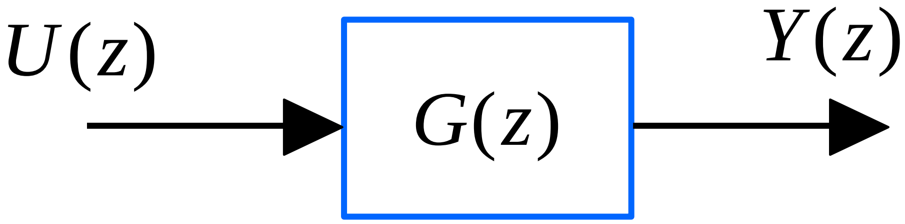
五. 脉冲传递函数

1. 脉冲传递函数的定义

脉冲传递函数也称为Z传递函数

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$ 零初始条件下



脉冲传递函数是系统的固有属性，与输入无关。

2. 脉冲传递函数的求取

（1）根据差分方程求取脉冲传递函数

$$y(k)+a_1y(k-1)+a_2y(k-2)+\cdots+a_ny(k-n)=b_0u(k)+b_1u(k-1)+\cdots+b_mu(k-m)$$

$$\Downarrow$$

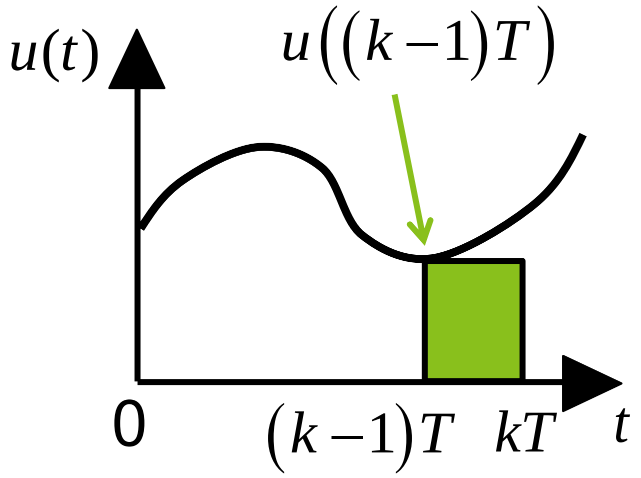
$$Y(z)+a_1z^{-1}Y(z)+a_2z^{-2}Y(z)+\cdots+a_nz^{-n}Y(z)=b_0U(z)+b_1z^{-1}U(z)+\cdots+b_mz^{-m}U(z)$$

$$\Downarrow$$

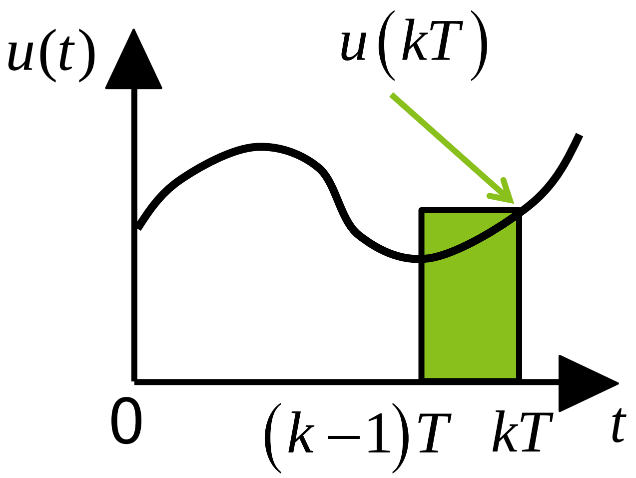
$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}}{\boxed{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n}}}$$

特征多项式

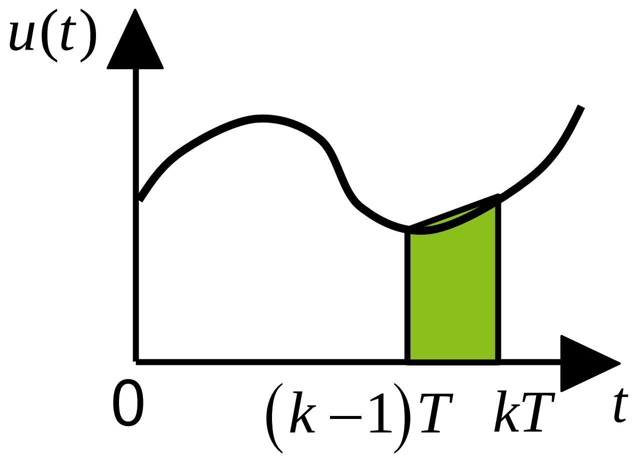
【例7-10】求数值积分环节的脉冲传递函数。



前向矩形积分

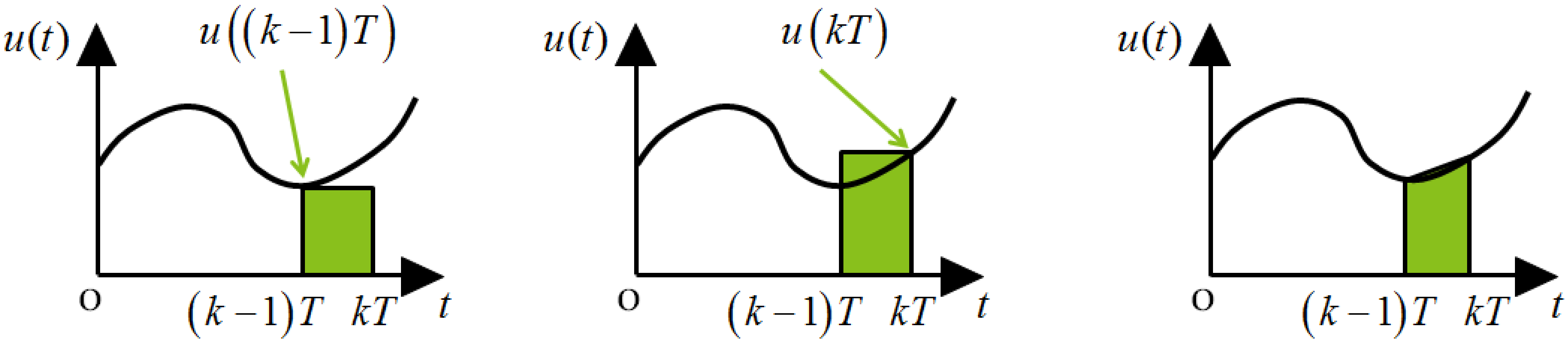


后向矩形积分



梯形积分

$$y(t)=\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau$$



前向矩形积分　　后向矩形积分　　梯形积分

【解】

前向矩形积分　$y(k)=y(k-1)+u(k-1)\cdot T$

后向矩形积分　$y(k)=y(k-1)+u(k)\cdot T$

梯形积分　$y(k)=y(k-1)+\dfrac{T}{2}[u(k-1)+u(k)]$

前向矩形积分环节

$$y(k)=y(k-1)+u(k-1)\cdot T$$

$$\Downarrow$$

$$Y(z)=z^{-1}Y(z)+z^{-1}U(z)\cdot T$$

$$\Downarrow$$

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}}=\frac{T}{z-1}$$

后向矩形积分环节

$$y(k)=y(k-1)+u(k)\cdot T$$

$$Y(z)=z^{-1}Y(z)+U(z)\cdot T$$

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{T}{1-z^{-1}}=\frac{Tz}{z-1}$$

梯形积分环节

$$y(k)=y(k-1)+\frac{T}{2}\left[u(k-1)+u(k)\right]$$

$$Y(z)=z^{-1}Y(z)+\frac{T}{2}\left[z^{-1}U(z)+U(z)\right]$$

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{T\left(1+z^{-1}\right)}{2\left(1-z^{-1}\right)}=\frac{T}{2}\cdot\frac{z+1}{z-1}$$

【结论】连续积分环节可以用数值积分环节近似。

连续积分环节 $G(s)=\frac{1}{s}$

- 前向矩形积分环节 $G(z)=\frac{T}{z-1}=\left.\frac{1}{s}\right|_{s=\frac{z-1}{T}}$

- 后向矩形积分环节 $G(z)=\frac{Tz}{z-1}=\left.\frac{1}{s}\right|_{s=\frac{z-1}{Tz}}$

- 梯形积分环节 $G(z)=\frac{T}{2}\cdot\frac{z+1}{z-1}=\left.\frac{1}{s}\right|_{s=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}}$

（2）根据脉冲响应求取脉冲传递函数

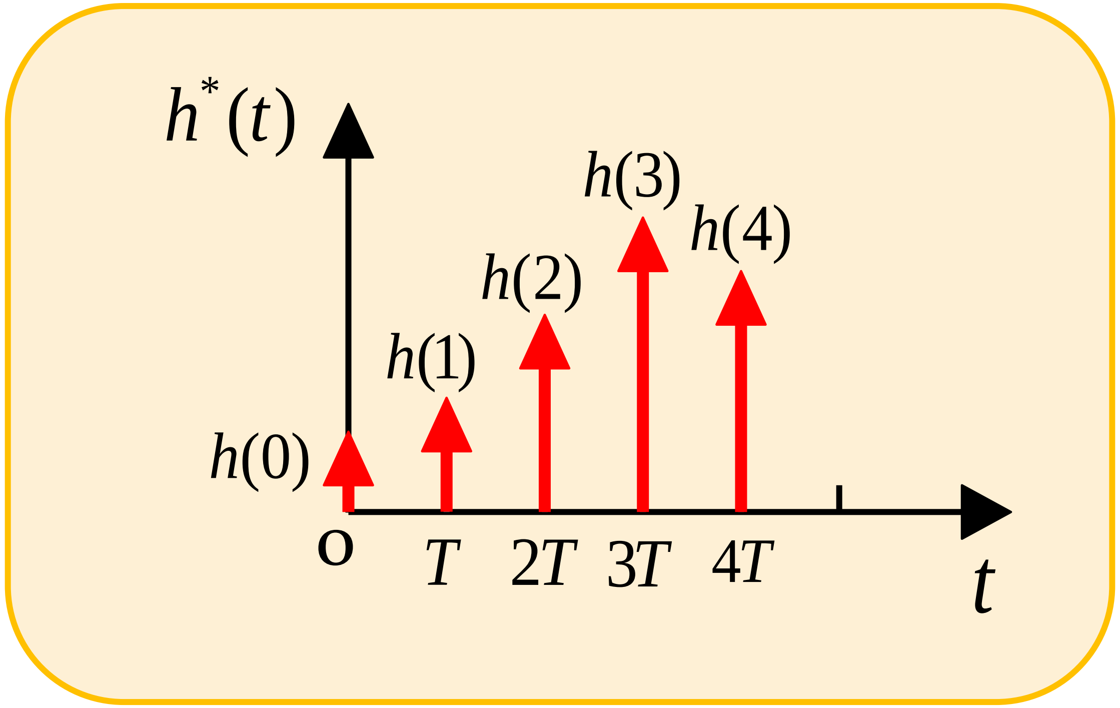
$$\delta^*(t) \longrightarrow \boxed{\text{线性离散系统}} \longrightarrow h^*(t)$$

$$G(z)=\frac{\mathbb{Z}\left[h^*(t)\right]}{\mathbb{Z}\left[\delta^*(t)\right]}=\frac{\mathbb{Z}\left[h(k)\right]}{\mathbb{Z}\left[\delta(k)\right]}$$

$$=\frac{\mathbb{Z}\left[h(k)\right]}{1}=\mathbb{Z}\left[h(k)\right]$$

$$G(z) = \mathbb{Z}[h(k)]$$

$$= h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \cdots$$



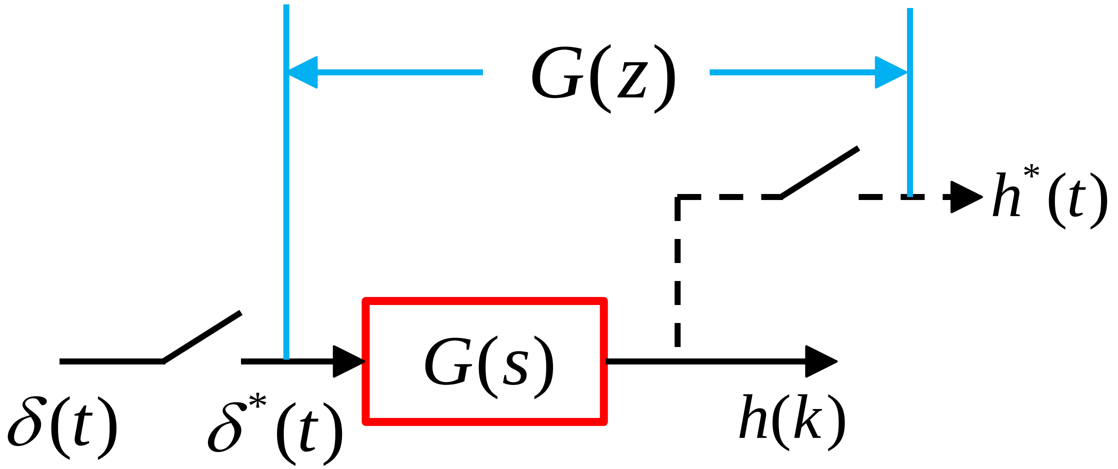
单位脉冲响应序列

（3）根据连续传递函数求取脉冲传递函数

$$G(z)=\mathbb{Z}\left[G(s)\right]$$

步骤

- $h(t)=\boldsymbol{L}^{-1}\left[G(s)\right]$
- $h(t) \Rightarrow h(0),h(1),h(2),\cdots$
- $G(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}h(k)z^{-k}$



G(z)
h*(t)
G(s)
δ(t)
δ*(t)
h(k)

【例7-11】已知 $G(s)=\dfrac{1}{s(0.1s+1)}$，脉冲传递函数$G(z)$。

【解】

$$G(z)=\mathbb{Z}[G(s)]$$

$$=\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s(0.1s+1)}\right]$$

$$=\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+10}\right]$$

$$=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-10T}}$$

3. 脉冲传递函数中Z的意义

$$G(z) = z^{-1}$$

迟后一步的Z域描述

$$E(z) \longrightarrow \boxed{z^{-1}} \longrightarrow U(z)$$

$$U(z) = G(z)E(z) = z^{-1}E(z)$$

$$\Downarrow$$

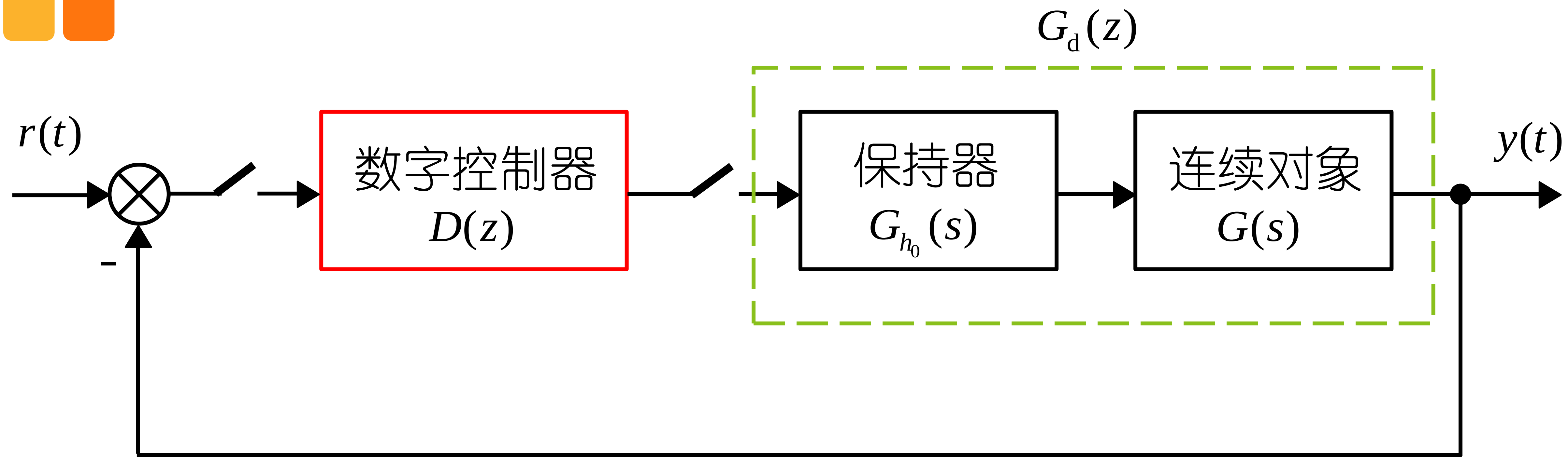
$$u(k) = e(k-1)$$

7.4　数字控制系统的建模与分析

一. 引言

本节主要讲述下列几个问题：

- 建立数控系统的离散化数学模型，即带零阶保持器的连续对象离散化；
- 改进的Z变换及其应用，建立具有迟后特性的连续对象的离散化模型及求取系统采样点之间的响应；
- 系统性能分析，包括时、频、Z域几方面的动、静态特性分析；
- 扰动对系统的影响。



$G_d(z)$
$r(t)$
-
数字控制器
$D(z)$
保持器
$G_{h_0}(s)$
连续对象
$G(s)$
$y(t)$

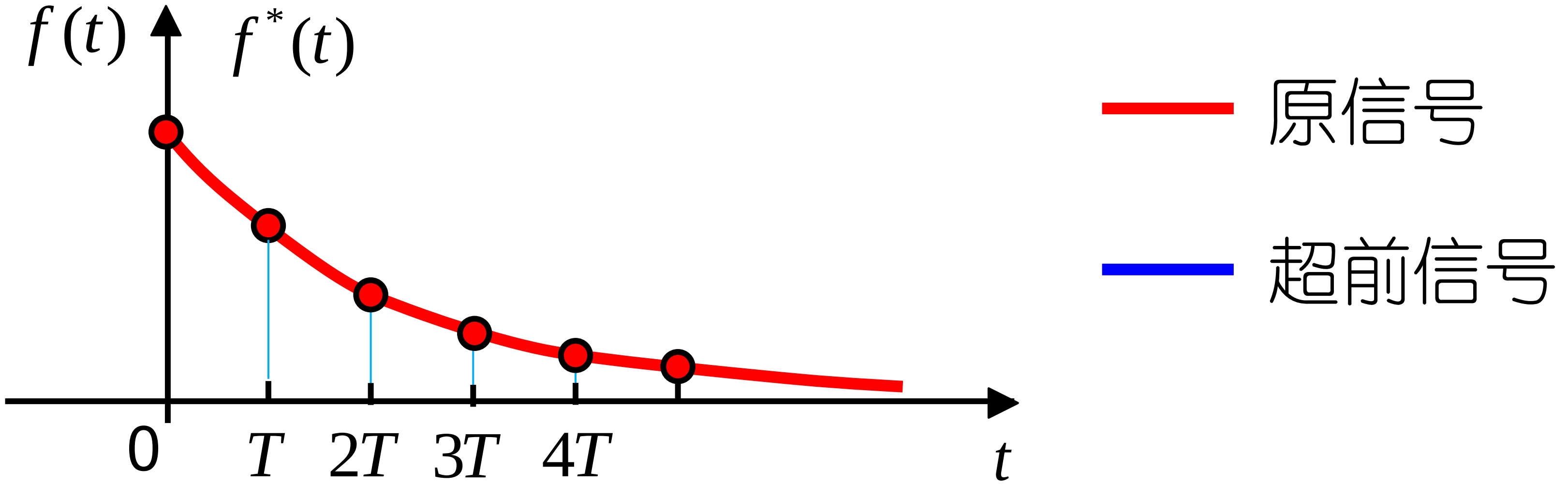
二. 改进的Z变换

1. 改进Z变换的定义

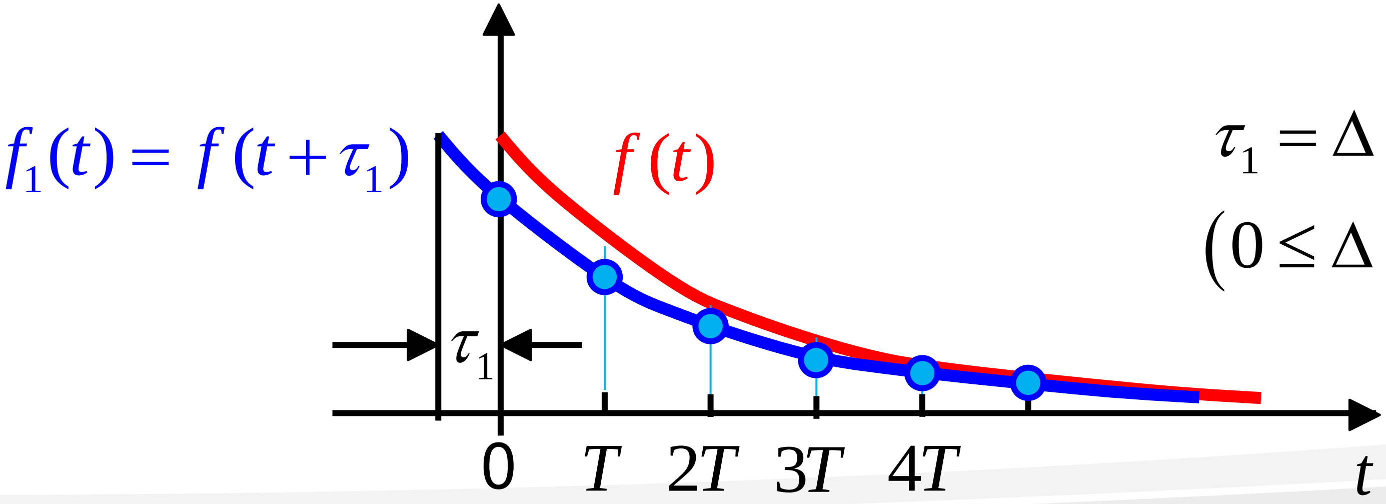
在信号 $f(t)$ 超前或滞后不是 T 的整数倍情况下的Z变换。与普通Z变换并无本质区别。

超前 $f_1(t)=f(t+\tau_1)=f(t+\Delta\cdot T)$ $0\le\tau_1<T$ $0\le\Delta<1$

迟后 $f_2(t)=f(t-\tau_2)=f(t-l\cdot T)$ $0\le\tau_2<T$ $0\le l<1$

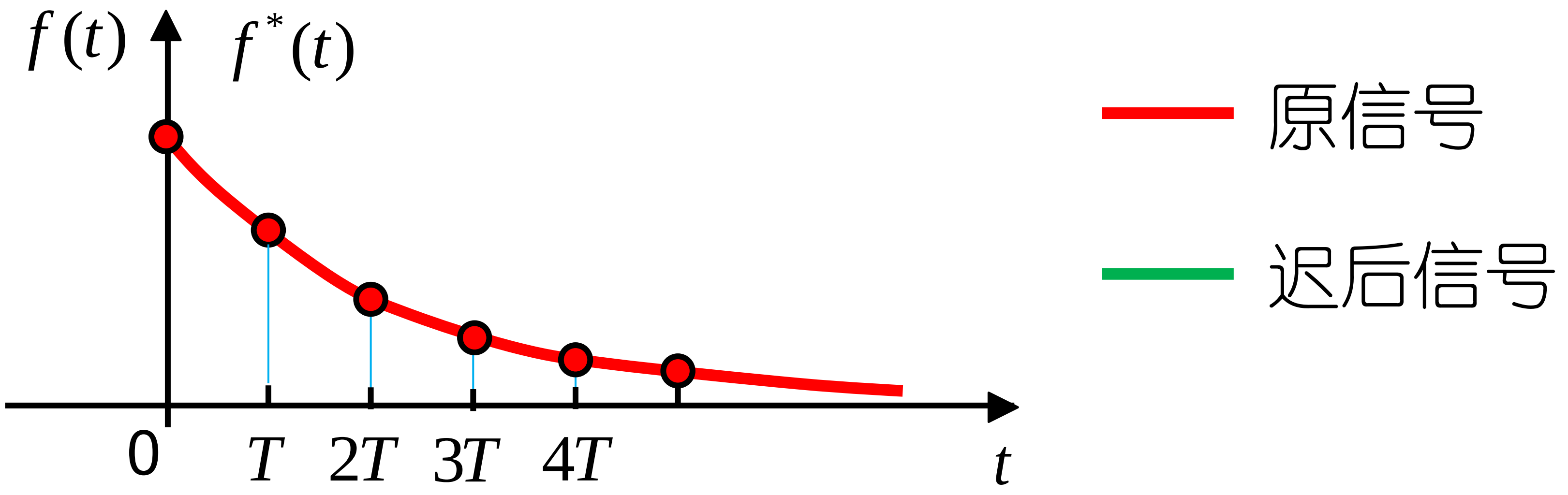


超前不到一个周期

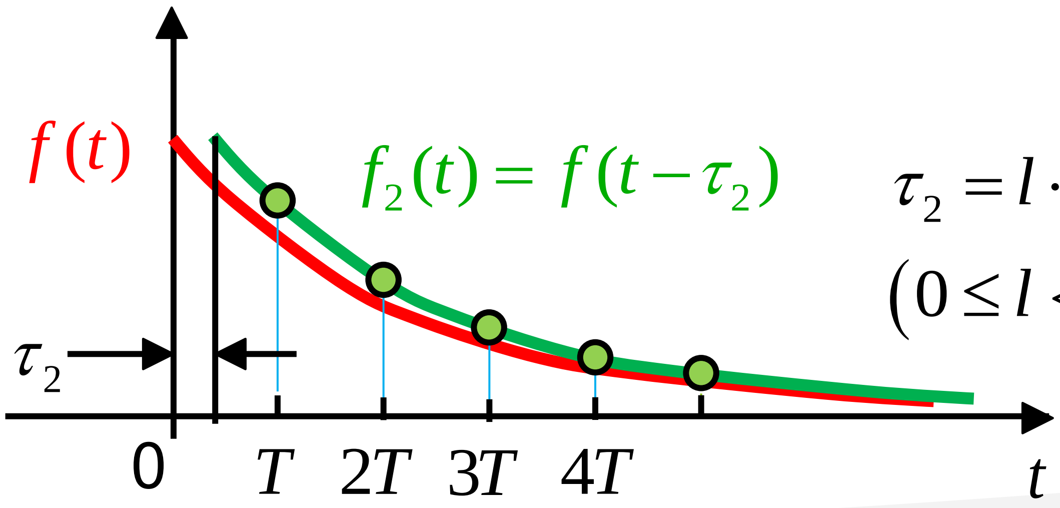


$$\tau_1 = \Delta \cdot T$$

$$(0 \le \Delta < 1)$$



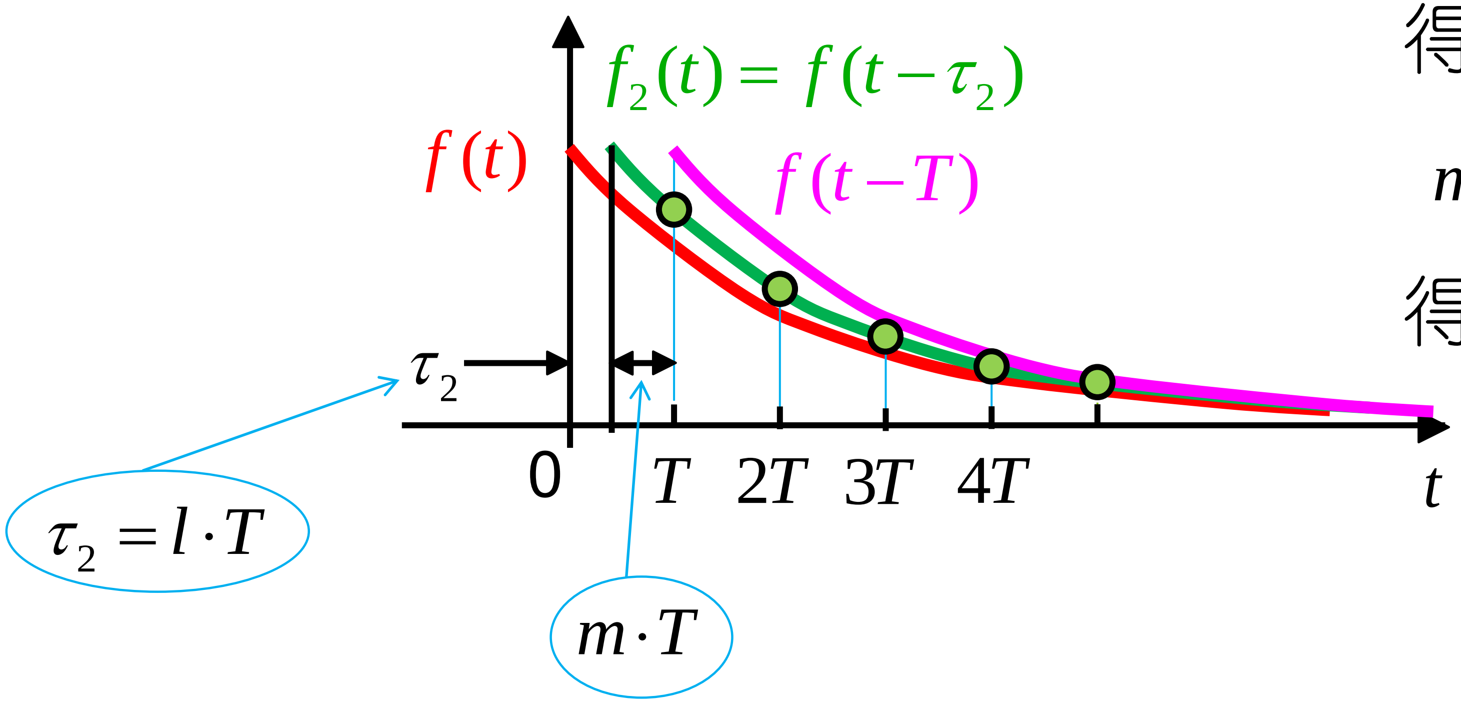
迟后不到一个周期



$\tau_2 = l \cdot T$

$(0 \le l < 1)$

物理含义—— 信号 $f(t)$ 先迟后一个周期T，得到信号 $f(t-T)$，再超前 $m\cdot T$（不到一个周期），得到信号 $f_2(t)=f(t-\tau_2)$。



$l+m=1$

（1）超前改进Z变换

$$f_1(t) = f(t+\tau_1) = f(t+\Delta\cdot T)$$

$$F(z,\Delta) = \mathbb{Z}\left[F(s)e^{\Delta Ts}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(kT+\Delta\cdot T\right)z^{-k} \qquad 0\le\Delta<1$$

（2）迟后改进Z变换

先迟后一步，再超前 m（不到一步），相当于迟后 l（不到一步）。

$$f_2(t) = f(t-\tau_2) = f(t-l\cdot T)$$

$$F(z,m) = \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(kT-l\cdot T\right)z^{-k} = z^{-1}\mathbb{Z}\left[F(s)e^{mTs}\right]$$

$$0\le l<1 \qquad 0<m\le1 \qquad l+m=1$$

【例7-12】 求 $1(t+0.4T)$

$1(t-0.4T)$

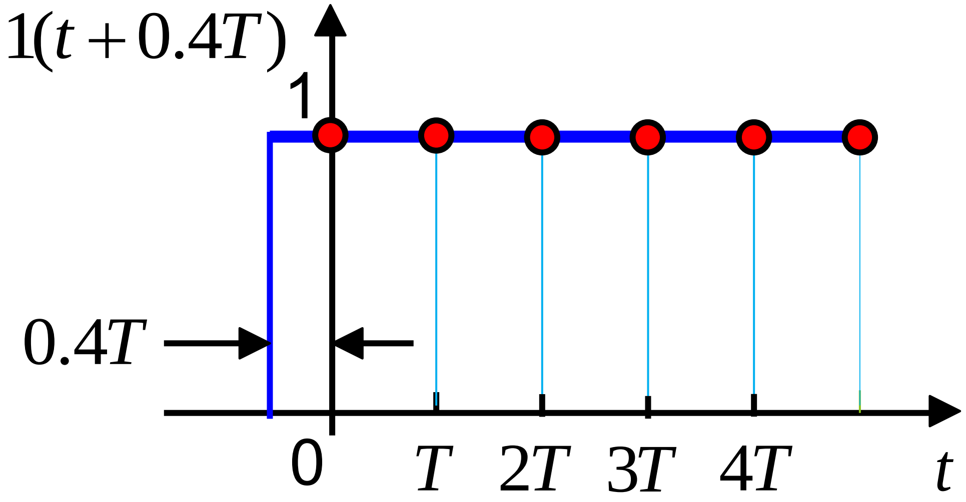
$e^{-a(t+0.4T)}$

$e^{-a(t-0.6T)}$ 的Z变换。

【解】

1 $$\mathbb{Z}\left[1(t+0.4T)\right]=\sum_{k=0}^{+\infty}1(kT+0.4T)z^{-k}=\sum_{k=0}^{+\infty}z^{-k}$$

$$=1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots=\frac{z}{z-1}$$

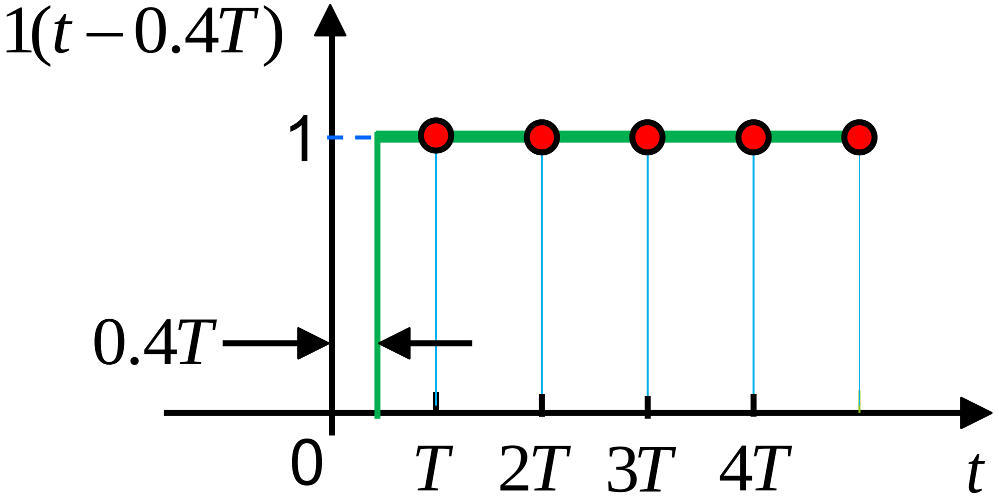


超前$0.4T$，所有采样点均未丢失，且幅值均未改变，故完全等同于$\mathbb{Z}[1(t)]$。

2

$$\mathbb{Z}\left[1(t-0.4T)\right]=\sum_{k=0}^{+\infty}1(kT-0.4T)z^{-k}$$

$$=0+z^{-1}+z^{-2}+\cdots=\frac{1}{z-1}$$



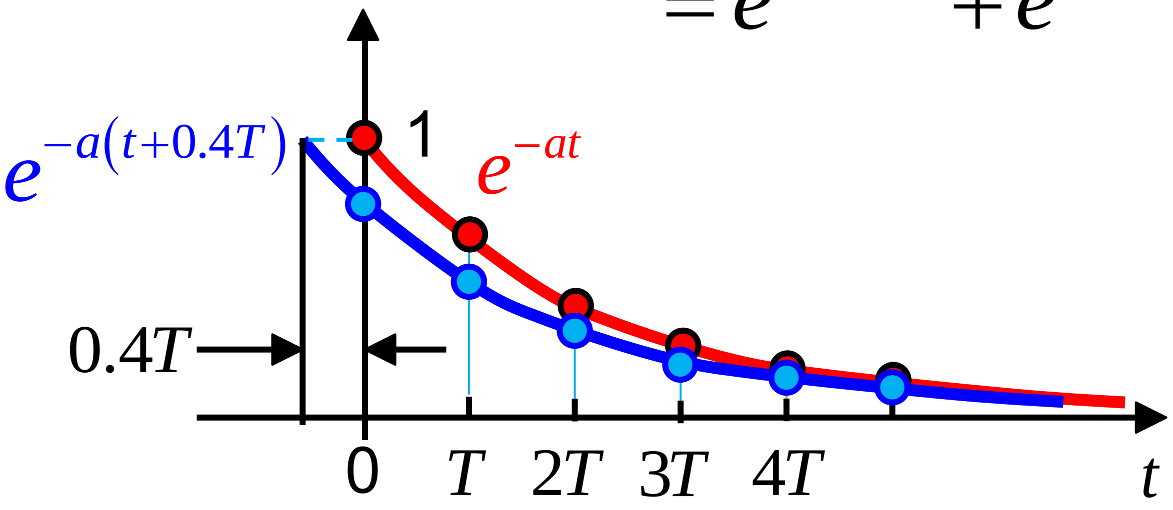
迟后$0.4T$，0时刻的采样点丢失，但幅值均未改变，故除0时刻外，其余等同$\mathbb{Z}[1(t)]$。

3

$$\mathbb{Z}\left[e^{-a(t+0.4T)}\right]=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-a(kT+0.4T)}z^{-k}=e^{-0.4aT}\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-akT}z^{-k}$$

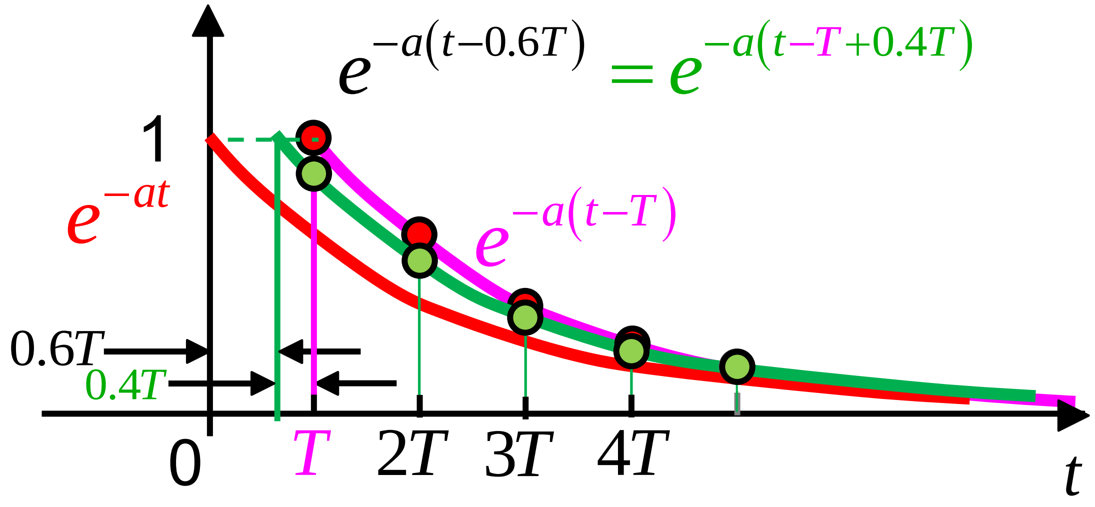
$$=\mathbb{Z}\left[e^{-at}\right]=\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s+a}\right]$$

$$=e^{-0.4aT}+e^{-0.4aT}e^{-aT}z^{-1}+\cdots=\frac{e^{-0.4aT}z}{z-e^{-aT}}$$



超前0.4T，所有采样点均未丢失，但幅值均有减小，减小的系数均为$e^{-0.4aT}$。

4 $\mathbb{Z}\left[e^{-a(t-0.6T)}\right]=\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-a(kT-0.6T)}z^{-k}$



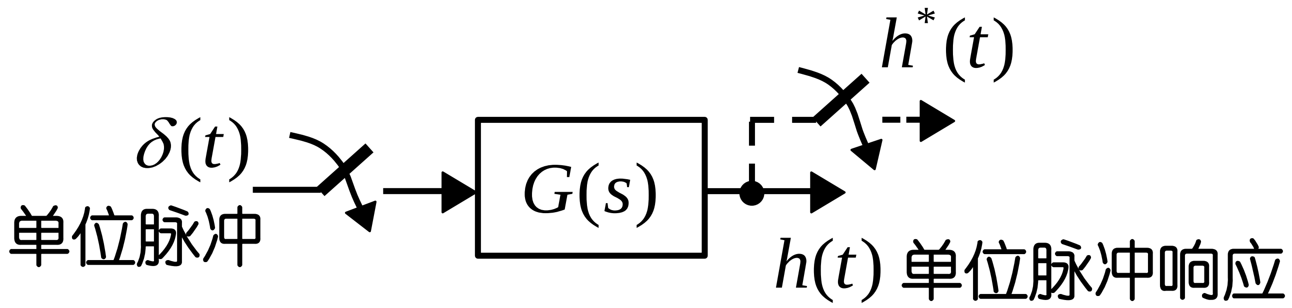
迟后0.6T，相当于先迟后一步 T，再超前 0.4T。

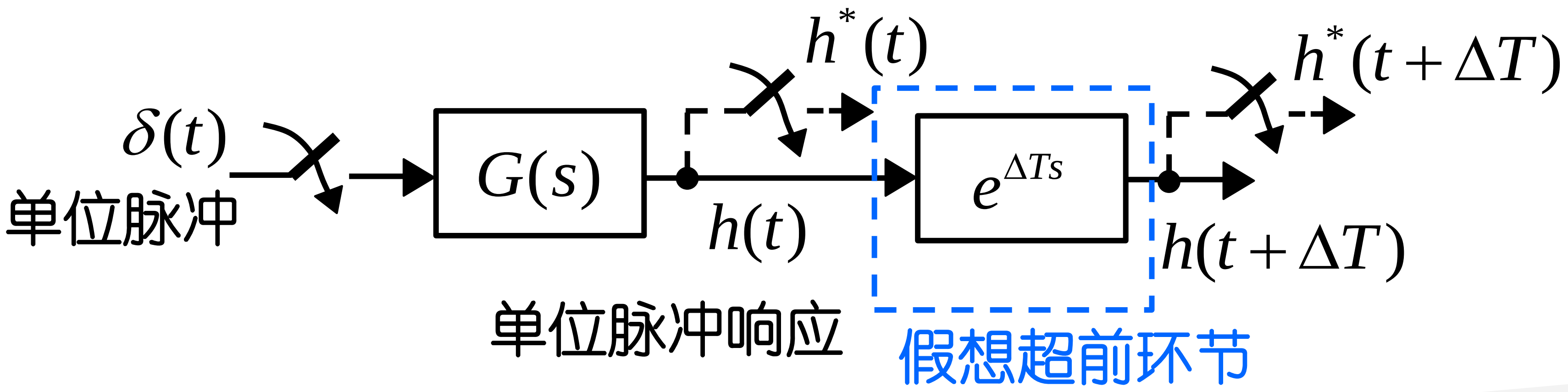
$$=\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-a(kT-T+0.4T)}z^{-k}=e^{-0.4aT}\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-a(kT-T)}z^{-k}$$

$$=e^{-0.4aT}z^{-1}+e^{-0.4aT}e^{-aT}z^{-2}+e^{-0.4aT}e^{-2aT}z^{-3}+\cdots$$

$$=\frac{e^{-0.4aT}}{z-e^{-aT}}$$

2. 系统采样点之间的响应





$G(s)$与假想环节 $e^{\Delta Ts}$ 串联后的传递函数为

$$G(s,\Delta) = G(s)e^{\Delta Ts} = \boldsymbol{L}\left[h(t+\Delta T)\right] \qquad 0 \le \Delta < 1$$

$$G(z,\Delta) = \mathbb{Z}\left[G(s,\Delta)\right]$$

求系统对输入信号 $u(t)$ 的响应 $y(t)$ 的步骤

- 求 $Y(z,\Delta)=G(s,\Delta)U(z)$
- 求 $y(kT+\Delta T)=\mathbb{Z}^{-1}[Y(z,\Delta)]$

当 ΔT 由 $0\to T$ 变化时，可以求得系统在采样点之间任意时刻的响应。

【例7-13】 已知系统 $G(s)=\dfrac{1}{s+1}$，采样周期$T=1$秒，求系统在采样点之间的脉冲响应。

【解】 $$G(z,\Delta)=\mathbb{Z}\left[G(s)e^{\Delta Ts}\right]=\mathbb{Z}\left[\frac{1}{s+1}e^{\Delta Ts}\right]=\mathbb{Z}\left[e^{-(t+\Delta T)}\right]$$

$$=e^{-\Delta T}\mathbb{Z}\left[e^{-t}\right]=e^{-\Delta T}\frac{z}{z-e^{-T}}$$

求上式的反变换，得系统在采样点之间的脉冲响应。

$$h(kT+\Delta T)=\mathbb{Z}^{-1}\left[G(z,\Delta)\right]=\mathbb{Z}^{-1}\left[e^{-\Delta T}\frac{z}{z-e^{-T}}\right]=e^{-\Delta T}\mathbb{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-e^{-T}}\right]$$

$$=e^{-\Delta T}e^{-kT}=e^{-(kT+\Delta T)}=e^{-(k+\Delta)}$$

本次课内容总结

1. 脉冲传递函数的定义
2. 脉冲传递函数的求取
3. 脉冲传递函数中Z的意义
4. 改进的Z变换
   - 超前改进Z变换
   - 迟后改进Z变换
   - 系统采样点之间的响应