4.1

解 1) $Q(x) = -x_1^2 - 3x_2^2 - 11x_3^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3 - 2x_1x_3$

对应的实对称阵为 $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -11 \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = -1 < 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 > 0$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -11 \end{vmatrix} = -17.75 < 0$

$\therefore$ P为负定，$\therefore$ 二次型 $Q(x)$ 为负定

2) $Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_2x_3 - 2x_1x_3$

对应的实对称矩阵为 $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = 1 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 > 0$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -16 < 0$

$\therefore$ P不是正定的，$\therefore$ 二次型 $Q(x)$ 不为正定。

4.3 (1) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} x$

$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2 \end{array}$

取李雅普诺夫函数为 $V(x) = x_1^2 + x_2^2$，正定

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1(-x_1 + x_2) + 2x_2(2x_1 - 3x_2) \\ &= -2x_1^2 + 6x_1x_2 - 6x_2^2 \end{aligned}$$

$P = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = -2 < 0$

$\Delta_2 = 3 > 0$

$\therefore$ P为负定，$\dot{V}(x)$ 负定 又$\because \|x\| \to \infty$ $V(x) \to \infty$

故系统在原点处大范围渐近稳定

$\dot{x}_2 = -a(1+x_2)^2 x_2 - x_1 \quad , a>0$ ……平衡状态的稳定性.

4.4 解 $\dot{x}_1 = \alpha x_1 + \beta x_1 x_2$

$\dot{x}_2 = \gamma x_2 + \delta x_1 x_2$

<1> 确定系统的平衡状态:

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 为非0实数

$\alpha x_1 + \beta x_1 x_2 = 0$

$\gamma x_2 + \delta x_1 x_2 = 0$

平衡点为 $x_{e1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 或 $x_{e2} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{\delta} \\ -\frac{\alpha}{\beta} \end{bmatrix}$

<2>

求雅可比矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(\alpha x_1 + \beta x_1 x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(\alpha x_1 + \beta x_1 x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(\gamma x_2 + \delta x_1 x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(\gamma x_2 + \delta x_1 x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha + \beta x_2 & \beta x_1 \\ \delta x_2 & \gamma + \delta x_1 \end{bmatrix}$$

在 x_{e1} 处线性化得 $A_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$

在 x_{e2} 处线性化得 $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\gamma\beta}{\delta} \\ -\frac{\alpha\delta}{\beta} & 0 \end{bmatrix}$

求 A_1 的特征值为 α, γ

求 A_2 的特征值为 $\lambda^2 - \alpha\gamma = 0$

当 α, γ 均大于0

系统在 x_{e1}, x_{e2} 处均不稳定

当 α, γ 均小于0

系统在 x_{e1} 处稳定渐近

在 x_{e2} 处不稳定

当 α, γ 异号时

系统在 x_{e1} 处不稳定

在 x_{e2} 处稳定性无法确定

当 α or $\gamma = 0$

系统在 x_{e1}, x_{e2} 的稳定性无法确定.

4-6 解: $\dot{x}_1 = x_2$ 　　　　确定平衡状态的稳定性.

$\dot{x}_2 = -a(1+x_2)^2 x_2 - x_1$, $a>0$

求平衡状态 $\begin{cases} x_2=0 \\ x_2=0 \end{cases}$ 　 $x_{e_1}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

利用李雅普诺夫第一法判断

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(-a(1+x_2)^2 x_2 - x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial(-a(1+x_2)^2 x_2 - x_1)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a(1+4x_2+3x_2^2) \end{bmatrix}$$

在 x_{e_1} 处线性化得

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix}$$

$$\det[\lambda I - A_1] = \lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}$$

当 $0<a\leq 2$ 时, 系统渐近稳定.

当 $a>2$ 时, 由于二次曲线的对称轴为 $\frac{-a}{2}<0$, 且函数过 $(0,1)$ 点, 任画二次函数图像可知两实根都为负数

故综上所述, 该非线性系统平衡状态 渐近稳定.

47. 判断

$x_1(k+1) = x_1(k) + 3x_2(k)$

$x_2(k+1) = -3x_1(k) - 2x_2(k) - 3x_3(k)$

$x_3(k+1) = x_1(k)$

离散线性系统的稳定性

解:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G^TPG - P = -I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

太过繁琐

因此使用另一种充要条件判断.

~~[illegible]~~

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad G^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -9 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

3阶矩阵特征多项式公式为 $\lambda^3 - tr(G)\lambda^2 + tr(G^*) - det(G) = \lambda^3 + \lambda^2 + 7\lambda + 9$

求其特征值就相当于求传递函数分母的根，即闭环极点

易得 $\lambda_1 = -1.235$

$\lambda_2 = 0.117 + 2.697i$

$\lambda_3 = 0.117 - 2.697i$

故可以看出闭环极点不全在单位圆内，因此系统不稳定、

49 超纲