典型习题讲解

降维观测器的设计

【例】设系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

设计一个降维状态观测器，使观测器的极点为-2，-3，要求写出降维观测器方程及状态估计的表达式。

【解】 先判断原系统的能观性，

$$c=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$cA=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$cA^2=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{cA} \\ \boldsymbol{cA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rank}\boldsymbol{N} = 3$$

所以系统状态完全能观。

将状态空间表达式写为分块形式，并进行子系统分离

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \hline \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ \hdashline 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{bmatrix} u \\ y = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \hdashline \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ \hdashline 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hdashline x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hdashline 1 \end{bmatrix} u \\ y = x_3 \end{cases}$$

第一个子系统为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} x_3$$

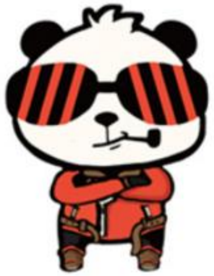
第二个子系统为

$$\dot{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\ 2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}x_3$$

$$\dot{x}_3=\begin{bmatrix}0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+u$$

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\ 2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}y\\ \dot{y}-u=\begin{bmatrix}0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{cases}$$



这是一个待重构的子系统

降维观测器的设计

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}y\\ \dot{y}-u=\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{cases}$$

设计降维观测器如下

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}(\dot{y}-u)$$

引入中间变量，并对降维观测器进行改进

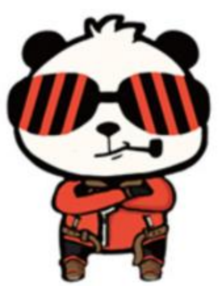
令变量 $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} y$

求导

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\widehat{x}}_1 \\ \dot{\widehat{x}}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \dot{y}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\widehat{x}}_1 \\ \dot{\widehat{x}}_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} (\dot{y} - u)$$

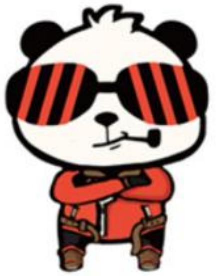
$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} u$$



供你参考！

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\widehat{x}_1\\ \widehat{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}y-\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}u$$

$$\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widehat{x}_1\\ \widehat{x}_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}y$$



供你参考！

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}y\right)+\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}y-\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}u$$

降维观测器的极点配置

降维观测器的系统矩阵为

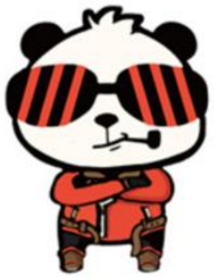
$$\boldsymbol{\Pi}=\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}l_1\\l_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&2l_1\\0&2l_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1-2l_1\\2&1-2l_2\end{bmatrix}$$

其特征多项式为

$$f(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Pi})=\begin{vmatrix}\lambda&-1+2l_1\\-2&\lambda-1+2l_2\end{vmatrix}=\lambda^2+(2l_2-1)\lambda+4l_1-2$$

$$f(\lambda)=\lambda^2+(2l_2-1)\lambda+4l_1-2$$

期望特征多项式为



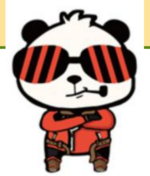
供你参考！

$$f^*(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda+3)=\lambda^2+5\lambda+6$$

根据多项式恒等的条件可得 $\begin{cases}2l_2-1=5\\4l_1-2=6\end{cases}$

$$\begin{cases}l_1=2\\l_2=3\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}y\right)+\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}y-\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}u$$



供你参考！

降维观测器的方程为

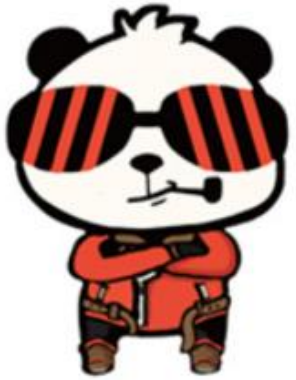
$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}y\right)+\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}y-\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}u$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9\\ 8\end{bmatrix}y-\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}u$$

写出最终的状态估计表达式

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} y$$



供你参考！

$$\hat{x}_1 = z_1 + 2y$$

$$\hat{x}_2 = z_2 + 3y$$