10.2 判别系统稳定性的李雅普诺夫第二方法

李雅普诺夫第二方法又称为**李雅普诺夫直接法**。

基本思路

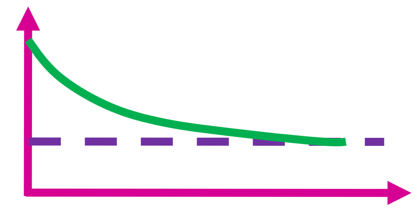
定义一个广义能量函数，从能量的观点进行系统稳定性分析。

李雅普诺夫函数

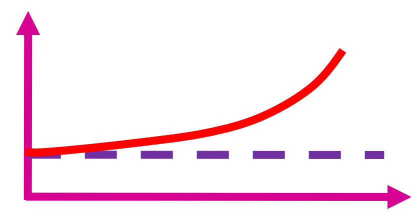
李雅普诺夫第二方法

通过李雅普诺夫函数直接对系统平衡状态的稳定性作出判断，无需进行小偏差线性化处理。因而称为**直接法**。

- 如果一个系统被激励后，其储存的能量随着时间的推移逐渐衰减，到达平衡状态时，其能量达到最小值，则此平衡状态渐近稳定。

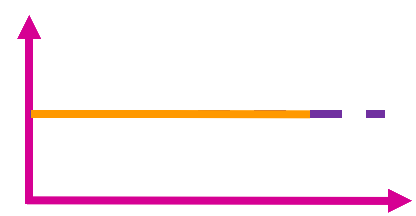


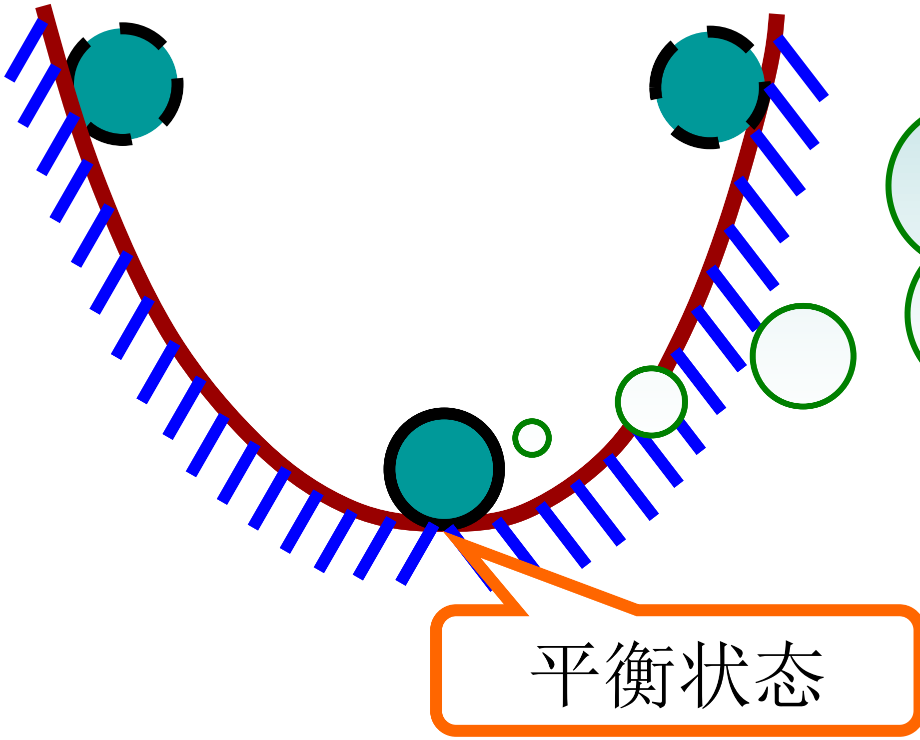
- 反之，如果系统不断从外界吸收能量，其储能越来越大，则这个平衡状态是不稳定的。



- 如果系统的能量既不增加，也不消耗，则这个平衡状态是李雅普诺夫意义下稳定的。

BIBO稳定





曲面光滑时为李雅普诺夫意义下的稳定；曲面粗糙时为渐近稳定

李雅普诺夫第二方法的核心思想

定义一个正定的标量函数$V(\boldsymbol{x})$，作为虚构的广义能量函数，然后，根据$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\dfrac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}$的符号来判别系统的稳定性。如果$\dot{V}(\boldsymbol{x})$是负定的，则这个系统是渐近稳定的。这个函数$V(\boldsymbol{x})$叫做李雅普诺夫函数。

应用李雅普诺夫第二方法的关键问题是寻找李雅普诺夫函数$V(\boldsymbol{x})$，寻找的主要方法是靠经验和试凑。

10.2.1 预备知识

一．标量函数的符号性质

设$V(\boldsymbol{x})$为由 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 所定义的标量函数，$\boldsymbol{x}\in\Omega$，在$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$处，恒有$V(\boldsymbol{x})=0$。对所有在 Ω 中的任何非零向量$\boldsymbol{x}$，如果有：

（1） $V(\boldsymbol{x})>0$

则称$V(\boldsymbol{x})$为正定的。例如：$V(\boldsymbol{x})=x_1^2+2x_2^2$

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

（2） $V(\boldsymbol{x}) \geq 0$

则称$V(\boldsymbol{x})$为半正定的， 或者称为非负定的。

例如：$V(\boldsymbol{x}) = (x_1 + x_2)^2$ $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

（3） $V(\boldsymbol{x}) < 0$

则称$V(\boldsymbol{x})$为负定的。

例如：$V(\boldsymbol{x}) = -(x_1^2 + 2x_2^2)$ $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

（4） $V(\boldsymbol{x}) \le 0$

则称$V(\boldsymbol{x})$为半负定的， 或者称为非正定的。

例如：$V(\boldsymbol{x}) = -(x_1 + x_2)^2 \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

（5） $V(\boldsymbol{x}) > 0$ 或 $V(\boldsymbol{x}) < 0$

则称$V(\boldsymbol{x})$为不定的。例如： $V(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2$

【例10-3】判别下列各函数的符号性质

（1） 设 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，标量函数为

$$V(\boldsymbol{x})=(x_1+x_2)^2+x_3^2$$

因为有 $V(\boldsymbol{0})=0$，而且对非零的 $\boldsymbol{x}$，例如

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}a & -a & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

也有 $V(\boldsymbol{x})=0$。所以, $V(\boldsymbol{x})$ 为半正定的。

（2） 设 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，标量函数为

$$V(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2$$

因为有 $V(\boldsymbol{0})=0$，而且对非零的 $\boldsymbol{x}$，

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & a\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

也有 $V(\boldsymbol{x})=0$。 所以，$V(\boldsymbol{x})$ 为半正定的。

二. 二次型标量函数

二次型标量函数定义为

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{x}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

如果 $p_{ij} = p_{ji}$，则称$\boldsymbol{P}$为实对称矩阵。

例如

$$V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_3^2$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2.5 & 0 \\ 2.5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

对二次型函数$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$，若$\boldsymbol{P}$为实对称矩阵，

则必存在**正交变换**矩阵$\boldsymbol{T}$， $\boxed{\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{T}^{-1}}$

变换 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\overline{\boldsymbol{x}}$

$$
\begin{aligned}
V(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \\
&= \left(\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{x}} \\
&= \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{x}} \\
&= \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{T}\right)\bar{\boldsymbol{x}} \\
&= \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{x}} \\
&= \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}
\end{aligned}
$$

$\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$

$\Downarrow$

对称矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的互异特征值，且均为实数。

二次型函数的标准型 $\Rightarrow$ $= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{x}_i^2$

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{x}_i^2$$

二次型标量函数 $V(\boldsymbol{x})$ 正定

⇕

对称矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的所有特征值

$$\lambda_i > 0, (i = 1, 2, \cdots, n)$$

矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的符号性质

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{x}$$

（1） 若$V(\boldsymbol{x})$正定， 则称$\boldsymbol{P}$为正定，记作 $\boldsymbol{P} > 0$

（2） 若$V(\boldsymbol{x})$负定， 则称$\boldsymbol{P}$为负定，记作 $\boldsymbol{P} < 0$

（3） 若$V(\boldsymbol{x})$半正定（非负定），则称$\boldsymbol{P}$为半正定，或者称为非负定， 记作 $\boldsymbol{P} \geq 0$

（4） 若$V(\boldsymbol{x})$半负定（非正定），则称$\boldsymbol{P}$为半负定，或者称为非正定， 记作 $\boldsymbol{P} \leq 0$

结论

$\boldsymbol{P}$ 的符号性质

完全一致

$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{x}$ 的符号性质

三. 希尔维斯特判据

设 $\boldsymbol{P}$ 为$n\times n$的实对称方阵，

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

$$p_{ij}=p_{ji}$$

$$i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$$

$\Delta_i, (i = 1, 2, \cdots, n)$为矩阵$\boldsymbol{P}$的各阶主子行列式：

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boxed{p_{11}} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = p_{11}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

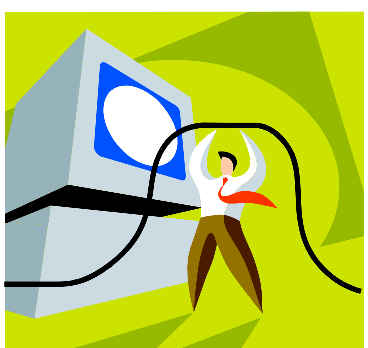
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

依此类推，有

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} = \det \boldsymbol{P}$$



希尔维斯特判据

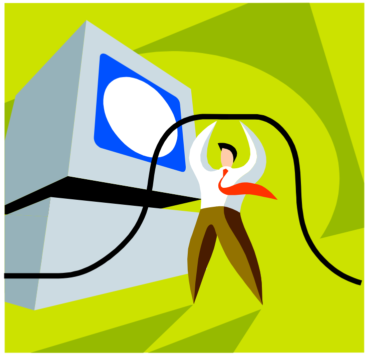
矩阵 $\boldsymbol{P}$（或$V(\boldsymbol{x})$）定号性的充分必要条件：

（1） 若 $\Delta_i > 0, (i = 1, 2, \cdots, n)$

则 $\boldsymbol{P}$（或$V(\boldsymbol{x})$）为正定。

（2） 若 $\Delta_i \begin{cases} > 0 & i\text{为偶数} \\ < 0 & i\text{为奇数} \end{cases}$

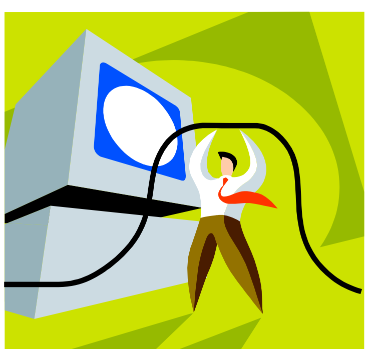
则 $\boldsymbol{P}$（或$V(\boldsymbol{x})$）为负定。



（3） 若 $\Delta_i \begin{cases} \geq 0 & i = 1, 2, \cdots, n-1 \\ = 0 & i = n \end{cases}$

则 $\boldsymbol{P}$（或 $V(\boldsymbol{x})$）为半正定（非负定）。

（4） 若 $\Delta_i \begin{cases} \geq 0 & i \text{ 为偶数} \\ \leq 0 & i \text{ 为奇数} \\ = 0 & i = n \end{cases}$



则 $\boldsymbol{P}$（或 $V(\boldsymbol{x})$）为半负定（非正定）。

10.2.2 几个稳定性判据

李雅普诺夫第二方法

假设系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

其平衡状态为$\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{0}$，满足 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}) = \boldsymbol{0}$

如果存在一个标量函数$V(\boldsymbol{x})$，它满足：

（1） $V(\boldsymbol{x})$ 对所有 $\boldsymbol{x}$ 都具有连续的一阶偏导数；

（2） $V(\boldsymbol{x})$ 是正定的， 即

当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时，$V(\boldsymbol{x})=0$，

当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$V(\boldsymbol{x})>0$，

（3） $V(\boldsymbol{x})$ 沿着状态轨迹方向关于时间的导数

$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\dfrac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}$ 分别满足下列条件：

1 若$\dot{V}(\boldsymbol{x})$为半负定，则平衡状态$\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$为李雅普诺夫意义下稳定。 这一条称为<u>稳定判据</u>。

2 若$\dot{V}(\boldsymbol{x})$为负定，则平衡状态$\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$为渐近稳定。

若$\dot{V}(\boldsymbol{x})$为半负定，且对于任意初始状态$\boldsymbol{x}(t_0) \neq \boldsymbol{0}$ 来说，除了 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 以外,对其余的$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 而言，均有$\dot{V}(\boldsymbol{x})$不恒为零。则平衡状态$\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{0}$ 为渐近稳定。

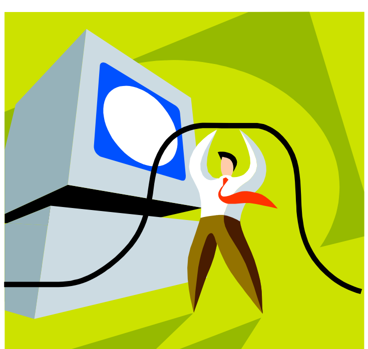
进一步地，如果还满足

当 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$ 时， 有 $V(\boldsymbol{x}) \to \infty$

则系统是大范围渐近稳定的。这一条称为渐近稳定判据。

3 若 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 为正定，则平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 为不稳定。

这一条称为不稳定判据。

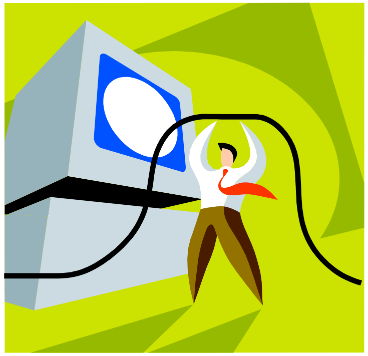


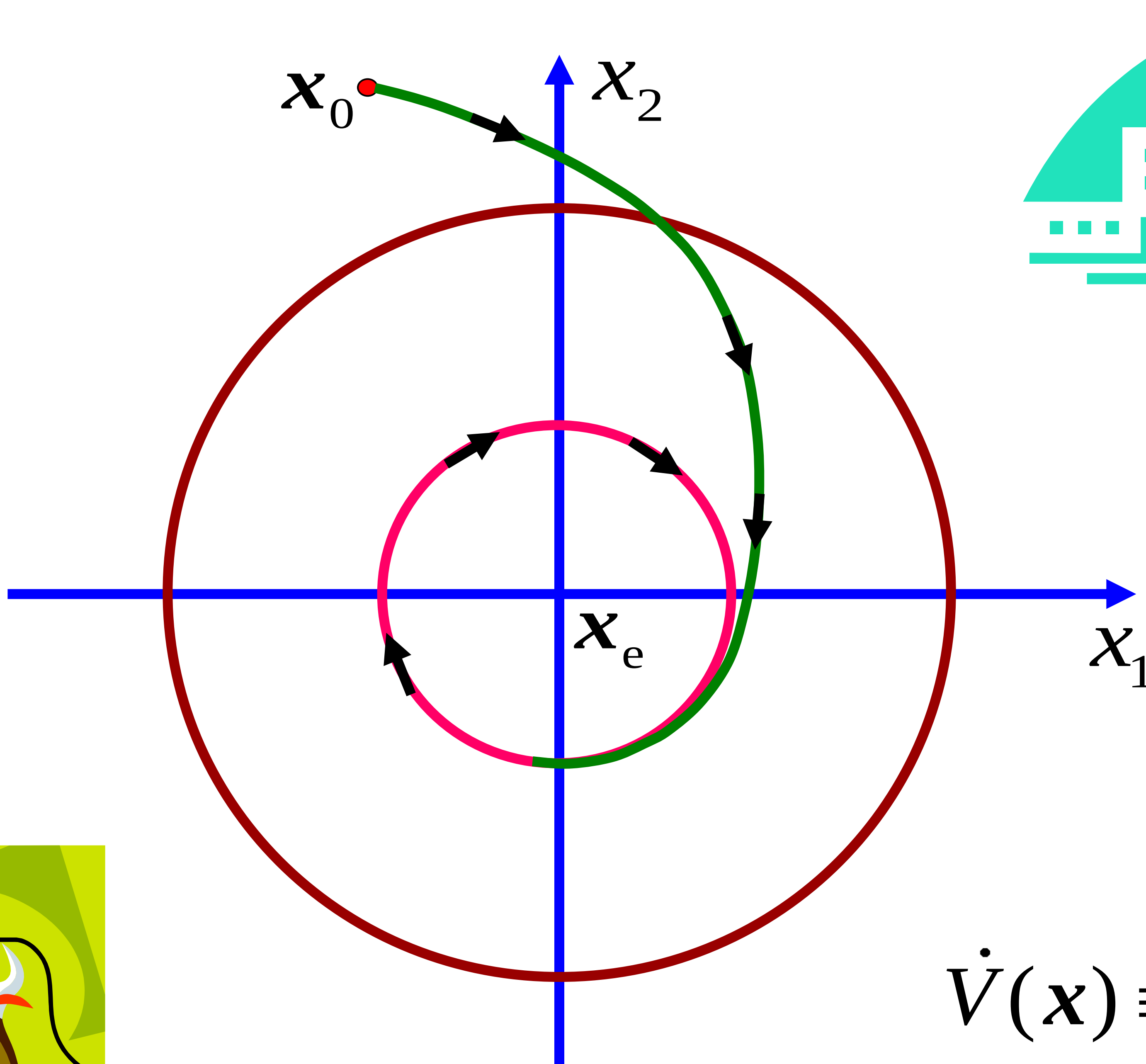
注释 渐近稳定判据中，当$\dot{V}(\boldsymbol{x})$为半负定时，在 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 的地方，可能会出现$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0$，此时，系统可能会有两种运动情况，如下图。

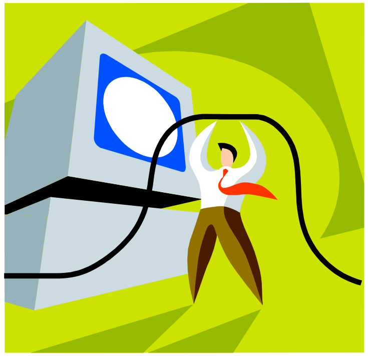
（1） $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 恒等于零，这时运动轨迹将落在某个特定的曲面$V(\boldsymbol{x}) = C$上。这意味着运动轨迹不会收敛于原点。这种情况可能对应于非线性系统中的极限环或线性系统中的临界稳定。

（2） $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 不恒等于零，这时运动轨迹只在某个时刻与某个特定的曲面 $V(\boldsymbol{x})=C$ 相切。运动轨迹通过切点后并不停留，而继续向原点收敛。

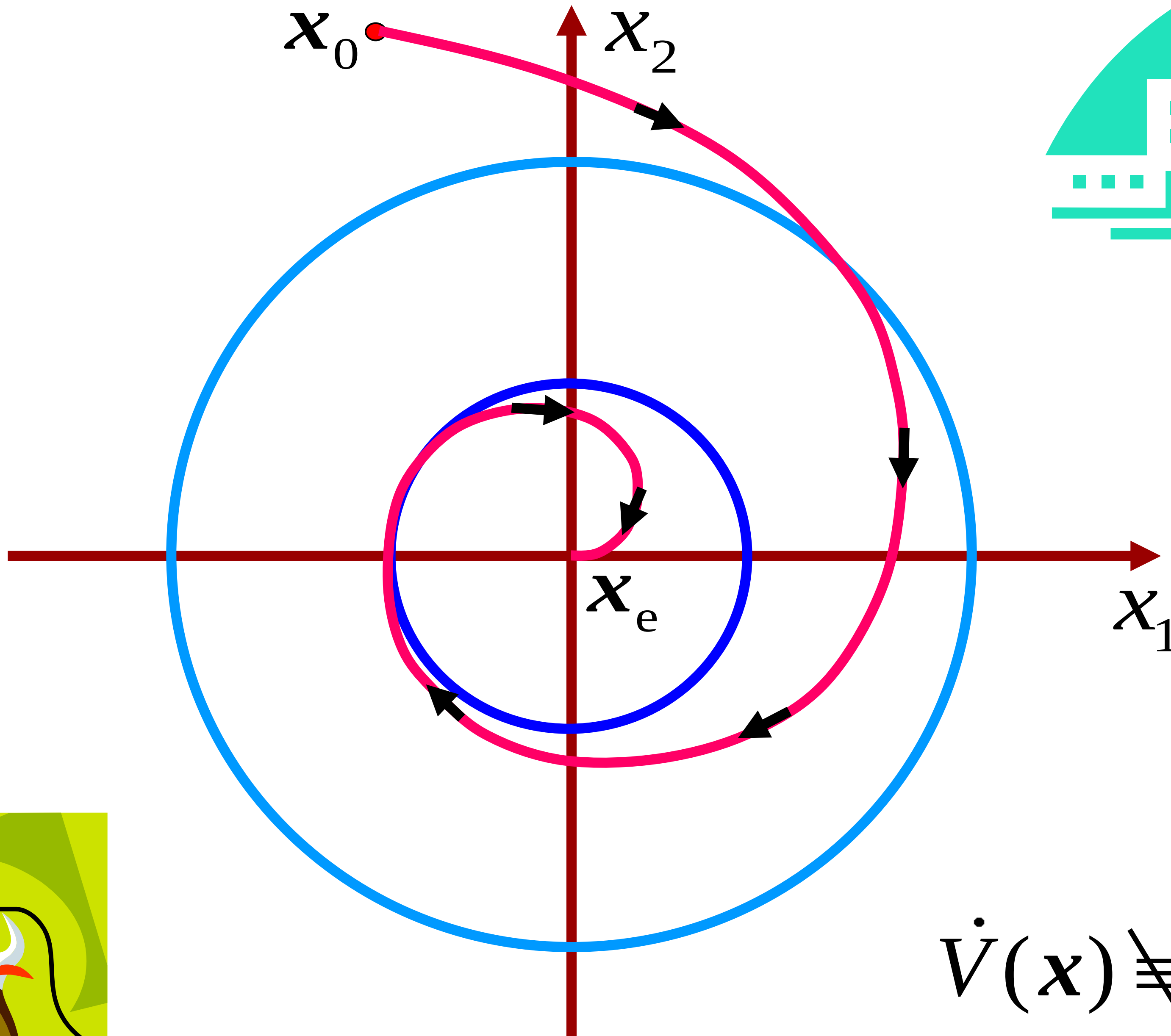
因此，这种情况仍属于渐近稳定。

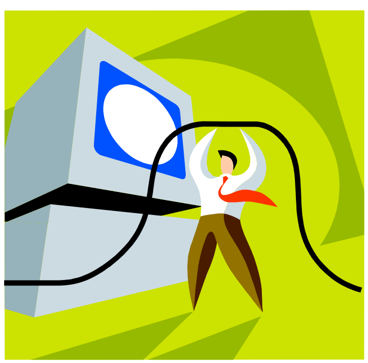






$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \equiv 0$$





$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \not\equiv 0$$

注释 李雅普诺夫第二方法只是判定系统稳定性的**充分条件**，而不是充分必要条件。

【例10-4】 已知非线性系统的状态方程

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\
\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)
\end{cases}
$$

分析其平衡状态的稳定性。

【解】 坐标原点 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{0}$ 是唯一的平衡状态。

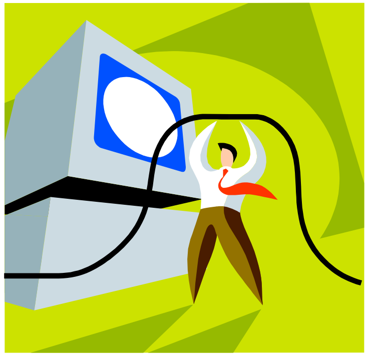
设正定的标量函数

$$V(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}$$

$$=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2$$



将状态方程代入上式得$V(\boldsymbol{x})$沿系统运动轨迹的导数

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2x_1\left[x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)\right]$$

$$+ 2x_2\left[-x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)\right]$$

$$= -2(x_1^2 + x_2^2)^2$$ ⇒ 负定

因此，所选的 $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$

是满足判断条件的一个李雅普诺夫函数。

此外，当$\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$时，有$V(\boldsymbol{x}) \to \infty$

所以，系统在坐标原点处为大范围渐近稳定。

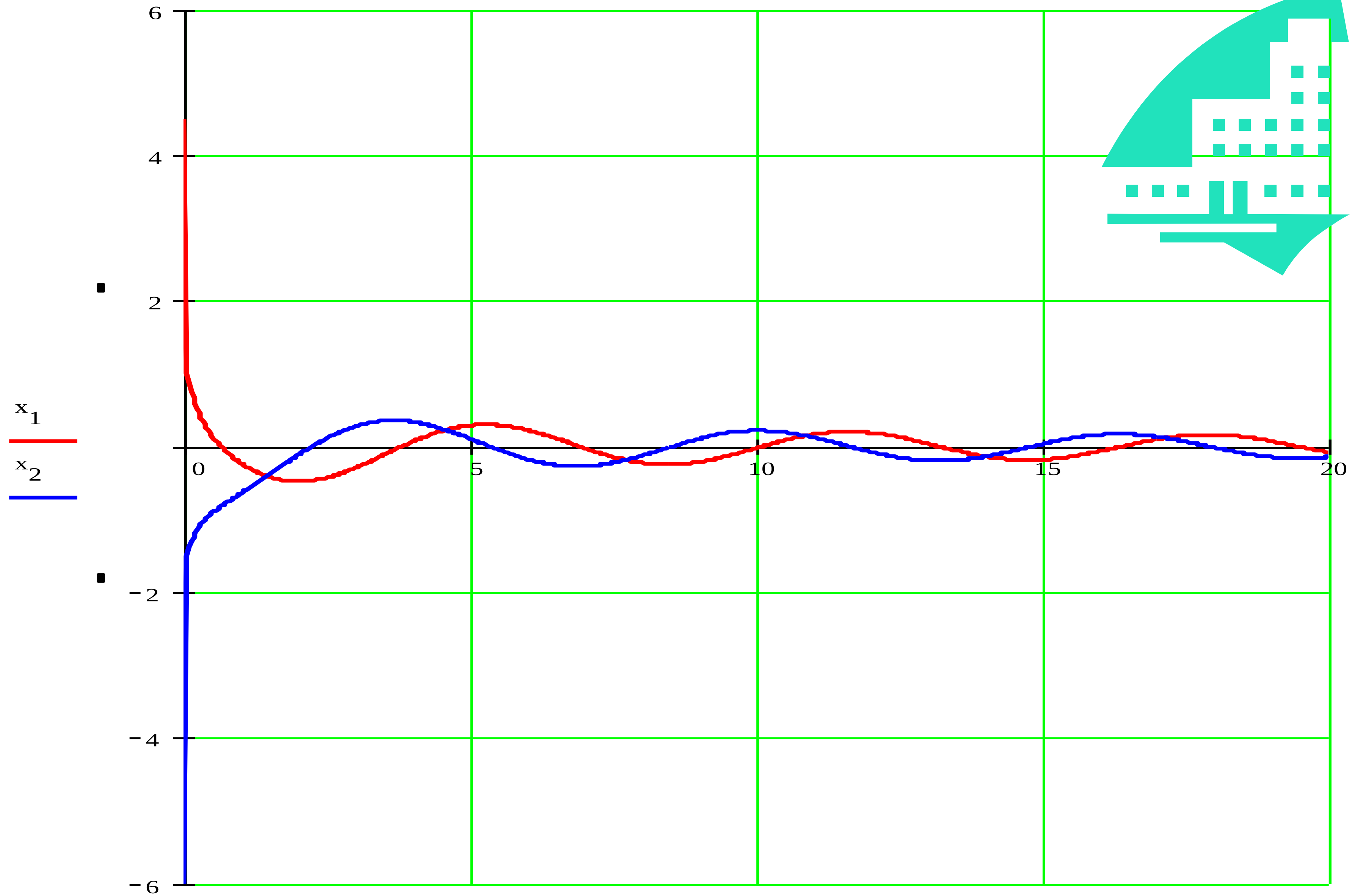
数字仿真研究

对于给定的状态方程

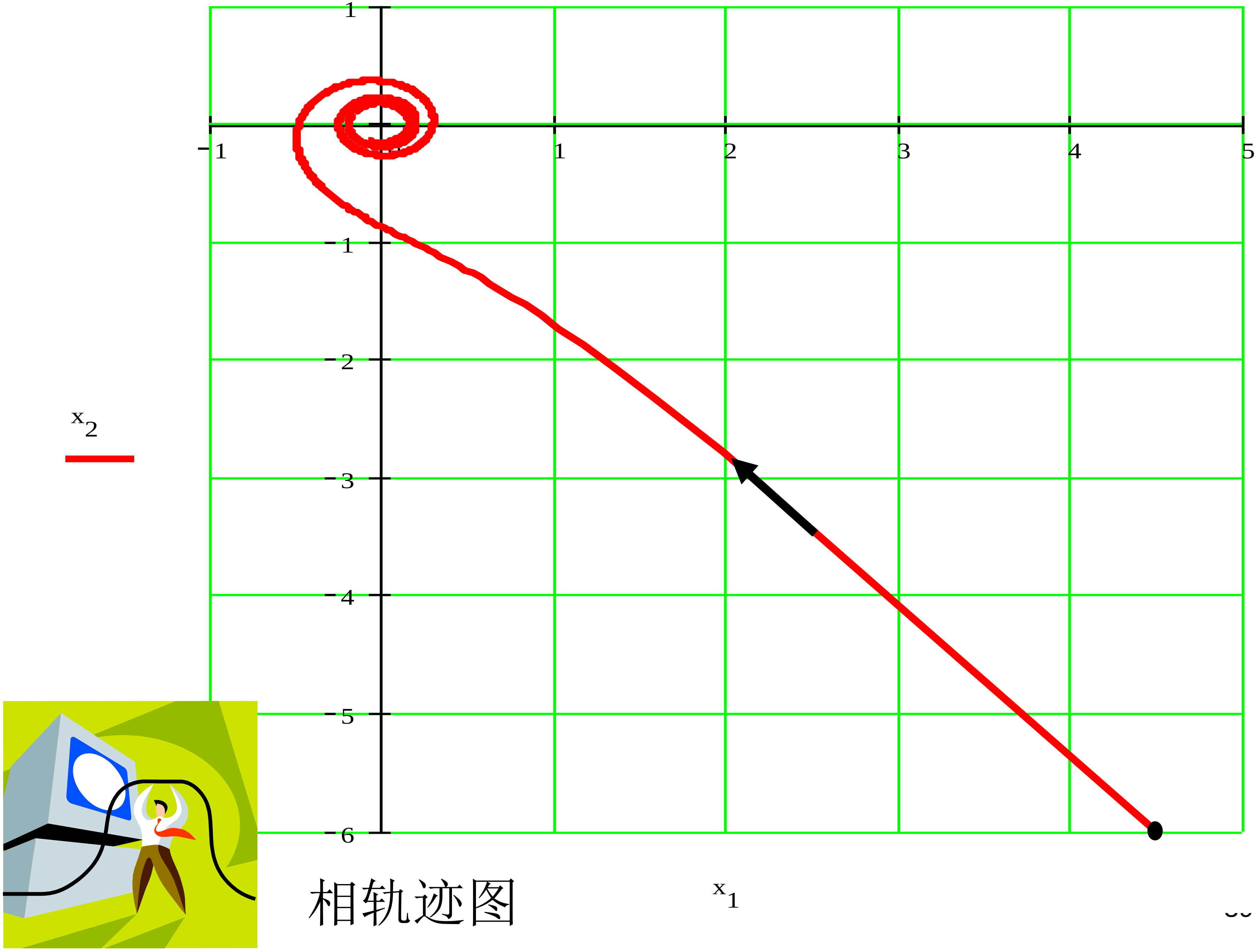
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

任意给定一组初始状态：

$$x_1(0) = 4.5 \qquad x_2(0) = -6$$



状态轨迹图

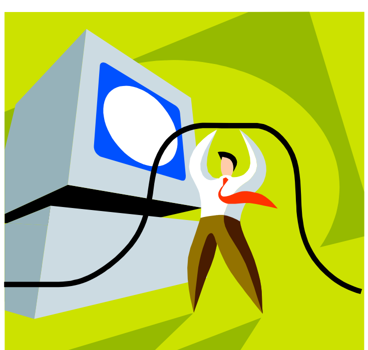


相轨迹图

【例10-5】已知系统的状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

分析其平衡状态的稳定性。



【解法一】坐标原点 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{0}$ 是唯一的平衡状态。

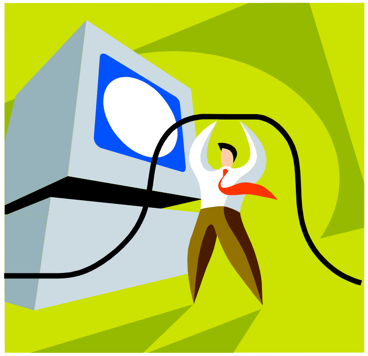
设正定的标量函数

$$V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 > 0$$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$$

$$= 2x_1x_2 + 2x_2(-x_1 - x_2)$$

$$= -2x_2^2$$



当 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 时，$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0$，

当 $x_1 \neq 0, x_2 = 0$ 时，$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0$，

$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -2x_2^2$

$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 为半负定。系统是李雅普诺夫意义下稳定的。

能否还是渐近稳定的呢？

为此还需分析

当 $x_1 \neq 0, x_2 = 0$ 时，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 是否恒为零。

如果 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -2x_2^2$ 恒为零，就必须使 x_2 恒为零，

这也就要求 $\dot{x}_2$ 恒为零。

由方程 $\dot{x}_2=-x_1-x_2$ 可知，在 $t>t_0$时，若要求

$x_2=0$ ，$\dot{x}_2=0$，必须满足 $x_1=0$的条件。

这表明，在 $x_1\neq 0$时， $\dot{V}(\boldsymbol{x})$不可能恒为零。

因此，当 $x_1\neq 0, x_2=0$时，$\dot{V}(\boldsymbol{x})=0$ 的情况只可能出现在状态轨迹与某一曲面相切的某一时刻。

此外，当$\|\boldsymbol{x}\|\to\infty$ 时， 有$V(\boldsymbol{x})\to\infty$

所以，系统在坐标原点处为大范围渐近稳定。

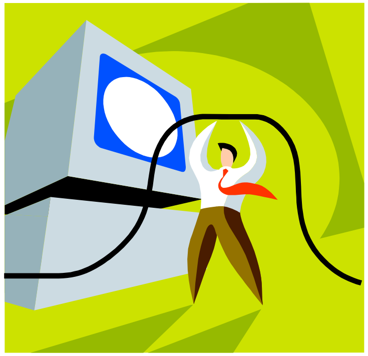
【解法二】

坐标原点 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{0}$ 是唯一的平衡状态。

另选李雅普诺夫函数

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\left[\left(x_1 + x_2\right)^2 + 2x_1^2 + x_2^2\right]$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



根据希尔维斯特判据，容易验证 $V(\boldsymbol{x})$ 为正定。

此外，$V(\boldsymbol{x})$ 的导数为：

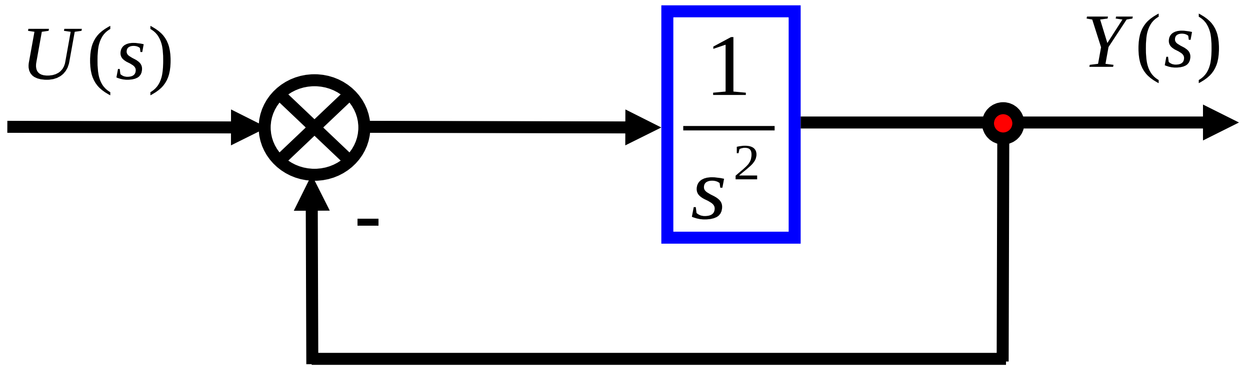
$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = (x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + 2x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$$
$$= -(x_1^2 + x_2^2)$$

显然，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 是负定的。

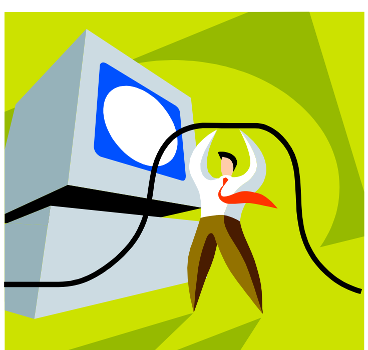
此外，当 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$ 时， 有 $V(\boldsymbol{x}) \to \infty$

所以，系统在坐标原点处为大范围渐近稳定。

【例10-6】 设闭环系统如图所示,分析系统的稳定性。



【解】 闭环系统的状态方程为



$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

其齐次方程为

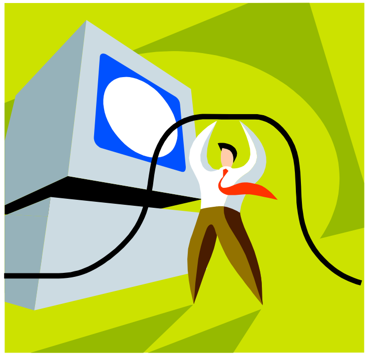
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

显然，坐标原点 $\boldsymbol{x}_\mathrm{e} = \boldsymbol{0}$ 是唯一的平衡状态。

设正定的标量函数

$$V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 > 0$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{x}) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1x_2 + 2x_2(-x_1) \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$



可见，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 在任意 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 的值上均为零， 从而 $V(\boldsymbol{x})$ 为常数，

$$V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 = C$$

这表示系统运动的相轨迹是以原点为圆心，$\sqrt{C}$ 为半径的圆系。

该系统为李雅普诺夫意义下稳定， 但是在经典控制理论中这种情况属于不稳定。

【例10-7】已知系统的状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

分析$\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$处的稳定性。

【解】选择正定的标量函数

$$V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 > 0$$

则有

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$$
$$= 2\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

显然，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$是正定的，系统在原点处不稳定。

10.2.3 对李雅普诺夫函数的讨论

应用李雅普诺夫第二方法的关键在于寻找一个满足判据条件的李雅普诺夫函数。但是，李雅普诺夫稳定性理论并没有提供构造 $V(\boldsymbol{x})$ 的一般方法。

$V(\boldsymbol{x})$ 的属性：

（1）$V(\boldsymbol{x})$ 是一个正定的标量函数，且对 $\boldsymbol{x}$ 存在连续的一阶偏导数。

（2）对于一个给定的系统，$V(\boldsymbol{x})$ 通常是非唯一的

但是这并不影响结论的一致性。

（3）$V(\boldsymbol{x})$ 的最简单形式是二次型

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 为实对称方阵。

（4）如果 $V(\boldsymbol{x})$ 的形式为

$$V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

则代数方程$V(\boldsymbol{x})=C$表示超球面，其球半径为$\sqrt{C}$这个半径表示原点到点$\boldsymbol{x}$的距离。而$\dot{V}(\boldsymbol{x})$则表示系统相对于原点的运动速度。

（5）由于构造李雅普诺夫函数需要较多的技巧，所以李雅普诺夫第二法通常是在其他判断稳定性方法无效时才使用的。

本次课内容总结

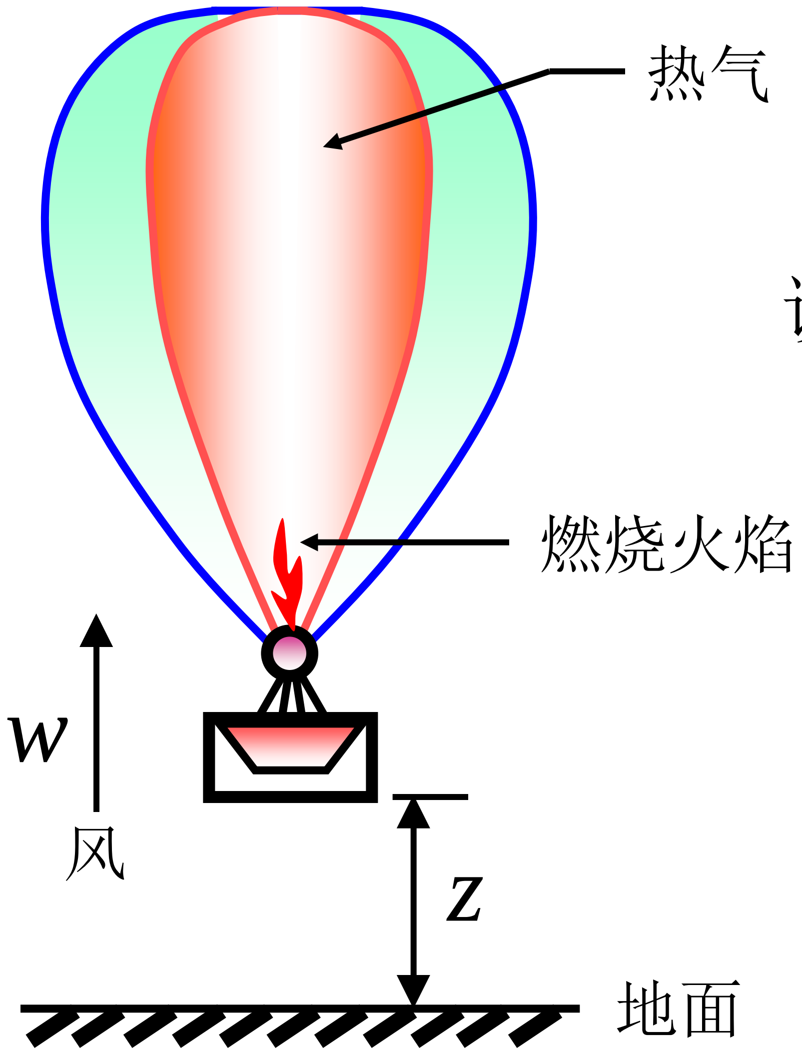
判别系统稳定性的李雅普诺夫第二方法（直接法）

- 预备知识
  - 标量函数的符号性质
  - 二次型标量函数
- 李雅普诺夫第二方法的核心思想

【附录：应用实例】

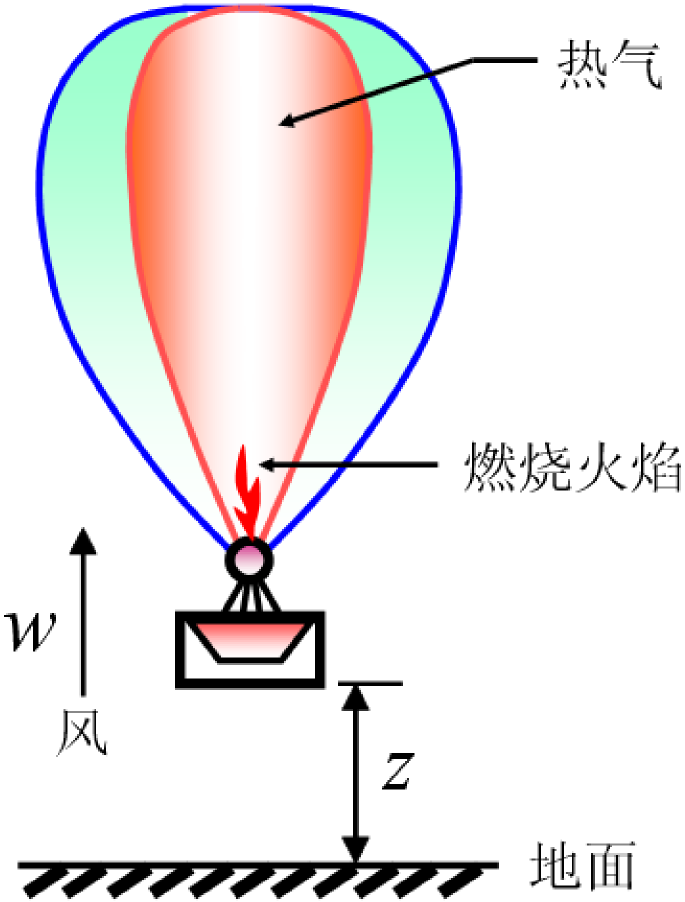
分析热气球高度控制系统的稳定性

美国单人气球驾驶者Steve Fossett乘“自由精神号”于2002年7月3日降落在澳大利亚内陆，成为第一位环球旅行的单人气球驾驶者。



设计时预先满足下列条件：

当热气温度达到平衡温度时，总浮力与总重力（包括驾驶者的体重在内）近似相等。



热气球垂直方向运动方程的线性化形式：

$$\delta\dot{T}+\frac{1}{\tau_1}\delta T=\delta q$$

$$\tau_2\ddot{z}+\dot{z}=a\delta T+w$$

δT —— 热气温度与平衡温度的偏差

w —— 风速的垂直分量

δq —— 燃烧器当前加热率与平衡加热率之差，控制信号。

a τ_1 τ_2

系统参数

$$\delta\dot{T} + \frac{1}{\tau_1}\delta T = \delta q$$

$$\tau_2 \ddot{z} + \dot{z} = a\delta T + w$$

z_d —— 期望高度设定值

$\delta z = z - z_d$ —— 当前高度与期望高度之差

$$\delta\dot{T} = -\frac{1}{\tau_1}\delta T + \delta q$$

$$\delta\ddot{z} = -\frac{1}{\tau_2}\delta\dot{z} + \frac{a}{\tau_2}\delta T + \frac{1}{\tau_2}w$$

$$x_1 = \delta z$$
$$x_2 = \delta \dot{z}$$
$$x_3 = \delta T$$
$$u = \delta q$$
$$y = \delta z$$

$$\delta \dot{T} = -\frac{1}{\tau_1}\delta T + \delta q$$

$$\delta \ddot{z} = -\frac{1}{\tau_2}\delta \dot{z} + \frac{a}{\tau_2}\delta T + \frac{1}{\tau_2} w$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{\tau_2} x_2 + \dfrac{a}{\tau_2} x_3 + \dfrac{1}{\tau_2} w \\ \dot{x}_3 = -\dfrac{1}{\tau_1} x_3 + u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{\tau_2} x_2 + \dfrac{a}{\tau_2} x_3 + \dfrac{1}{\tau_2} w \\ \dot{x}_3 = -\dfrac{1}{\tau_1} x_3 + u \end{cases}$$

忽略风速干扰的影响

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{\tau_2} x_2 + \dfrac{a}{\tau_2} x_3 \\ \dot{x}_3 = -\dfrac{1}{\tau_1} x_3 + u \end{cases}$$

假设状态反馈控制律：

$$u = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3$$

可得闭环系统的状态方程：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{\tau_2} x_2 + \dfrac{a}{\tau_2} x_3 \\ \dot{x}_3 = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \left(k_3 - \dfrac{1}{\tau_1} \right) x_3 \end{cases}$$

为了使闭环系统渐近稳定，选择李雅普诺夫函数

$$V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

显然，这是正定的李雅普诺夫函数。

沿着状态轨线的导数为：

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 + 2x_3\dot{x}_3$$

$$= -\frac{2}{\tau_2}x_2^2 + 2\left(k_3 - \frac{1}{\tau_1}\right)x_3^2 + 2x_1x_2 + 2k_1x_1x_3 + \left(2k_2 + \frac{2a}{\tau_2}\right)x_2x_3$$

$$=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & k_1 \\ 1 & -\dfrac{2}{\tau_2} & k_2+\dfrac{a}{\tau_2} \\ k_1 & k_2+\dfrac{a}{\tau_2} & 2\left(k_3-\dfrac{1}{\tau_1}\right) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{P}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{P}$ 的各阶主子式为：

$$\Delta_1 = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\dfrac{2}{\tau_2} \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & k_1 \\ 1 & -\dfrac{2}{\tau_2} & k_2 + \dfrac{a}{\tau_2} \\ k_1 & k_2 + \dfrac{a}{\tau_2} & 2\left(k_3 - \dfrac{1}{\tau_1}\right) \end{vmatrix}$$

$$= 2k_1\left(k_2 + \frac{a}{\tau_2}\right) + \frac{2k_1^2}{\tau_2} - 2\left(k_3 - \frac{1}{\tau_1}\right)$$

从以上的三个主子式不难看出：无论如何选择反馈增益系数k_1、k_2、k_3，都不能使矩阵$\boldsymbol{P}$满足西尔维斯特判据的条件。

换句话说，矩阵$\boldsymbol{P}$不可能为负定，也不可能为半负定，即：$\dot{V}(\boldsymbol{x})$不可能为负定，也不可能为半负定。

注意事项

上述结论不能说明状态反馈不能使热气球闭环控制系统渐近稳定，因为李雅普诺夫第二法只是充分条件，也许是上述李雅普诺夫函数选择不当。

对以上结论的进一步反思

让我们来分析一下原开环系统的状态能控性：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{\tau_2} x_2 + \dfrac{a}{\tau_2} x_3 \\ \dot{x}_3 = -\dfrac{1}{\tau_1} x_3 + u \end{cases}$$

显然状态是完全能控的。

说明状态反馈闭环系统的极点是可以任意配置的，使闭环系统渐近稳定是没有问题的！