自动控制理论2

第八章复习课

一. 课后思考题1

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}h_1(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{A}\sqrt{2g\left[h_1(t)-h_2(t)\right]} + \dfrac{1}{A} f_1(t) \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}h_2(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{A}\sqrt{2g\left[h_1(t)-h_2(t)\right]} - \dfrac{1}{A} f_2(t)
\end{cases}
$$

如何将上述非线性模型线性化？

参考解答

关键问题：非线性因子 $\sqrt{h_1(t)-h_2(t)}$ 的线性化。

假设 $h_1(t)-h_2(t) \triangleq \Delta h(t) = H + \varepsilon(t)$

水位偏差

标称偏差

（常量）

$$\sqrt{h_1(t)-h_2(t)}=\sqrt{H+\varepsilon(t)}$$

$$=\sqrt{H}\sqrt{1+\frac{\varepsilon(t)}{H}}=\sqrt{H}\sqrt{1+x(t)}$$

$$x\triangleq\frac{\varepsilon(t)}{H}$$ 一般来说是一个绝对值很小的量

根据Taylor公式有:

$$f(x)=\sqrt{1+x}=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots$$

$$\approx f(0)+f'(0)x$$

$$=\sqrt{1+0}+\frac{1}{2\sqrt{1+0}}x=1+\frac{x}{2}$$

$$\sqrt{h_1(t)-h_2(t)}$$

$$=\sqrt{H}\sqrt{1+x(t)}$$

$$\approx\sqrt{H}\left(1+\frac{x}{2}\right)$$

$$=\sqrt{H}\left[1+\frac{\varepsilon(t)}{2H}\right]$$

$$=\sqrt{H}\left[1+\frac{h_1(t)-h_2(t)-H}{2H}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{H}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{H}}\left[h_1(t)-h_2(t)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}h_1(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{A}\sqrt{2g\left[h_1(t)-h_2(t)\right]} + \frac{1}{A}f_1(t)$$

$$= -\frac{\sqrt{2g}}{A}\left[\frac{\sqrt{H}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{H}}\left[h_1(t)-h_2(t)\right]\right] + \frac{1}{A}f_1(t)$$

$$= -\frac{\sqrt{2gH}}{2AH}\left[h_1(t)-h_2(t)\right] + \underbrace{\frac{1}{A}\left[f_1(t)-\frac{\sqrt{2gH}}{2}\right]}_{\boxed{u_1(t)}}$$

$$\frac{\mathrm{d}h_2(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{A}\sqrt{2g\left[h_1(t)-h_2(t)\right]} - \frac{1}{A}f_2(t)$$

$$= \frac{\sqrt{2g}}{A}\left[\frac{\sqrt{H}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{H}}\left[h_1(t)-h_2(t)\right]\right] - \frac{1}{A}f_2(t)$$

$$= \frac{\sqrt{2gH}}{2AH}\left[h_1(t)-h_2(t)\right] - \frac{1}{A}\underbrace{\left[f_2(t) - \frac{\sqrt{2gH}}{2}\right]}_{\boxed{u_2(t)}}$$

最终得到小偏差线性化模型：

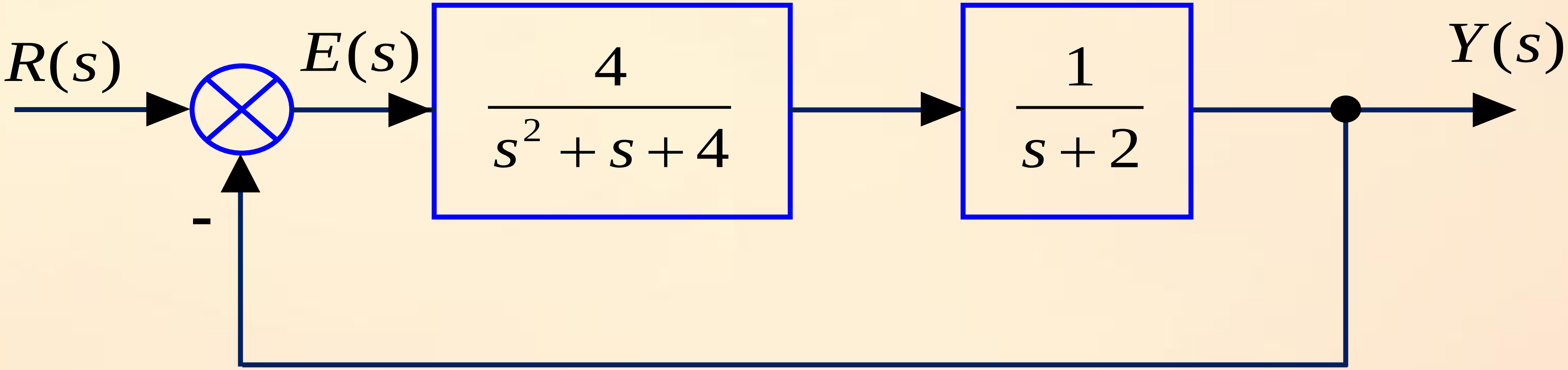
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}h_1(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\sqrt{2gH}}{2AH}\left[h_1(t) - h_2(t)\right] + \dfrac{1}{A}u_1(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}h_2(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\sqrt{2gH}}{2AH}\left[h_1(t) - h_2(t)\right] - \dfrac{1}{A}u_2(t) \end{cases}$$

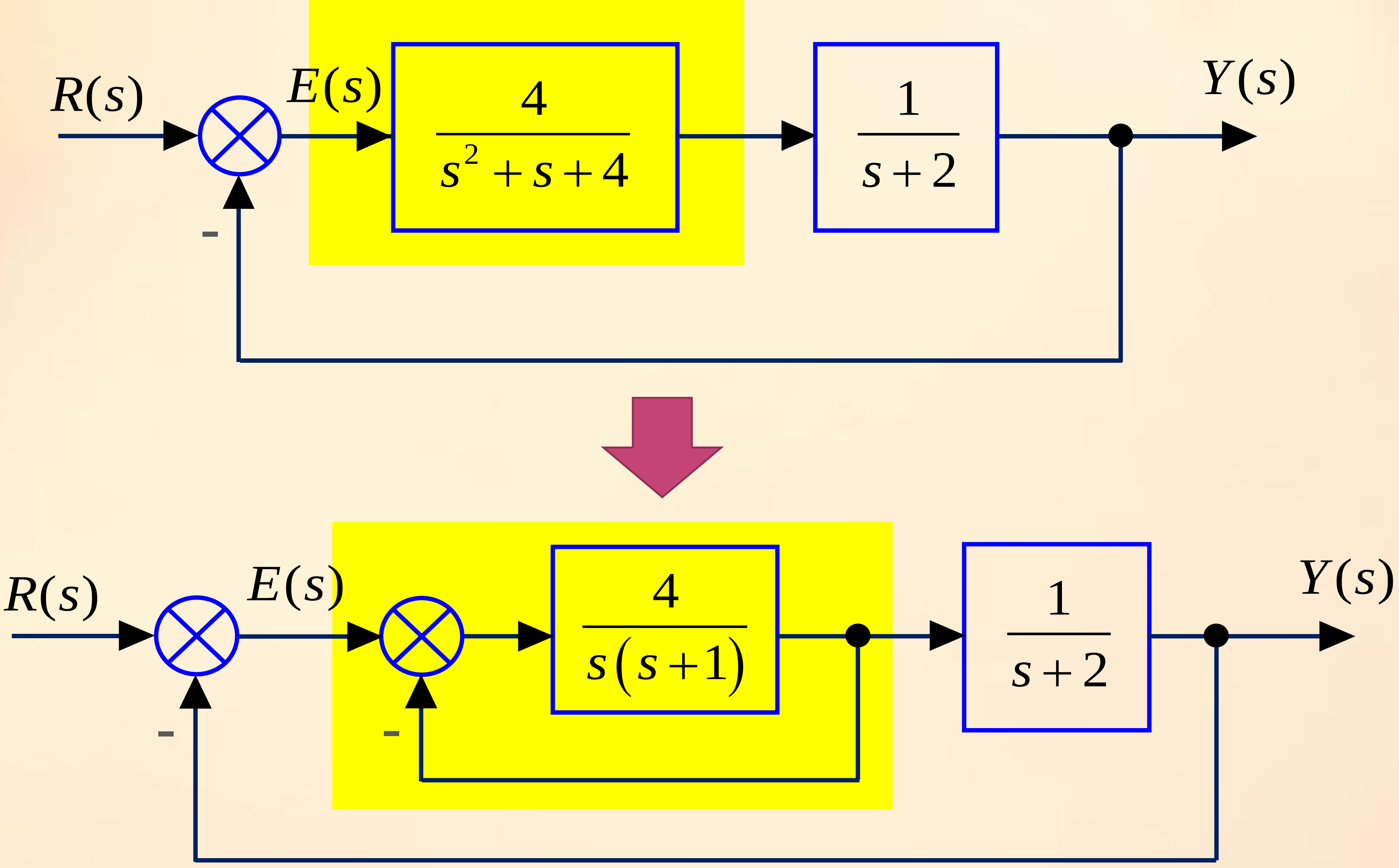
或者

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sqrt{2gH}}{2AH} & \dfrac{\sqrt{2gH}}{2AH} \\ \dfrac{\sqrt{2gH}}{2AH} & -\dfrac{\sqrt{2gH}}{2AH} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

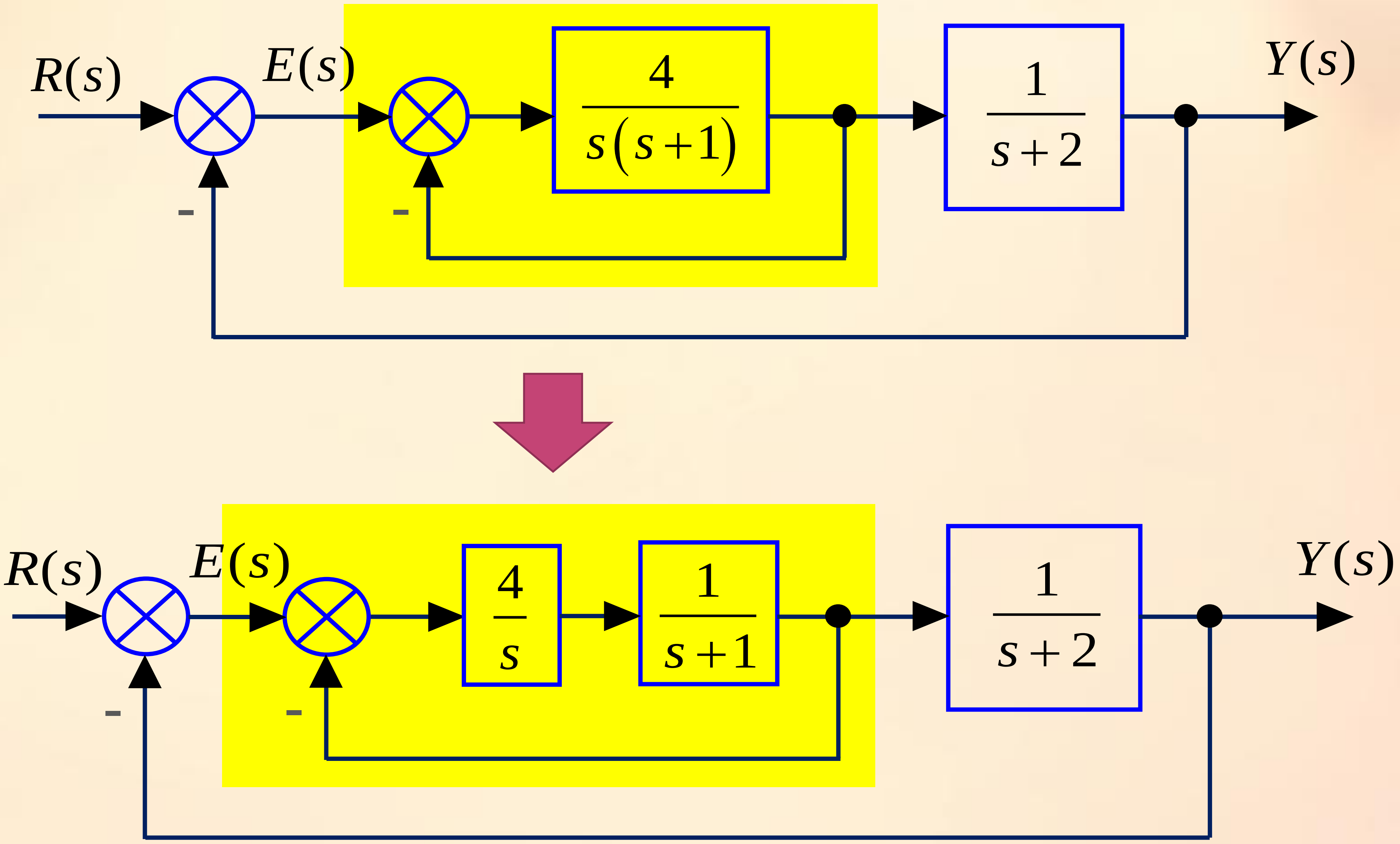
二. 如何根据含有高阶环节的方块图建立状态空间表达式?

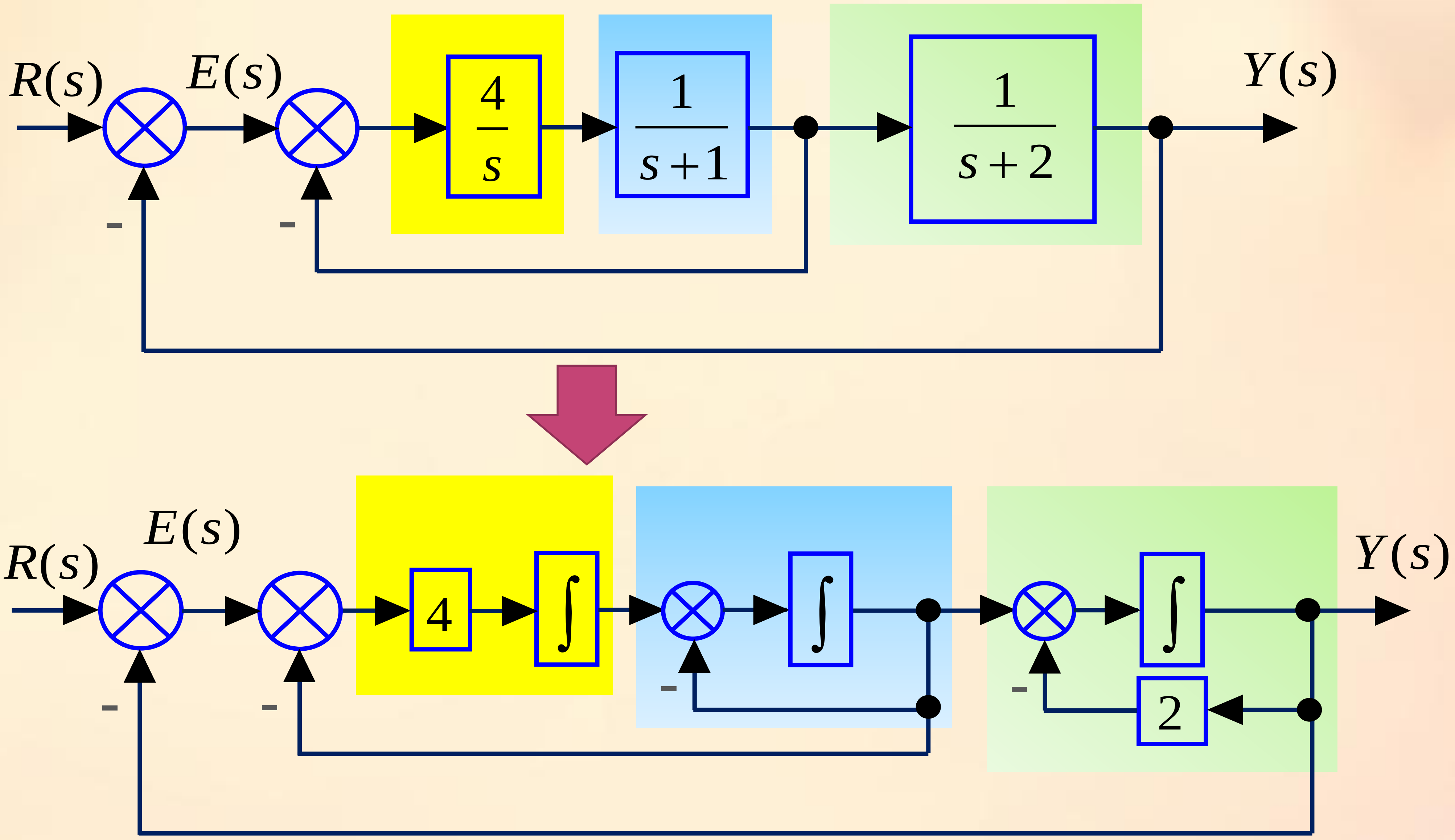
【例】 某系统的方块图如下，试建立其状态空间表达式。



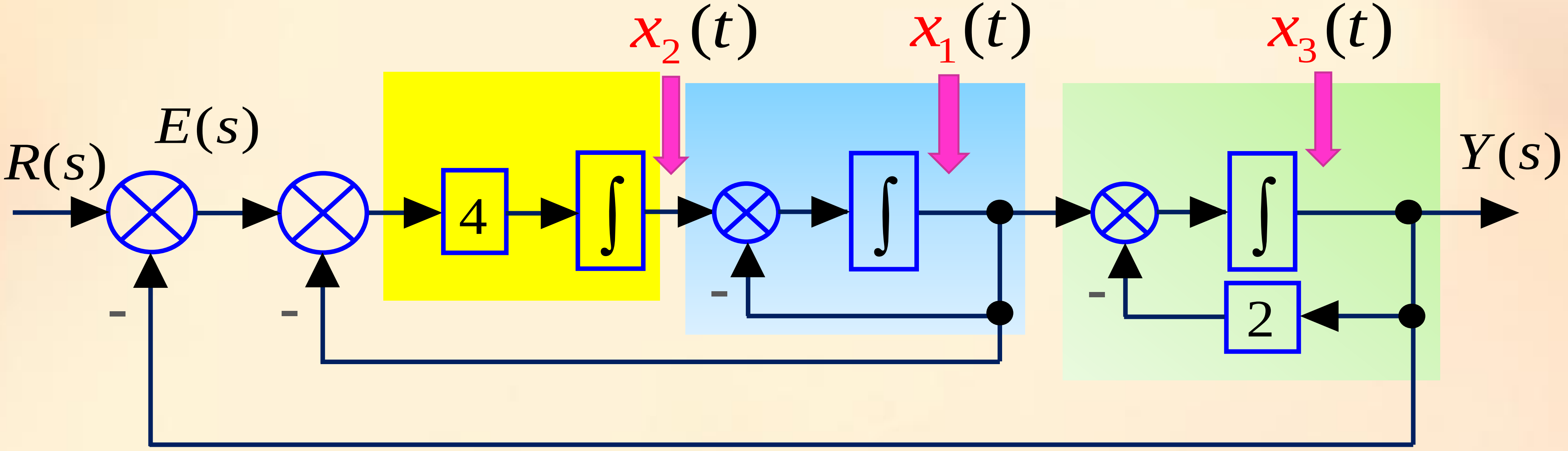


R(s)
E(s)
4
s^2+s+4
1
s+2
Y(s)
-
R(s)
E(s)
4
s(s+1)
1
s+2
Y(s)
-
-


R(s)
E(s)
4
s(s+1)
1
s+2
Y(s)
-
-
R(s)
E(s)
4
s
1
s+1
1
s+2
Y(s)
-
-



$R(s)$
$E(s)$
$\frac{4}{s}$
$\frac{1}{s+1}$
$\frac{1}{s+2}$
$Y(s)$
-
-
$R(s)$
$E(s)$
4
$\int$
$\int$
$\int$
2
$Y(s)$
-
-
-
-



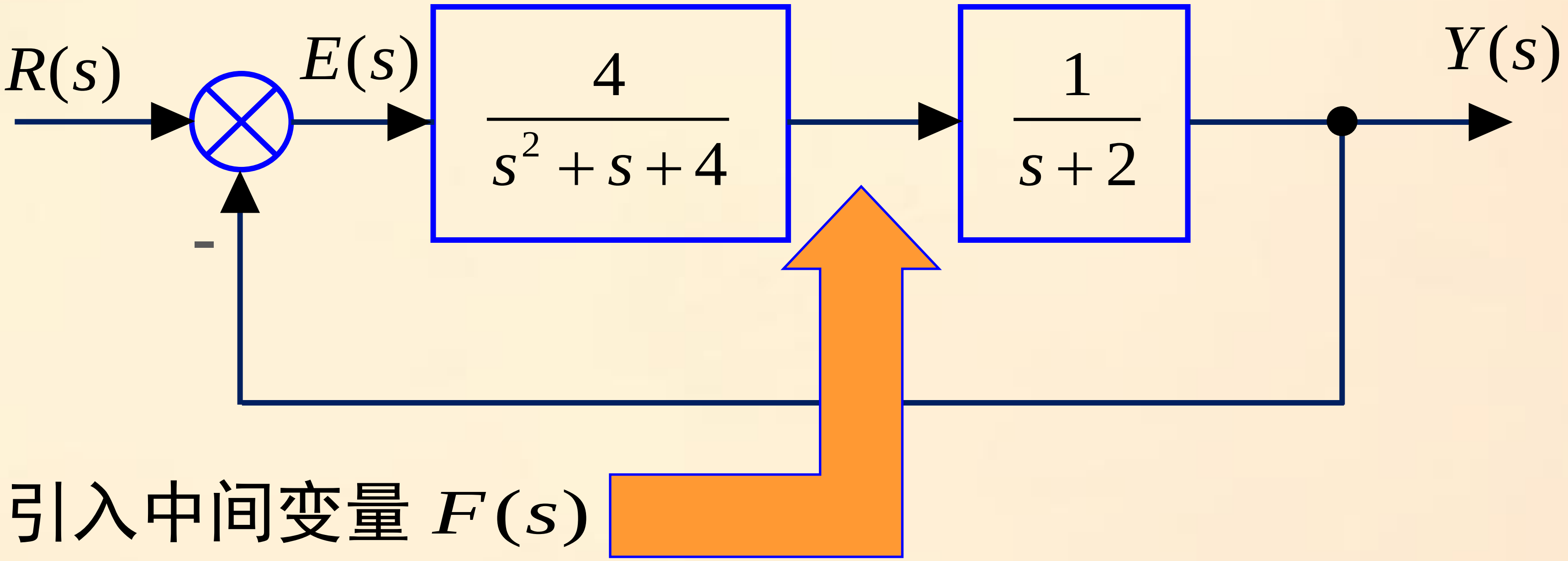
$$
\begin{cases}
\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) = 4\left[r(t) - x_3(t) - x_1(t)\right] \\
\dot{x}_3(t) = -2x_3(t) + x_1(t) \\
y(t) = x_3(t)
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 4\left[r(t) - x_3(t) - x_1(t)\right] \\ \dot{x}_3(t) = -2x_3(t) + x_1(t) \\ y(t) = x_3(t) \end{cases}$$

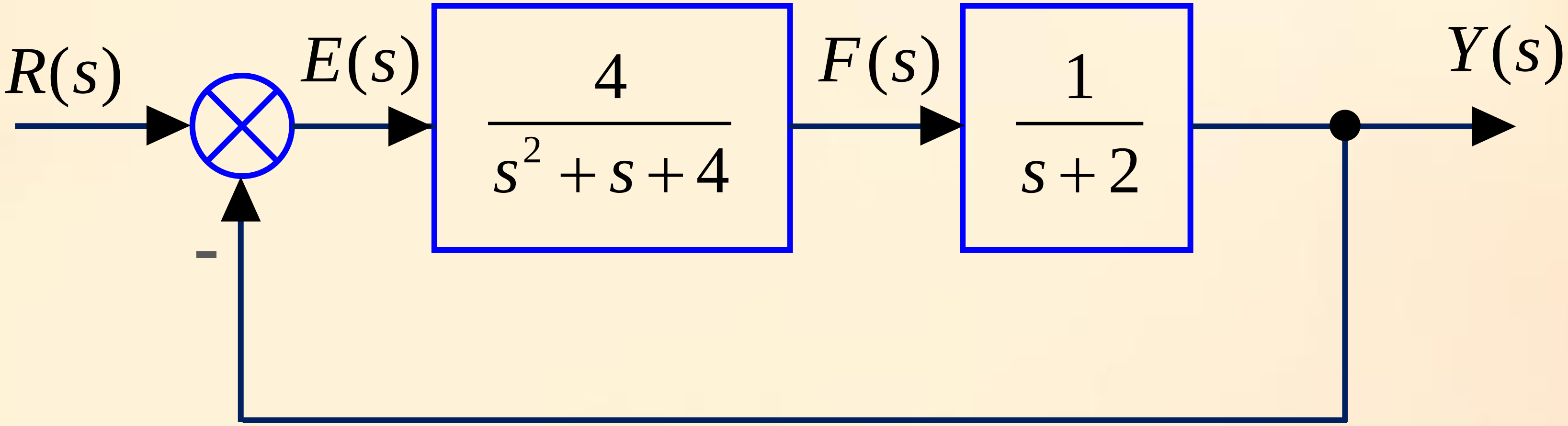
$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

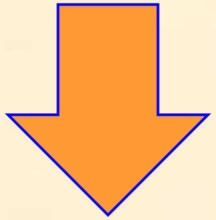
高阶环节转换成对应的模拟结构图之过程比较复杂，所以在建立状态空间表达式的时候，也可以采用中间变量法。

【例】　某系统的方块图如下，试建立其状态空间表达式。



引入中间变量 $F(s)$





$$
\begin{cases}
Y(s) = \dfrac{1}{s+2} F(s) \\[2ex]
F(s) = \dfrac{4}{s^2+s+4}\left[R(s) - Y(s)\right]
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} Y(s) = \dfrac{1}{s+2} F(s) \\ F(s) = \dfrac{4}{s^2+s+4}\left[R(s) - Y(s)\right] \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} sY(s) + 2Y(s) = F(s) \\ s^2F(s) + sF(s) + 4F(s) = 4R(s) - 4Y(s) \end{cases}$$

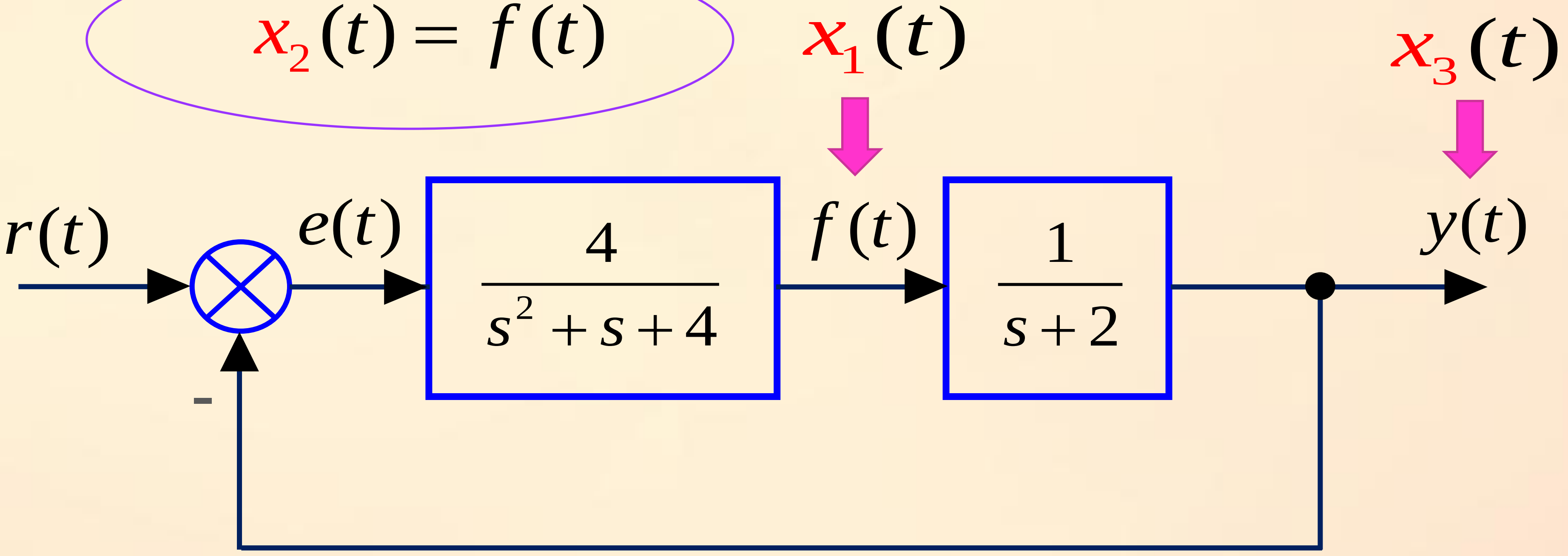
$$\begin{cases} sY(s)+2Y(s)=F(s) \\ s^2F(s)+sF(s)+4F(s)=4R(s)-4Y(s) \end{cases}$$

零初始条件下的拉氏反变换

$$\begin{cases} \dot{y}(t)+2y(t)=f(t) \\ \ddot{f}(t)+\dot{f}(t)+4f(t)=4r(t)-4y(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}(t)+2y(t)=f(t) \\ \ddot{f}(t)+\dot{f}(t)+4f(t)=4r(t)-4y(t) \end{cases}$$

$$x_2(t)=\dot{f}(t)$$



状态变量你可以有其他的选法哦！

$$
\begin{cases}
\dot{y}(t) + 2y(t) = f(t) \\
\ddot{f}(t) + \dot{f}(t) + 4f(t) = 4r(t) - 4y(t)
\end{cases}
$$

$$
\boxed{x_1(t) = f(t) \qquad x_2(t) = \dot{f}(t) \qquad x_3(t) = y(t)}
$$

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1(t) = x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) = -4x_1(t) - x_2(t) - 4x_3(t) + 4r(t) \\
\dot{x}_3(t) = x_1(t) - 2x_3(t) \\
y(t) = x_3(t)
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -4x_1(t) - x_2(t) - 4x_3(t) + 4r(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) - 2x_3(t) \\ y(t) = x_3(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

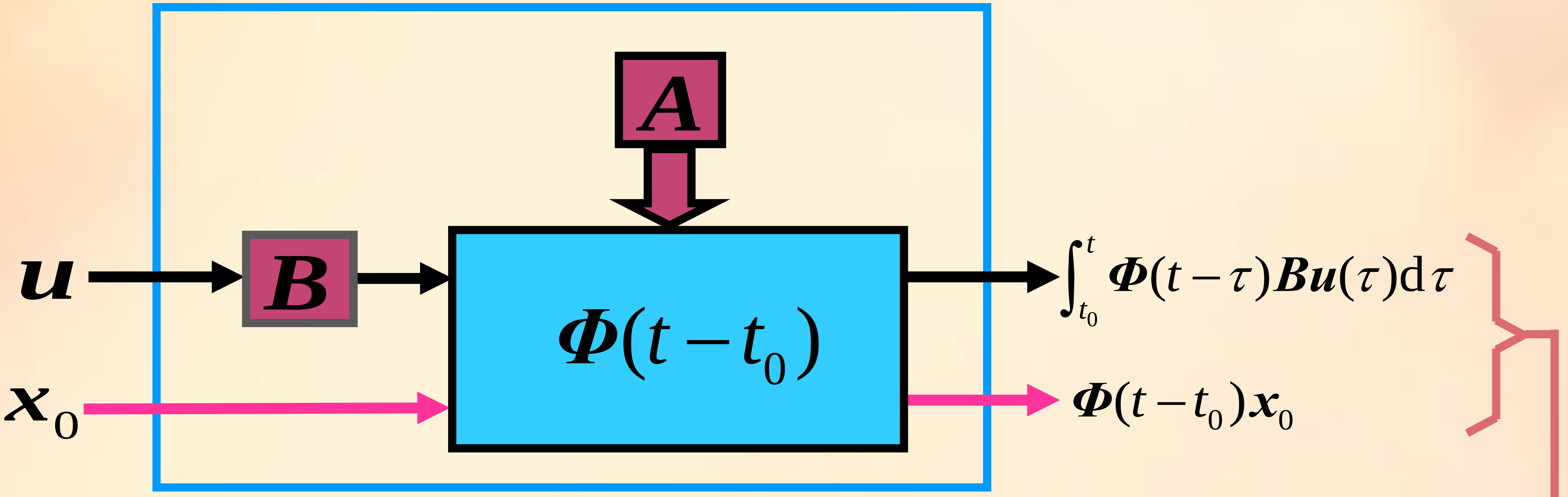
三. 线性系统状态轨迹的直观解释

$\boxed{\text{前提}}$：

线性定常系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$

线性时变系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}$

初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$



线性定常系统模型

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

状态响应

结论

1. 在确定的初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 和确定的输入信号 $\boldsymbol{u}(t)$ 的作用下，线性系统的状态响应轨迹 $\boldsymbol{x}(t)$ 是唯一确定的。

2. 线性系统的状态响应轨迹由以下两部分合成：零输入响应和零状态响应。

3 零输入响应和零状态响应轨迹的基本走向都由系统的固有特性——状态转移阵$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$所决定。

4 状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 是系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的运动学表示，两者是一一对应的。

课后思考题二

分清下列三种轨迹的含义：

1. 根轨迹；
2. 相轨迹；
3. 状态轨迹。

四. 如何根据状态转移矩阵求取系统矩阵

已知 $\boldsymbol{\Phi}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}$，求 $\boldsymbol{A}=?$

【解法一】 $\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t)$

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)\Big|_{t=0}=\boldsymbol{A}\boxed{\boldsymbol{\Phi}(0)} \Rightarrow \boldsymbol{A}=\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)\Big|_{t=0}$$

$=\boldsymbol{I}$

【解法二】

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(-t)=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$$

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)\boldsymbol{\Phi}(-t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$$

$$\boldsymbol{A}=\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)\boldsymbol{\Phi}(-t)$$

五. 关于系统能观性定义的解释

能观性是由系统的输出反映系统状态的一种性能。

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

在时间区段 $[t_0, t_f]$ 内，如何由 $\boldsymbol{y}(t)$ 来确定初始状态向量 $\boldsymbol{x}(t_0)$ ？

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

$\boldsymbol{x}$ —— n 维列向量　状态向量

$\boldsymbol{y}$ —— m维列向量　输出向量

$\boldsymbol{A}$ —— $n \times n$ 维系统矩阵

$\boldsymbol{C}$ —— $m \times n$维输出矩阵

$$m \leqslant n$$

当 $m=n$ 时

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n \end{cases}$$

若 $n\times n$ 维矩阵 $\boldsymbol{C}$ 满秩，

$$\boldsymbol{y}(t_0) \longrightarrow \boldsymbol{x}(t_0)$$

状态完全能观。

当 $m < n$ 时

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_m = c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n \end{cases}$$

如何由 $\boldsymbol{y}(t)$ 来确定初始状态向量 $\boldsymbol{x}(t_0)$ ？

$$t \in \left[t_0, t_f\right]$$

$$x_i(t) = \varphi_i(t) x_i(t_0) \qquad t \in [t_0, t_f]$$

$$\begin{cases} y_1(t) = \sum_{i=1}^{n} c_{1i} \varphi_i(t) x_i(t_0) \\ y_2(t) = \sum_{i=1}^{n} c_{2i} \varphi_i(t) x_i(t_0) \\ \vdots \\ y_m(t) = \sum_{i=1}^{n} c_{mi} \varphi_i(t) x_i(t_0) \end{cases}$$

m个方程，n个未知数 $x_i(t_0)\ i = 1, 2, \cdots, n$?

在 $[t_0, t_f]$ 内取 q 个时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_q$

$$
\begin{cases}
y_1(t_k) = \sum_{i=1}^{n} c_{1i}\varphi_i(t_k)x_i(t_0) \\
y_2(t_k) = \sum_{i=1}^{n} c_{2i}\varphi_i(t_k)x_i(t_0) \\
\vdots \\
y_m(t_k) = \sum_{i=1}^{n} c_{mi}\varphi_i(t_k)x_i(t_0)
\end{cases}
\qquad k = 1, 2, \cdots, q
$$

qm 个方程，n 个未知数 $x_i(t_0)$ $i = 1, 2, \cdots, n$

只要满足条件：$qm \geqslant n$

就能解出$\boldsymbol{n}$个初始状态

$$x_1(t_0) \qquad x_2(t_0) \qquad \cdots \qquad x_n(t_0)$$

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix}$$

六． 状态变换是否会改变系统的能控性及能观性？

给定线性系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

其能控性矩阵为

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

其能观性矩阵为

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{o}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

引入非奇异线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{z}$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{z}} = \left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right)\boldsymbol{z} + \left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\right)\boldsymbol{z} \end{cases}$$

变换后系统的能控性矩阵为

$$\tilde{Q}_c = \left[\left(T^{-1}B\right) \quad \left(T^{-1}AT\right)\left(T^{-1}B\right) \ \cdots \ \left(T^{-1}AT\right)^{n-1}\left(T^{-1}B\right) \right]$$

$$= \left[T^{-1}B \quad T^{-1}AB \ \cdots \ \underbrace{\left(T^{-1}AT\right)\left(T^{-1}AT\right)\cdots\left(T^{-1}AT\right)}_{(n-1)\text{对括号}}\left(T^{-1}B\right) \right]$$

$$=\begin{bmatrix} \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \cdots & \underbrace{\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right)\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right)\cdots\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right)}_{(n-1)\text{对括号}}\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\right) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{T}^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{c}}$$

因为矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为非奇异的，所以有

$$\mathrm{rank}\tilde{\boldsymbol{Q}}_{\mathrm{c}} = \mathrm{rank}\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{c}}\right) = \mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{c}}$$

重要结论

状态线性变换不改变线性系统的能控性。

变换后系统的能观性矩阵为

$$\tilde{\boldsymbol{Q}}_{\mathrm{o}} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{CT}) \\ (\boldsymbol{CT})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{CT})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{Q}_o = \begin{bmatrix} (CT) \\ (CT)(T^{-1}AT) \\ \vdots \\ (CT)(T^{-1}AT)^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CT \\ CAT \\ \vdots \\ (CT)\underbrace{(T^{-1}AT)(T^{-1}AT)\cdots(T^{-1}AT)}_{(n-1)\text{对括号}} \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} \boldsymbol{CT} \\ \boldsymbol{CAT} \\ \vdots \\ (\boldsymbol{CT})\underbrace{(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})\cdots(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})}_{(n-1)\text{对括号}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{CT} \\ \boldsymbol{CAT} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1}\boldsymbol{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{bmatrix}\boldsymbol{T}
$$

$$
=\boldsymbol{Q}_{\mathrm{o}}\boldsymbol{T}
$$

因为矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为非奇异的，所以有

$$\operatorname{rank}\tilde{\boldsymbol{Q}}_{\mathrm{o}}=\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{Q}_{\mathrm{o}}\boldsymbol{T}\right)=\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{o}}$$

重要结论

状态线性变换不改变线性系统的能观性。

七. 如何证明下面的结论

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{J}\boldsymbol{T}^{-1}$$

$$\Downarrow ?$$

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{T}e^{\boldsymbol{J}t}\boldsymbol{T}^{-1}$$

【证明】 $$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{TJT}^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$e^{\boldsymbol{A}t}=e^{\left(\boldsymbol{TJT}^{-1}\right)t}$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\boldsymbol{TJT}^{-1}\right)^{k}\cdot t^{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\underbrace{\left(\boldsymbol{TJT}^{-1}\right)\left(\boldsymbol{TJT}^{-1}\right)\cdots\left(\boldsymbol{TJT}^{-1}\right)}_{k\text{对括号}}\cdot t^{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\underbrace{\left(\boldsymbol{TJT}^{-1}\right)\left(\boldsymbol{TJT}^{-1}\right)\cdots\left(\boldsymbol{TJT}^{-1}\right)}_{k\text{对括号}}\cdot t^{k}$$

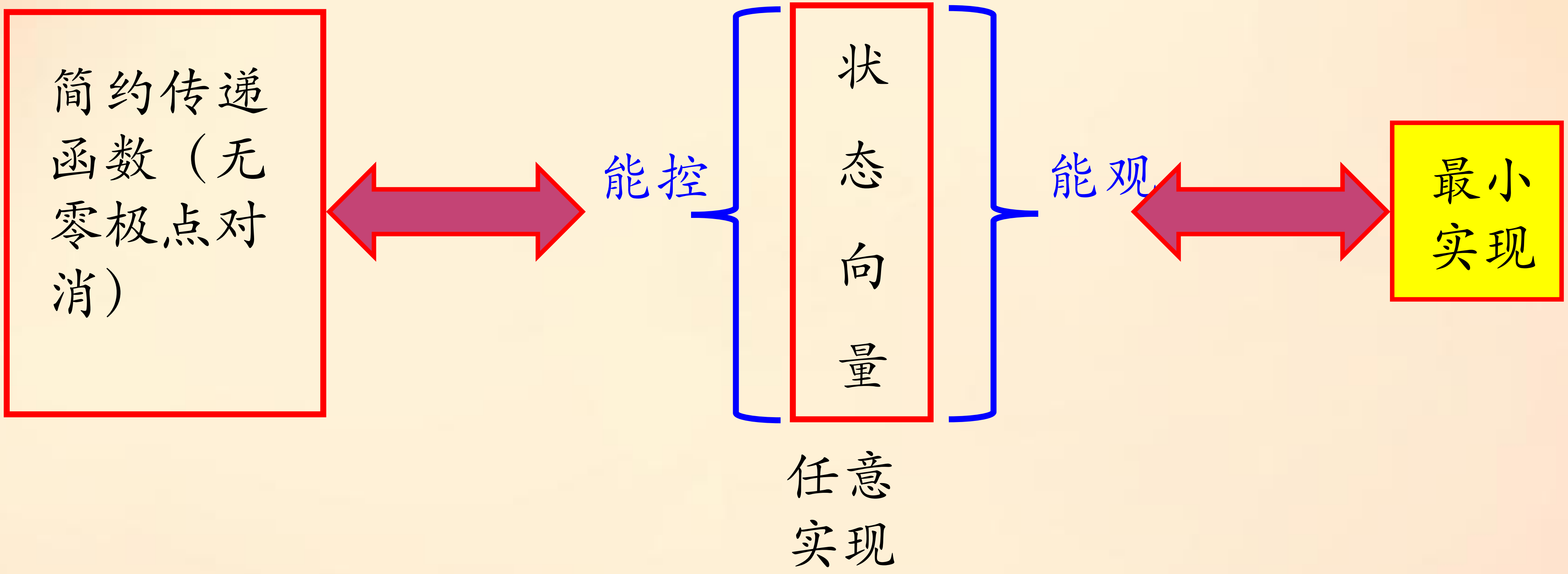
$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\boldsymbol{TJ}^{k}\boldsymbol{T}^{-1}\right)\cdot t^{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\boldsymbol{TJ}^{k}t^{k}\boldsymbol{T}^{-1}\right)$$

$$=\boldsymbol{T}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\boldsymbol{J}^{k}t^{k}\right)\right]\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{T}e^{\boldsymbol{J}t}\boldsymbol{T}^{-1}$$

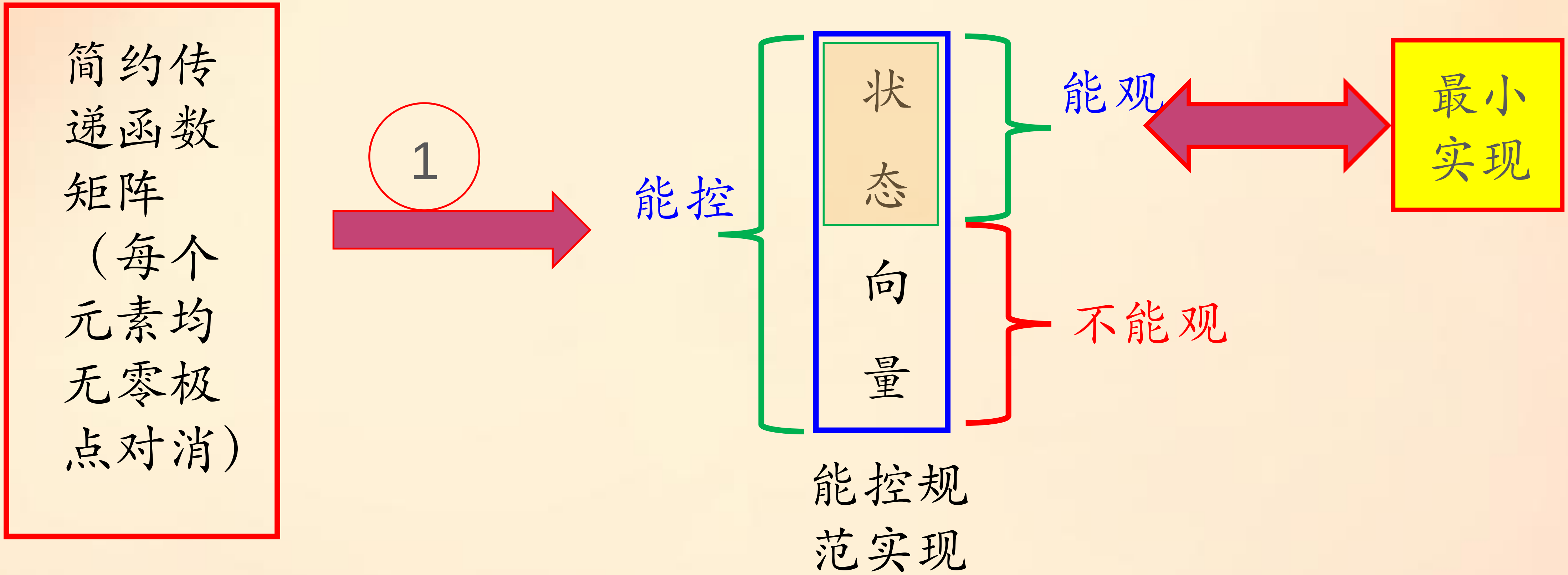
八．传递函数（矩阵）与最小实现的关系之直观理解

1. 单输入-单输出系统情形

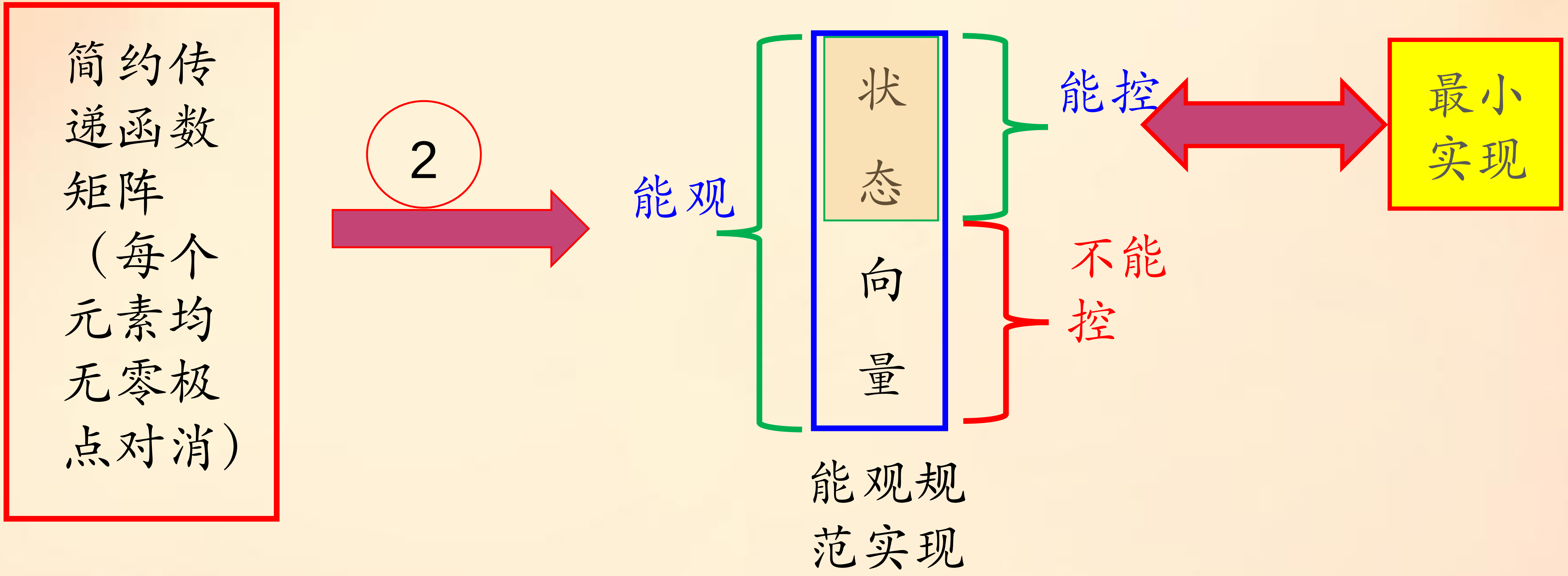


51

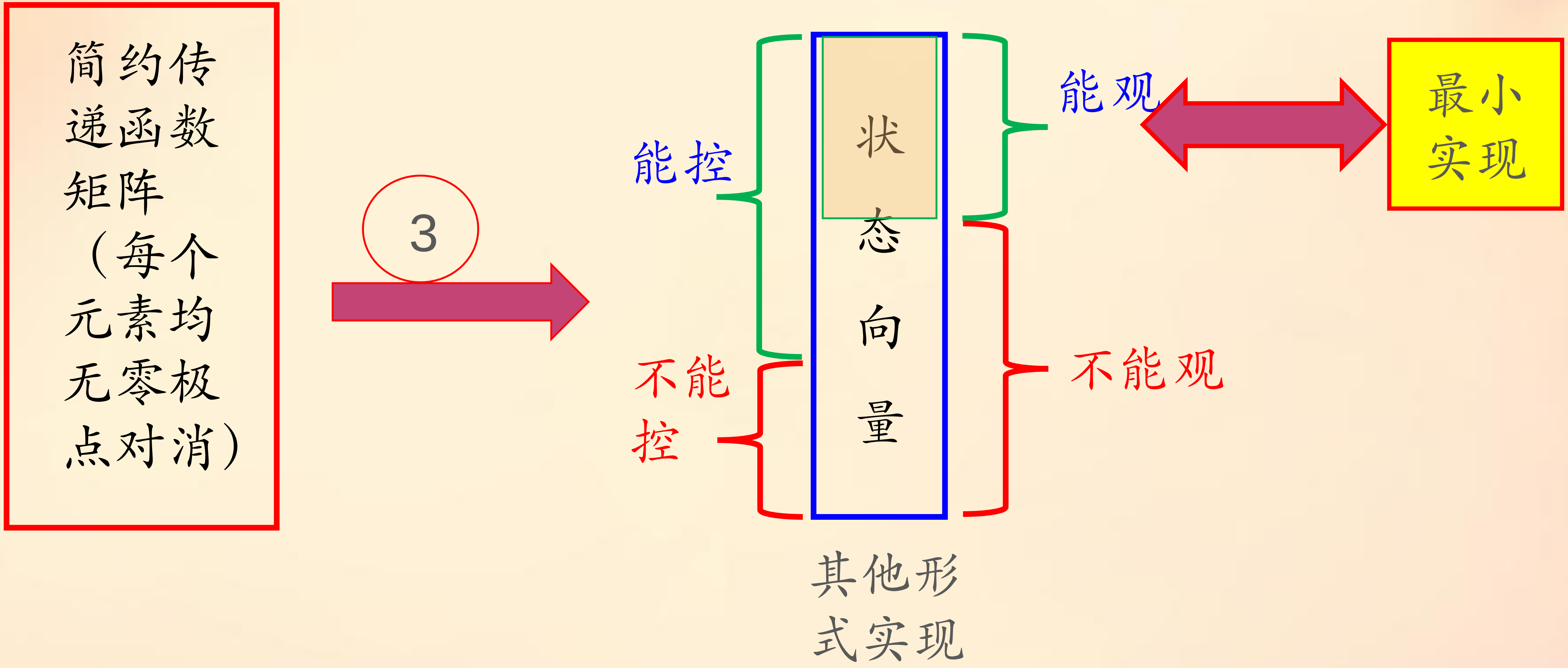
2. 多输入-多输出系统情形



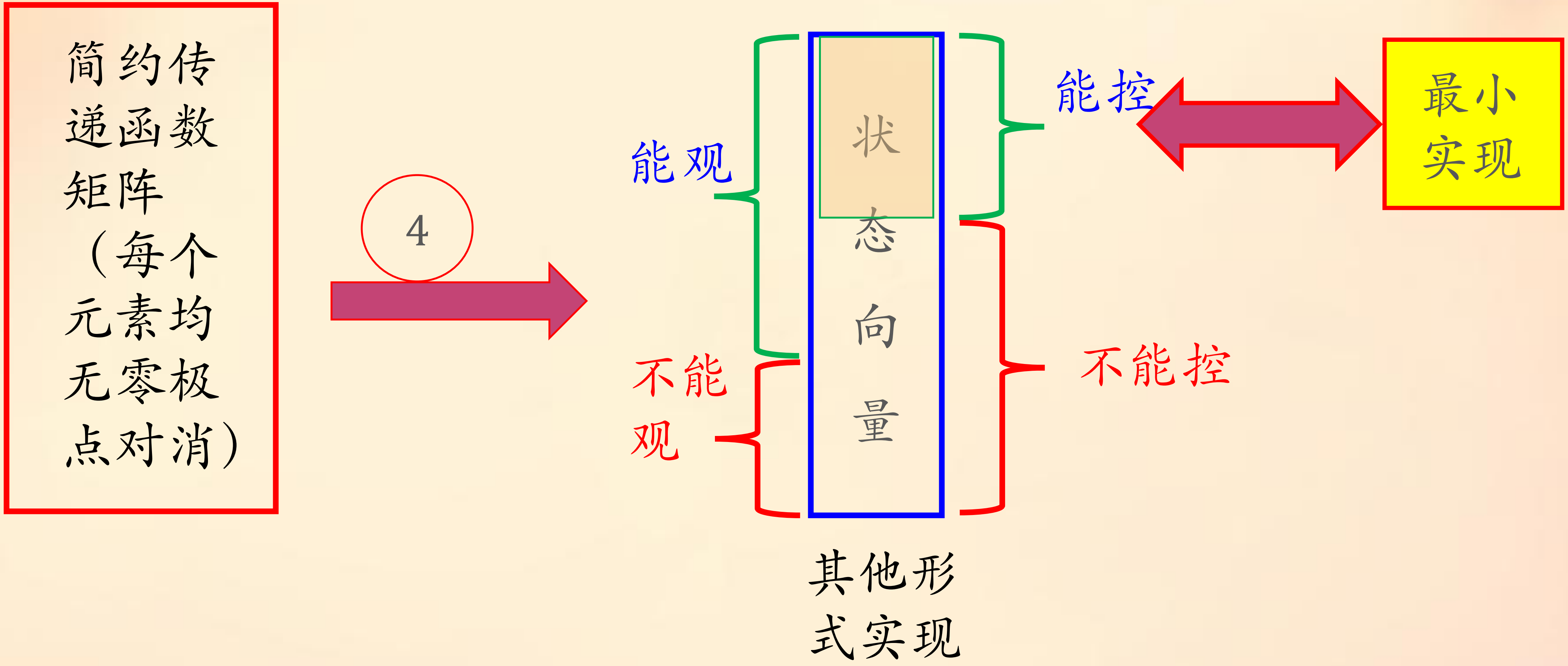
52

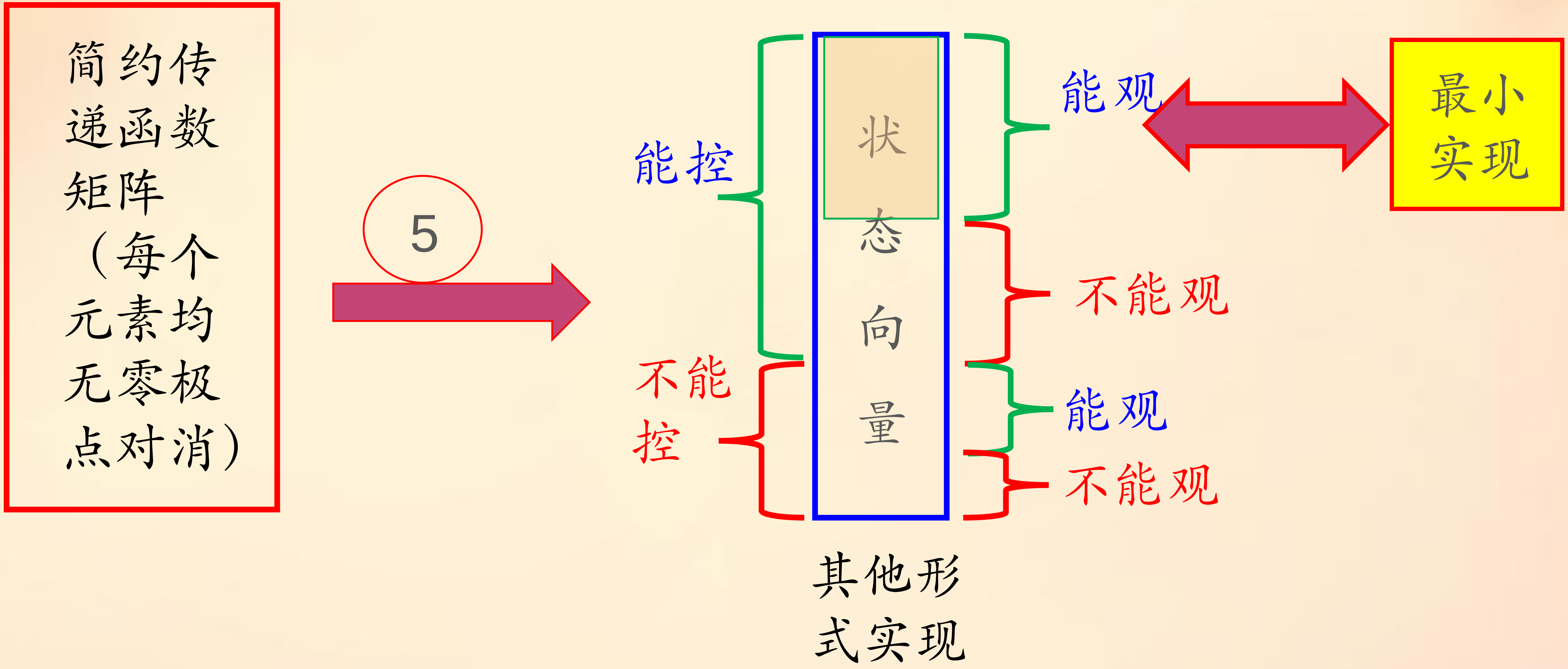


53

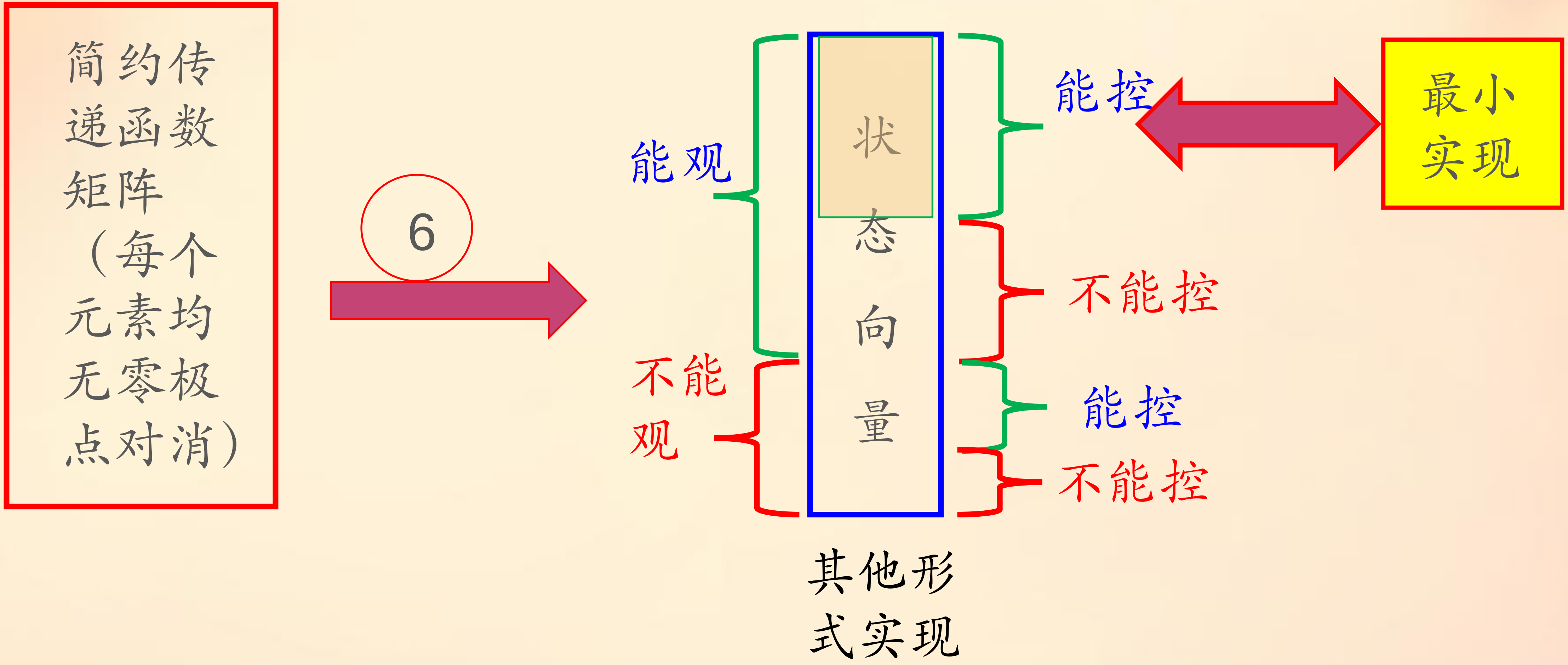


54


简约传递函数矩阵（每个元素均无零极点对消）
4
能观
不能观
状态向量
能控
不能控
最小实现
其他形式实现



简约传递函数矩阵（每个元素均无零极点对消）
5
能控
不能控
状态向量
能观
不能观
能观
不能观
最小实现
其他形式实现


简约传递函数矩阵（每个元素均无零极点对消）
6
能观
不能观
状态向量
能控
不能控
能控
不能控
最小实现
其他形式实现

本次课内容总结

- 双容水箱非线性状态方程的线性化
- 如何建立含高阶环节方框图的状态空间表达式
- 线性系统状态轨迹的直观解释
- 如何根据状态转移矩阵求取系统矩阵
- 关于系统能观性定义的直观解释
- 状态变换是否会改变系统的能控性及能观性
- 如何根据约当标准型求取一般系统矩阵的状态转移矩阵
- 如何直观理解传递函数（矩阵）与最小实现的关系