第4章 控制系统的设计约束（2）

——2019年春季学期

授课教师： 马 杰 （控制与仿真中心）

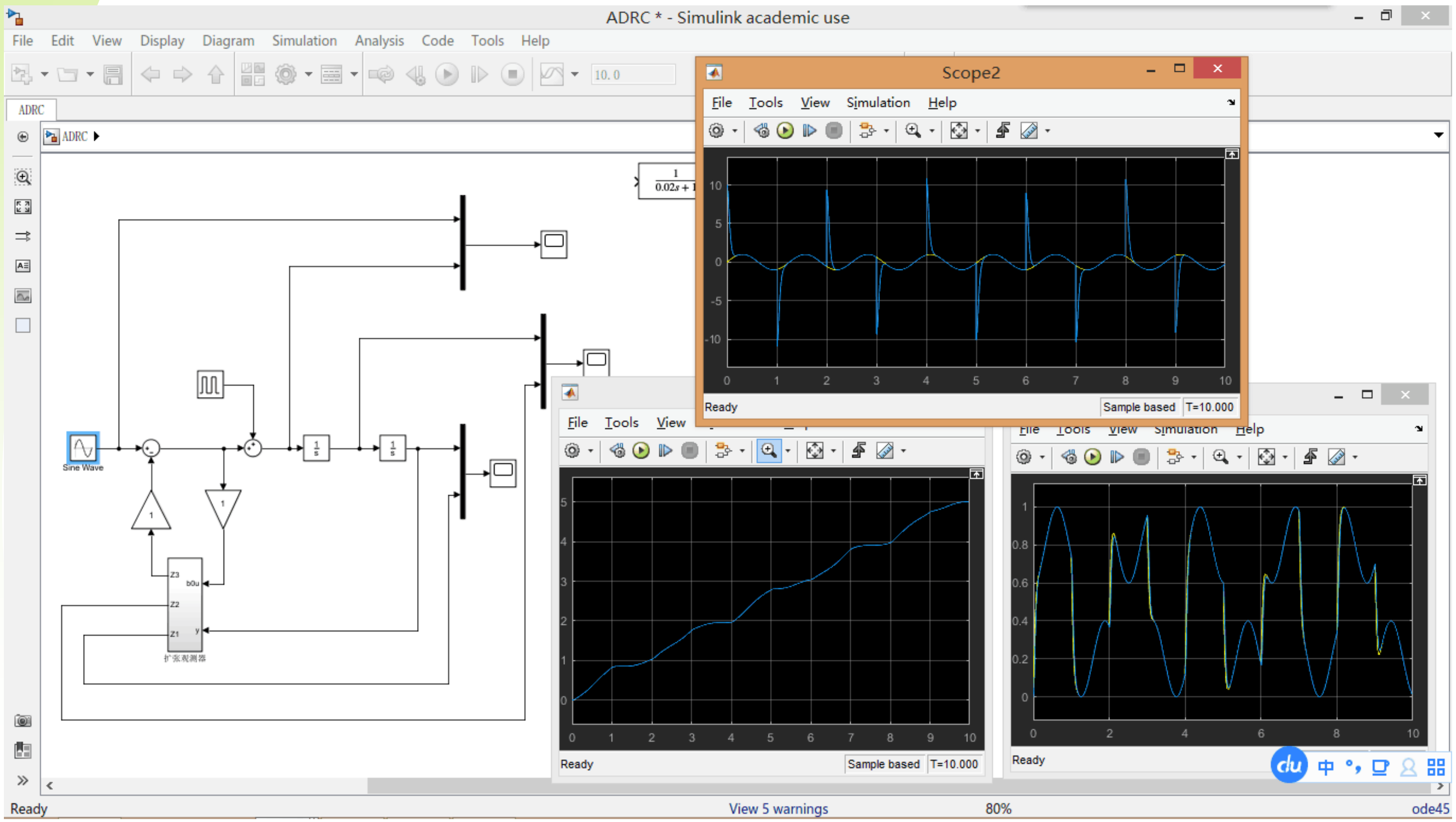
罗 晶 （控制科学与工程系）

马克茂（控制与仿真中心）

陈松林（控制与仿真中心）

作业展示

当你还在为设计干扰观测器发愁时，有人已经设计出了ADRC

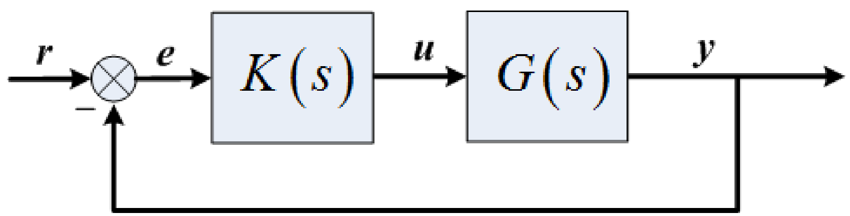


我们不应该做一个对象，而应该成为一个系统

上一节内容回顾

灵敏度概念

灵敏度是反馈控制系统的一个重要性能指标。系统灵敏度定义为：系统传递函数的变化率与对象传递函数的变化率之比。



$$T(s)=\frac{KG}{1+KG}$$

$$S=\frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta G(s)/G(s)}=\frac{\mathrm{d}T(s)/T(s)}{\mathrm{d}G(s)/G(s)}=\frac{\mathrm{d}\ln T(s)}{\mathrm{d}\ln G(s)}=\frac{1}{1+KG}$$

系统灵敏度是当变化量为**微小的增量**时，系统传递函数的变化率与对象传递函数的**变化率之比（相对变化量之比）**

知识回顾

灵敏度分析

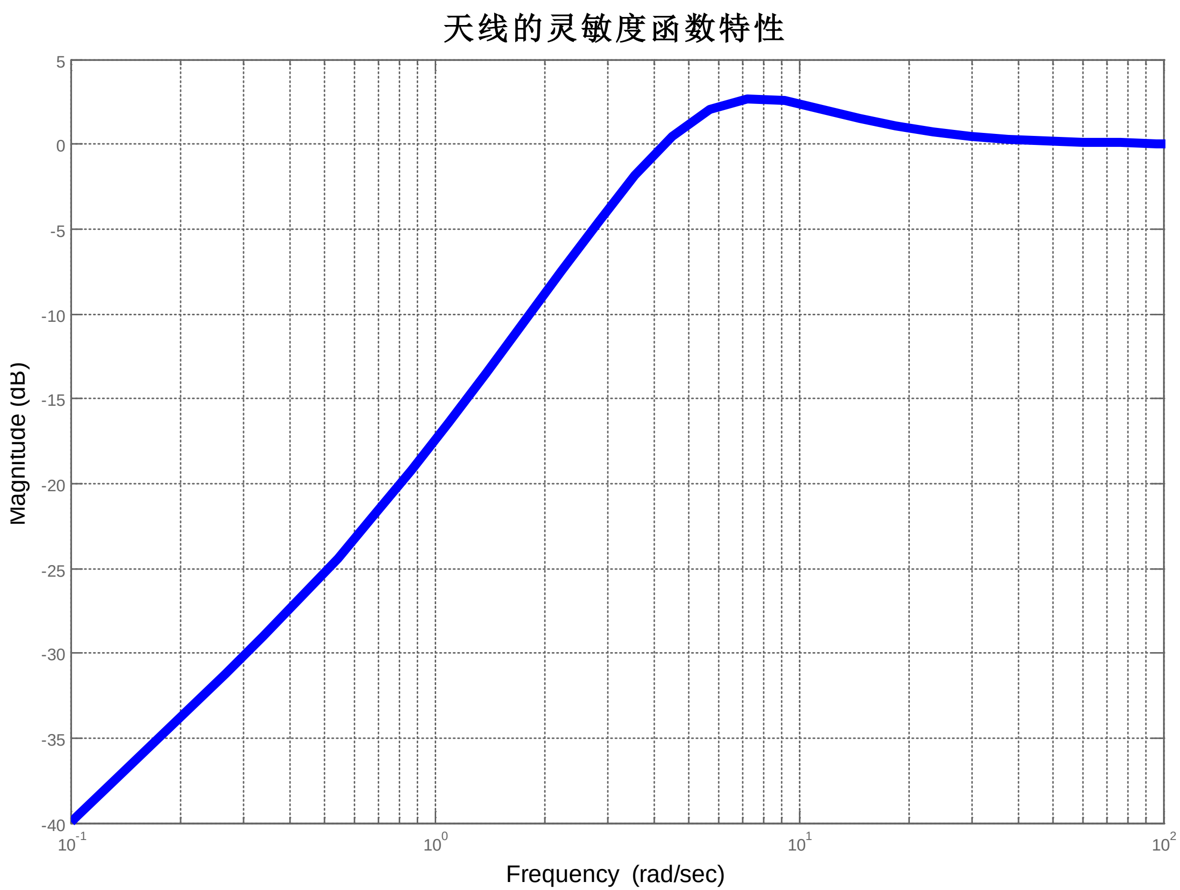
四种情况	可变参数	灵敏度
开环系统	被控对象$G(s)$	$S_G^T=1$
单位反馈闭环系统	被控对象$G(s)$	$S_G^T=\dfrac{1}{1+GC}$
非单位反馈闭环系统	被控对象$G(s)$	$S_G^T=\dfrac{1}{1+CGH}$
非单位反馈闭环系统	反馈环节$H(s)$	$S_H^T=\dfrac{-CGH}{1+CGH}$

知识回顾

灵敏度函数也是传递函数

$$S = \frac{1}{1+P_0C} = \frac{0.1s^3+1.1s^2+1.1}{0.1s^3+1.1s^2+6s+10}$$

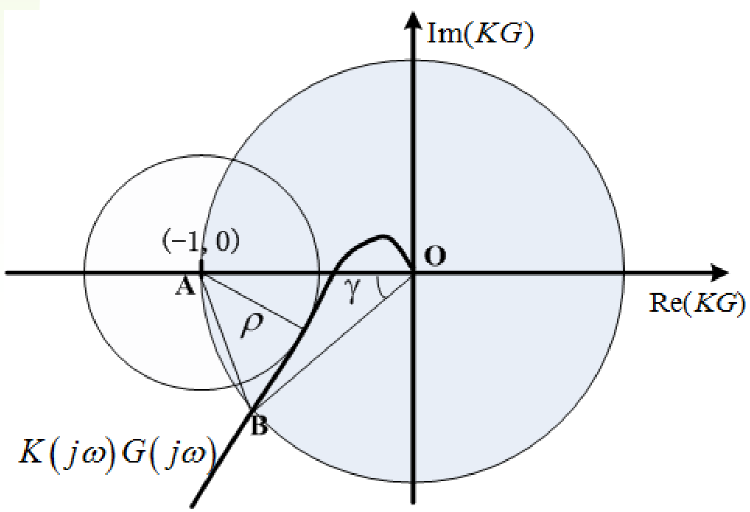
$$S(j\omega)$$



上一节内容回顾

灵敏度函数的特征

- 灵敏度函数表征了闭环系统关于被控对象变化的**鲁棒性**。
- Nyquist曲线中，*KG*距离（-1，*j*0）点的**最小距离** ρ 与灵敏度函数的**最大值**S_{max}互为倒数。
- 灵敏度函数与相位裕度的关系（γ只能给出ρ的上界）

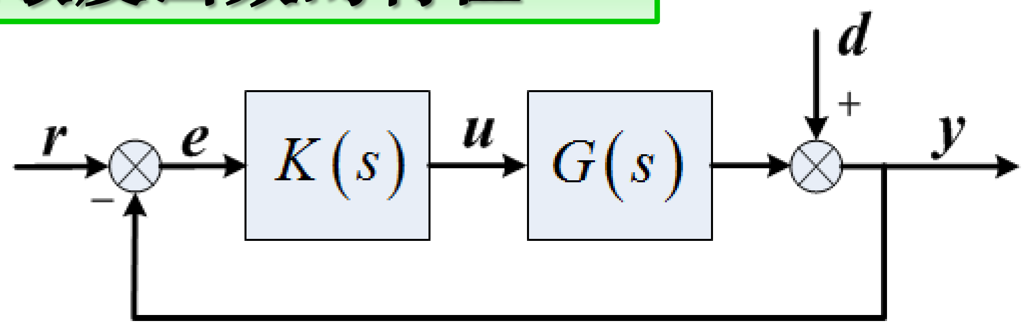


$$\frac{1}{S_{max}} = \rho \le 2\left|\sin\frac{\gamma}{2}\right|$$

上一节内容回顾

灵敏度函数的特征

$$S=\frac{1}{1+KG}$$



➢ 灵敏度函数与扰动传递函数的关系

$$\frac{Y(s)}{D(s)}=\frac{1}{1+KG}$$

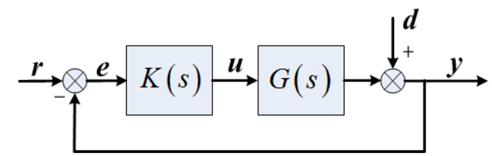
➢ 灵敏度函数与误差传递函数的关系

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+KG}$$

设计时，要尽量压低灵敏度

上一节内容回顾

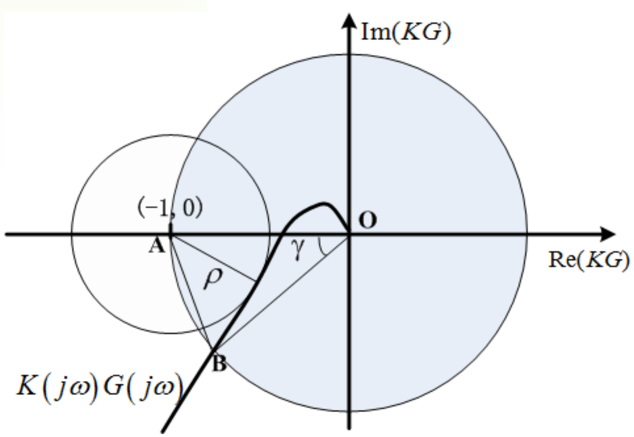
Bode积分定理

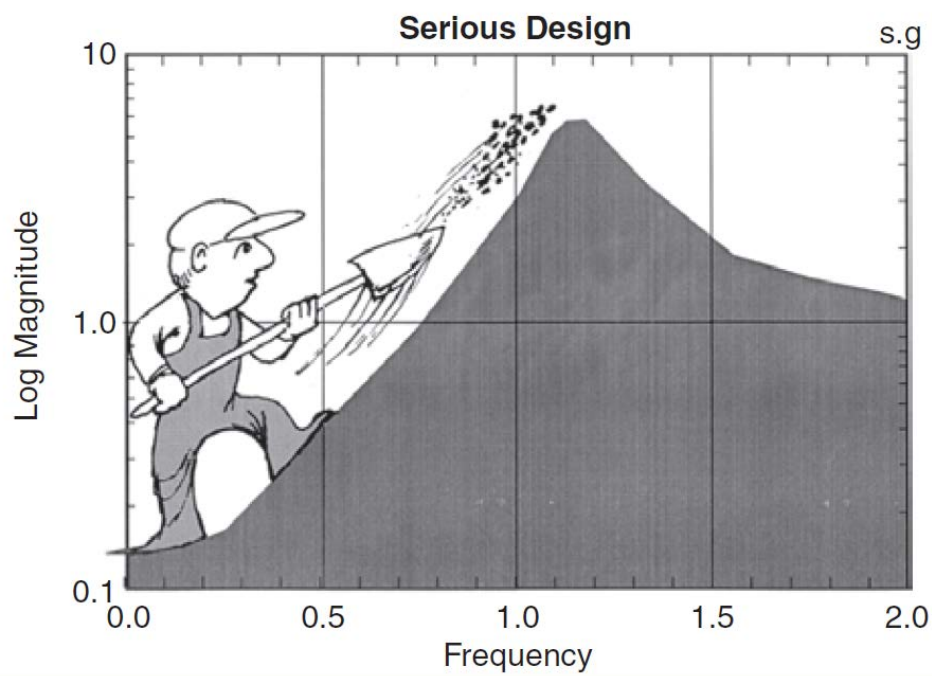


- 一个给定系统的灵敏度函数满足如下关系式

$$\int_0^{\infty} \ln\left|S(j\omega)\right| d\omega = 0, \quad v > 1$$

$$S = \frac{1}{1+KG}$$





由于面积是固定的，所以线性控制系统的灵敏度函数在整个频段上是不能任意设计，处理不当，可能导致S_{max}过大（ρ过小）

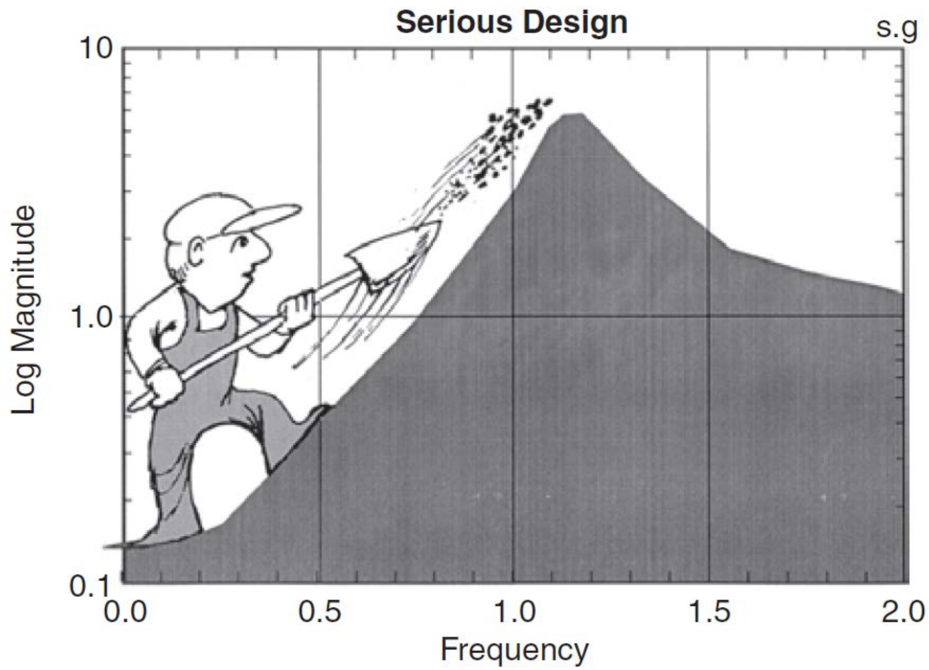
上一节内容回顾

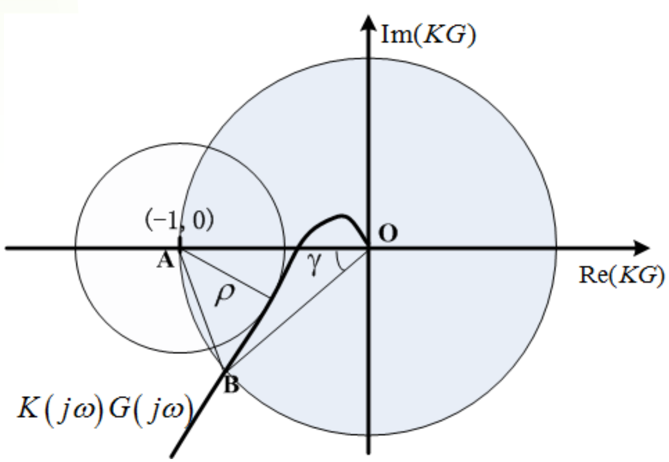
Bode积分定理

$$S=\frac{1}{1+KG}$$

- 下面几条不能同时做到

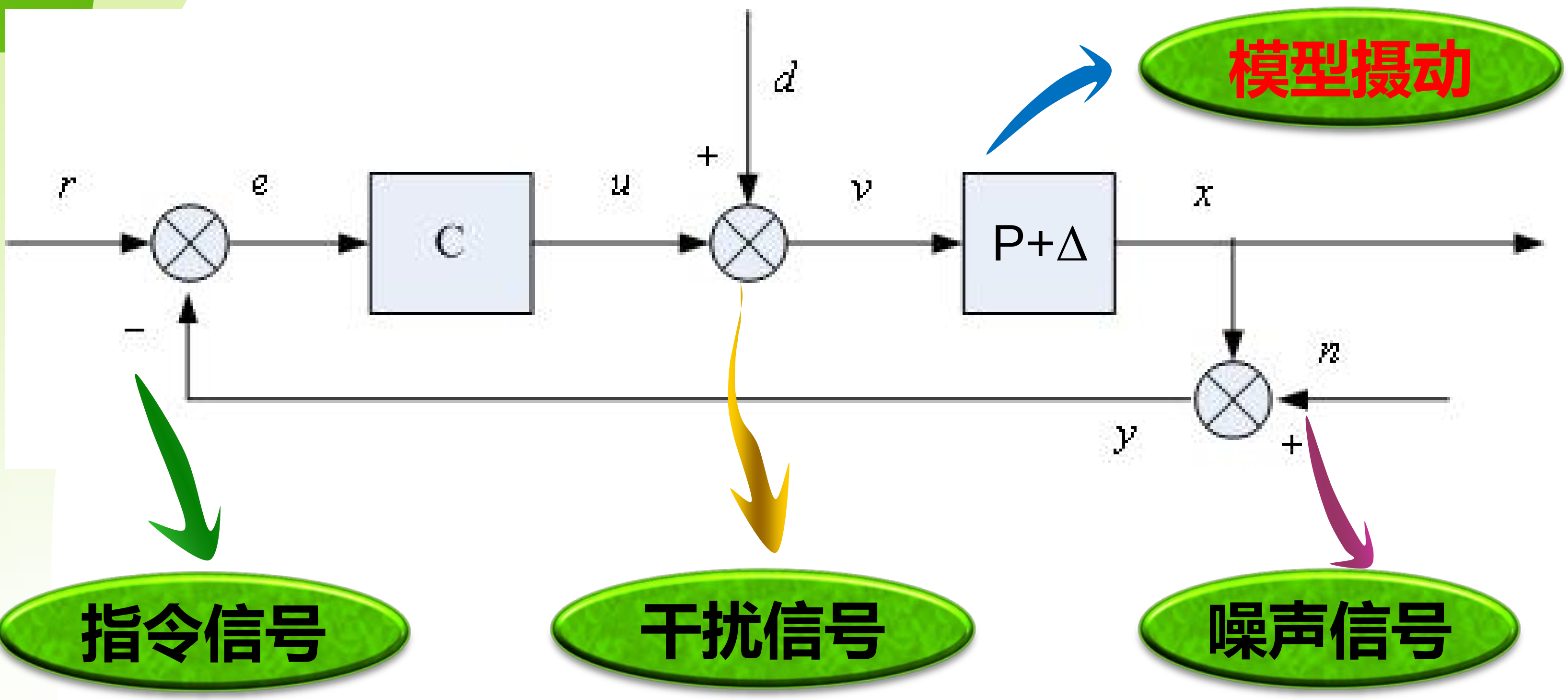
- 对高低频的模型摄动都不敏感
- 对任何频谱的扰动都能很好抑制
- 对任何频率的指令都能很好跟踪
- 总能把S_{max}设计的更小，保证ρ更大





$$\int_0^{\infty}\ln\left|S(j\omega)\right|d\omega=-\gamma\frac{\pi}{2}+\pi\sum_{i=1}^{N}\mathrm{Re}(p_i),\quad v=1$$

输入条件分析内容



$$G_{xr}=\frac{PC}{1+PC}\qquad G_{xd}=\frac{P}{1+PC}\qquad G_{xn}=\frac{-PC}{1+PC}$$

学习目标

本节课需要掌握的内容

- 理解不确定性这一概念，知道不确定性的来源；
- 掌握不确定性的描述方法和转换关系；
- 了解一些不确定性界的求取方法；
- 掌握鲁棒稳定性定理会给控制设计带来的什么约束。

本节课主要内容

A1 灵敏度和Bode积分约束

A2 对象的不确定性和鲁棒稳定性约束

A3 设计约束

4.2　对象的不确定性和鲁棒稳定性约束

4.2.1　对象的不确定性

4.2.2　鲁棒稳定性约束

4.2 对象的不确定性和鲁棒稳定性约束

本首先考虑如下问题

- 不确定性产生的原因是什么？
- 如何描述不确定性？
- 如何判定含有不确定性系统的稳定性？
- 鲁棒稳定对控制系统设计的约束是什么？

4.2.1 对象的不确定性

问题一：不确定性的产生原因

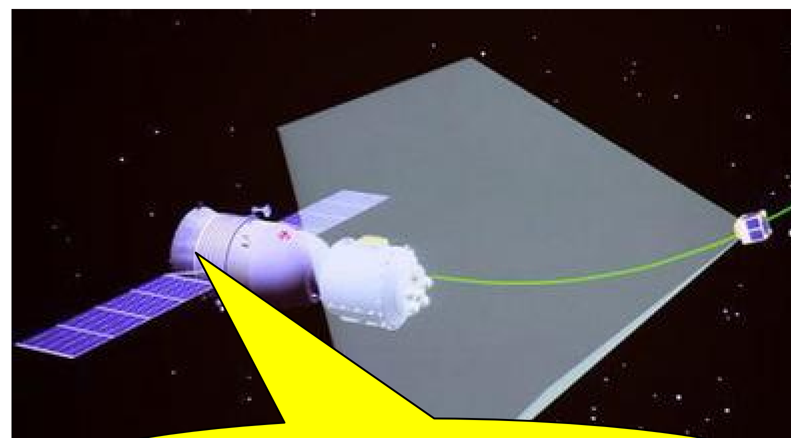
对象的不确定性——负载变化（模型参数变化）

教科书

实际

被控对象：一个传递函数

被控对象：一组传递函数



载荷变化引起模型不确定性

4.2.1 对象的不确定性

问题一：不确定性的产生原因

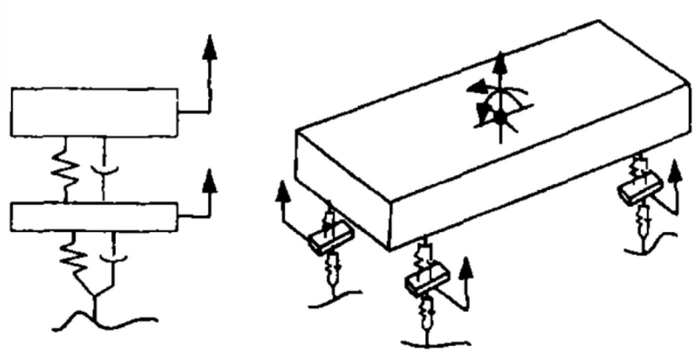
对象的不确定性——模型简化

教科书

被控对象：简化的传递函数
忽略了未建模动态特性

实际

被控对象：复杂系统



4.2.1 对象的不确定性

问题一：不确定性的产生原因

对象的不确定性——个本差异

教科书

实际

被控对象：一个被控对象

被控对象：大批量对象

4.2.1 对象的不确定性

问题一：不确定性的产生原因

对象的不确定性——元器件老化

教科书

实际

被控对象：理想的设计参数值

被控对象：老旧部件导致模型参数变化

4.2.1 对象的不确定性

问题一：不确定性的产生原因

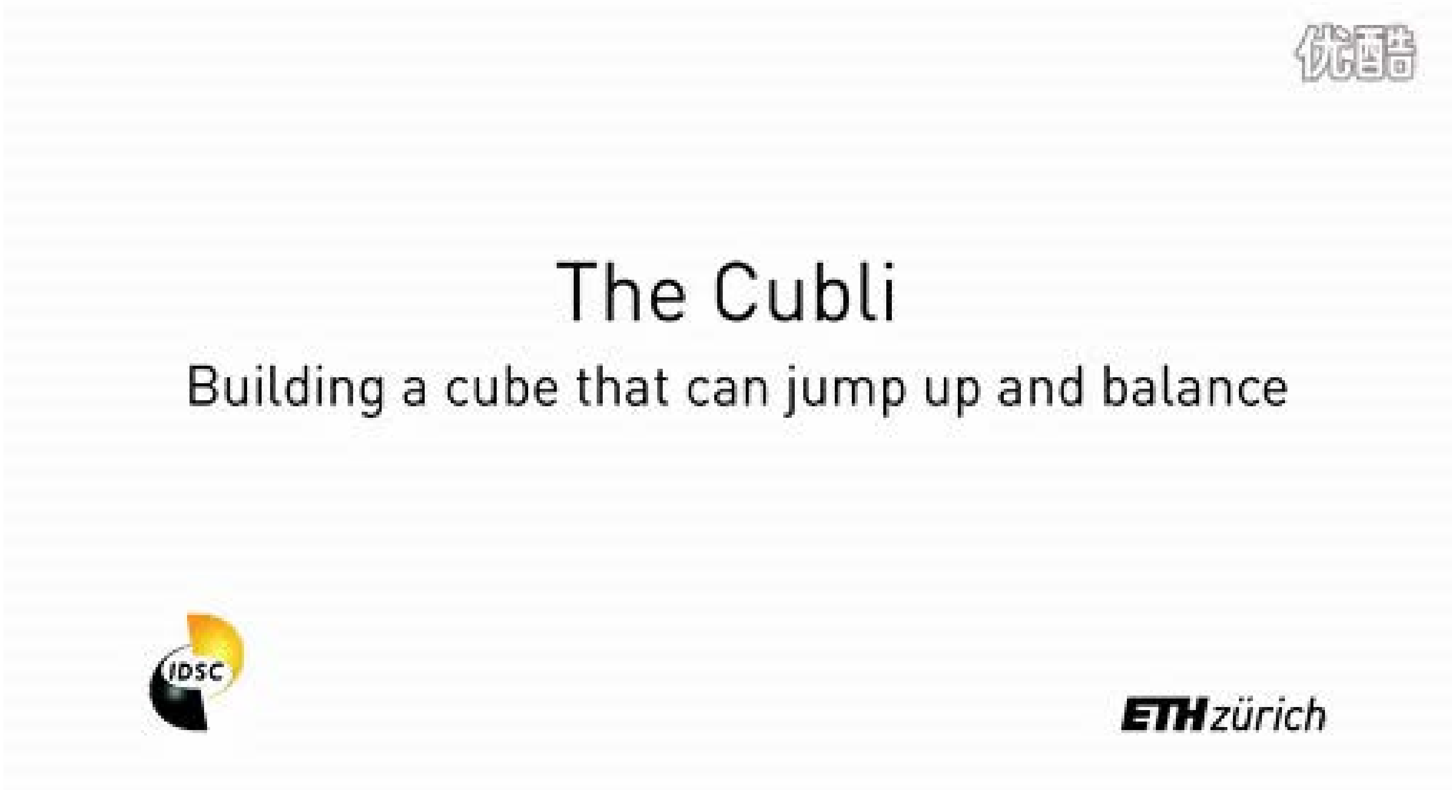
对象的不确定产生的原因:

- 系统中参数的变化（建的准，测不准，使用中有变化）；
- 高频的未建模动态（为了方便，认知度不够）；
- 模型的简化处理（为便于设计，进行了降阶、线性化）；
- 控制系统实现时引入（元件动态，延迟，采样离散化）

因此，不可能对系统精确建模，所建立的对象模型只能是实际物理系统的近似表示。

4.2.1　对象的不确定性

是否可以采用一个确定的控制器，使一组被控对象稳定并具有良好的控制性能?



问题二：对象不确定性的描述

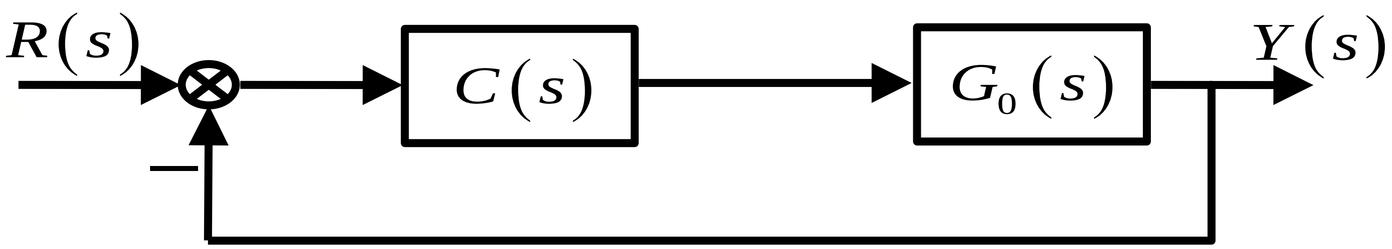
对象的不确定性是指设计计所用的数学模型与实际的物理系统之间的差别。

$$\Delta G(s) = G(s) - G_0(s)$$

4.2.1 对象的不确定性

问题二：对象不确定性的描述

（1）标称模型：对控制系统的设计一般都基于控制对象的某一数学模型，如传递函数矩阵或状态空间表达式，并要求这一模型的所有参数都是已知的，这个模型称为控制对象的标称模型。



问题二：对象不确定性的描述

（2）不确定性——不确定性存在于任何一个控制系统中，系统中的不确定性可以分为两类：

- 系统外部的不确定性，如干扰等；
- 系统内部的不确定性，如测量误差、参数估计误差及被控对象的未建模动态等。

问题二：对象不确定性的描述

如果不确定性可以理解成取自某一个集合，那么实际被控对象可以描述为一个系统集

$$\left(G_0, \Delta G\right)$$

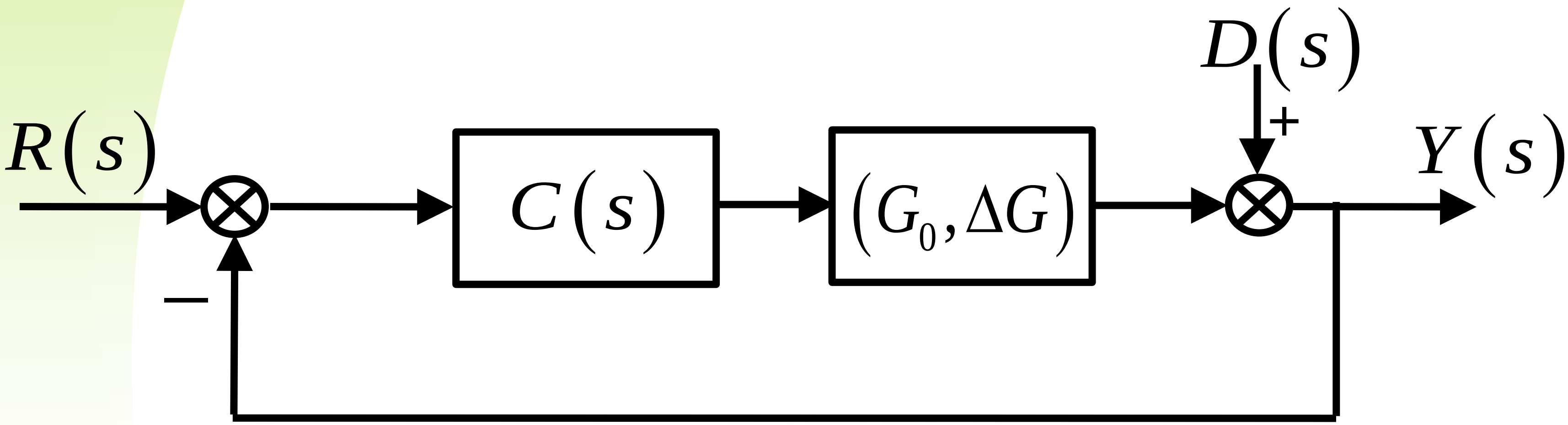
G_0——模型的精确已知部分，称为标称系统；

ΔG ——不确定因素所构成的某个可描述集；

G ——实际系统可以看做由标称系统G_0和不确定因素的集合ΔG的某个元素构成的。

4.2.1 对象的不确定性

问题二：对象不确定性的描述



含有不确定性的单回路控制系统

4.2.1　对象的不确定性

问题二：对象不确定性的描述

为了描述不确定性，我们需要了解不确定性的产生的原因，从而界定不确定性的取值范围，为后续的分析和设计奠定基础：

- 参数的估计值不准（根据估计误差确定参数范围）；
- 为简化设计而忽略一些动态特性（根据忽略掉的动特性来确定界函数）；
- 用线性化模型代替非线性模型（根据省略的高次项确定界函数）；
- 因元器件老化而导致的性能退化和参数值的改变等（估计老化带来的参数摄动范围）。

问题二：对象不确定性的描述

- 参数不确定性，如二阶系统：

$$G(s)=\frac{1}{s^2+as+1},a\in[a^-,a^+]$$

可以代表带阻尼的弹簧装置，*RLC*电路等。这种不确定性通常不会改变系统的结构和阶次。

- 结构（动态）不确定性

也称未建模动态 $\Delta(s)$，我们通常并不知道它的结构、阶次，但可以通过频响实验测出其幅值界限：

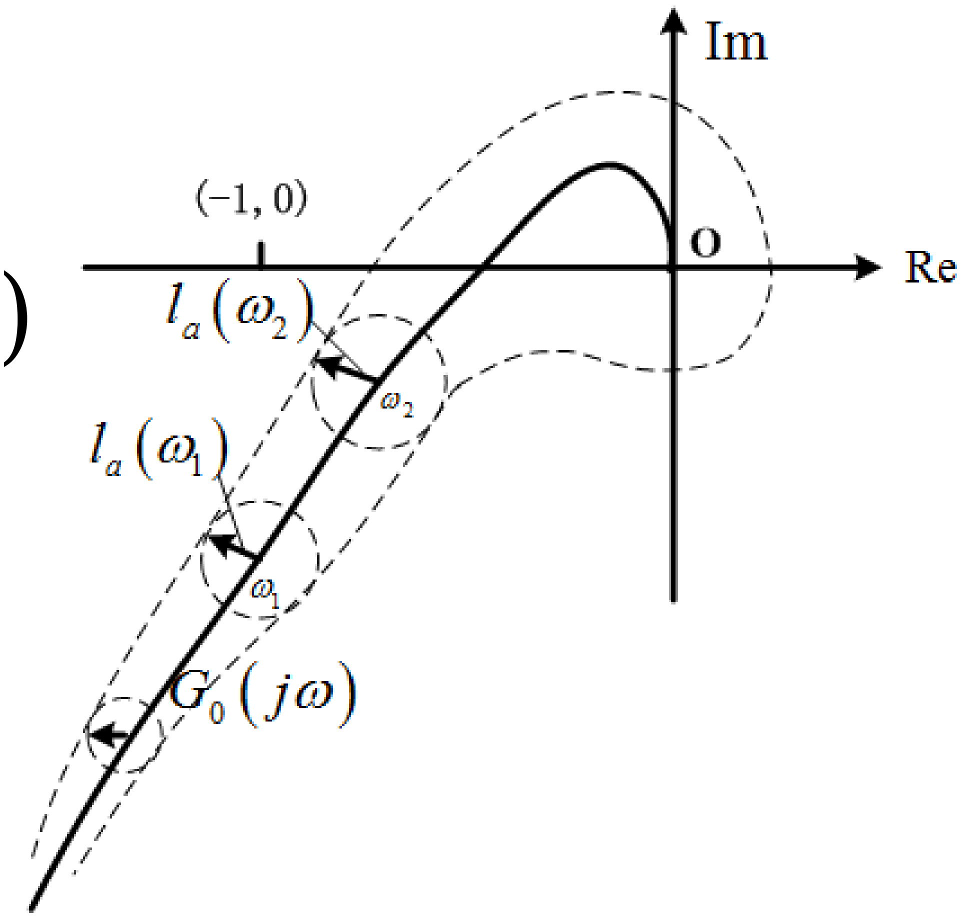
$$|\Delta(j\omega)|\le|W(j\omega)|,\forall\omega\in R,W(j\omega)\text{为确定函数}$$

对象不确定性的频域表示方法

（1）加性不确定性

$$G(j\omega)=G_0(j\omega)+\Delta G(j\omega)$$

$$\left|\Delta G(j\omega)\right|<l_a(\omega)$$



对象不确定性的频域表示方法

(2) 乘性不确定性

$$G(j\omega)=\left[1+L(j\omega)\right]G_0(j\omega)$$

$$\left|L(j\omega)\right|<l_m(\omega)$$

加性不确定性和乘性不确定性是可以相互转换的。

$$G(j\omega)=G_0(j\omega)+\Delta G(j\omega)$$

$$\Updownarrow$$

$$G(j\omega)=\left[1+L(j\omega)\right]G_0(j\omega)$$

$$L(j\omega)G_0(j\omega)=\Delta G(j\omega)$$

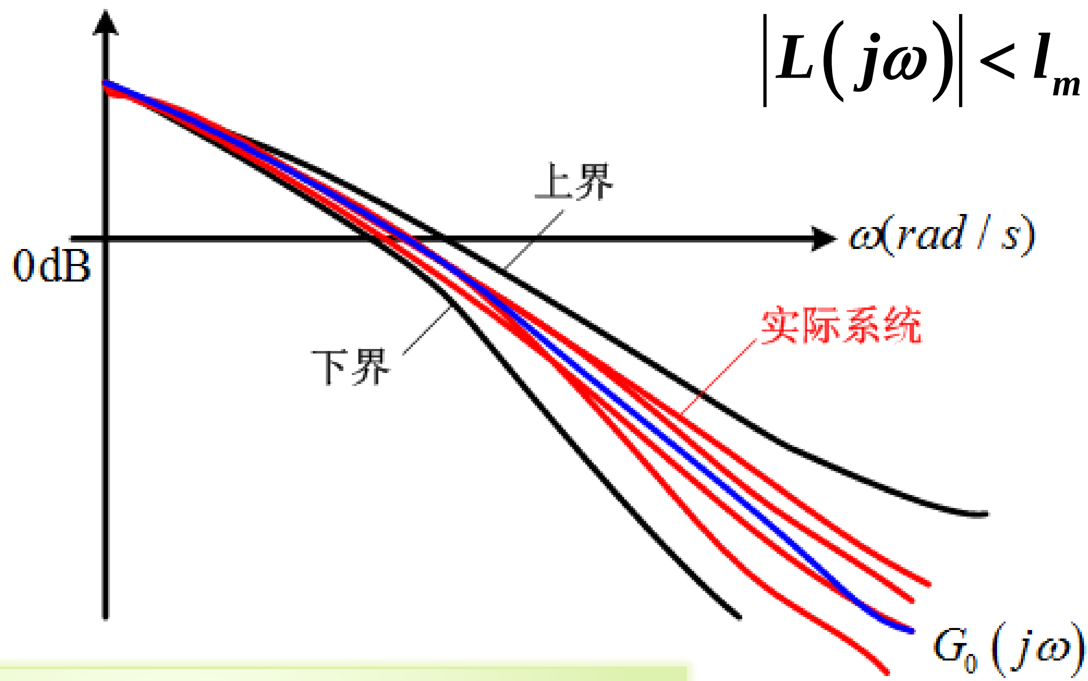
4.2.1 对象的不确定性

对象不确定性的频域表示方法

(2) 乘性不确定性

$$G(j\omega)=\left[1+L(j\omega)\right]G_0(j\omega)$$

$$\left|L(j\omega)\right|<l_m(\omega)$$



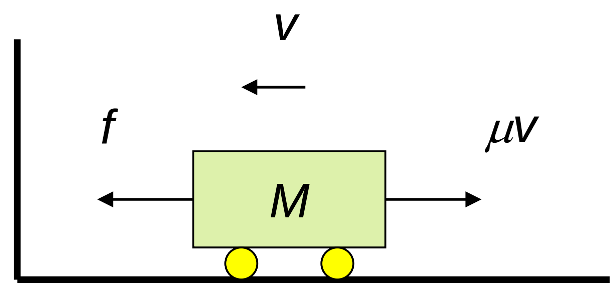
不确定性描述方法很重要（包括界函数），影响设计方便性和保守性

4.2.1 对象的不确定性

不确定性类型

例1：设汽车质量为M，路面摩擦系数为μ ，汽车的力学模型如图所示，运动方程为

$$M\frac{dv}{dt}+\mu v=f$$



如果考虑到汽车的质量M随车载负荷发生变化， 且μ也随路面状况不同而变化，则方程的系数就具有一定的不确定性，即，无法得到M和μ的精确值。假设M和μ的取值范围给定如下：

$$M_0-\delta_1\le M\le M_0+\delta_1$$

$$\mu_0-\delta_2\le\mu\le\mu_0+\delta_2,\quad \delta_i\text{为给定常数}$$

对象不确定性的频域表示方法

那么实际的被控对象就可以描述为

$$(M_0+\Delta M)\frac{dv}{dt}+(\mu_0+\Delta\mu)v=f,|\Delta M|\le\delta_1,|\Delta\mu|\le\delta_2$$

如果用 f 到 v 的传递函数来描述，则有

$$G(s)=\frac{1}{(M_0+\Delta M)s+\mu_0+\Delta\mu}=G_0(s)+\Delta(s)$$

其中 $G_0(s)=\frac{1}{M_0 s+\mu_0}$,

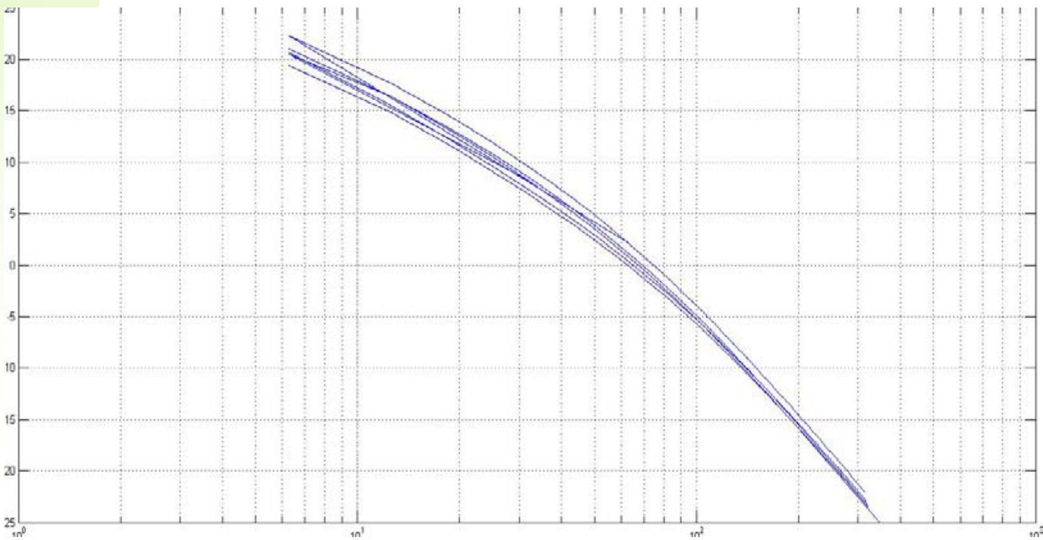
$$\Delta(s)=-\frac{\Delta M s+\Delta\mu}{(M_0 s+\mu_0)+[(M_0+\Delta M)s+(\mu_0+\Delta\mu)]}$$

可以找到适当的界函数 $W(j\omega)$,有 $|\Delta(j\omega)|\le|W(j\omega)|$

4.2.1 对象的不确定性

不确定性类型

例2：给定转台伺服系统存在一定的不确定性，主要由非线性因素引起，即输入和输出存在一定的非线性关系，不同正弦幅值信号作用下的扫频得到的幅频特性曲线如图所示



$$G(s)=\frac{K}{s(\tau_e s+1)(\tau_m+1)}$$

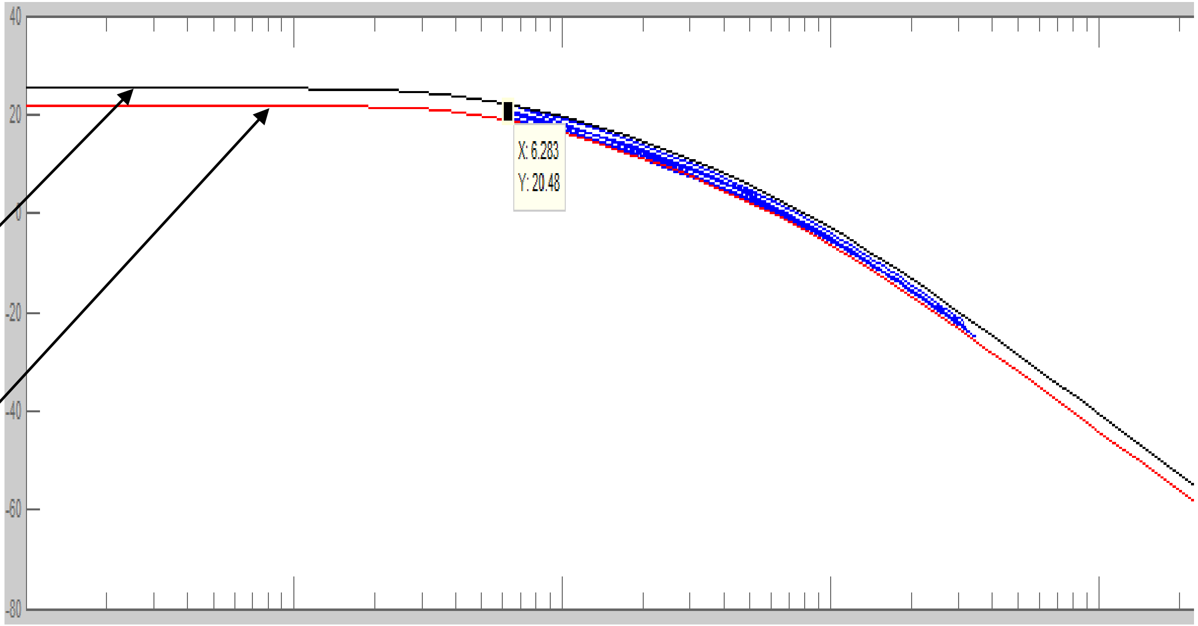
4.2.1 对象的不确定性

不确定性类型

例2：给定伺服系统存在一定的不确定性，主要是由非线性因素引起的。

$$G_{ul}(s)=\frac{18.5}{0.02s^2+0.175s+1}$$

$$G_{dl}(s)=\frac{12.5}{0.02s^2+0.175s+1}$$



找出能包住所有曲线上下界，并给出相应的传递函数

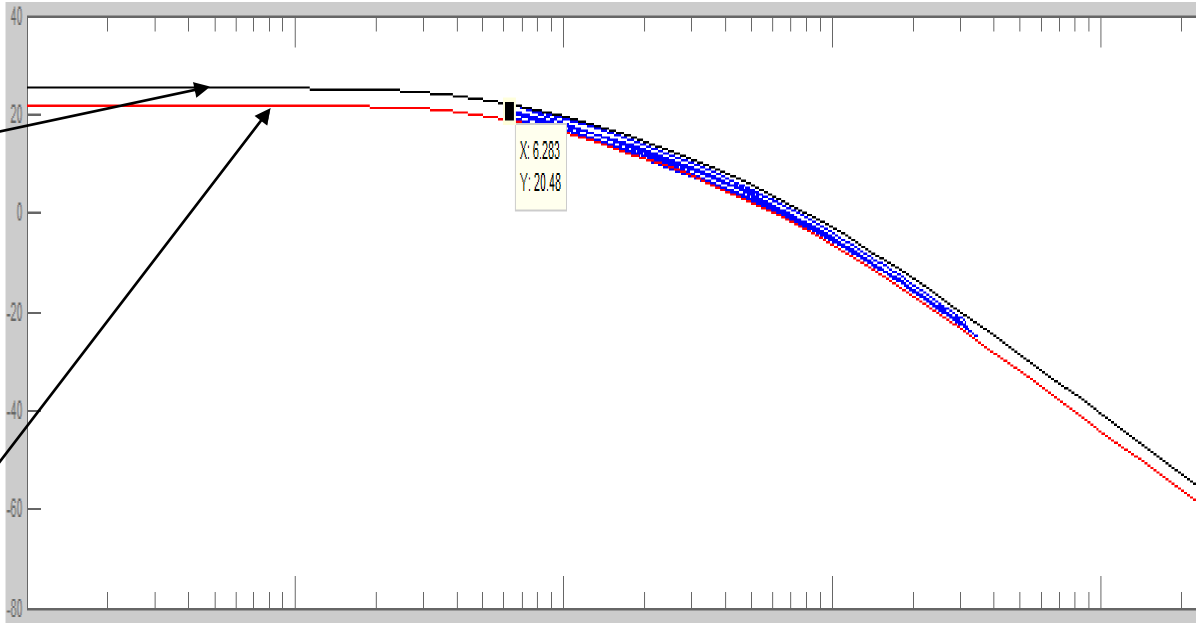
不确定性类型

例2：给定伺服系统存在一定的不确定性，主要是由非线性因素引起的。

$$G_{ul}(s)=\frac{12.5}{0.02s^2+0.175s+1}$$

$$G_0(s)=\frac{15.5}{0.02s^2+0.175s+1}$$

$$G_{dl}(s)=\frac{18.5}{0.02s^2+0.175s+1}$$



$$G(s)=G_0(s)+\Delta(s)$$

$$\Delta(s)=\frac{a}{0.02s^2+0.175s+1},a\in[-3,3]$$

对象不确定性的频域表示方法

例3：带有时间延迟的对象。

如何给出不确定性的界限?

$$G(j\omega)=\frac{e^{-\tau s}}{s+1}\qquad \tau\in[0,0.5]$$

$$G(j\omega)=[1+L(j\omega)]G_0(j\omega)$$

$$L(j\omega)=\frac{G(j\omega)}{G_0(j\omega)}-1$$

$$G_0(j\omega)=\frac{1}{s+1}$$

$$=e^{-\tau s}-1$$

$$=-0.5s+0.125s^2-0.02083s^3+\cdots+\frac{(-\tau)^k}{k!}s^k+\cdots$$

4.2.1 对象的不确定性

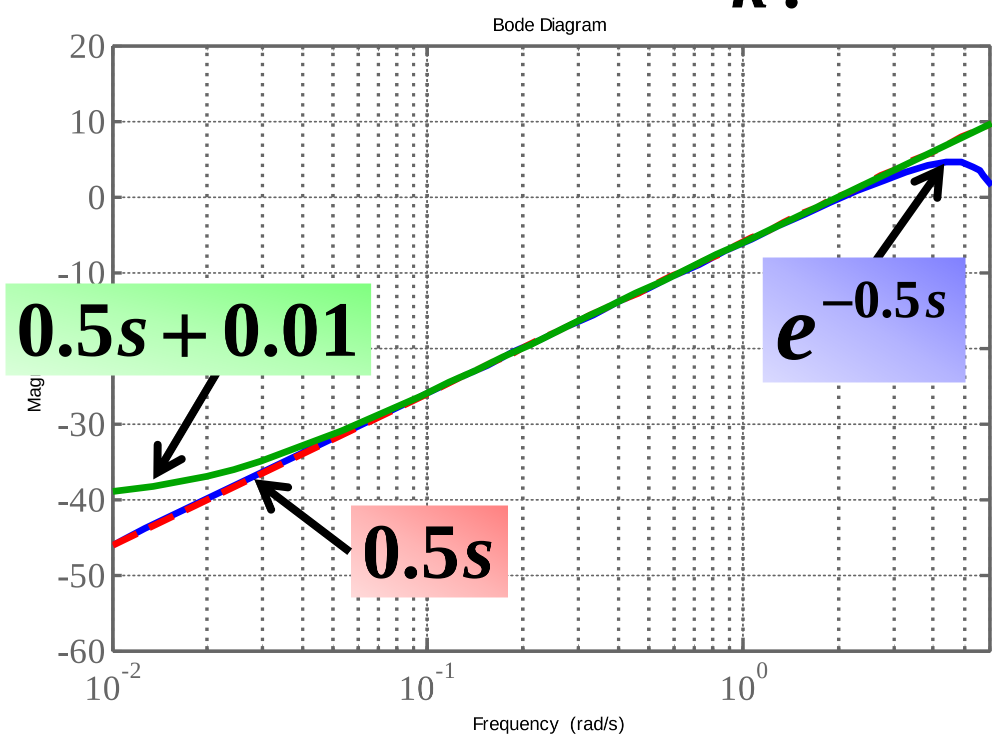
对象不确定性的频域表示方法

例3：带有时间延迟的对象。

$$L(j\omega)=-0.5s+0.125s^{2}-0.02083s^{3}+\cdots+\frac{(-\tau)^{k}}{k!}s^{k}+\cdots$$

$$\left|L(j\omega)\right|\le l_{m}(\omega)$$

$$l_{m}(\omega)=\left|0.5s\right|$$



不确定性的界函数随着角频率的增加，逐渐增大，并超过1。

问题三：控制系统鲁棒稳定性判定

鲁棒性：

如果一个控制系统对系统中的不确定性不敏感，则称该系统是鲁棒的。

Robustness——

控制系统的健壮性

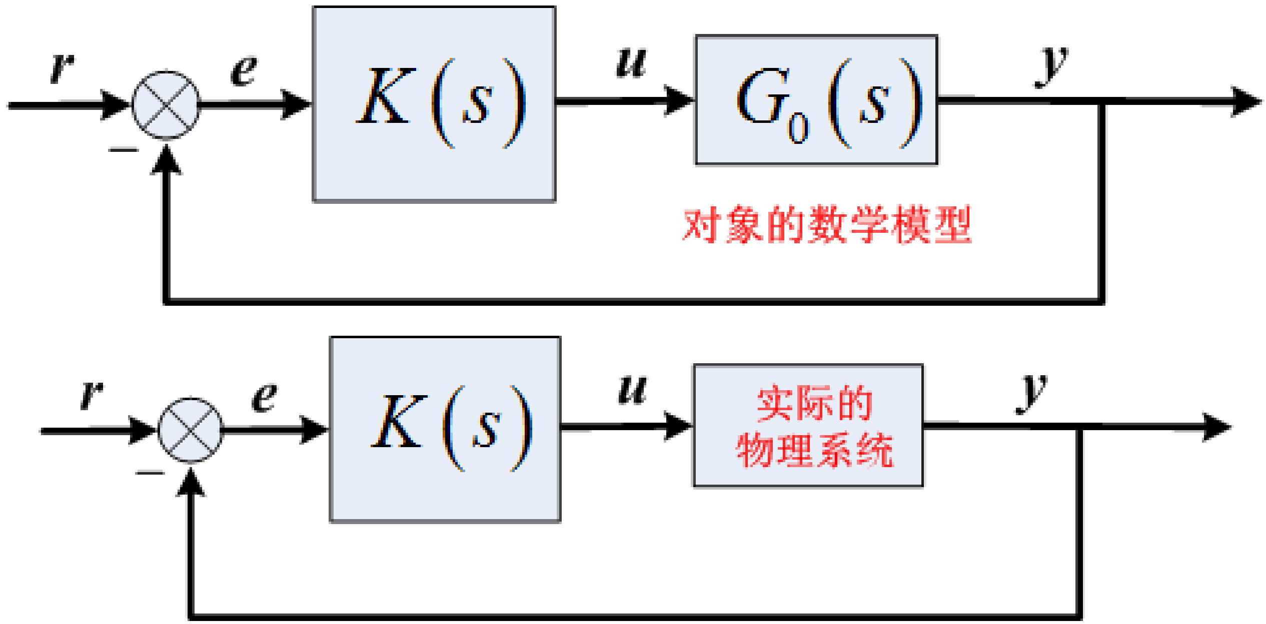
问题三：控制系统鲁棒稳定性判定

如果模型的不精确或模型的变化后，系统仍然保持稳定，这个性能称为**鲁棒稳定性**。

如果模型的变化或模型的不精确所造成的系统性能的改变是可以接受的，则称这样的系统为**鲁棒系统**。

问题三：控制系统鲁棒稳定性判定

已知对象摄动的界函数 l_m，K 和 G_0满足什么条件，系统是鲁棒稳定的?



由于数学模型不可能将对象的各种系统的动态关系都描述出来，所以从控制系统设计及实践来说，控制系统设计需要考虑模型不确定性带来的鲁棒稳定性问题。

问题三：控制系统鲁棒稳定性判定

Nyquist稳定性判据（开环稳定系统）：当开环传递函数$L(s)$在 s 右半平面内没有极点时（P=0），**闭环反馈控制系统稳定的充要条件**是：L(s) 平面上的映射围线 Γ_L 不包围 (-1,j0) 点（N=0）。

（$N=P-Z \rightarrow Z=0$）

Nyquist稳定性判据（$P \neq 0$）:**闭环反馈控制系统稳定的充要条件**是：开环传递函数 $L(s)$ 平面上的映射围线 Γ_L 沿逆时针方向包围 (-1,j0) 点的周数等于 $L(s)$ 在 s 右半平面内极点的个数。（N=P）。

（$N=P-Z \rightarrow Z=0$ ）

4.2.2 鲁棒性约束

鲁棒稳定性条件—代数法

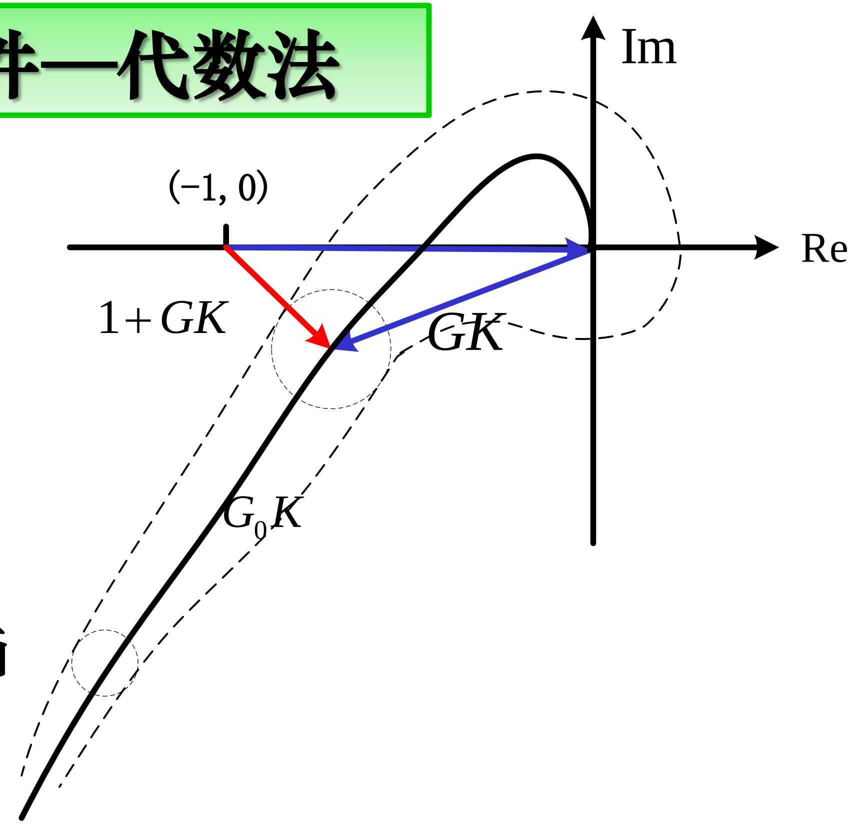
设名义系统是稳定的，即开环传递函数

$$G_0(j\omega)K(j\omega)$$

包围（-1，j0）点的次数满足Nyquist判据条件。

当对象有不确定性时，若实际开环传函

$$G(j\omega)K(j\omega)$$



包围（-1，j0）点的次数不变，即 $G_0(j\omega)$ 连续过渡到 $G(j\omega)$ 时，

$$\left|1+G(j\omega)K(j\omega)\right|$$

能保持不为零，即 $\left|1+G(j\omega)K(j\omega)\right|>0$，则系统仍能保持稳定。

鲁棒稳定性条件——代数法

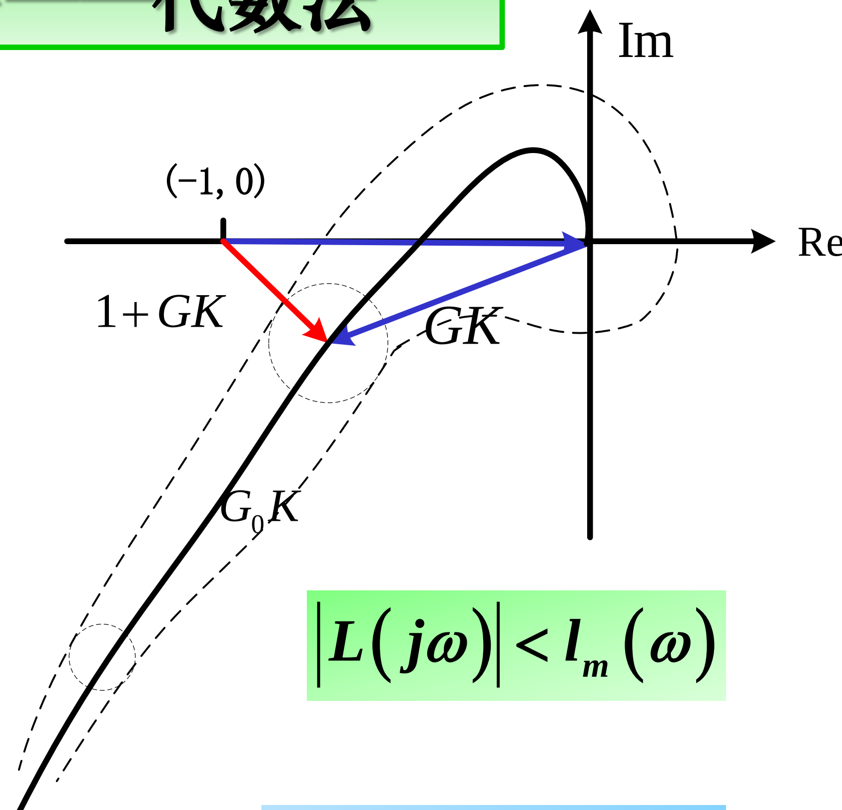
$$\left|1+G(j\omega)K(j\omega)\right|>0$$

$$\left|1+\left(1+\varepsilon L(j\omega)\right)G_0K\right|>0 \quad |\varepsilon|\le 1$$

$$\left|1+G_0K+\varepsilon L(\omega)G_0K\right|>0$$

$$\left|1+\frac{\varepsilon L(\omega)G_0K}{1+G_0K}\right|>0$$

$$\left|1+\frac{\varepsilon L(\omega)G_0K}{1+G_0K}\right|\ge 1-l_m\left|\frac{G_0K}{1+G_0K}\right|>0$$



$$\left|L(j\omega)\right|<l_m(\omega)$$

$$\left|\frac{G_0K}{1+G_0K}\right|<\frac{1}{l_m}$$

4.2.2　鲁棒稳定性约束

鲁棒稳定性条件——图示法

以乘性摄动为例，

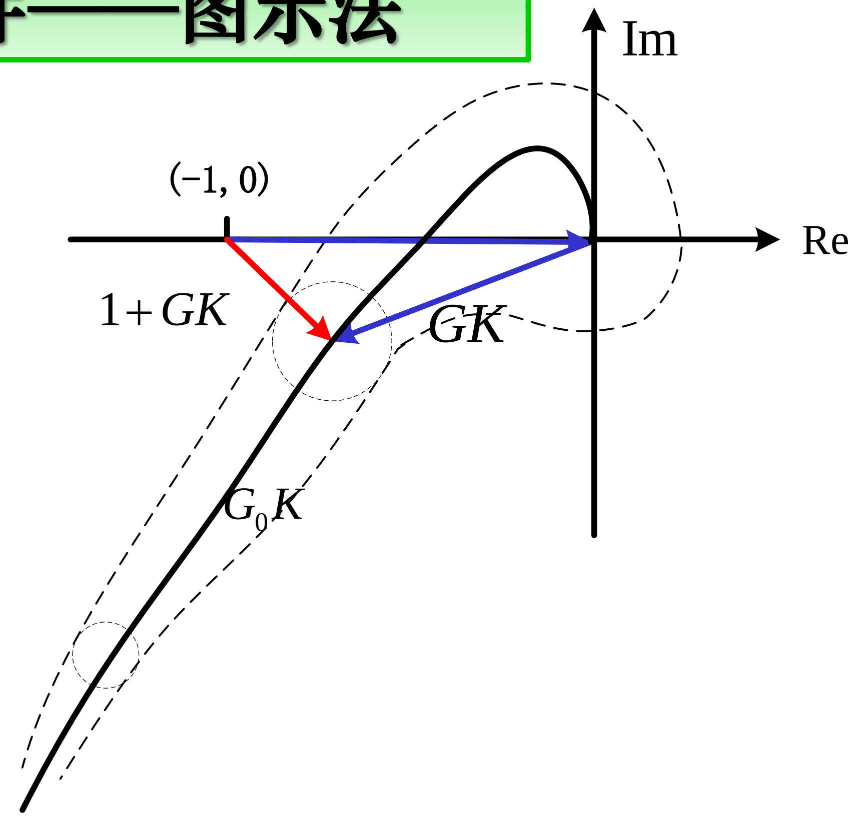
$$G(j\omega)K(j\omega)=(1+\Delta_G)G_0K$$
$$=G_0K+\Delta_G G_0K$$

$$|\Delta_G|\le l_m,\forall\omega$$

-1到标称Nyqiuist曲线(圆盘圆心)的距离：

$$|1+G_0(j\omega)K(j\omega)|$$

圆盘半径 $|l_m(j\omega)G_0(j\omega)K(j\omega)|$



只要圆盘半径小于圆心到-1点的距离，则系统鲁棒稳定，于是

$$|l_m(j\omega)G_0(j\omega)K(j\omega)|<|1+G_0(j\omega)K(j\omega)|$$

4.2.2　鲁棒稳定性约束

鲁棒稳定性条件——图示法

鲁棒稳定的条件为：

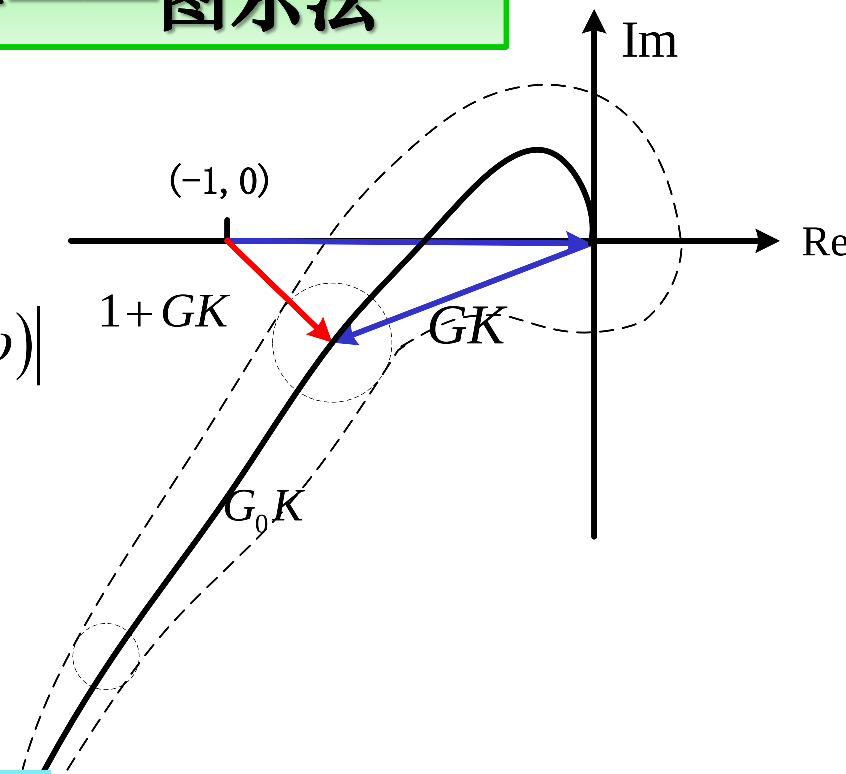
$$\left|l_m(j\omega)G_0(j\omega)K(j\omega)\right| < \left|1+G_0(j\omega)K(j\omega)\right|$$

$$\Downarrow$$

$$\left|l_m(j\omega)\frac{G_0(j\omega)K(j\omega)}{1+G_0(j\omega)K(j\omega)}\right| < 1$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\frac{G_0K}{1+G_0K}\right| < \frac{1}{l_m} \quad （乘性\square\square）$$

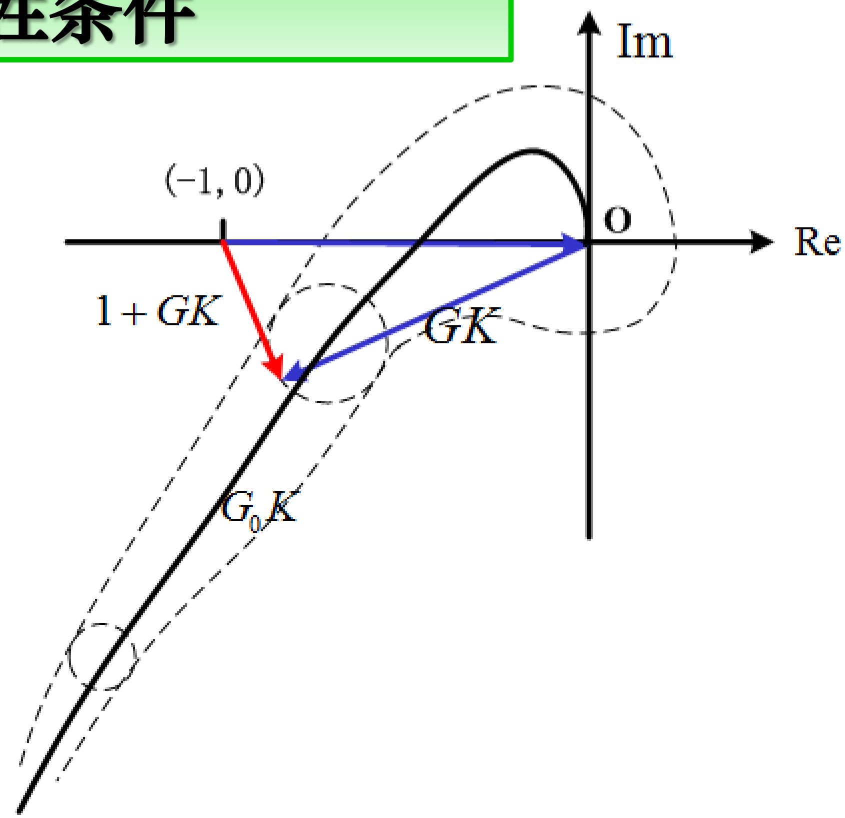


4.2.2 鲁棒稳定性约束

鲁棒稳定性条件

若不确定性为加性摄动，

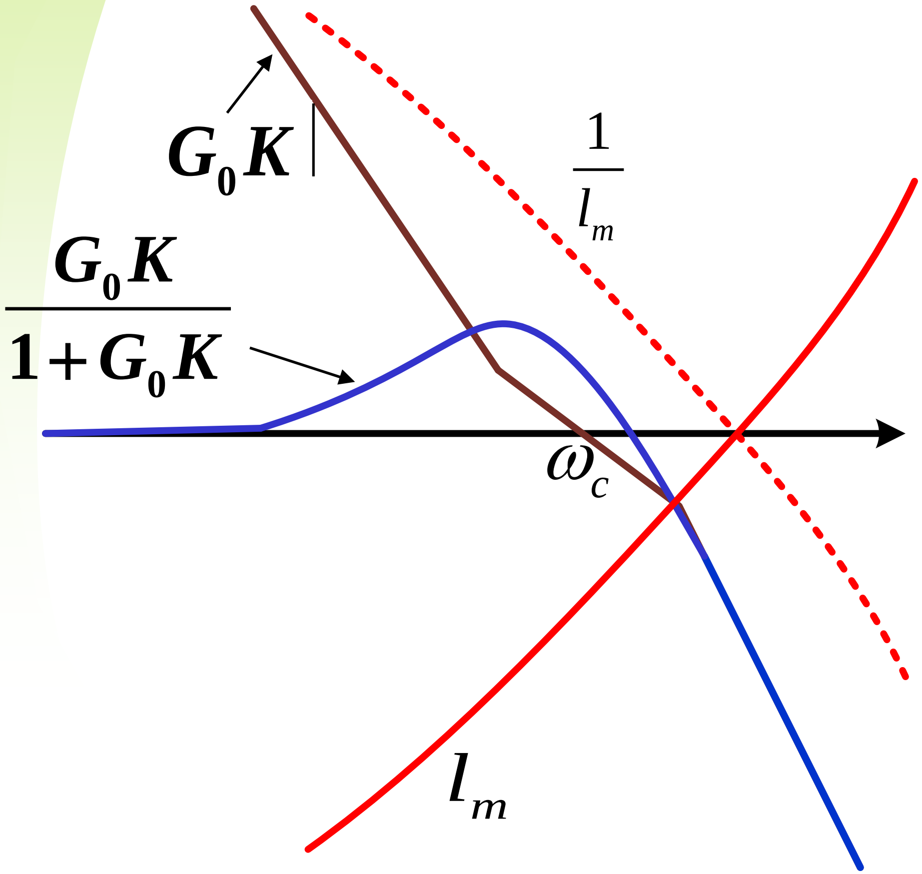
$$G(j\omega)=G_0(j\omega)+\Delta G(j\omega)$$



鲁棒稳定的条件为：

$$\left|\frac{K}{1+G_0K}\right|<\frac{1}{l_m}$$ （加性□□）

鲁棒稳定性条件



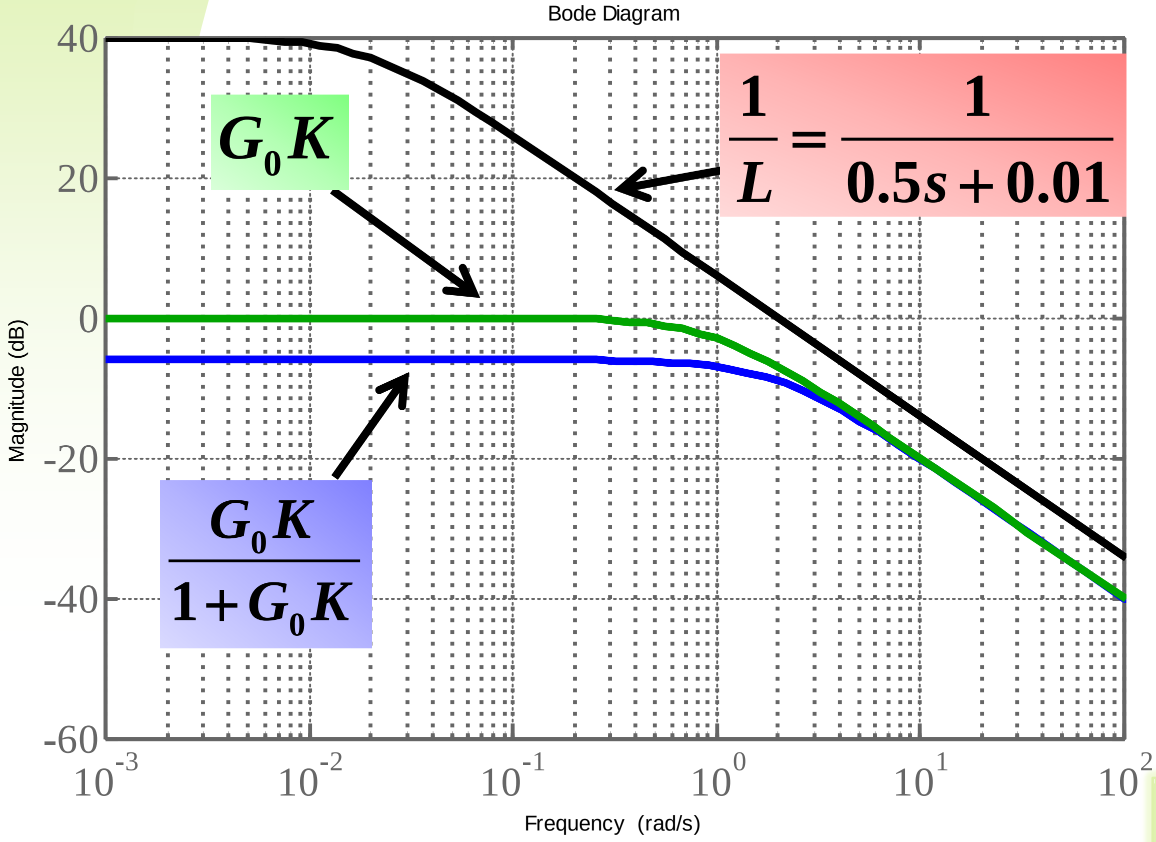
$$\left|\frac{G_0K}{1+G_0K}\right| < \frac{1}{l_m}$$

$$\frac{G_0K}{1+G_0K} \approx G_0K$$

$$\left|G_0K\right| < \frac{1}{l_m}$$

鲁棒稳定性条件

例1：带有时间延迟的控制系统鲁棒稳定性



$$G(j\omega)=\frac{e^{-\tau s}}{s+1}$$

$$G_0(j\omega)=\frac{1}{s+1}$$

$$K=1$$

$$\left|\frac{G_0K}{1+G_0K}\right|<\frac{1}{l_m}$$

满足鲁棒稳定性条件

鲁棒稳定性条件

例2：对给定系统的鲁棒稳定性进行判定

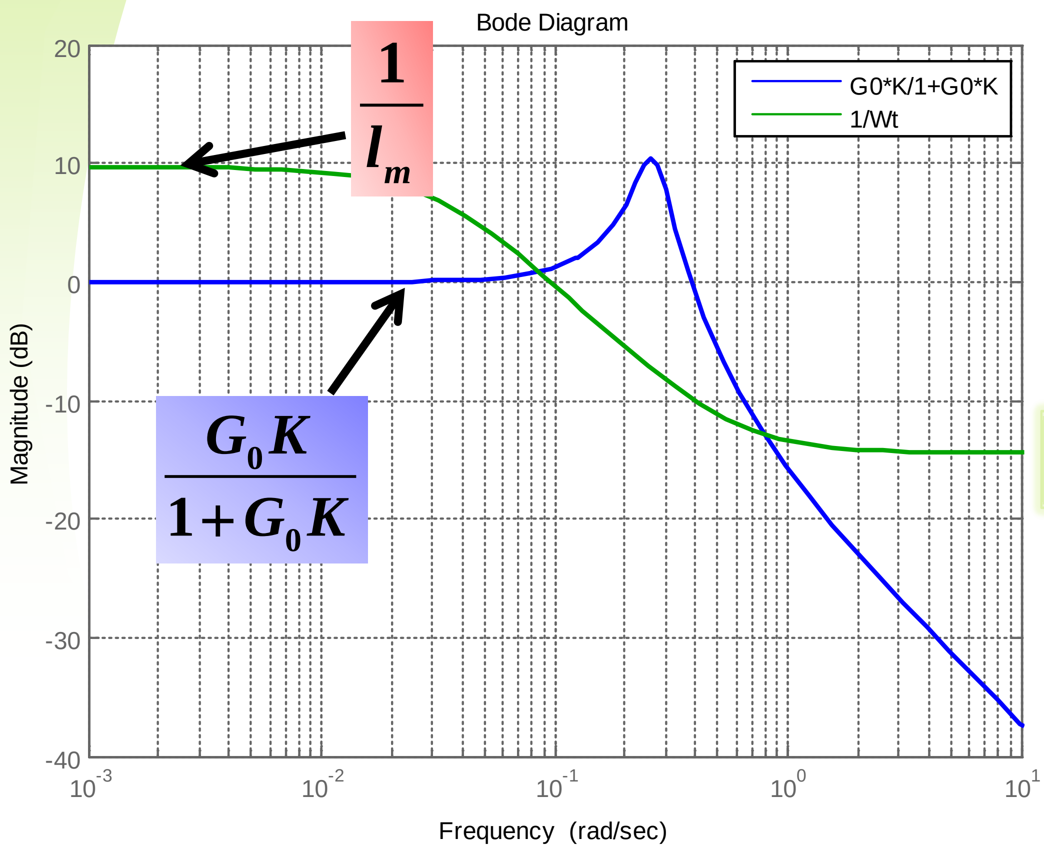
标称对象： $$G_0(s)=\frac{3(-2s+1)}{(5s+1)(10s+1)}$$

PI控制器： $$K(s)=1.13\frac{12.7s+1}{12.7s}$$

摄动界： $$l_m(s)=\frac{10s+0.33}{(10/5.25)s+1}$$

鲁棒稳定性条件

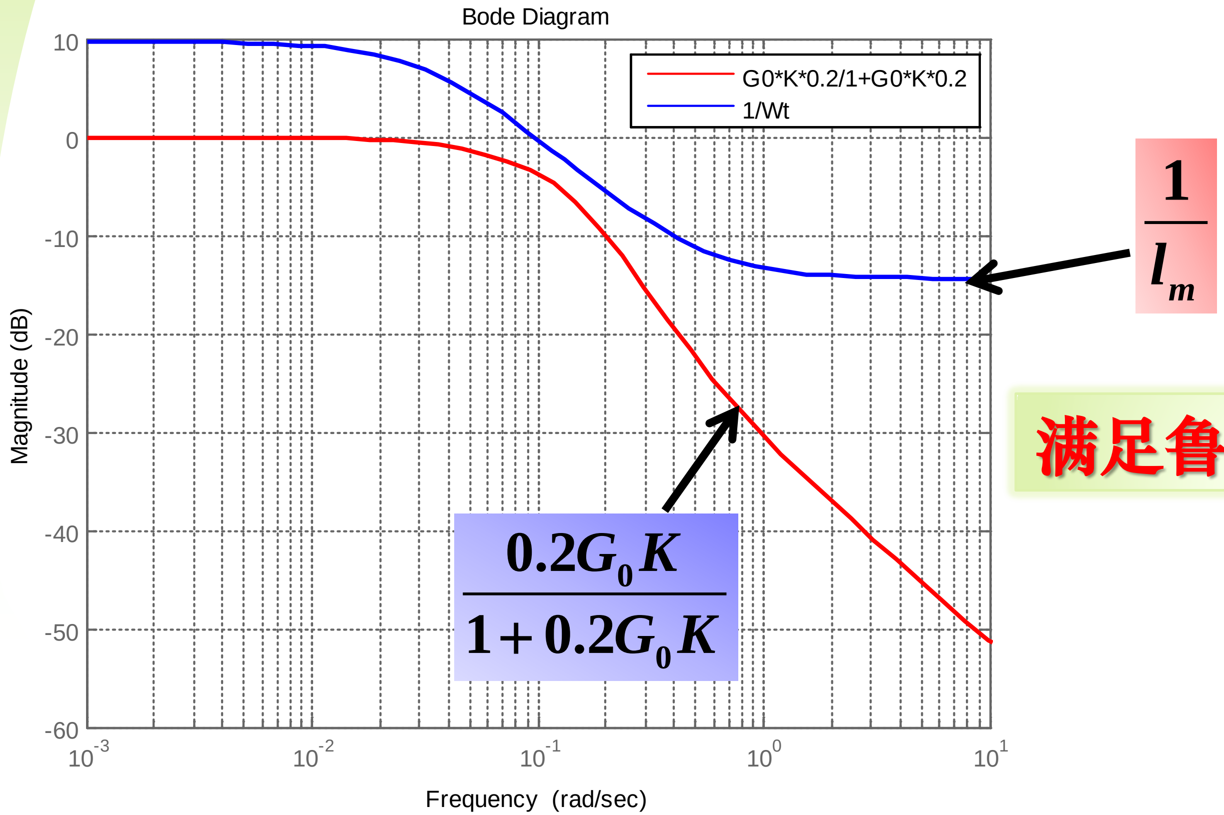
例2：对给定系统的鲁棒稳定性进行判定



不满足鲁棒稳定性条件

鲁棒稳定性条件

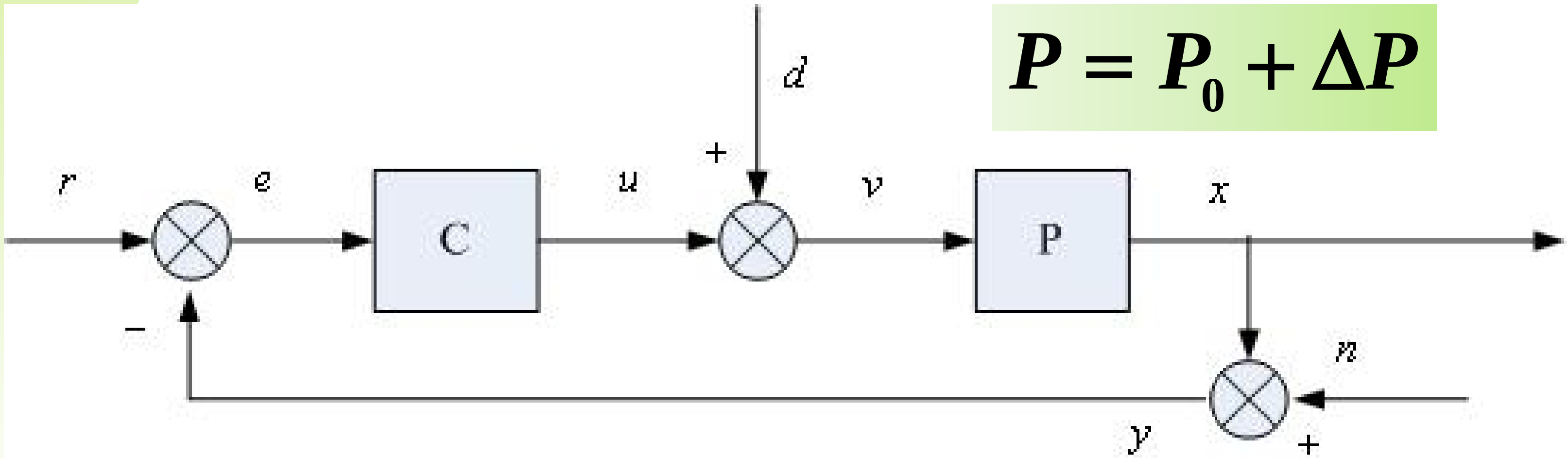
例2：对给定系统的鲁棒稳定性进行判定



满足鲁棒稳性条件

Contents

控制系统的设计约束

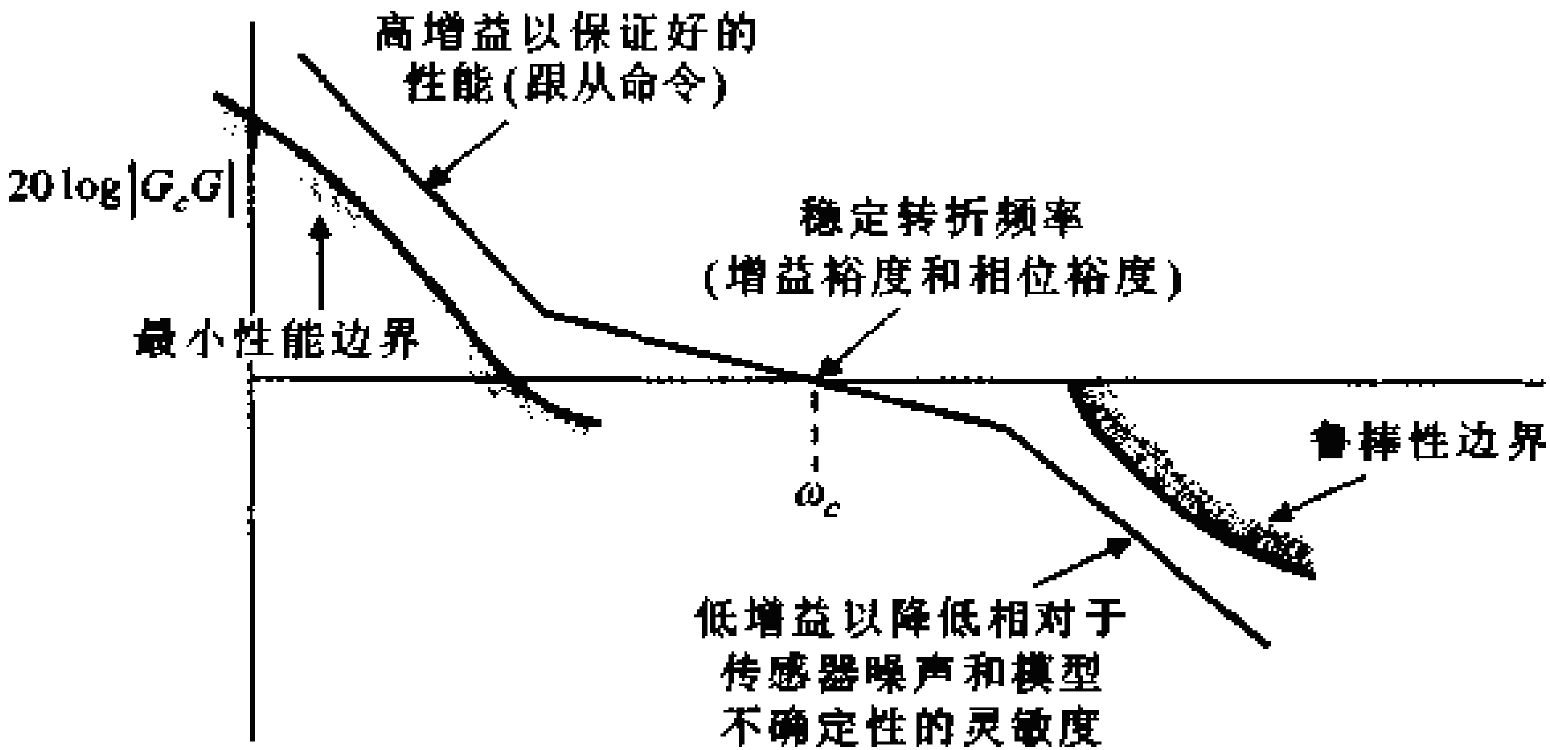


$$P = P_0 + \Delta P$$

- 名义系统是稳定的 ← 基本要求
- 系统的低频性能满足性能要求 ← 精度要求 抗扰要求
- 高频特性满足噪声误差和不确定性要求 ← 带宽要求

4.3 设计约束

用Bode性能界限来描述的控制系统设计约束



Thank You !

哈尔滨工业大学控制与仿真中心