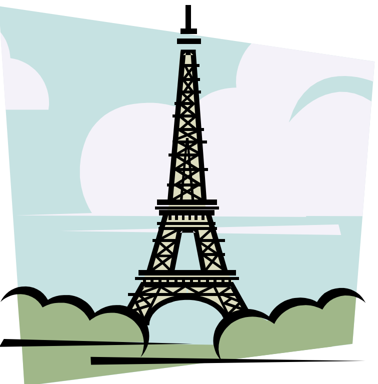
10.3 应用李雅普诺夫方法分析线性系统的稳定性

李雅普诺夫第二法不仅适用于分析线性定常系统的稳定性，而且对线性时变系统和线性离散系统也能给出相应的稳定性判据。



10.3.1 线性定常连续系统的渐近稳定判据

设线性定常连续系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

则平衡状态$\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{0}$大范围渐近稳定的充分必要条件是对任意给定的正定实对称矩阵$\boldsymbol{Q}$，必存在正定的实对称矩阵$\boldsymbol{P}$，满足李雅普诺夫方程

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Q}$$

并且$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$是系统的李雅普诺夫函数。

【证明】 若选用$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 为李雅普诺夫函数，

设$\boldsymbol{P}$为 $n\times n$维正定实对称矩阵， 则$V(\boldsymbol{x})$是正定的。

将$V(\boldsymbol{x})$对时间求导数，得

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}+\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$$

将状态方程代入上式得

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x})&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\\&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\\&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}$$

欲使系统在原点渐近稳定，就要求$\dot{V}(\boldsymbol{x})$为负定，

令

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Q}$$

相当于要求$\boldsymbol{Q}$ 为正定的。

证毕

【注释】在应用该判据时应注意以下几点：

1 实际应用时，通常是先选取一个正定矩阵$\boldsymbol{Q}$，代入李雅普诺夫方程$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{Q}$，再解出矩阵$\boldsymbol{P}$，然后按照希尔维斯特判据判定矩阵$\boldsymbol{P}$的正定性，进而得出系统渐近稳定的结论。

2 为了计算方便，常取$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$，此时，矩阵$\boldsymbol{P}$应满足

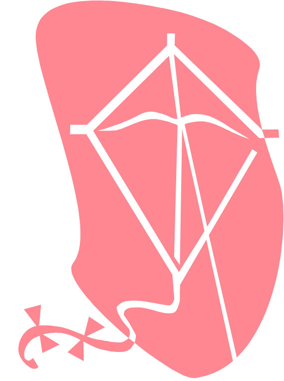
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{I}$$

式中，$\boldsymbol{I}$为单位矩阵。

3 若$\dot{V}(\boldsymbol{x})$沿任意轨迹都不恒等于零，那么$\boldsymbol{Q}$可取为半正定的。

4 上述判据所确定的条件与矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值具有负实部是完全等价的，因而判据所给出的条件是充分必要的。

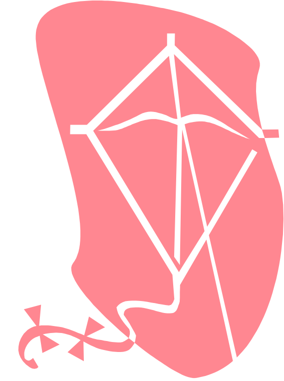
事实上，假设$\boldsymbol{A}$为对角矩阵，即$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\Lambda}$，这一点也可以通过变换达到。取$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，显然为正定，且$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$。



则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q} &= -\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\right) \\ &= -\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}\right) \\ &= -2\boldsymbol{\Lambda} \end{aligned}$$

显然，只有在$\boldsymbol{\Lambda}$的元素（即$\boldsymbol{A}$的特征值）全有负实部的条件下，才能使$\boldsymbol{Q}$为正定矩阵。



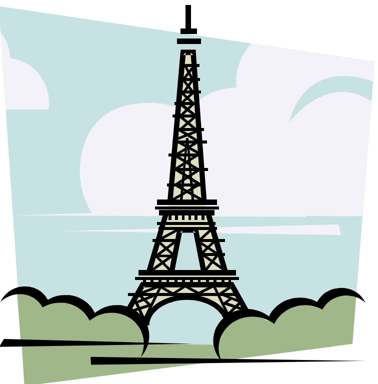
【例10-9】 设系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

分析其平衡状态的稳定性。

【解】 设

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$$

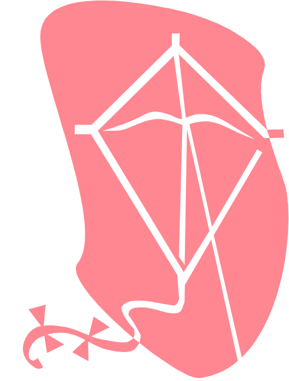


代入李雅普诺夫方程，得

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2p_{21} & -2p_{22} \\ p_{11}-3p_{21} & p_{12}-3p_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2p_{12} & p_{11}-3p_{12} \\ -2p_{22} & p_{21}-3p_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2p_{21}-2p_{12} & -2p_{22}+p_{11}-3p_{12} \\ p_{11}-3p_{21}-2p_{22} & p_{12}+p_{21}-6p_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

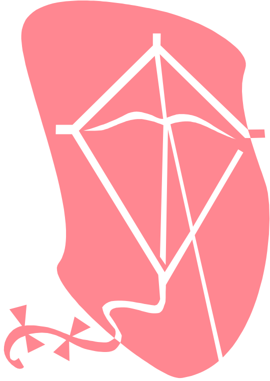


写成分量形式，可得如下代数方程组：

$$\begin{cases} -2p_{21}-2p_{12}=-1 \\ -2p_{22}+p_{11}-3p_{12}=0 \\ p_{11}-3p_{21}-2p_{22}=0 \\ p_{12}+p_{21}-6p_{22}=-1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} p_{11}=\dfrac{5}{4} \\ p_{12}=\dfrac{1}{4} \\ p_{21}=\dfrac{1}{4} \\ p_{22}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$



即

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{5}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$\Delta_1=\frac{5}{4}>0 \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}\frac{5}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}>0$$

根据**希尔维斯特判据**可知：

矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是正定的，

因而系统的平衡点（即原点）是大范围渐近稳定的。

数字仿真研究

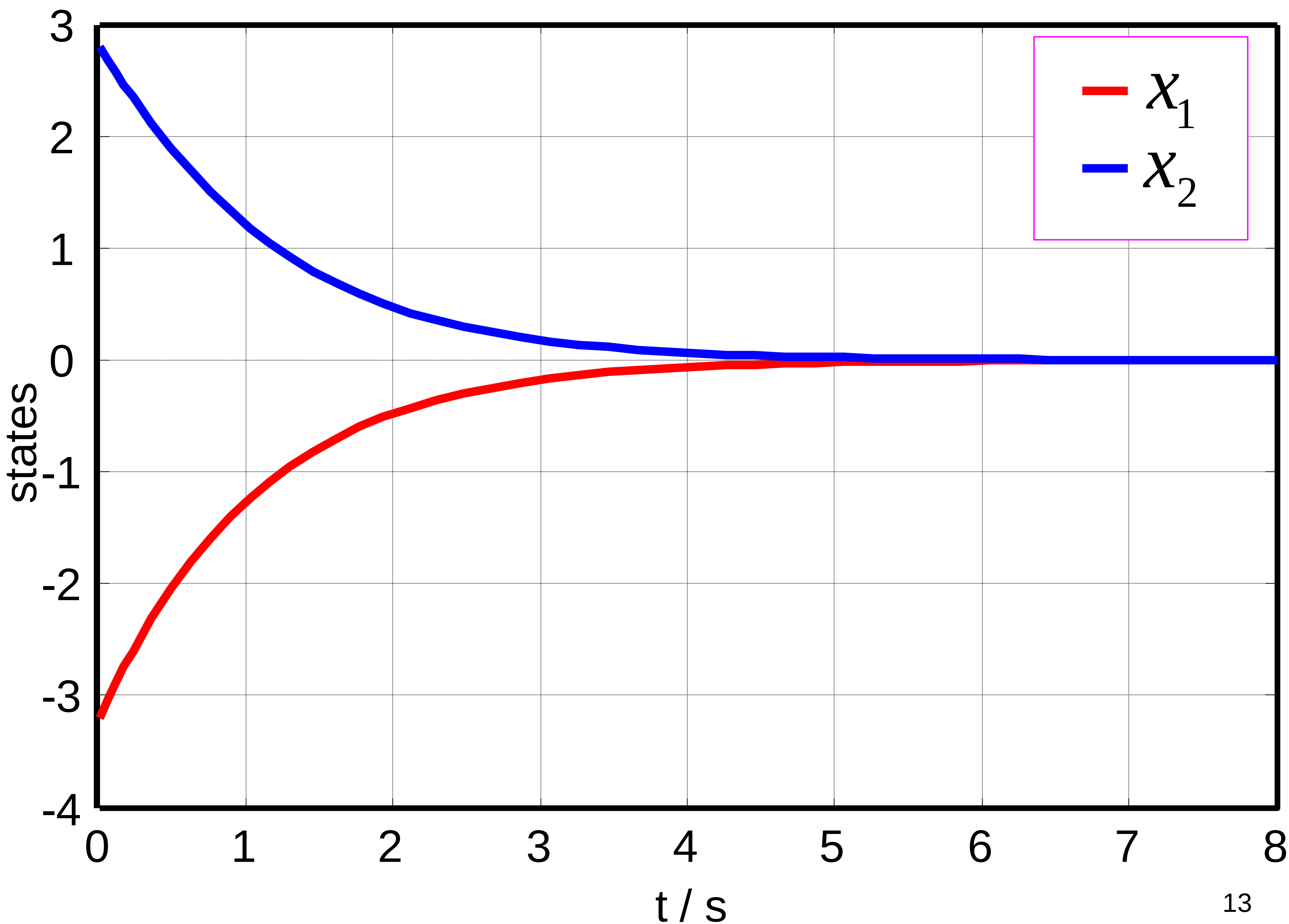
针对原线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

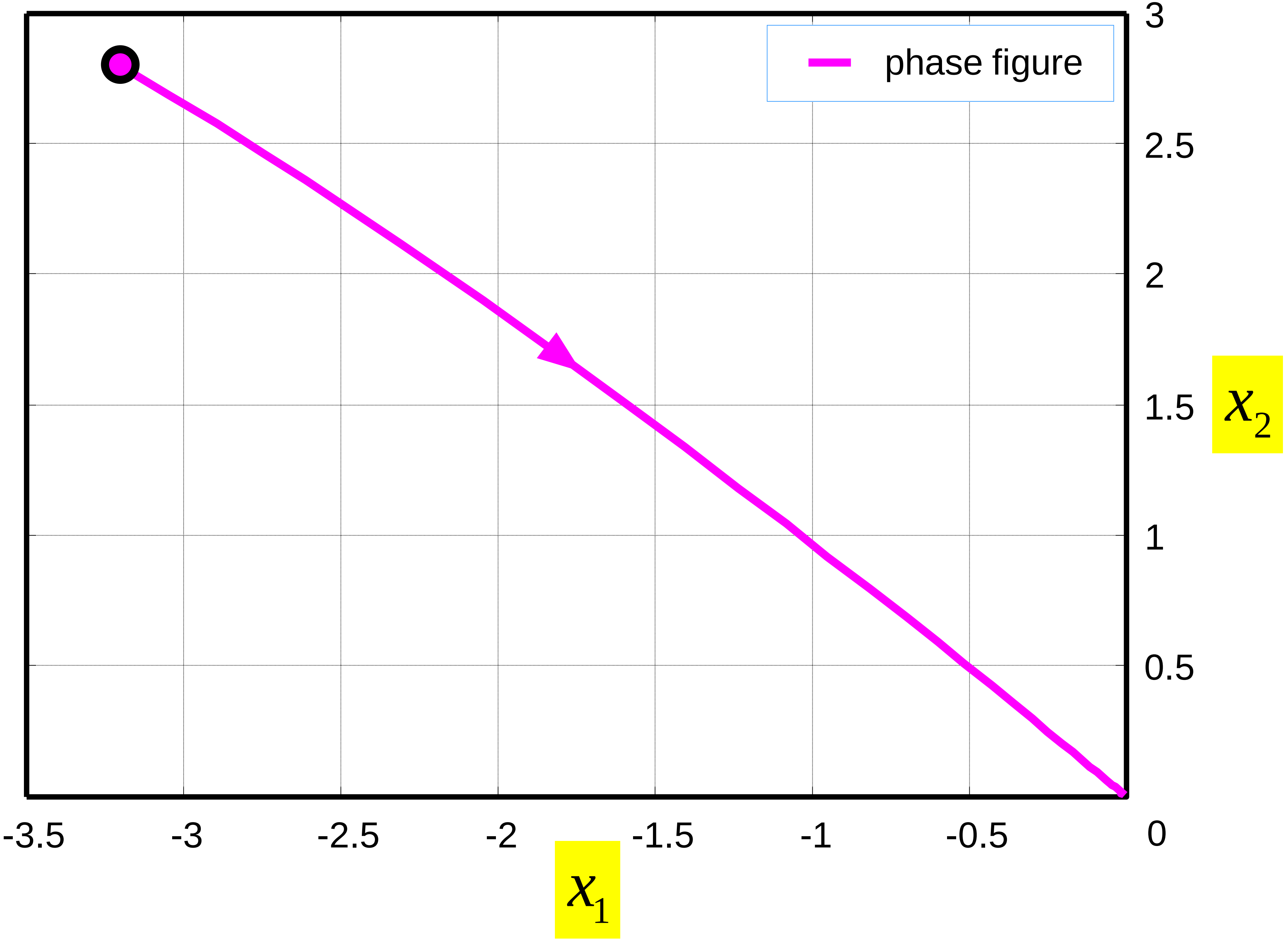
任意给定初始状态

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.2 \\ 2.8 \end{bmatrix}$$

仿真结果如下图所示：



3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
states
0
1
2
3
4
5
6
7
8
t / s
x_1
x_2



phase figure
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
x_1
x_2

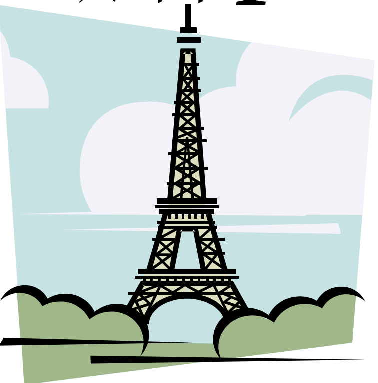
10.3.2 线性定常离散系统的渐近稳定判据

设线性定常离散系统的状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)$$

则平衡状态$\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{0}$渐近稳定的充分必要条件是

对任意给定的正定实对称矩阵$\boldsymbol{Q}$，必存在正定的实对称矩阵$\boldsymbol{P}$，满足李雅普诺夫方程



$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{Q}$$

并且系统的李雅普诺夫函数为：

$$V[\boldsymbol{x}(k)]=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(k)$$

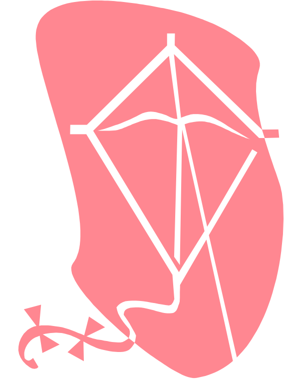
【证明】 将线性连续系统中的 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 用

$$\Delta V\left[\boldsymbol{x}(k)\right]=V\left[\boldsymbol{x}(k+1)\right]-V\left[\boldsymbol{x}(k)\right]$$

代替，设选取李雅普诺夫函数为

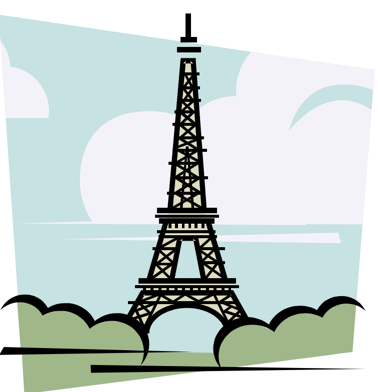
$$V[\boldsymbol{x}(k)]=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(k)$$

式中，$\boldsymbol{P}$ 为正定的实对称矩阵。



则

$$
\begin{aligned}
\Delta V\left[\boldsymbol{x}(k)\right] &= V\left[\boldsymbol{x}(k+1)\right] - V\left[\boldsymbol{x}(k)\right] \\
&= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k+1)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(k+1) - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(k) \\
&= \left[\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(k) \\
&= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(k) \\
&= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\left(\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{x}(k)
\end{aligned}
$$



由于 $V[\boldsymbol{x}(k)]$ 选为正定的，根据渐近稳定判据必要求

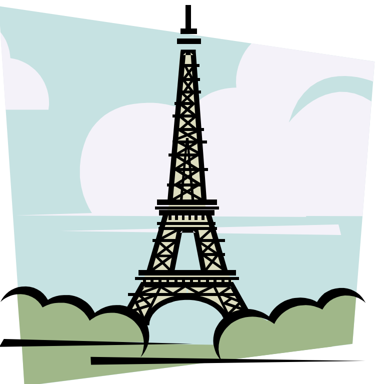
$$\Delta V[\boldsymbol{x}(k)] = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\left(\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{x}(k)$$

为负定的，因此矩阵

$$\boldsymbol{Q} = -\left(\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{P}\right)$$

必须是正定的。

证毕

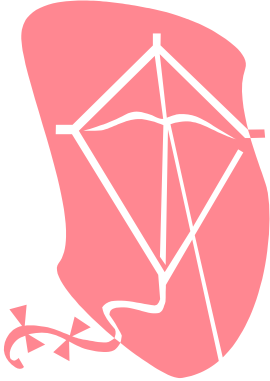


【注释】

如果 $\Delta V\left[\boldsymbol{x}(k)\right]=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k)$ 沿任意解的序列不恒为零， 那么$\boldsymbol{Q}$ 亦可取为半正定矩阵。

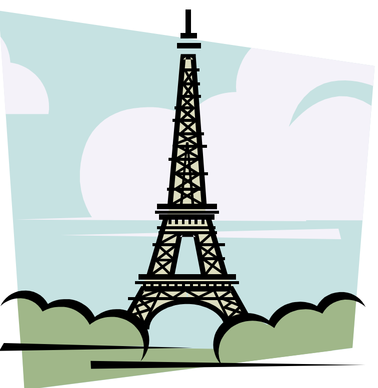
实际上，矩阵$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 满足上述条件与矩阵$\boldsymbol{G}$ 的特征值的模小于1的条件是完全等价的， 因而也是充分必要条件。

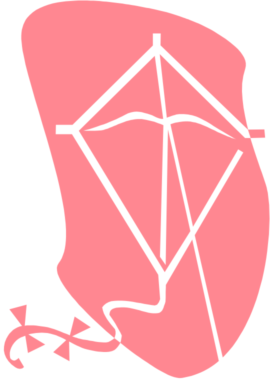
在具体应用时，通常是先选取一个正定矩阵$\boldsymbol{Q}$，例如选$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$， 然后验算由



$$G^{\mathrm{T}}PG - P = -I$$

所确定的实对称矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是否正定，进而得出稳定性的结论。





【例10-10】 设系统的状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)$$

确定其平衡状态渐近稳定的条件。

【解】 根据李雅普诺夫方程得

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{I}$$

即

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

写成分量形式，可得如下代数方程组：

$$\begin{cases} p_{11}(1-\lambda_1^2) = 1 \\ p_{12}(1-\lambda_1\lambda_2) = 0 \\ p_{22}(1-\lambda_2^2) = 1 \end{cases}$$

可解出

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-\lambda_1^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1-\lambda_2^2} \end{bmatrix}$$

要使 $\boldsymbol{P}$ 为正定矩阵， 必须满足条件

$$|\lambda_1|<1 \quad 且 \quad |\lambda_2|<1$$

这就是其平衡状态渐近稳定所应满足的条件。

本次课内容总结

- 应用李雅普诺夫方法分析线性系统的稳定性
  - 线性定常连续系统的渐近稳定判据
  - 线性定常离散系统的渐近稳定判据

附录：应用李雅普诺夫方法分析非线性系统的稳定性

本课程介绍一种**雅可比**（Jacobian）矩阵法。

雅可比矩阵法也称为**克拉索夫斯基**（Krasovski）方法，两者的表达形式略有不同，但是基本思想是一致的。实际上，它们是寻找线性系统李雅普诺夫函数方法的一种推广。

设非线性系统的状态方程为

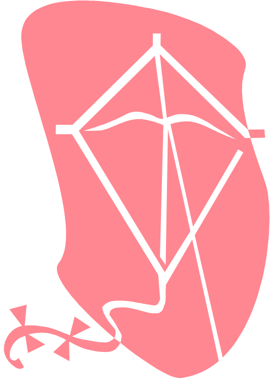
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

式中 $\boldsymbol{x}$ —— n 维状态向量

$\boldsymbol{f}$ —— 与 $\boldsymbol{x}$ 同维的非线性向量函数

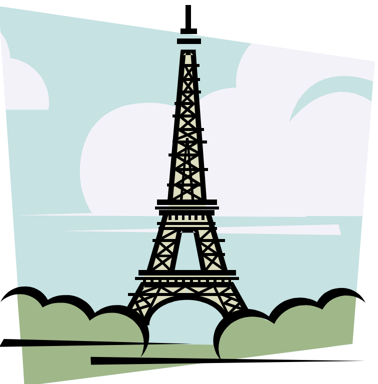
假设原点 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{0}$ 是平衡状态，

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 对 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 可微，



系统的雅可比矩阵为

$$
\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}
= \begin{bmatrix}
\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\
\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}
\end{bmatrix}
$$



则系统在原点渐近稳定的**充分条件**是：

任给正定实对称矩阵$\boldsymbol{P}$，使下列矩阵

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) = -\left[\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\right]$$

为正定的。并且

$$V(\boldsymbol{x}) = \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

是系统的一个李雅普诺夫函数。

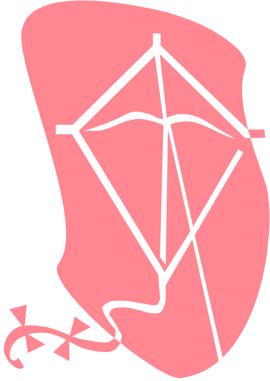
如果当$\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$时，还有$V(\boldsymbol{x}) \to \infty$，则系统在原点 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{0}$ 是大范围渐近稳定的。

【证明】 选取二次型函数

$$V(\boldsymbol{x}) = \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{P} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

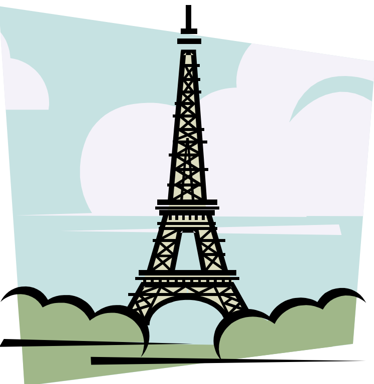
为李雅普诺夫函数，其中 $\boldsymbol{P}$ 为正定对称矩阵，因而$V(\boldsymbol{x})$为正定。

考虑到$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$是 $\boldsymbol{x}$ 的显函数，不是时间 t 的显函



数， 因而有下列关系：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t} &= \dot{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}} \dot{\boldsymbol{x}} \\
&= \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$



将 $V(\boldsymbol{x})$ 沿状态轨迹对 t 求全导数，可得

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) + \dot{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

$$= \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \left[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

$$= \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

$$= \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\left[\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}\right]\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

或写成 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

其中

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) = -\left[\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\right]$$

上式表明，要使系统渐近稳定，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 必须是负定的，因此，$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ 必须是正定的。

如果当 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$ 时，还有 $V(\boldsymbol{x}) \to \infty$， 则系统在原点 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{0}$ 是大范围渐近稳定的。

证毕

【注释】

1 要使$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$为正定， 必须使$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$的主对角线上的所有元素不恒为零。 如果$f_i(\boldsymbol{x})$中不包含$X_i$， 那么，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$的主对角线上相应的元素$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$必恒为零， 则$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$就不可能是正定的，因而，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{0}$也就不可能是渐近稳定的。

2　如果取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$，则有

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})=-\left[\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\right]$$

上式称为克拉索夫斯基表达式。 此时有

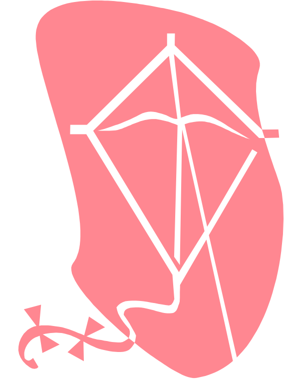
$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\left[\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\right]\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

3 上述两种方法是等价的。

4 这两种方法的不足之处在于：对所有 $x \neq 0$，要求$Q(x)$均为正定这个条件过于苛刻。 很多非线性系统未必能满足这一条件。

另外，这两种方法只给出了渐近稳定的充分条件。

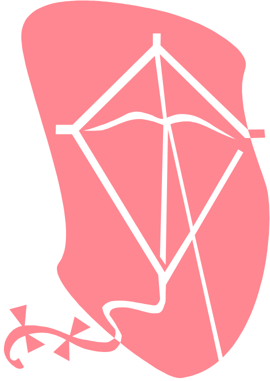


克拉索夫斯基方法的推论

对于线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，且矩阵 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A})$ 为负定， 则系统的平衡状态 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{0}$ 是大范围渐近稳定的。



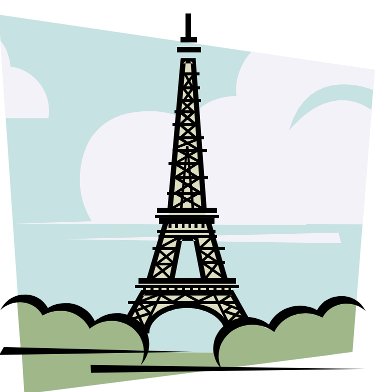
【例10-11】设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

用克拉索夫斯基方法分析$\boldsymbol{x}_\mathrm{e} = \boldsymbol{0}$处的稳定性。

【解】 对本题而言，

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -3x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 - x_2^3 \end{bmatrix}$$



计算雅可比矩阵，得

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1-3x_2^2 \end{bmatrix}$$

取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$ 得

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})=-\left[\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\right]$$

即 $$-\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$$

$$=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1-3x_2^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1-3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2-6x_2^2 \end{bmatrix}$$

因此有 $$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2+6x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = 6 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2+6x_2^2 \end{vmatrix} = 8+36x_2^2 > 0$$

根据希尔维斯特判据可知：矩阵$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$是正定的，

此外，当$\|\boldsymbol{x}\|\rightarrow\infty$时，

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

$$=\begin{bmatrix}-3x_1+x_2 & x_1-x_2-x_2^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3x_1+x_2\\ x_1-x_2-x_2^3\end{bmatrix}$$

$$=\left(-3x_1+x_2\right)^2+\left(x_1-x_2-x_2^3\right)^2$$

$$\rightarrow\infty$$

平衡状态 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{0}$ 是大范围渐近稳定的。

数字仿真研究

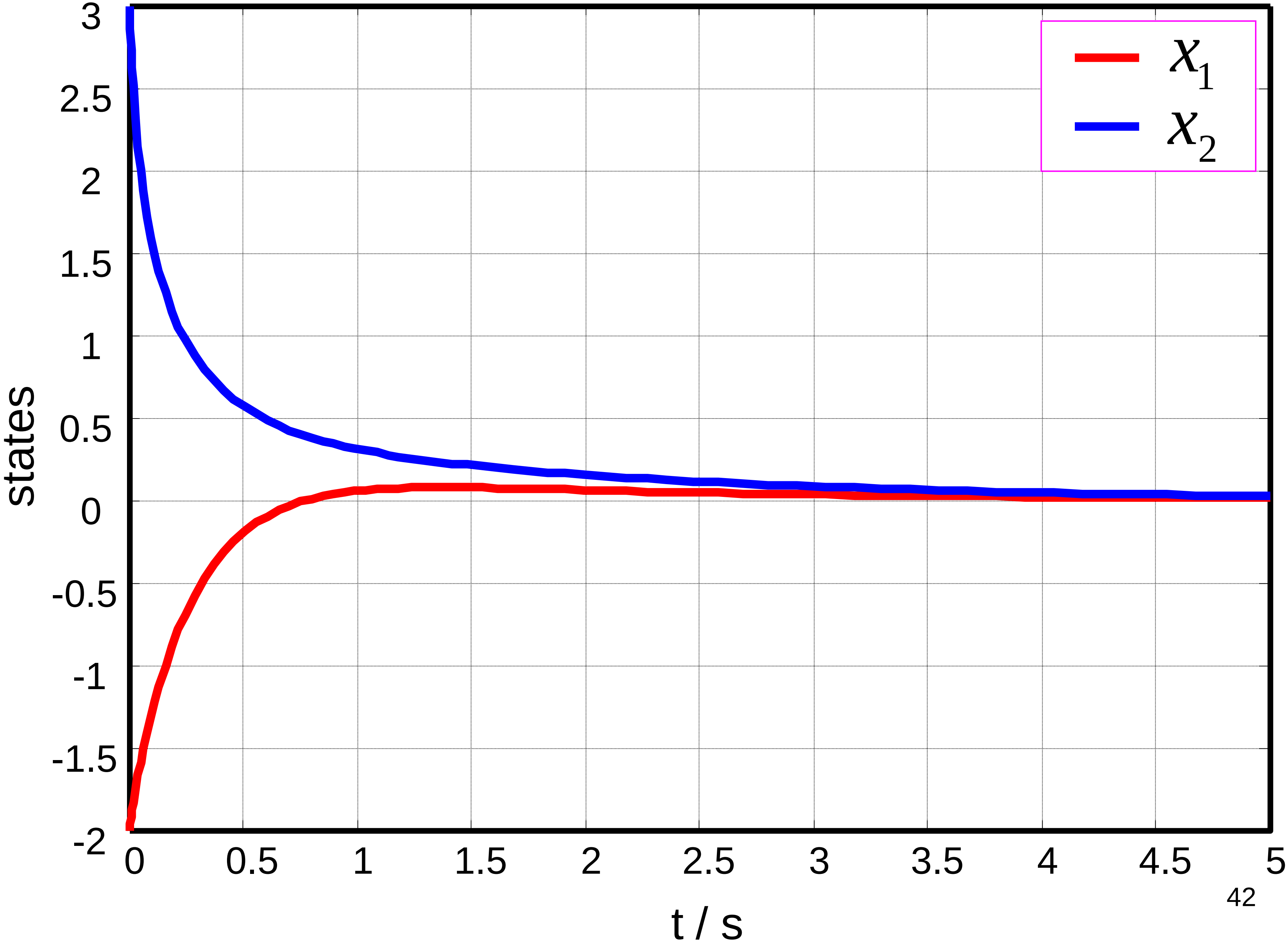
针对原非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

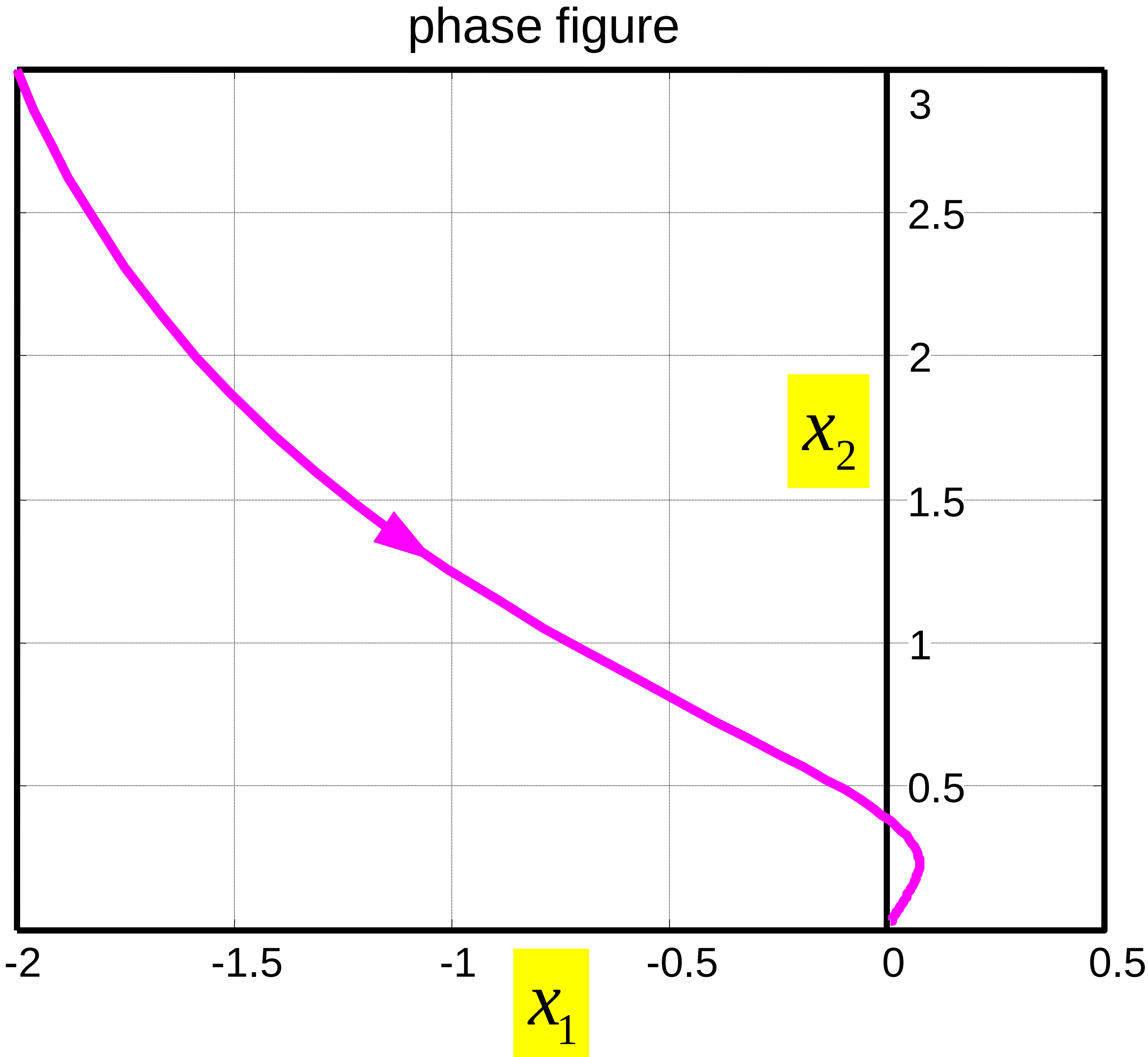
任意给定初始状态

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

仿真结果如下图所示：



x_1
x_2
states
t / s
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5


phase figure
3
2.5
2
1.5
1
0.5
x_2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
x_1