现代控制理论第 3 版刘豹唐万生机械工业出版社课后习题答案

第一章答案

1-1 试求图 1-27 系统的模拟结构图，并建立其状态空间表达式。

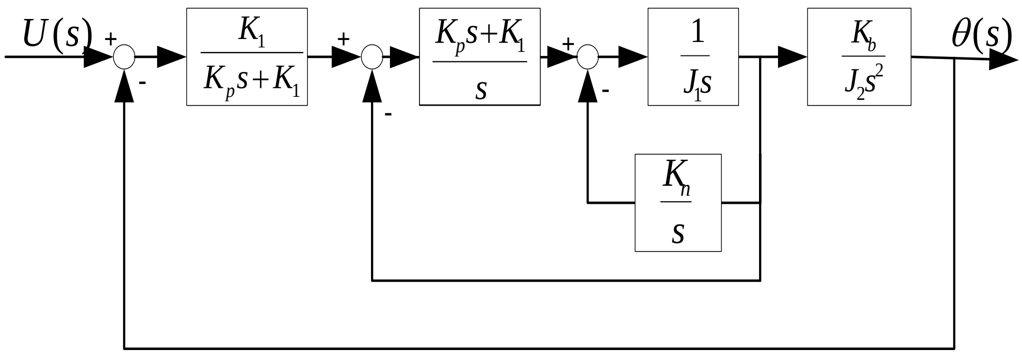


图1-27系统方块结构图

解：系统的模拟结构图如下：

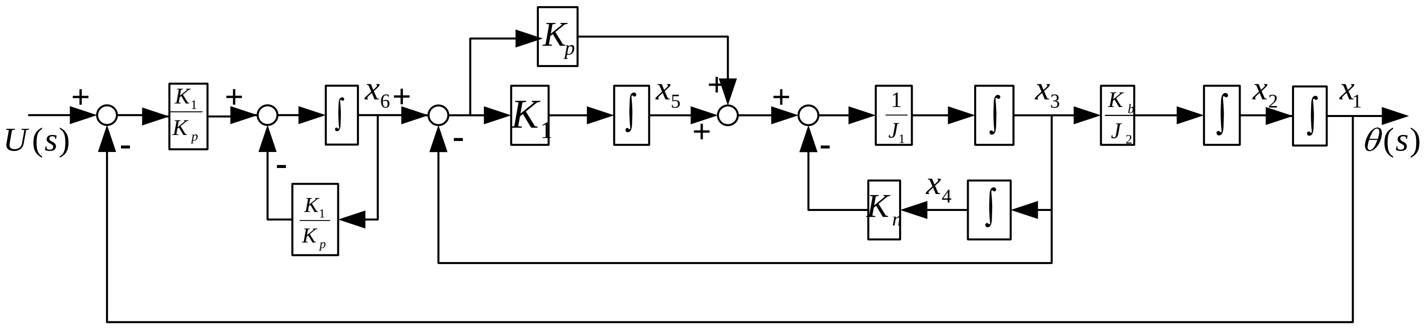


图1-30双输入--双输出系统模拟结构图

系统的状态方程如下：

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{K_b}{J_2} x_3$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{K_p}{J_1} x_3 - \frac{K_n}{J_1} x_4 + \frac{1}{J_1} x_5 + \frac{K_p}{J_1} x_6$$

$$\dot{x}_4 = x_3$$

$$\dot{x}_5 = -K_1 x_3 + K_1 X_6$$

$$\dot{x}_6 = -\frac{K_1}{K_p} x_1 - \frac{K_1}{K_p} x_6 + \frac{K_1}{K_p} u$$

令$\theta(s)=y$，则$y=x_1$

所以，系统的状态空间表达式及输出方程表达式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\\ \dot{x}_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{K_b}{J_2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{K_p}{J_1} & -\frac{K_n}{J_1} & \frac{1}{J_1} & \frac{K_p}{J_1}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -K_1 & 0 & 0 & K_1\\ -\frac{K_1}{K_p} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{K_1}{K_p}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ \frac{K_1}{K_p}\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\end{bmatrix}$$

$\dot{x}_2=\frac{K_b}{J_2}x_3=\frac{K_b}{J_2}\dot{x}_4 \Rightarrow x_2=\frac{K_b}{J_2}x_4$ 两个状态不独立，所以系统可以降维处理。

1-2 有电路如图 1-28 所示。以电压$u(t)$为输入量，求以电感中的电流和电容上的电压作为状态变量的状态方程，和以电阻R_2上的电压作为输出量的输出方程。

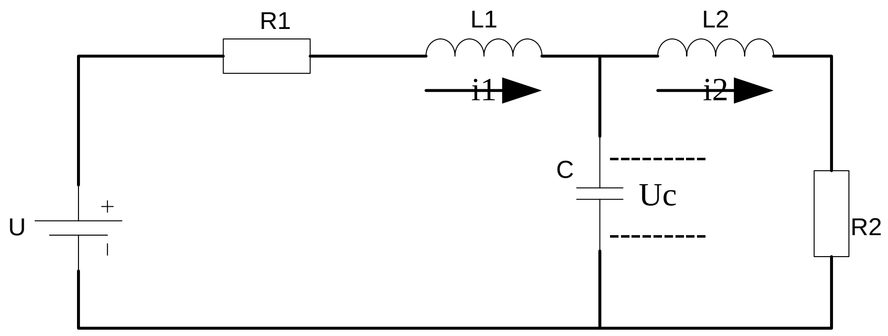


图1-28 电路图

解：由图，令$i_1=x_1, i_2=x_2, u_c=x_3$，输出量$y=R_2x_2$

由电路原理可知：

$$R_1x_1+L_1\dot{x}_1+x_3=u$$

$$L_2\dot{x}_2+R_2x_2=x_3$$

$$x_1=x_2+C\dot{x}_3$$

既得 $\dot{x}_1=-\frac{R_1}{L_1}x_1-\frac{1}{L_1}x_3+\frac{1}{L_1}u$

$$\dot{x}_2=-\frac{R_2}{L_2}x_2+\frac{1}{L_2}x_3$$

$$\dot{x}_3=-\frac{1}{C}x_1+\frac{1}{C}x_2$$

$y=R_2x_2$

写成矢量矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1}\\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2}\\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{L_1}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & R_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

1-3

解：对于M_1,M_2可知有

$$M_2\dot{v}_2=f_1+k_1(y_1-y_2)+B_1(\dot{y}_1-\dot{y}_2)-k_2y_2-B_2\dot{y}_2$$

$$M_1\dot{v}_1=f-k_1(y_1-y_2)-B_1(\dot{y}_1-\dot{y}_2)$$

可知$v_1=\dot{y}_1,v_2=\dot{y}_2$，令$x_1=y_1,x_2=y_2,x_3=\dot{y}_1,x_4=\dot{y}_2$及$u=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}$，代入上式，并写成矩阵形式如下

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -K_1/M_1 & K_1/M_1 & -B_1/M_1 & B_1/M_1\\ K_1/M_2 & -(K_1+K_2)/M_2 & B_1/M_2 & -(B_1+B_2)/M_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 1/M_1 & 0\\ 0 & 1/M_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$$

1-4 两输入u_1，u_2，两输出y_1，y_2的系统，其模拟结构图如图 1-30 所示，试求其状态空间表达式和传递函数阵。

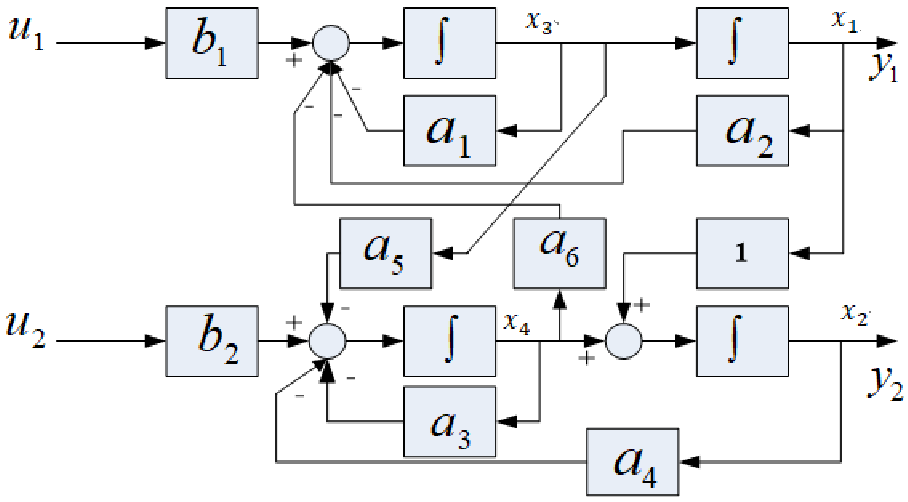


图1-30双输入--双输出系统模拟结构图

解：系统的状态空间表达式如下所示：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -a_2 & -a_1 & 0 & -a_6\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -a_5 & -a_4 & -a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ b_1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & b_2\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}x_1\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1 & 0 & 0\\ a_2 & s+a_1 & 0 & a_6\\ -1 & 0 & s & -1\\ 0 & a_5 & a_4 & s+a_3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0\\ b_1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & b_2\end{bmatrix}$$ 麻烦

1-5（2）

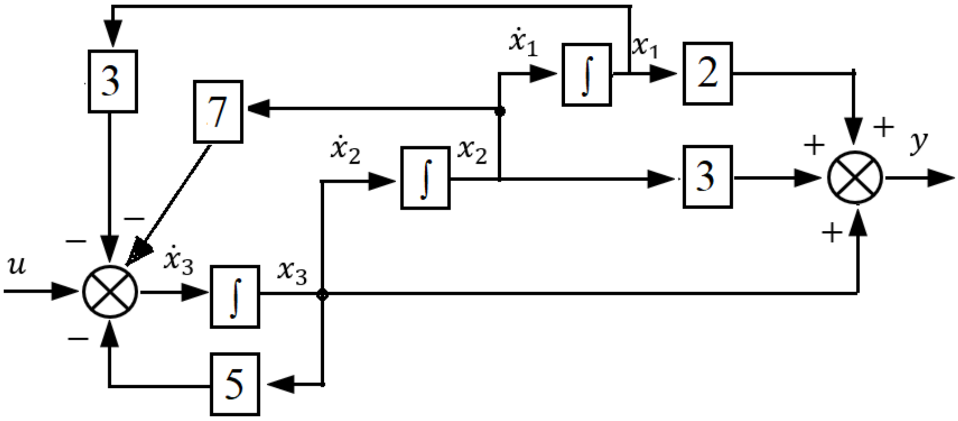
$$\mathrm{G(s)}=\frac{s^2+3s+2}{s^3+5s^2+7s+3}=\frac{(s+2)(s+1)}{(s+1)^2(s+3)}$$

传函中有零极点相消现象，状态空间实现不是最小实现。

能控标准 I 型实现（完全能控，所以这个实现肯定不完全能观）

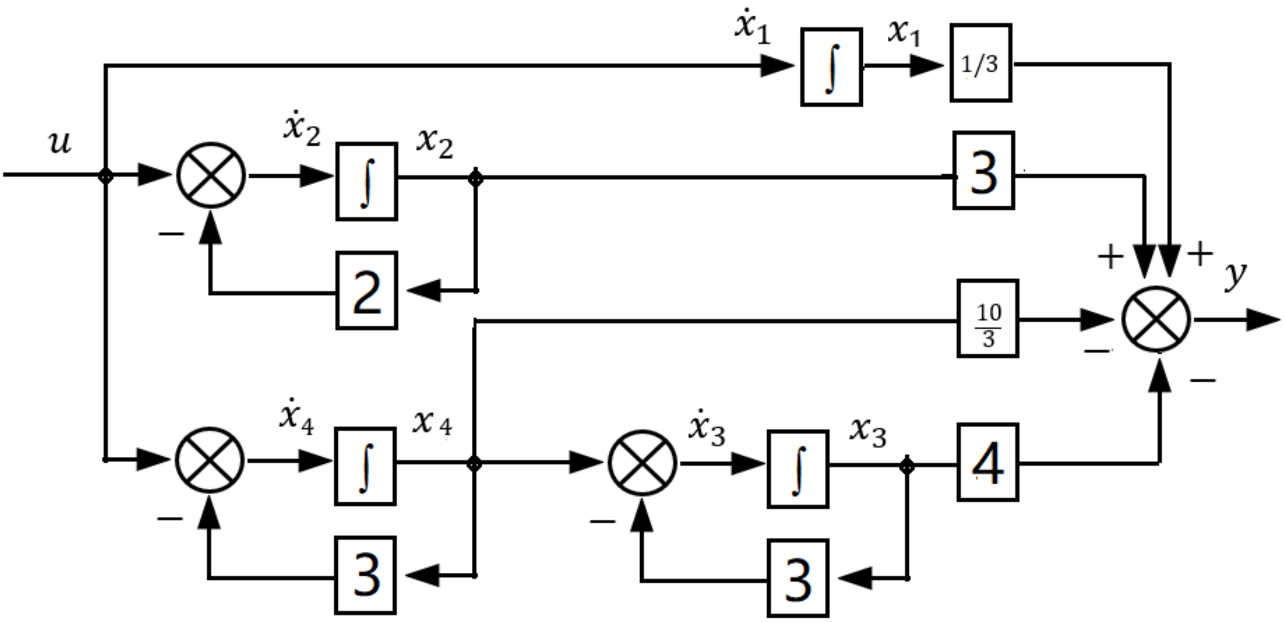
$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=-3x_1-7x_2-5x_3+u\\ y=2x_1+3x_2+x_3\end{cases}\qquad A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -7 & -5\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

模拟结构图如下



1-6（2）约当标准型属于并联型

$$G(s)=\frac{6(s+1)}{s(s+2)(s+3)^2}=\frac{1/3}{s}+\frac{3}{s+2}-\frac{\frac{10}{3}}{s+3}-\frac{4}{(s+3)^2}$$



$$\begin{cases}\dot{x}_1=u\\ \dot{x}_2=-2x_2+u\\ \dot{x}_3=-3x_3+x_4\\ \dot{x}_4=-3x_4+u\\ y=\frac{1}{3}x_1+3x_2-\frac{10}{3}x_4-4x_3\end{cases}\qquad A=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-3&1\\0&0&0&-3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&3&-\frac{10}{3}&-4\end{bmatrix}$$

1-8 求下列矩阵的特征矢量

（3）$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 2\\ -12 & -7 & -6\end{bmatrix}$

解：A 的特征方程 $|\lambda I-A|=\begin{bmatrix}\lambda & -1 & 0\\ -3 & \lambda & -2\\ 12 & 7 & \lambda+6\end{bmatrix}=\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6=0$

解之得：$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-3$

当$\lambda_1=-1$时，$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 2\\ -12 & -7 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{21}\\ p_{31}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{21}\\ p_{31}\end{bmatrix}$

解得： $p_{21}=p_{31}=-p_{11}$ 令$p_{11}=1$ 得 $P_1=\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{21}\\ p_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -1\end{bmatrix}$

（或令$p_{11}=-1$，得$P_1=\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{21}\\ p_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$）

当$\lambda_1=-2$时，$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 2\\ -12 & -7 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{12}\\ p_{22}\\ p_{32}\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}p_{12}\\ p_{22}\\ p_{32}\end{bmatrix}$

解得： $p_{22}=-2p_{12},p_{32}=\frac{1}{2}p_{12}$ 令$p_{12}=2$ 得 $P_2=\begin{bmatrix}p_{12}\\ p_{22}\\ p_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -4\\ 1\end{bmatrix}$

（或令$p_{12}=1$，得$P_2=\begin{bmatrix}p_{12}\\ p_{22}\\ p_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$）

当$\lambda_1=-3$时，$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 2\\ -12 & -7 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{13}\\ p_{23}\\ p_{33}\end{bmatrix}=-3\begin{bmatrix}p_{13}\\ p_{23}\\ p_{33}\end{bmatrix}$

解得： $p_{23}=-3p_{13},p_{33}=3p_{13}$　　令$p_{13}=1$　　得　　$P_3=\begin{bmatrix}p_{13}\\p_{23}\\p_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-3\\3\end{bmatrix}$

(4)

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\-1&0&-1\\4&4&5\end{bmatrix}$$

$$|sI-A|=0\Rightarrow s^3-6s^2+15s-10=(s-1)(s^2-5s+10)=0$$

矩阵特征值为 1，$\frac{5\pm j\sqrt{15}}{2}$。求对应特征矢量

$$(A-\lambda I)q=0\Longrightarrow\begin{bmatrix}1-\lambda&2&-1\\-1&-\lambda&-1\\4&4&5-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q1\\q2\\q3\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{cases}(1-\lambda)q1+2q2-q3=0 & (1)\\ q1+\lambda q2+q3=0 & (2)\\ 4q1+4q2+(5-\lambda)q3=0 & (3)\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}(3)-4*(2)\Longrightarrow 4(1-\lambda)q2+(1-\lambda)q3=0\\(1)+(2)\Rightarrow(2-\lambda)q1+(\lambda+2)q2=0\end{matrix}$$

继而，

特征值为 1，对应特征矢量$q=\begin{bmatrix}-3\\1\\2\end{bmatrix}$

特征值为$\frac{5+j\sqrt{15}}{2}$，对应特征矢量$q=\begin{bmatrix}\frac{\lambda+2}{\lambda-2}\\1\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.5-j\sqrt{15}/2\\1\\-4\end{bmatrix}$

特征值为$\frac{5-j\sqrt{15}}{2}$，对应特征矢量$q=\begin{bmatrix}\frac{\lambda+2}{\lambda-2}\\1\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.5+j\sqrt{15}/2\\1\\-4\end{bmatrix}$

1-9 将下列状态空间表达式化成约旦标准型（并联分解）

（1）$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$

$y=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}x$

解：A 的特征方程$|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda+3)^2=0$

$\lambda_1=-3,\lambda_2=-1$

解之得 $p_1=-1$，$p_2=-3$ 得 $P_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$P_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$，则$T=[P_1,P_2]=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$,

得$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-3\end{bmatrix},T^{-1}B=\begin{bmatrix}0.5\\-0.5\end{bmatrix},CT=[1\quad 1]$

（2）

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&1&-2\\1&0&2\\1&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&1\\2&7\\5&3\end{bmatrix}u$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

解：A 的特征方程 $|\lambda I-A|=\begin{bmatrix}\lambda-4&-1&2\\-1&\lambda&-2\\-1&1&\lambda-3\end{bmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)^2=0$

$\lambda_{1,2}=3,\lambda_3=1$

当$\lambda_1=3$时，$\begin{bmatrix}4&1&-2\\1&0&2\\1&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{bmatrix}$

解之得 $p_{21}=p_{31}=p_{11}$ 令$p_{11}=1$ 得 $P_1=\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

当$\lambda_2=3$时，$\begin{bmatrix}4&1&-2\\1&0&2\\1&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

解之得 $p_{12}=p_{22}+1,p_{22}=p_{32}$ 令$p_{12}=1$ 得 $P_2=\begin{bmatrix}p_{12}\\p_{22}\\p_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

当$\lambda_3=1$时，$\begin{bmatrix}4&1&-2\\1&0&2\\1&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{13}\\p_{23}\\p_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_{13}\\p_{23}\\p_{33}\end{bmatrix}$

解之得 $p_{13}=0, p_{23}=2p_{33}$ 　令$p_{33}=1$ 　得 　$P_3=\begin{bmatrix}p_{13}\\p_{23}\\p_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$

$$T=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&2\\1&0&1\end{bmatrix} \qquad T^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1&2\\1&1&-2\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

$$T^{-1}B=\begin{bmatrix}0&-1&2\\1&1&-2\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\2&7\\5&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&-1\\-5&2\\-3&4\end{bmatrix}$$

$$CT=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&2\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1&4\\2&0&3\end{bmatrix}$$

约旦标准型

$$\dot{\tilde{x}}=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix}8&-1\\-5&2\\-3&4\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}3&1&4\\2&0&3\end{bmatrix}\tilde{x}$$

1-12 已知差分方程为

$y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=2u(k+1)+3u(k)$

试将其用离散状态空间表达式表示，并使驱动函数 u 的系数 b(即控制列阵)为

（1）$b=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$；（2）$b=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

解 1：

$$W(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z+2}=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}$$

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-2\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}x(k)$$

解（2）：

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = -2x_1(k) - 3x_2(k) + u$$

$$y(k) = 3x_1(k) + 2x_2(k)$$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} x(k)$$