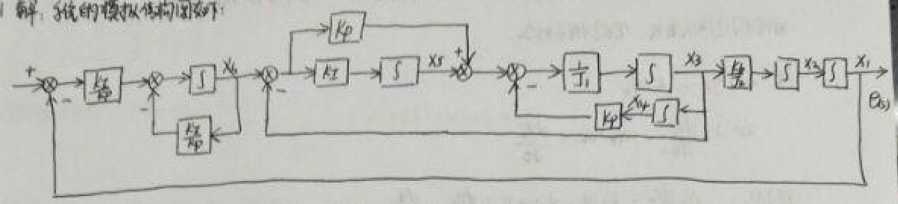
1.1 解：系统的模拟结构图如下：



系统的状态方程如下：

$$y = x_1 = \theta(s)$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{K_b}{J_2}x_3$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{K_p}{J_1}x_3 - \frac{K_p}{J_1}x_4 + \frac{1}{J_1}x_5 + \frac{K_p}{J_1}x_6$$

$$\dot{x}_4 = x_3$$

$$\dot{x}_5 = -K_1x_3 + K_1x_6$$

$$\dot{x}_6 = -\frac{K_1}{K_p}x_1 - \frac{K_1}{K_p}x_6 + \frac{K_1}{K_p}u$$

系统的状态空间表达式及输出方程表达式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\\ \dot{x}_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{K_b}{J_2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{K_p}{J_1} & -\frac{K_p}{J_1} & \frac{1}{J_1} & \frac{K_p}{J_1}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -K_1 & 0 & 0 & K_1\\ -\frac{K_1}{K_p} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{K_1}{K_p}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ \frac{K_1}{K_p}\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\end{bmatrix}$$

1.2 解：由图，令 $i_1 = x_1$，$i_2 = x_2$，$u_c = x_3$，输出量 $y = R_2x_2$

由 $R_1x_1 + L_1\dot{x}_1 + x_3 = u$

$L_2\dot{x}_2 + R_2x_2 = x_3$

$x_1 = x_2 + C\dot{x}_3$

既得

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_1}{L_1}x_1 - \frac{1}{L_1}x_3 + \frac{1}{L_1}u$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{R_2}{L_2}x_2 + \frac{1}{L_2}x_3$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{C}x_1 + \frac{1}{C}x_2$$

$$y = R_2x_2$$

故得

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1}\\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2}\\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{L_1}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & R_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

1-3解 选弹簧的伸长度 y_1, y_2，质量块 M_1, M_2 的速度 v_1, v_2 可以选作状态变量。

由结构图可以看出，它们相互独立

选 $x_1 = y_1$，$x_2 = y_2$

$x_3 = v_1 = \frac{dy_1}{dt}$，$x_4 = v_2 = \frac{dy_2}{dt}$

对于M_1：$M_1 \frac{dv_1}{dt} = K_2(y_2 - y_1) + B_2\left(\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right) - K_1 y_1 - B_1 \frac{dy_1}{dt}$

对于M_2，有：$M_2 \frac{dv_2}{dt} = f - K_2(y_2 - y_1) - B_2\left(\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)$

把 $x_1 = y_1$，$x_2 = y_2$，$x_3 = \frac{dy_1}{dt}$，$x_4 = v_2 = \frac{dy_2}{dt}$ 及 $u = f$ 代入上面两式子，经整理得

$$\dot{x}_1 = x_3$$
$$\dot{x}_2 = x_4$$
$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{M_1}(K_1 + K_2)x_1 + \frac{K_2}{M_1}x_2 - \frac{1}{M_1}(B_1 + B_2)x_3 + \frac{B_2}{M_1}x_4$$
$$\dot{x}_4 = \frac{K_2}{M_2}x_1 - \frac{K_2}{M_2}x_2 + \frac{B_2}{M_2}x_3 - \frac{B_2}{M_2}x_4 + \frac{f}{M_2}$$

写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{M_1}(K_1+K_2) & \frac{K_2}{M_1} & -\frac{1}{M_1}(B_1+B_2) & \frac{B_2}{M_1} \\ \frac{K_2}{M_2} & \frac{-K_2}{M_2} & \frac{B_2}{M_2} & \frac{-B_2}{M_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_2} \end{pmatrix} f$$

指定输出为 x_3, x_4

故 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

1-4 解：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & -a_1 & 0 & -a_6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_5 & -a_4 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & s+a_1 & 0 & a_6 \\ -1 & 0 & s & -1 \\ 0 & a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$W_{ux}(s) = (sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & s+a_1 & 0 & a_6 \\ -1 & 0 & s & -1 \\ 0 & a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$W_{uy}(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & s+a_1 & 0 & a_6 \\ -1 & 0 & s & -1 \\ 0 & a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

2. (8(3)) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -12 & -7 & -6 \end{bmatrix}$

A的特征方程 $|\lambda I-A|=\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -3 & \lambda & -2 \\ 12 & 7 & \lambda+6 \end{bmatrix}=\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6=0$

解得：$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=-3$

当 $\lambda_1=-1$ 时，$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -12 & -7 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{bmatrix}$

解得：$P_{21}=P_{31}=-P_{11}$，令 $P_{11}=1$ 得 $P_1=\begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

当 $\lambda_2=-2$ 时，$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -12 & -7 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ P_{32} \end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ P_{32} \end{bmatrix}$

解得：$P_{22}=-2P_{12}$，$P_{32}=\frac{1}{2}P_{12}$，令 $P_{12}=2$ 得 $P_2=\begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ P_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

当 $\lambda_3=-3$ 时 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -12 & -7 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ P_{33} \end{bmatrix}=-3\begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ P_{33} \end{bmatrix}$

解得：$P_{23}=-3P_{13}$，$P_{33}=3P_{13}$，令 $P_{13}=1$ 得 $P_3=\begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ P_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

(9(2)) 解：A的特征方程 $|\lambda I-A|=\begin{bmatrix} \lambda-4 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda & -2 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{bmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)^2=0$ $\lambda_{1,2}=3$，$\lambda_3=1$

当 $\lambda_1=3$ 时，$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{bmatrix}=3\begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{bmatrix}$ 得 $P_{11}=P_{31}=P_{21}$，令 $P_{11}=1$，得 $P_1=\begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

当 $\lambda_2=3$ 时 $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{bmatrix}=3\begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ← 求有相同特征值的特征向量的求取方法

得 $P_{12}=P_{22}+1$，$P_{22}=P_{32}$，令 $P_{12}=1$ 得 $P_2=\begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ P_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

当 $\lambda_3=1$ 时，$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ P_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ P_{33} \end{bmatrix}$ 解得 $P_{13}=0$，$P_{23}=2P_{33}$，令 $P_{33}=1$，得 $P_3=\begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ P_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad CT = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} u$

$y = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tilde{x}$

(5) $|\lambda I - A| = \begin{bmatrix} \lambda+2 & -1 \\ -1 & \lambda+2 \end{bmatrix} = (\lambda+2)^2 - 1 = 0 \quad \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -3$

当$\lambda_1 = -1$时

$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} \quad p_{21} = p_{11}$ 取 $p_{11} = 1$ 则 $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

当$\lambda_2 = -3$时

$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} \quad p_{22} = -p_{12}$ 取 $p_{12} = 1$ 则 $p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$

$T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$

$CT = [1, 0] \cancel{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \cancel{[\ ]} \ [1, 1]$

约旦标准型为 $\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} u$

2.

1-12. 解: (1) $b=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$$\cancel{W(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z+2}=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}}$$

$$\cancel{x(k+1)=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-2\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(k)}$$

$$\cancel{y(k)=[1,1]x(k)}$$

$x_1(k+1)=x_2(k)$

$x_2(k+1)=-2x_1(k)-3x_2(k)+u$

$y(k)=3x_1(k)+2x_2(k)$

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=[3,2]x(k)$$

求T，使得 $T^{-1}B=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 得 $T^{-1}=\begin{bmatrix}1&\bullet\\0&1\end{bmatrix}$，$T=\begin{bmatrix}1&-\bullet\\0&1\end{bmatrix}$

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&0\\-5&-1\end{bmatrix}$$

$$CT=[3\ 2]\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}=[3\ -1]$$

所以，状态空间表达式为

$$z(k+1)=\begin{bmatrix}-4&0\\-5&-1\end{bmatrix}z(k)+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=[3,-1]z(k)$$

(2) $b=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

求T 使得 $T^{-1}B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 得 $T^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$T=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

$$T^{-1}AT=A=\begin{bmatrix}-4&0\\-5&-1\end{bmatrix}$$

$$CT=C=[3,2]$$

故状态空间表达式为

$$\cancel{z(k+1)=\begin{bmatrix}-4&0\\-5&-1\end{bmatrix}z(k)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}$$

$$z(k+1)=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}z(k)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=[3,2]z(k)$$

2-3 解：$sI-A=\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -2 & 5 & s-4 \end{bmatrix}$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{|sI-A|}\operatorname{adj}(sI-A)$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{-2}{(s-1)^2}+\frac{1}{s-2} & \frac{3}{(s-1)^2}+\frac{2}{s-1}-\frac{2}{s-2} & \frac{-1}{(s-1)^2}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-2} \\ 2\left(\frac{1}{s-2}-\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{s-1}\right) & \frac{3}{(s-1)^2}+\frac{5}{s-1}-\frac{4}{s-2} & \frac{-1}{(s-1)^2}-\frac{2}{s-1}+\frac{2}{s-2} \\ \frac{-2}{(s-1)^2}-\frac{4}{s-1}+\frac{4}{s-2} & \frac{3}{(s-1)^2}+\frac{8}{s-1}-\frac{8}{s-2} & \frac{-1}{(s-1)^2}-\frac{3}{s-1}+\frac{4}{s-2} \end{pmatrix}$$

$$e^{At}=\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]=\begin{pmatrix} -2te^{t}+e^{2t} & 3te^{t}+2e^{t}-2e^{2t} & -te^{t}-e^{t}+e^{2t} \\ 2(e^{2t}-te^{t}-e^{t}) & 3te^{t}+5e^{t}-4e^{2t} & -te^{t}-2e^{t}+2e^{2t} \\ -2te^{t}-4e^{t}+4e^{2t} & 3te^{t}+8e^{t}-8e^{2t} & -te^{t}-3e^{t}+4e^{2t} \end{pmatrix}$$

2-5 解 (2) ∵ $\Phi(0)=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$

所以该矩阵满足状态转移矩阵的条件

$$A=\dot{\Phi}(t)\big|_{t=0}=\begin{bmatrix} 0 & e^{-2t} \\ 0 & -2e^{-2t} \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(4) ∵ $\Phi(0)=\begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\neq I$ 所以不满足状态转移矩阵的初值性质.

2-6 解. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$sI-A=\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$

$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$ $\qquad y=[1,0]x=\frac{1}{2}t^2+t+1$

$\Phi(t)=e^{At}=\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]=\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

因为 $B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad u(t)=1(t)$

$$x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau=\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2+t+1 \\ t+1 \end{bmatrix}$$

2-11 解　首先写出 $G_0(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ 的状态空间表达式

$$G_0(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

$$A_0=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-2\end{bmatrix}\quad B_0=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$C_0=[1\ \ -1]$$

求其状态转移矩阵　$e^{A_0t}=\begin{bmatrix}e^{-t}&0\\0&e^{-2t}\end{bmatrix}$

对 (A_0,B_0,C_0) 进行离散化，包括零阶保持器

$$G_0=e^{A_0T}=\begin{bmatrix}e^{-T}&0\\0&e^{-2T}\end{bmatrix}$$

$$H_0=\int_0^T e^{A_0t}B_0\,dt=\int_0^T\begin{bmatrix}e^{-t}\\e^{-2t}\end{bmatrix}dt=\begin{bmatrix}1-e^{-T}\\\frac{1}{2}(1-e^{-2T})\end{bmatrix}$$

(1) 系统的状态空间表达式

$$x_1(k+1)=e^{-T}x_1(k)+(1-e^{-T})u(k)$$

$$x_2(k+1)=e^{-2T}x_2(k)+\frac{1}{2}(1-e^{-2T})u(k)$$

$$u(k)=r(k)-y(k)=r(k)-(x_1(k)-x_2(k))$$

代入得 $x_1(k+1)=(2e^{-T}-1)x_1(k)+(1-e^{-T})x_2(k)+(1-e^{-T})r(k)$

$$x_2(k+1)=-\frac{1}{2}(1-e^{-2T})x_1(k)+\frac{1}{2}(1+e^{-2T})x_2(k)+\frac{1}{2}(1-e^{-2T})r(k)$$

$$G(T)=\begin{bmatrix}2e^{-T}-1&1-e^{-T}\\-\frac{1}{2}(1-e^{-2T})&\frac{1}{2}(1+e^{-2T})\end{bmatrix}$$

$$H(T)=\begin{bmatrix}1-e^{-T}\\\frac{1}{2}(1-e^{-2T})\end{bmatrix}$$

(2) $T=0.1s$

$$G=\begin{bmatrix}0.8097&0.0952\\-0.0906&0.9094\end{bmatrix}\quad H=\begin{bmatrix}0.0952\\0.0906\end{bmatrix}$$

(3) $k=0$, $x_1=0$, $x_2=0$, $y(0)=0$

$k=1$, $x_1=0.0732$ $x_2=0.0796$ $y(1)=0.0045$

$k=2$, $x_1=0.1808$ $x_2=0.1644$ $y(2)=0.964$

$k=3$. $x_1=0.2372$ $x_2=0.2238$ $y(3)=0.0335$

...

(4) 在采样间隔内，$G_0(s)$的输入不变

以 $t_0=0.25$ 为初始时刻，在 $t=0.25s$ 时，

$$x(t)=e^{A_0(t-t_0)}x_0+\int_{t_0}^{t}e^{A_0(t-\tau)}B_0u\,d\tau$$

$$X(0.25)=\begin{bmatrix}0.2200\\0.1956\end{bmatrix}$$

$$y(0.25)=C_0x(0.25)=0.0240$$

3.1 (2) 解. 由图可得.

$$\dot{x}_1=-ax_1+bx_2+u \qquad \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a&b\\-c&-d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u$$

$$\dot{x}_2=-cx_1-dx_2+u$$

$$y=x_1 \qquad y=[1,0]x$$

$$Q_c=[B,AB]=\begin{bmatrix}1&-a+b\\1&-c-d\end{bmatrix}$$

$|Q_c|\neq 0$ 则 $-a+b\neq -c-d$ 时能控

$$Q_o=\begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1,&0\\-a,&b\end{bmatrix}$$ 当 $b\neq 0$ 时，能观

3.2 (1) $A=\begin{bmatrix}-3&1\\1&-3\end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$ $M=[B\ AB]=\begin{bmatrix}1&1&-2&-2\\1&1&-2&-2\end{bmatrix}$ rank$M=1<2$ 不能控

$N=\begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\\-2&-2\\-4&4\end{bmatrix}$ rank $N=2$ 能观 (列满秩)

(2) $|\lambda I-A| = (\lambda+3)^2-1=0$

$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-4$

当 $\lambda_1=-2$时，$p_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

当 $\lambda_2=-4$时，$p_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

$T=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$ $T^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$T^{-1}B=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$ $CT=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$

$T^{-1}B$中有全为0的行，所以不可控

CT中没有全为0的列，所以可观。

3-6、解 $a_0=6$，$a_1=11$，$a_2=6$，$a_3=3$，$b_0=6$

系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}6&0&0\end{bmatrix}x$$

传递函数为 $W(s)=C(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}6&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\6&11&s+6\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\dfrac{6}{s^3+6s^2+11s+6}$

其对偶系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&-6\\1&0&-11\\0&1&-6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}x$$

传递函数为 $W(s)=\dfrac{6}{s^3-6s^2-11s+6}$

3.8 解：能观标准型为 $A_0=\begin{bmatrix}0&-2\\1&2\end{bmatrix}$，$b_0=\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}$，$C_0=\begin{bmatrix}0,&1\end{bmatrix}$

3.9 解：$W(s)=\dfrac{s^2+6s+8}{s^2+4s+3}=1+\dfrac{2s+5}{s^2+4s+3}$

系统的能控标准I型为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1\\-3&-4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}5&2\end{bmatrix}x+u$$

能观标准I型为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & -4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}5\\ 2\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x+u$$

3-14. (1) $W(s)=\frac{1}{s+1}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

$a_0=1$, $B_0=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $A_c=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

$B_c=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $C_c=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $D_c=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

系统能控不能观

取 $R_0^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, 则 $R_0=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

所以 $\hat{A}=R_0^{-1}AR_0=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, $\hat{B}=R_0^{-1}B_c=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\hat{C}=C_cR_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $\hat{D}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

所以最小实现为 $\hat{A}_m=-1$ $\hat{B}_m=[1,1]$ $\hat{C}_m=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ $\hat{D}_m=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

验证: $\hat{C}_m(sI-\hat{A}_m)^{-1}\hat{B}_m=\frac{1}{s+1}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=W(s)$

(2) $W(s)=\frac{1}{s^3}\begin{bmatrix}s^2 & s\\ s & 1\end{bmatrix}$ $\qquad r=2\ m=2$

$$=\frac{1}{s^3}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}s^2+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}s+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]$$

$a_0=a_1=a_2=0$ $\quad \beta_0=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad \beta_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $\quad \beta_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$$A_c=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad B_c=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad \cancel{C_c=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}\quad D_c=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$C_c=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$N=\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rank $N = 3 < n=6$ 断能观性结构分解

取 $R_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 则 $R_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\hat{A} = R_0^{-1} A_c R_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{B} = R_0^{-1} B_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = C R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_m (sI - A_m)^{-1} B_m = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s^2 & s \\ s & 1 \end{bmatrix}$$