1)}$$

设计数字控制器，在斜坡信号 $r(t)=0.01t$ 作用下，稳态误差 $e_{ss}=0.01$ rad，并要求接近于连续系统 $\zeta=0.5$，$\omega_n=1$ 的动态特性。

【解】 1 确定 $D(s)$ 及开环增益 K



$$e_{ss} = \frac{0.01}{K} = 0.01 \quad \Rightarrow \quad K = 1$$

假设连续系统的闭环传递函数为

$$\zeta = 0.5 \quad \omega_n = 1$$

$$H(s) = \frac{k_H}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \frac{k_H}{s^2 + s + 1}$$

则期望的开环传递函数为

$$D(s)G(s) = \frac{H(s)}{1 - H(s)} = \frac{k_H}{s^2 + s + 1 - k_H}$$

$$D(s)G(s)=\frac{H(s)}{1-H(s)}=\frac{k_H}{s^2+s+1-k_H}$$

由题意这是一个I型系统，故 $k_H=1$

$$D(s)G(s)=\frac{1}{s^2+s}=\frac{1}{s(s+1)}$$

$K=1$

$$G(s)=\frac{K}{s(10s+1)}$$

$$D(s)=\frac{10s+1}{s+1}$$

2 选择采样周期 T

不难求得系统的开环剪切频率为 $\omega_c = 1$ rad/s

取 $T = 0.3$ s，则 $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T} = 20.94$，已远大于$10\omega_c$

3 用匹配Z变换法求取 $D(z)$

$$D(s) = \frac{10s+1}{s+1} = \frac{10(s+0.1)}{s+1}$$

$$D(z) = \frac{k_z\left(z-e^{-0.1T}\right)}{z-e^{-T}} = \frac{k_z(z-0.97)}{z-0.741}$$

$D(s)$与$D(z)$ 在单位阶跃输入下的终值相等

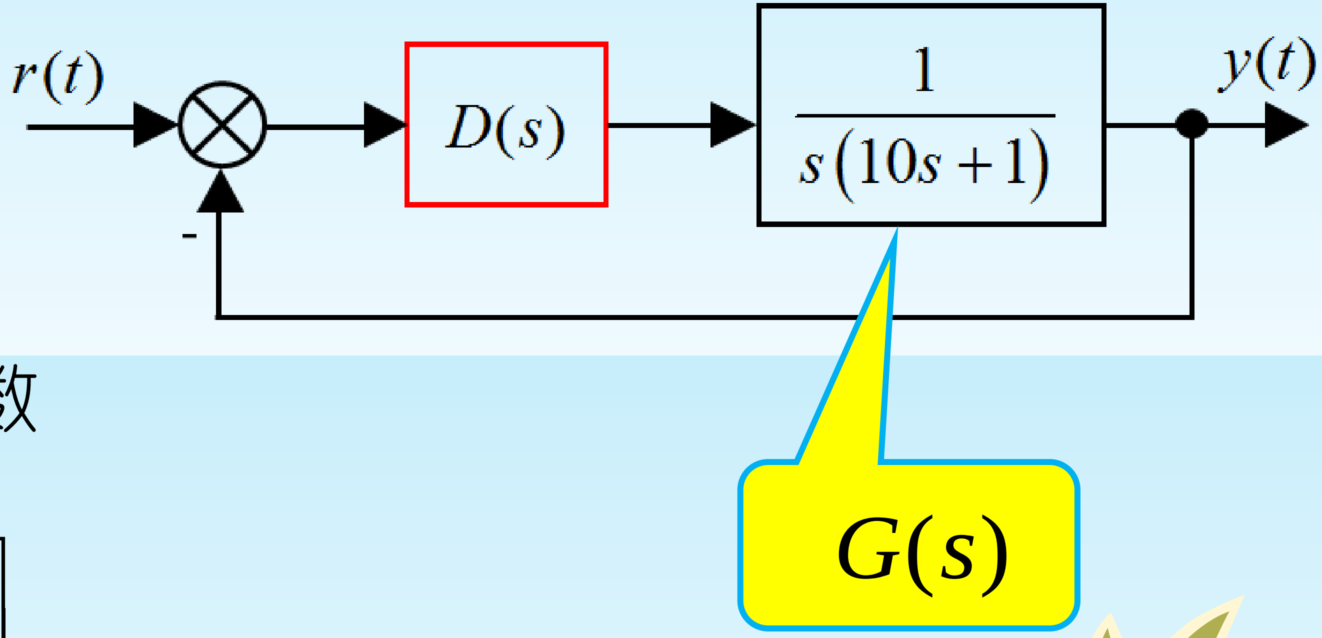
$$\lim_{s\to 0} sD(s)\frac{1}{s} = \lim_{z\to 1}(z-1)D(z)\frac{z}{z-1}$$

$$\lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{10(s+0.1)}{s+1}\cdot\frac{1}{s}\right] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\cdot\frac{k_z(z-0.97)}{z-0.741}\cdot\frac{z}{z-1}\right]$$

$$k_z = 8.64$$

$$D(z) = \frac{8.64(z-0.97)}{z-0.741}$$

4 仿真检验

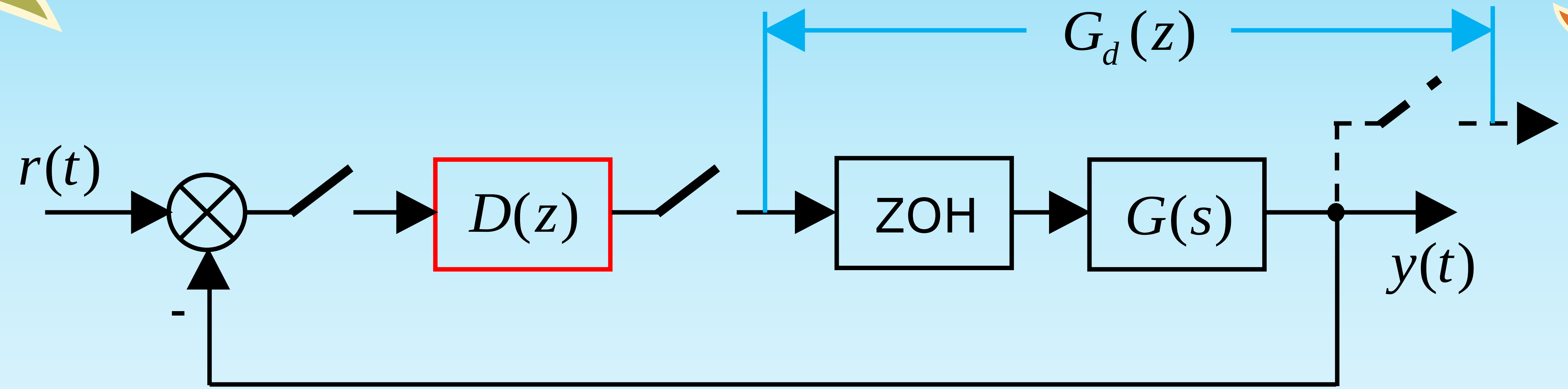


求取带保持器的对象传递函数

$$G_d(z) = (1 - z^{-1})\mathbb{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$= (1 - z^{-1})\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s(10s+1)}\right]$$

$$= \frac{0.00445(z+0.99)}{(z-1)(z-0.97)}$$



$$H(z)=\frac{D(z)G_d(z)}{1+D(z)G_d(z)}=\frac{0.0385(z+0.99)}{z^2-1.7z+0.78}$$

闭环极点 $p_{1,2}=0.85\pm j0.24=0.883\angle\pm15.76^0$

$$p_{1,2}=0.85\pm j0.24=0.883\angle\pm15.76^0$$

$$\begin{cases} r=e^{-\zeta\omega_n T} \\ \theta=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}T \end{cases}$$

$$\begin{cases} r=0.883 \\ \theta=15.76^0=0.275\ \text{rad} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \zeta=0.4122 \\ \omega_n=1.006 \end{cases}$$

比较接近

$$\zeta=0.5$$
$$\omega_n=1$$

性能指标

五. 数字PID控制

1. 模拟PID调节器的数学模型

【略】

2. 数字PID控制的基本算法

1 位置算式

$$u(t)=K_{\mathrm{P}}e(t)+K_{\mathrm{Ia}}\int_0^t e(t)\mathrm{d}t+K_{\mathrm{Da}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)$$

$$u(k)=K_{\mathrm{P}}e(k)+K_{\mathrm{Ia}}T\sum_{j=0}^{k}e(j)+K_{\mathrm{Da}}\frac{e(k)-e(k-1)}{T}$$

$$u(k)=K_{\mathrm{P}}e(k)+K_{\mathrm{Ia}}T\sum_{j=0}^{k}e(j)+K_{\mathrm{Da}}\frac{e(k)-e(k-1)}{T}$$

$$u(k)=K_{\mathrm{P}}e(k)+K_{\mathrm{I}}\sum_{j=0}^{k}e(j)+K_{\mathrm{D}}\left[e(k)-e(k-1)\right]$$

位置算式，也称为全量算式

T 采样周期

$K_{\mathrm{I}}=K_{\mathrm{Ia}}T$

$K_{\mathrm{D}}=K_{\mathrm{Da}}/T$

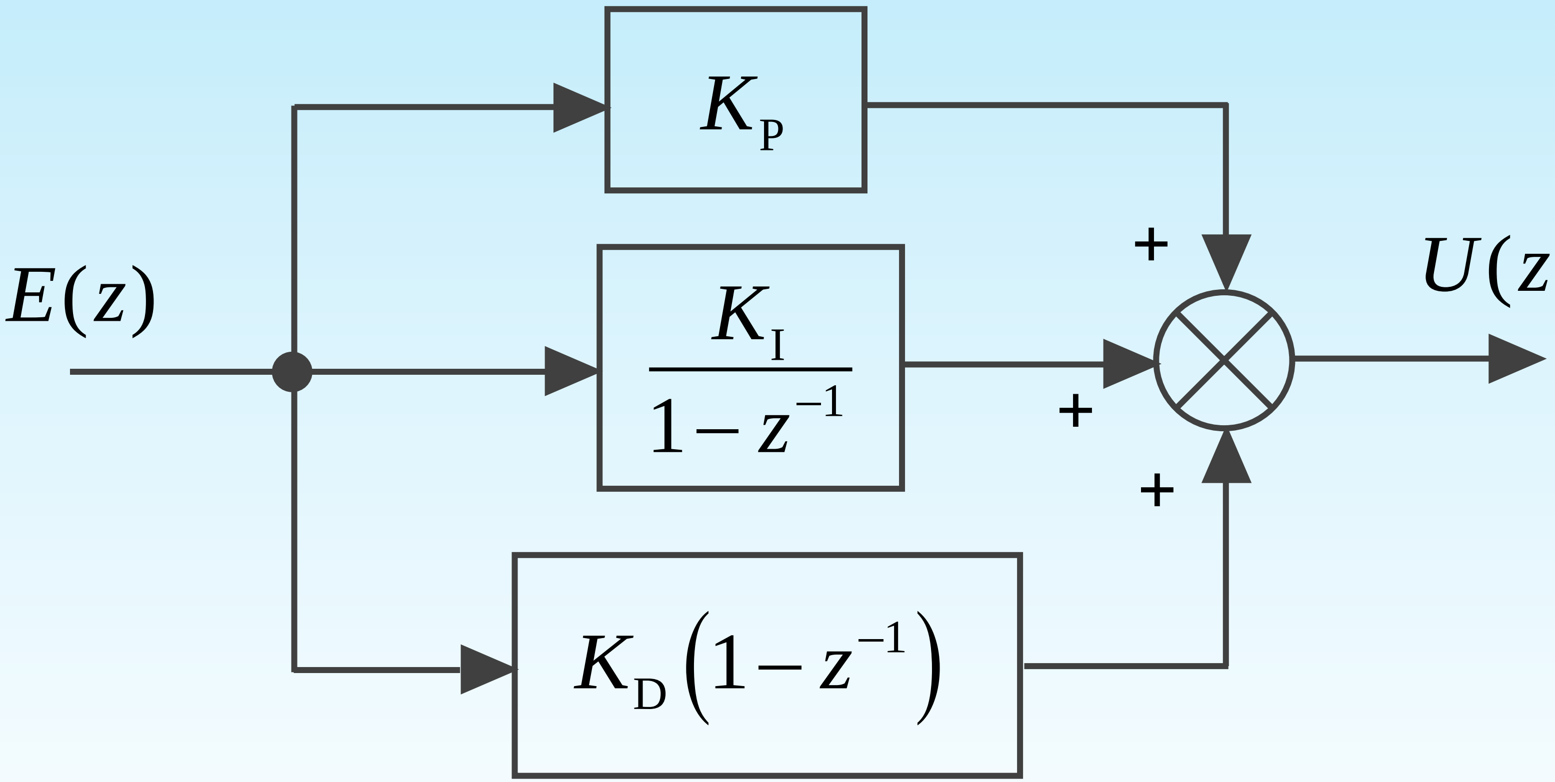
$$u(k)=K_{\mathrm{P}}e(k)+K_{\mathrm{Ia}}T\sum_{j=0}^{k}e(j)+K_{\mathrm{Da}}\frac{e(k)-e(k-1)}{T}$$

向后积分算法 $s=\dfrac{z-1}{Tz}=\dfrac{1-z^{-1}}{T}$

脉冲传递函数 $D(z)=K_{\mathrm{P}}+K_{\mathrm{Ia}}\dfrac{T}{1-z^{-1}}+K_{\mathrm{Da}}\dfrac{1-z^{-1}}{T}$

$$D(z)=K_{\mathrm{P}}+K_{\mathrm{I}}\frac{1}{1-z^{-1}}+K_{\mathrm{D}}\left(1-z^{-1}\right)$$

$$D(z)=K_\mathrm{P}+K_\mathrm{I}\frac{1}{1-z^{-1}}+K_\mathrm{D}\left(1-z^{-1}\right)$$



数字PID控制的位置算法

② 速率算式（也称为增量算式）

$$\Delta e(k)$$

$$u(k)=K_{\mathrm{P}}e(k)+K_{\mathrm{I}}\sum_{j=0}^{k}e(j)+K_{\mathrm{D}}\left[e(k)-e(k-1)\right]$$

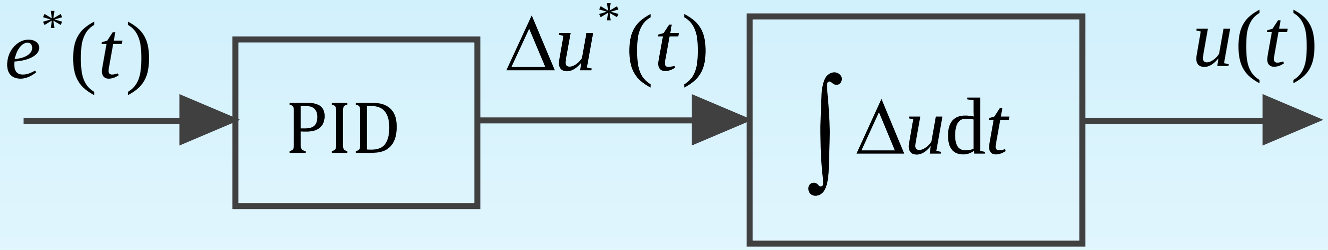
$$\Delta e(k-1)$$

$$u(k-1)=K_{\mathrm{P}}e(k-1)+K_{\mathrm{I}}\sum_{j=0}^{k-1}e(j)+K_{\mathrm{D}}\left[e(k-1)-e(k-2)\right]$$

$$\Delta u(k)=u(k)-u(k-1)$$

$$=K_{\mathrm{P}}\left[e(k)-e(k-1)\right]+K_{\mathrm{I}}e(k)+K_{\mathrm{D}}\left[e(k)-2e(k-1)+e(k-2)\right]$$

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k)$$ 增量算式



由步进电机实现

增量算法的优点

积分饱和现象得以改善，系统超调量减小，过度过程时间缩短，动态性能优于全量算法。

增量算法的缺点

不能以P或PD方式进行控制。

3 积分饱和的影响

略

4 无扰切换

略

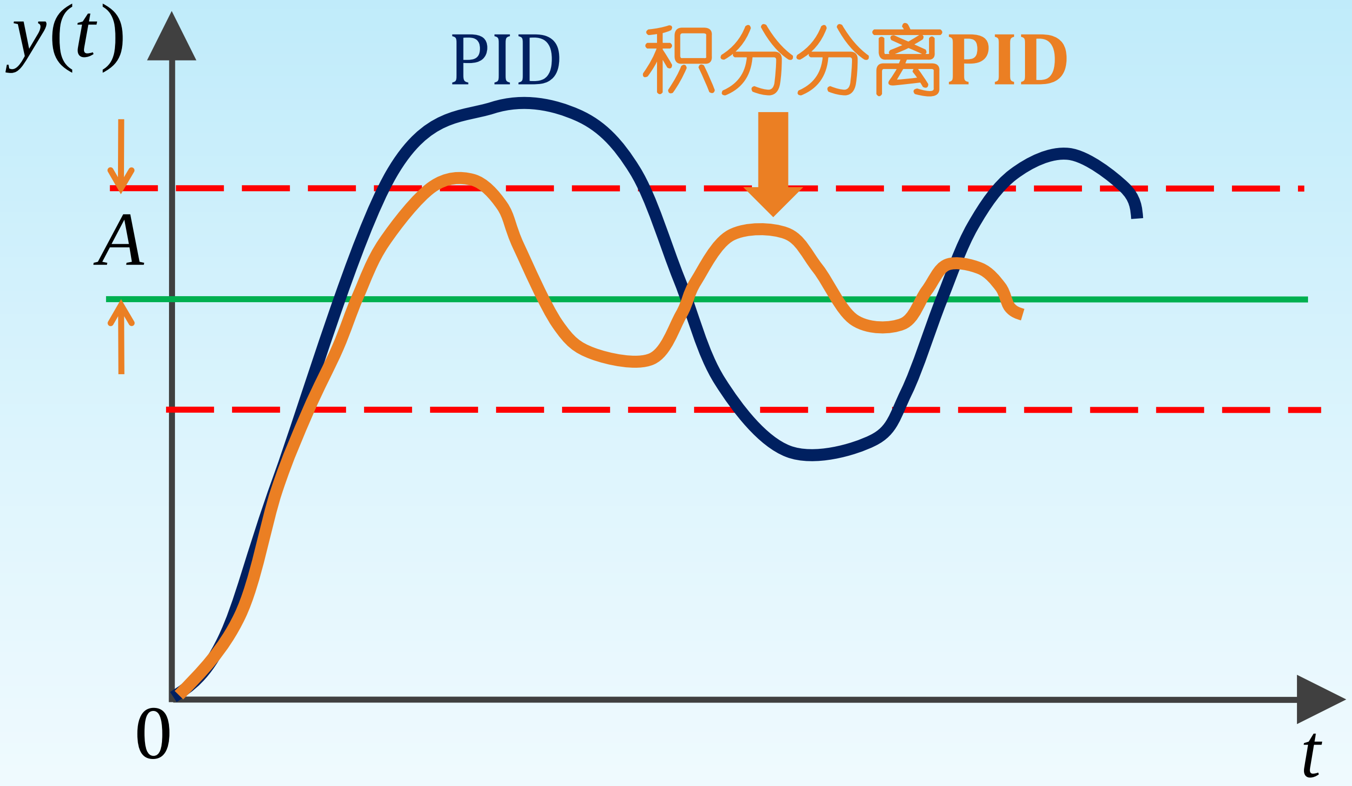
3. 数字PID控制的改进算法

1 积分分离PID控制算式

此算法引入逻辑功能

$$u(k)=K_{\mathrm{P}}e(k)+K_0K_{\mathrm{I}}\sum_{j=0}^{k}e(j)+K_{\mathrm{D}}\left[e(k)-e(k-1)\right]$$

$$K_0=\begin{cases}1 & |e(j)|\le A\\ 0 & |e(j)|>A\end{cases}$$



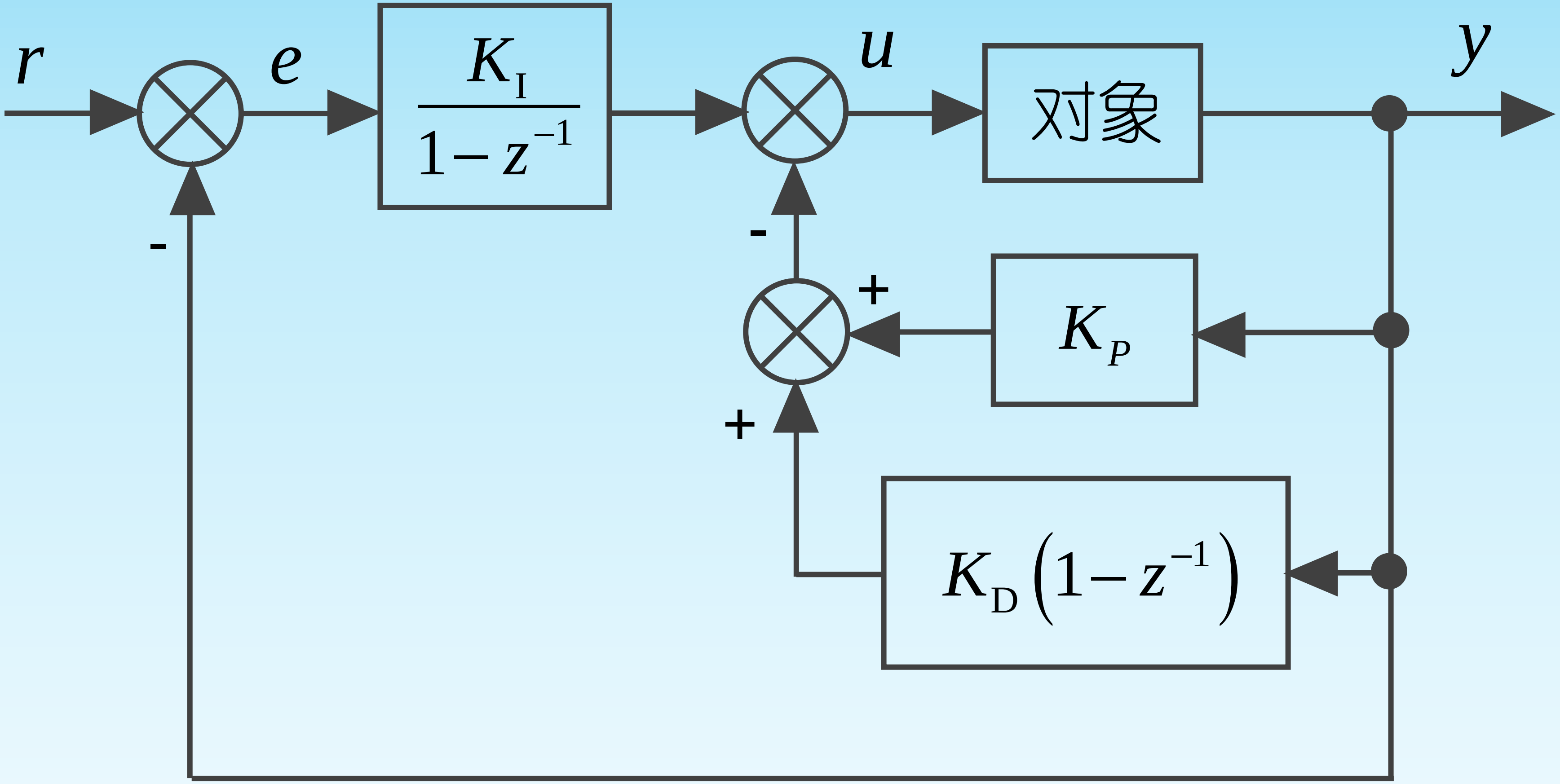
y(t)
PID
积分分离PID
A
0
t

2 IPD算法

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$$
$$= -K_P\left[y(k) - y(k-1)\right] + K_I\left[r(k) - y(k)\right] - K_D\left[y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)\right]$$

$$\left(1 - z^{-1}\right)U(z) = -K_P\left(1 - z^{-1}\right)Y(z) + K_I\left[R(z) - Y(z)\right] - K_D\left(1 - 2z^{-1} + z^{-2}\right)Y(z)$$

$$U(z) = -K_P Y(z) + \frac{K_I}{1 - z^{-1}}\left[R(z) - Y(z)\right] - K_D\left(1 - z^{-1}\right)Y(z)$$



IPD控制算法方框图

$$U(z) = -K_P Y(z) + \frac{K_I}{1-z^{-1}}\left[R(z) - Y(z)\right] - K_D\left(1-z^{-1}\right)Y(z)$$

在IPD算法中，只有积分项与偏差信号$e(k) = r(k) - y(k)$ 有关，当输入信号突变时，不至于使$\Delta u(k)$变化过大而产生较大的超调量，从而使系统的动态特性得到改善。

对于阶跃输入信号，IPD控制算法具有明显的优点。

4. 数字PID控制的参数整定

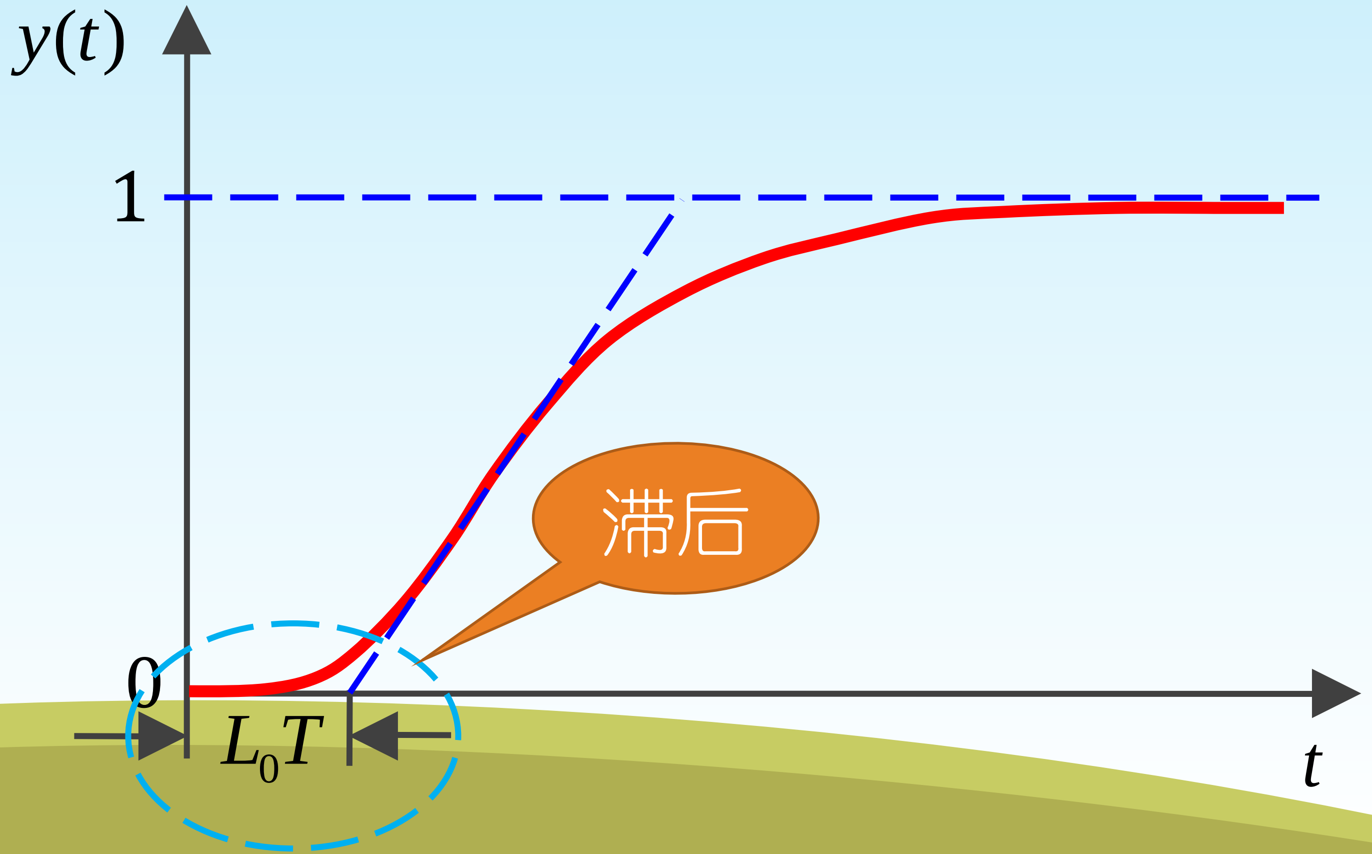
PID参数整定就是确定控制器的三个参数

$$K_P \qquad K_I \qquad K_D$$

它们已包含了采样周期 T 对系统的影响。

1 高桥参数整定公式

已知连续对象的单位阶跃响应（或称飞升特性）$y(t)$ 或 $y(k)$



找到相邻两个采样点之间的最大差值

$$h_{\max} = y(k_0) - y(k_0 - 1)$$

及对应的采样点k_0，则高桥参数整定经验公式为

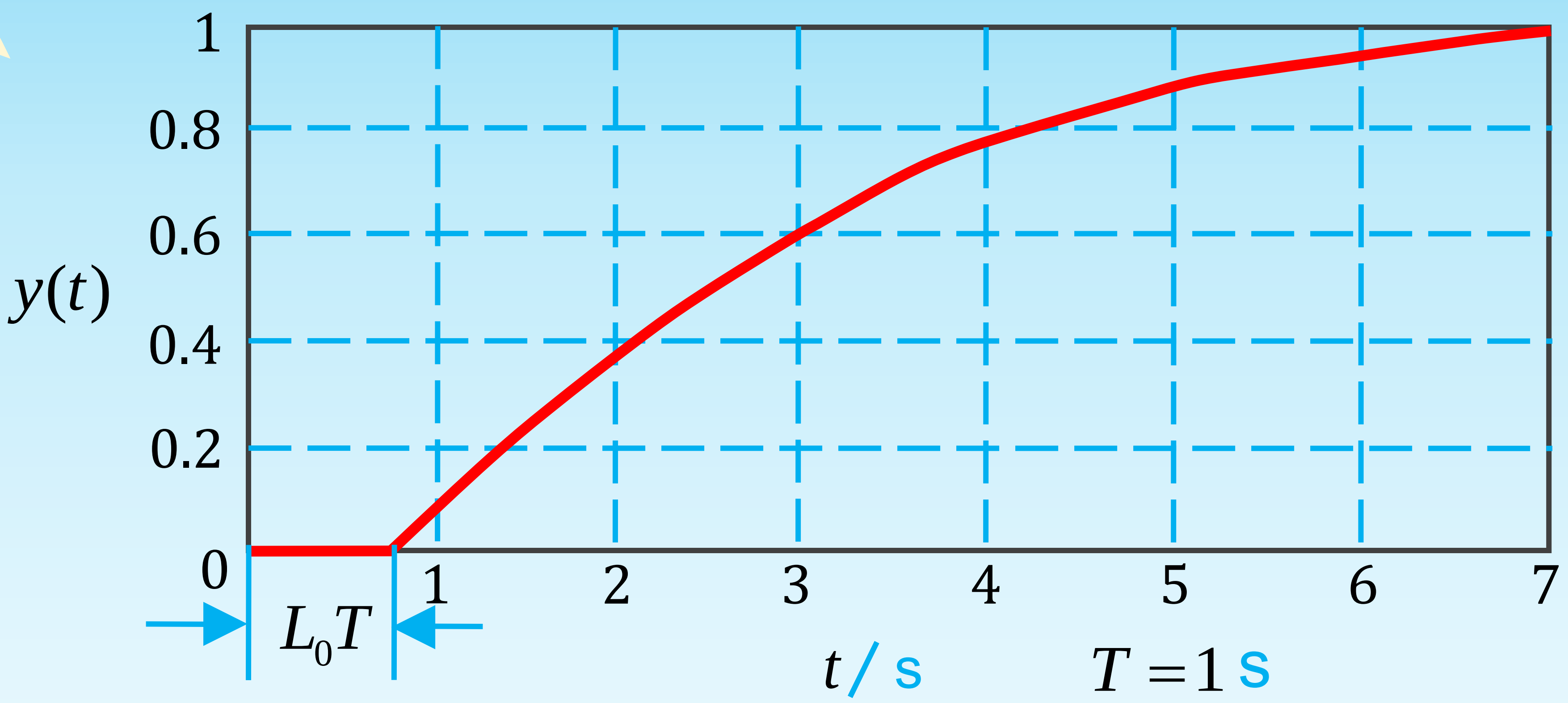
$$\begin{cases} L_0 = k_0 - \dfrac{y(k_0)}{h_{\max}} \\ K_{\mathrm{I}} = \dfrac{0.6}{h_{\max}\left(L_0 + 0.5\right)^2} \\ K_{\mathrm{P}} = \dfrac{1.2}{h_{\max}\left(L_0 + 1\right)} - \dfrac{K_{\mathrm{I}}}{2} \\ K_{\mathrm{D}} = \dfrac{0.3}{h_{\max}} \sim \dfrac{0.5}{h_{\max}} \end{cases}$$

【例7-27】 已知连续对象特性

$$G(s)=\frac{e^{-0.3s}}{(1.5s+1)(1.2s+1)}$$

$T=1$ 秒，用高桥参数整定公式确定PID控制器的三个参数。

【解】 （1）得到飞升特性



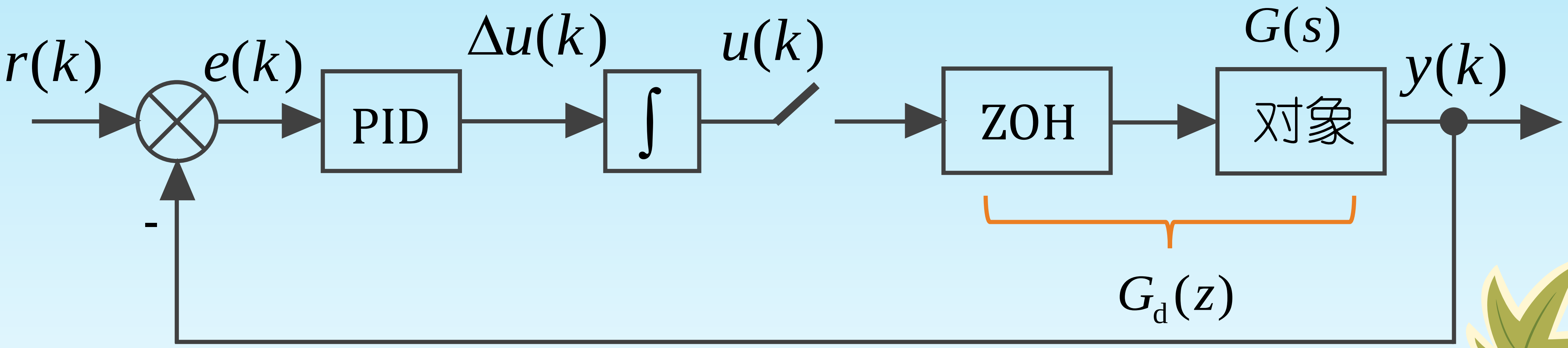
k	0	1	2	3	4
$y(k)$	0	0.0967	0.3603	0.5951	0.7589
$h(k)$	0	0.0967	0.2636	0.2348	0.1638

$h_{max} = 0.2636$ $k_0 = 2$ $y(2) = 0.3603$

（2）参数整定

$$\begin{cases} L_0 = k_0 - \dfrac{y(k_0)}{h_{\max}} = 2 - \dfrac{0.3603}{0.2636} = 0.6332 \\ K_\mathrm{I} = \dfrac{0.6}{h_{\max}\left(L_0 + 0.5\right)^2} = \dfrac{0.6}{0.2636 \times \left(0.6332 + 0.5\right)^2} = 1.7725 \\ K_\mathrm{P} = \dfrac{1.2}{h_{\max}\left(L_0 + 1\right)} - \dfrac{K_\mathrm{I}}{2} = \dfrac{1.2}{0.2636 \times \left(0.6332 + 1\right)} - \dfrac{1.7725}{2} = 1.9 \\ K_\mathrm{D} = \dfrac{0.3}{h_{\max}} \sim \dfrac{0.5}{h_{\max}} = 1.14 \sim 1.9 \end{cases}$$

（3）仿真检验



首先求得带零阶保持器（ZOH）的对象的脉冲传递函数为

$$G_{\mathrm{d}}(z)=\frac{0.0967z^{2}+0.1719z+0.00649}{z^{3}-0.948z^{2}+0.2231z}$$

$$G_{\mathrm{d}}(z) = \frac{0.0967z^2 + 0.1719z + 0.00649}{z^3 - 0.948z^2 + 0.2231z}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(z^3 - 0.948z^2 + 0.2231z\right)Y(z) = \left(0.0967z^2 + 0.1719z + 0.00649\right)U(z)$$

$$\Downarrow$$

$$y(k) - 0.948y(k-1) + 0.2231y(k-2) = 0.0967u(k-1) + 0.1719u(k-2) + 0.00649u(k-3)$$

$$\Downarrow$$

$$y(k) = 0.948y(k-1) - 0.2231y(k-2) + 0.0967u(k-1) + 0.1719u(k-2) + 0.00649u(k-3)$$

假设下列初始条件

$$u(-1)=u(-2)=u(-3)=0$$

$$y(-1)=y(-2)=0$$

$$e(-1)=e(-2)=0$$

仿真计算的流程如下

开始

$$u(-1)=u(-2)=u(-3)=0$$
$$y(-1)=y(-2)=0$$
$$e(-1)=e(-2)=0$$

$$k=0$$

$$y(k)=0.948y(k-1)-0.2231y(k-2)$$
$$+0.0967u(k-1)+0.1719u(k-2)+0.00649u(k-3)$$

$$e(k)=1(k)-y(k)$$

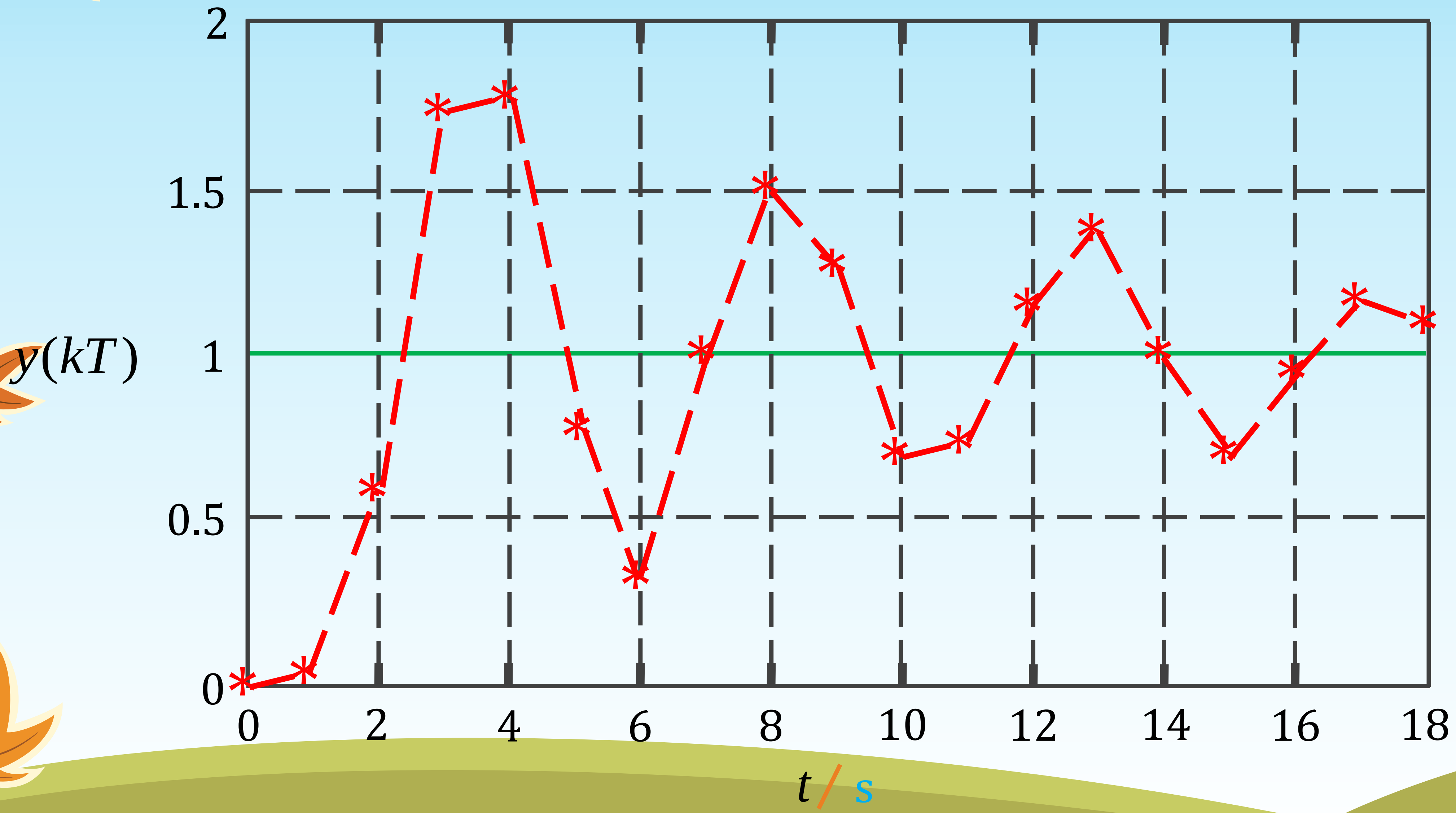
$$\Delta u(k)=K_{\mathrm{P}}\left[e(k)-e(k-1)\right]+K_{\mathrm{I}}e(k)+K_{\mathrm{D}}\left[e(k)-2e(k-1)+e(k-2)\right]$$

$$u(k)=u(k-1)+\Delta u(k)$$

仿真结束否？

N: $k\leftarrow k+1$

Y: 结束



$$K_P = 1.9$$

$$K_I = 1.773$$

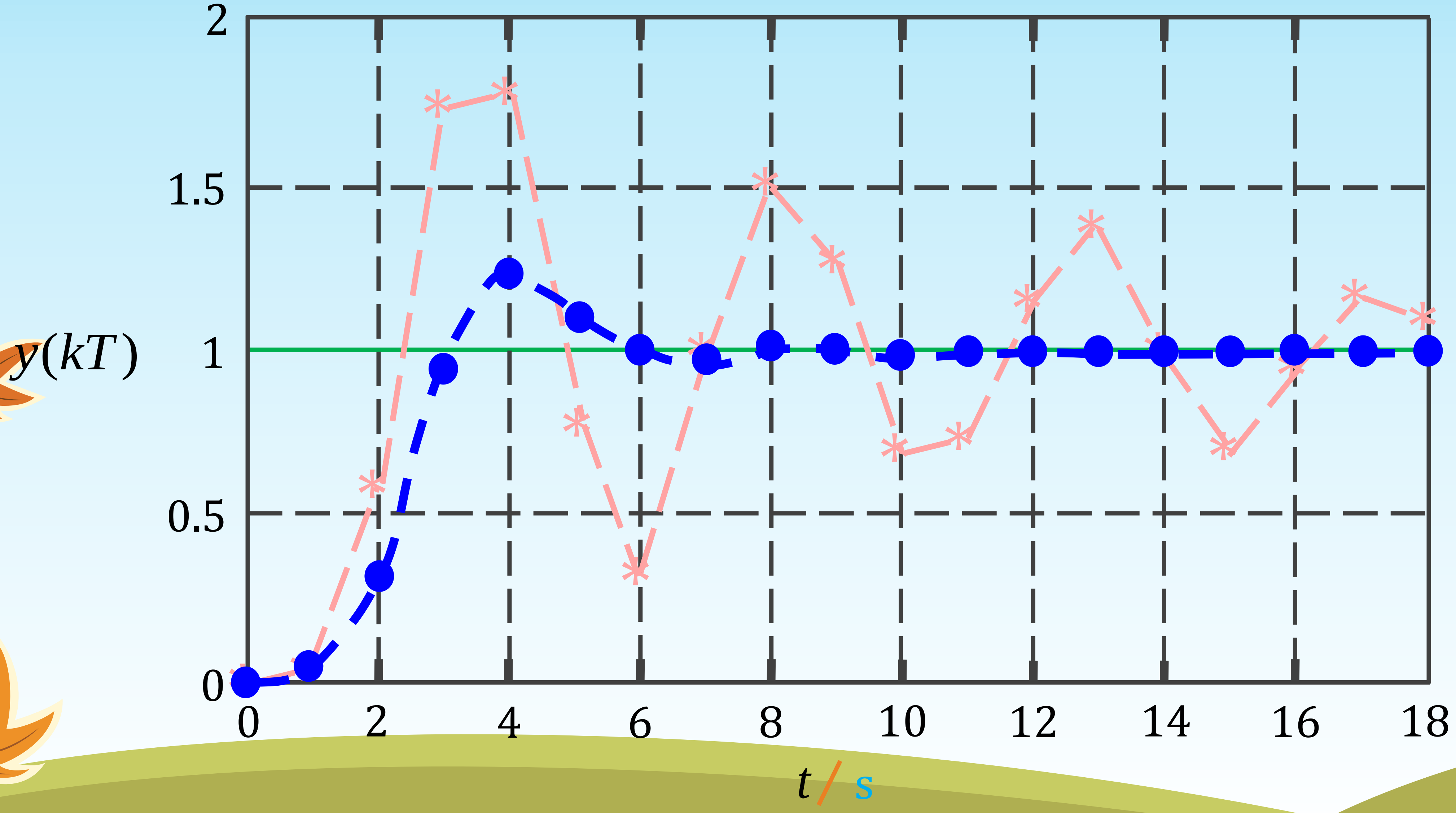
$$K_D = 1.9$$

超调量
过大！

经过反复调试，确定一组较满意的参数（$T=1\ \mathrm{s}$）

$$K_{\mathrm{P}}=1.2 \qquad K_{\mathrm{I}}=0.8 \qquad K_{\mathrm{D}}=1.14$$

仿真结果见下图。



$K_P = 1.2$

$K_I = 0.8$

$K_D = 1.14$

超调量约为28%

（4）讨论

本例若取采样周期为 $T = 0.5\text{s}$，则对象的飞升特性对应

$$h_{\max} = 0.1354 \qquad k_0 = 4 \qquad y(4) = 0.3603$$

用高桥整定公式可求得

$$\begin{cases} L_0 = 1.33 \\ K_\text{I} = 1.323 \\ K_\text{P} = 3.149 \\ K_\text{D} = 2.22 \sim 2.37 \end{cases}$$

可见PID控制器的参数与采样周期有关。

2 扩充临界比例度整定法

【略】

本次课内容总结

- 数字控制器的模拟化设计
  - 数字滤波器法
    - 脉冲不变法
    - 保持器等效法
    - 数值积分法
  - 匹配Z变换法
- 数字PID控制
  - 数字PID控制的基本算法
  - 数字PID控制的改进算法
  - 数字PID控制的参数整定