

## 现代控制理论第五章习题答案

5-1 解：极点配置希望

$$|sI - (A + BK)| = (s + 1)(s + 2)(s + 3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

$$\begin{vmatrix} s-1 & 1 & -1 \\ 0 & s-1 & -1 \\ -1-k_0 & -k_1 & s-1-k_2 \end{vmatrix} \\ = (s-1)^2(s-1-k_2) + (1+k_0) - (s-1)(1+k_0) - (s-1)k_1 \\ = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 \Rightarrow k_0 = 23 \quad k_1 = -50 \quad k_2 = -9$$

所以状态反馈阵为

$$\mathbf{K} = [23 \quad -50 \quad -9]$$

状态反馈控制律为

$$u = \mathbf{K}\mathbf{x} + v$$

5-2

解：极点配置希望

$$|sI - (A + BK)| = (s + 10)(s^2 + 2s + 4) = s^3 + 12s^2 + 24s + 40$$

$$\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & -1 \\ -10k_0 & 1-10k_1 & s+10-10k_2 \end{vmatrix} = (s^2 + s)(s + 10 - 10k_2) - 10k_0 + s(1 - 10k_1) \\ = s^3 + 12s^2 + 24s + 40 \Rightarrow k_0 = -4 \quad k_1 = -1.2 \quad k_2 = -0.1$$

所以状态反馈阵为

$$\mathbf{K} = [-4 \quad -1.2 \quad -0.1]$$

状态反馈控制律为

$$u = \mathbf{K}\mathbf{x} + v$$

5-3 (2) 任意配置极点的充要条件是系统能控，检验系统能控性矩阵

$[B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  满秩，所以系统可以任意配置极点。

$$(3) |sI - (A + BK)| = \begin{vmatrix} s+2 & -1 \\ -k_0 & s+1-k_1 \end{vmatrix} = (s+3)(s+3)$$

所以状态反馈阵为

$$\mathbf{K} = [-1 \quad -3]$$

状态反馈控制律为

$$u = \mathbf{K}\mathbf{x} + v$$

5-4 对于

$$G(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)} = \frac{s^2 + s - 2}{s^3 + 2s^2 - 5s - 6}$$

若将其极点配置在-2, -2, -3，则状态反馈系统传函为

$$\phi(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+2)(s+2)(s+3)} = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)}$$

若 $G(s)$ 用能控标准 I 型实现

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [-2 \quad 1 \quad 1]$$

则状态反馈系统实现仍为能控标准 I 型

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6+k0 & 5+k1 & -2+k2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [-2 \quad 1 \quad 1]$$

系统特征方程为

$$s^3 + (2 - k2)s^2 - (5 + k1)s - (6 + k0) = (s + 2)(s + 2)(s + 3) = s^3 + 7s^2 + 16s + 12$$

所以状态反馈阵为  $K = [-18 \quad -21 \quad -5]$

状态反馈控制律为

$$u = Kx + v$$

5-5 如果系统完全能控，其极点可任意配置，一定可以通过状态反馈镇定；若系统不完全能控，则采用状态反馈能镇定的充要条件是其不能控子系统为渐进稳定。

(1) 系统能观性矩阵为

$$[B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

满秩，完全能控，所以系统可以通过状态反馈镇定。

(2) 系统实现为约当标准型，两个约当块最后一行对应的 B 阵都为零，所以系统不完全能控。但系统的特征值为 -2, -2, -2, -5, -5，都是稳定极点，所以其不能控子系统为渐进稳定，系统可以通过状态反馈镇定。

5-6

解：(1)  $|sI - A| = s^2(s^2 - 11)$

由于系统矩阵存在正的特征根，所以系统不稳定。

(2) 由于  $\text{rank}(M)=4$ ，故可知系统能够镇定。不妨假设要求匹配的极点为 -1, -2, -2.5, -4。

$$|sI - (A + BK)| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ -k0 & s - k1 & 1 - k2 & -k3 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ k0 & k1 & k2 - 11 & s + k3 \end{vmatrix} = (s + 1)(s + 2)(s + 2.5)(s + 4) \\ = s^4 + 9.5s^3 + 31.5s^2 + 43s + 20$$

可得出  $K = [2 \quad 4.3 \quad 44.5 \quad 13.8]$ 。

状态反馈控制律为

$$u = Kx + v$$

5-7 设计一个前馈补偿器，使系统

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

解耦，且解耦后的极点为 -1, -1, -2, -2。

解：  $W(s) = W_0(s)W_d(s)$

$$W_d(s) = W_0(s)^{-1}W(s)$$

$$W_0(s)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{s(s+1)} - \frac{1}{s(s+1)(s+2)}} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{-1}{s+2} \\ \frac{-1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$= s(s+2) \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{-1}{s+2} \\ \frac{-1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & -s \\ \frac{-(s+2)}{s+1} & \frac{s(s+2)}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$W_d(s) = W_0(s)^{-1}W(s)$$

$$= \begin{bmatrix} s+2 & -s \\ \frac{-(s+2)}{s+1} & \frac{s(s+2)}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)^2} & \frac{-s}{(s+2)^2} \\ \frac{-(s+2)}{(s+1)^3} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

5-9

解：选取如下形式的动态补偿器  $\begin{cases} \dot{z} = Fz + Hx \\ u = Nz + Mx \end{cases}$  可知  $A_c = \begin{bmatrix} A + BM & BN \\ H & F \end{bmatrix}$

等价于  $A' = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B' = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ ,  $K = \begin{bmatrix} M & N \\ H & F \end{bmatrix}$ , 因此对等价系统进行极点配置可得  $K =$

$$\begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ 故有 } M = \begin{bmatrix} -5 & 5 \end{bmatrix}, N = 0, H = 0, F = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

5-10 已知系统：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

试设计一个状态观测器，使观测器的极点为  $-r$ ,  $-2r(r>0)$ 。

解：因为  $N = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  满秩，系统能观，可构造观测器。

引入反馈阵  $G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$ ，使得观测器特征多项式等于期望特征式：

$$|sI - (A - GC)| = \begin{vmatrix} s + g_1 & -1 \\ g_2 & s \end{vmatrix} = (s + r)(s + 2r)$$

$$s^2 + g_1s + g_2 = s^2 + 3rs + 2r^2 \Rightarrow g_1 = 3r, \quad g_2 = 2r^2 \Rightarrow G = \begin{bmatrix} 3r \\ 2r^2 \end{bmatrix}$$

观测器方程为：

$$\begin{aligned}\hat{\hat{x}} &= (A - Gc)\hat{x} + bu + Gy \\ &= \begin{bmatrix} -3r & 1 \\ -2r^2 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 3r \\ 2r^2 \end{bmatrix} y\end{aligned}$$

5-11 (1) 解：因为  $N = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  满秩，系统能观，可构造全维观测器。

引入反馈阵  $G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$ ，使得观测器特征多项式等于期望特征式：

$$|sI - (A - GC)| = \begin{vmatrix} s + 2 + g_1 & -1 \\ g_2 & s + 1 \end{vmatrix} = (s + 3)(s + 3)$$

$$s^2 + (3 + g_1)s + 2 + g_1 + g_2 = s^2 + 6s + 9 \Rightarrow g_1 = 3, g_2 = 4 \Rightarrow G = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

全维观测器方程为：

$$\dot{\hat{x}} = (A - GC)\hat{x} + Bu + Gy = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} y$$

(2) 构造降维观测器。已知原系统  $x_2$  不能测取，需要构造观测器。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ y = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} + 2y = x_2 & \text{输出方程} \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u & \text{状态方程} \end{cases}$$

系统矩阵为  $A_{22} = [-1]$ ，输出矩阵为  $A_{12} = [1]$ ，将观测器极点配置在 -3，则反馈阵  $G = 2$ 。构造降维观测器：

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_2 = -3\hat{x}_2 + 2(\dot{y} + 2y) + u \\ \hat{x}_2 = w + 2y \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} y \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{w} = -3(w + 2y) + 4y + u = -3w - 2y + u \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} y \\ w + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} y \end{cases}$$

5-12 解：（张老师的做法：现推公式）

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = u \\ y = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & \text{输出方程} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u & \text{状态方程} \end{cases}$$

对  $x_2$ 、 $x_3$  构造降维观测器，期望极点在 -4，-5，则

$$|sI - (A' - GC')| = \left| sI - \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} [1 \quad 0] \right) \right| = (s + 4)(s + 5) \Rightarrow \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 9 \\ 20 \end{bmatrix} \dot{y} \\ \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 20 \end{bmatrix} y \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} y \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 20 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -61 \\ -180 \end{bmatrix} y \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} y \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 20 \end{bmatrix} y \end{cases}$$

(史老师的做法：代公式)

可知有

$$A_{11} = [0], A_{12} = [1 \ 0], A_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = [0], B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

要求  $A_{22} + LA_{12}$  的极点为 -4, -5 可得  $L = \begin{bmatrix} -9 \\ -20 \end{bmatrix}$ ,

降维观测器为

$$\begin{cases} \dot{z} = (A_{22} + LA_{12})z + [(A_{21} + LA_{11}) - (A_{22} + LA_{12})L]y + (B_2 + LB_1)u \\ \hat{x} = Q_2 z + (Q_1 - Q_2 L)y \end{cases}$$

其中  $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

代入数据可得降维观测器为

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -20 & 0 \end{bmatrix} z - \begin{bmatrix} 61 \\ 180 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 20 \end{bmatrix} y \end{cases}$$

5-13 被控对象传函为  $\frac{1}{s^3}$ , 其能控标准 I 型为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0]$$

(1) 设计状态反馈

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})| = (s+3)(s^2 + s + 1) = s^3 + 4s^2 + 4s + 3$$

$$\mathbf{K} = [-3 \ -4 \ -4]$$

状态反馈控制律为

$$u = \mathbf{K}\hat{x} + v$$

(2) 设计极点为 -5 的降维观测器

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = u \\ y = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & \text{输出方程} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u & \text{状态方程} \end{cases}$$

对  $x_2$ 、 $x_3$  构造降维观测器，期望极点在 -5, -5，则

$$|sI - (A' - GC')| = \left| sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = (s+5)(s+5) \Rightarrow \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \end{bmatrix} \dot{y} \\ \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \end{bmatrix} y \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} y \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -75 \\ -250 \end{bmatrix} y \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} y \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 25 \end{bmatrix} y \end{cases}$$

(3) 从 (2) 的降维观测器的状态方程可知

$$\begin{bmatrix} w_2(s) \\ w_3(s) \end{bmatrix} = \left( sI - \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -25 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s) + \begin{bmatrix} -75 \\ -250 \end{bmatrix} Y(s) \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{(s+5)^2}{s+10} \\ \frac{(s+5)^2}{(s+5)^2} \end{bmatrix} U(s) + \begin{bmatrix} -75s-250 \\ \frac{(s+5)^2}{-250s-625} \\ \frac{(s+5)^2}{(s+5)^2} \end{bmatrix} Y(s)$$

按 (1) (2) 的结果，状态反馈的输出为

$$\hat{y} = K\hat{x} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -4 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 25 \end{bmatrix} y \right) = \begin{bmatrix} -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} - 143y$$

$$\hat{Y}(s) = \begin{bmatrix} -4 & -4 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{(s+5)^2}{s+10} \\ \frac{(s+5)^2}{(s+5)^2} \end{bmatrix} U(s) + \begin{bmatrix} -75s-250 \\ \frac{(s+5)^2}{-250s-625} \\ \frac{(s+5)^2}{(s+5)^2} \end{bmatrix} Y(s) \right) - 143Y(s)$$

$$= \frac{-4-4(s+10)}{(s+5)^2} U(s) + \left( \frac{-4(-75s-250)-4(-250s-625)}{(s+5)^2} - 143 \right) Y(s)$$

$$= \frac{-44-4s}{(s+5)^2} U(s) + \frac{-143s^2-130s-75}{(s+5)^2} Y(s)$$

等效的串联校正

$$W_{G1}(s) = \left( 1 - \frac{-44-4s}{(s+5)^2} \right)^{-1} = \frac{(s+5)^2}{s^2+14s+69}$$

反馈校正装置为

$$W_{G2}(s) = \frac{-143s^2-130s-75}{(s+5)^2}$$

5-13 被控对象传函为  $\frac{1}{s^3}$ ，其能观标准 II 型为（不同实现对应的状态反馈和观测器设计都不同）

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) 设计状态反馈

$$|sI - (A + BK)| = (s + 3)(s^2 - s + 1) = s^3 + 2s^2 - 2s + 3$$

$$K = [-2 \quad 2 \quad -3]$$

状态反馈控制律为

$$u = K\hat{x} + v$$

(5) 设计极点为-5 的降维观测器

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = u \\ \dot{\hat{x}}_2 = x_1 \\ \dot{\hat{x}}_3 = x_2 \\ y = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} & \text{输出方程} \\ \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u & \text{状态方程} \end{cases}$$

对 $x_1$ 、 $x_2$ 构造降维观测器，期望极点在-5，-5，则

$$|sI - (A' - GC')| = \left| sI - \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} [0 \quad 1] \right) \right| = (s + 5)(s + 5) \Rightarrow \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \end{bmatrix} [0 \quad 1] \right) \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \end{bmatrix} y \\ \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \end{bmatrix} y \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \end{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & -25 \\ 1 & -10 \end{bmatrix} \left( w + \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \end{bmatrix} y \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 & -25 \\ 1 & -10 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -250 \\ -75 \end{bmatrix} y \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} y \end{cases}$$