8.6 线性离散系统的分析

8.6.1 离散时间系统的状态空间表达式

连续时间系统的状态空间方法，完全适用于离散时间系统。

离散系统的实现

—— 从差分方程或脉冲传递函数求取离散状态空间表达式的问题。

一. 单输入单输出情形

单输入单输出线性离散系统差分方程

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\ \cdots\ +a_1y(k+1)+a_0y(k)$$
$$=b_nu(k+n)+b_{n-1}u(k+n-1)+\ \cdots\ +b_1u(k+1)+b_0u(k)$$

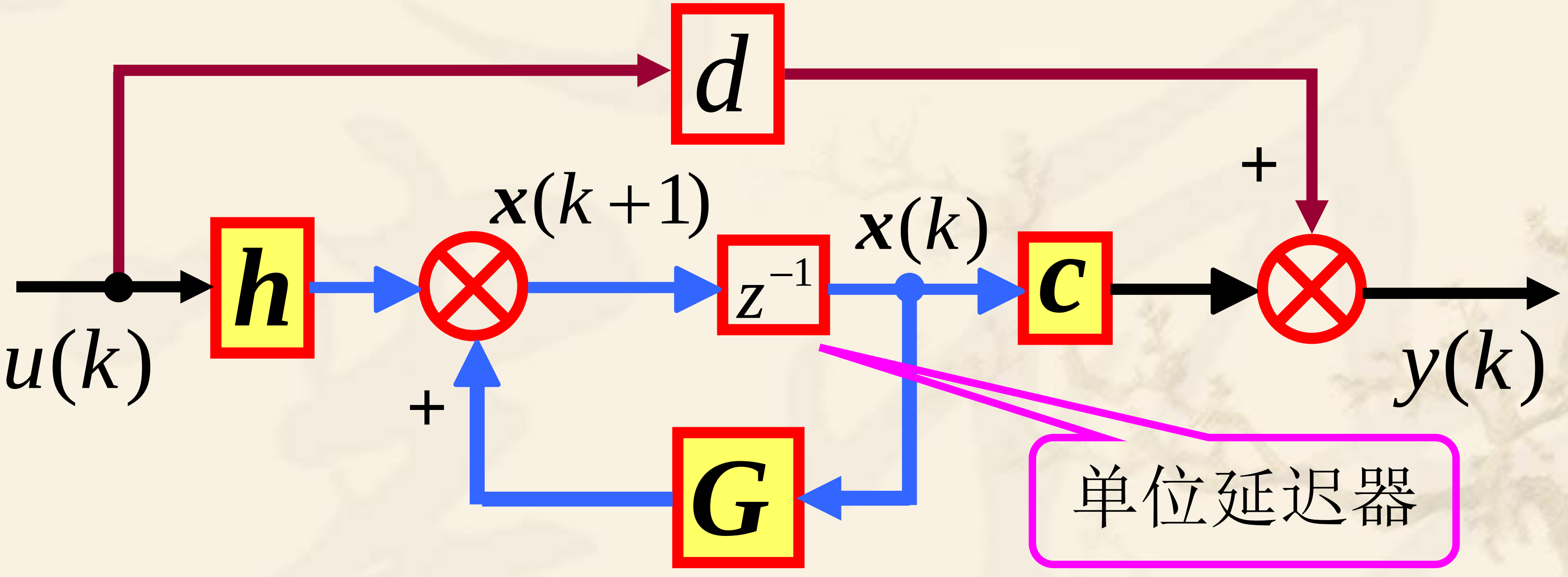
系统的脉冲传递函数为

$$W(z)=\frac{b_nz^n+b_{n-1}z^{n-1}+\ \cdots\ +b_1z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ \cdots\ +a_1z+a_0}$$

单输入单输出离散系统的状态空间表达式

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boxed{\mathbf{G}}\boldsymbol{x}(k) + \boxed{\boldsymbol{h}}u(k) \\ y(k) = \boxed{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{x}(k) + \boxed{d}u(k) \end{cases}$$

在假设两个相邻采样时刻 $u(k)$ 不变的条件下，上式可描述为下图：



一种较为简单的实现：

$$x_1(k+1) = x_2(k) + h_{n-1}u(k)$$

$$x_2(k+1) = x_3(k) + h_{n-2}u(k)$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1}(k+1) = x_n(k) + h_1 u(k)$$

$$x_n(k+1) = -a_0 x_1(k) - a_1 x_2(k) - \cdots - a_{n-1} x_n(k) + h_0 u(k)$$

$$y(k) = x_1(k) + h_n u(k)$$

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{x}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{G}} \boldsymbol{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} h_{n-1} \\ h_{n-2} \\ \vdots \\ h_1 \\ h_0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{h}} u(k) \\
y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{x}(k) + \underbrace{h_n}_{\boldsymbol{d}} u(k)
\end{cases}
$$

式中 h_i 的计算公式：

$$h_n = b_n$$

$$h_{n-1} = b_{n-1} - a_{n-1}h_n$$

$$h_{n-2} = b_{n-2} - a_{n-2}h_n - a_{n-1}h_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$h_0 = b_0 - a_0h_n - a_1h_{n-1} - \cdots - a_{n-1}h_1$$

二. 多输入多输出情形

多输入多输出离散系统的状态空间表达式

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) \end{cases}$$

具体实现的方法本课程不作要求！

【注意点】

- 线性连续系统的能控规范I型、II型、能观规范I型、II型、约当规范型等实现方法对于线性离散系统同样适用；
- 线性离散系统的特征多项式

$$W(z)=\frac{b_n z^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{\boxed{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0}}$$

或

$$\| \\ \det(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})$$

- 线性离散系统的传递函数矩阵为

$$\boldsymbol{G}(z)=\boldsymbol{C}\left(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}\right)^{-1}\boldsymbol{H}+\boldsymbol{D}$$

8.6.2 离散时间系统状态方程的解

离散时间系统状态方程的解法

递推法

（迭代法）

适用于定常系统和时变系统

Z变换法

适用于定常系统

一. 递推法

设线性定常离散时间系统的状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{H}u(k) \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{x}(k)\big|_{k=0}=\boldsymbol{x}(0)$$

则它的解为：

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{G}^{k}\boldsymbol{x}(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{G}^{k-j-1}\boldsymbol{H}u(j) \qquad (2)$$

或

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{G}^{k}\boldsymbol{x}(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{G}^{j}\boldsymbol{H}u(k-j-1) \qquad (3)$$

即

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{G}^{k}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{G}^{k-1}\boldsymbol{H}u(0)+\boldsymbol{G}^{k-2}\boldsymbol{H}u(1)$$

$$+\boldsymbol{G}^{k-3}\boldsymbol{H}u(2)+\cdots+\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}u(k-2)+\boldsymbol{H}u(k-1)$$

【证明】 根据离散状态方程式（1）可得：

令 $k=0$ 有

$$\boldsymbol{x}(1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{H}u(0)$$

令 $k=1$ 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(2)&=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(1)+\boldsymbol{H}u(1)\\&=\boldsymbol{G}\left[\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{H}u(0)\right]+\boldsymbol{H}u(1)\\&=\boldsymbol{G}^2\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}u(0)+\boldsymbol{H}u(1)\end{aligned}$$

令 $k=2$ 有

$$\boldsymbol{x}(3)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(2)+\boldsymbol{H}u(2)$$

$$=\boldsymbol{G}\left[\boldsymbol{G}^{2}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}u(0)+\boldsymbol{H}u(1)\right]+\boldsymbol{H}u(2)$$

$$=\boldsymbol{G}^{3}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{G}^{2}\boldsymbol{H}u(0)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}u(1)+\boldsymbol{H}u(2)$$

$$\vdots$$

类似地有

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k-1)+\boldsymbol{H}u(k-1)$$

$$=\boldsymbol{G}^{k}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{G}^{k-1}\boldsymbol{H}u(0)+\boldsymbol{G}^{k-2}\boldsymbol{H}u(1)$$

$$+\boldsymbol{G}^{k-3}\boldsymbol{H}u(2)+\cdots+\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}u(k-2)+\boldsymbol{H}u(k-1)$$

【证毕】

将上述结论进行推广，初始时刻改为$k=h$，相应的初始状态为$\boldsymbol{x}(h)$，则其解为：

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{G}^{k-h}\boldsymbol{x}(h)+\sum_{j=h}^{k-1}\boldsymbol{G}^{k-j-1}\boldsymbol{H}u(j) \qquad （4）$$

或

$$\boldsymbol{x}(k)=\underbrace{\boldsymbol{G}^{k-h}\boldsymbol{x}(h)}_{\text{由初始状态引起的响应}}+\underbrace{\sum_{j=h}^{k-1}\boldsymbol{G}^{j}\boldsymbol{H}u(k-j-1)}_{\text{由输入信号引起的响应}} \qquad （5）$$

离散状态转移矩阵的定义

$$\boldsymbol{\Phi}(k)=\boldsymbol{G}^{k} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{\Phi}(k-h)=\boldsymbol{G}^{k-h}$$

离散状态转移矩阵的性质

性质1 $\boldsymbol{\Phi}(k+1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{\Phi}(k)$

性质2 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{I}$

性质3 $\boldsymbol{\Phi}(k-h)=\boldsymbol{\Phi}(k-h_1)\boldsymbol{\Phi}(h_1-h)$

其中 $k>h_1\geq h$

性质4 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(k)=\boldsymbol{\Phi}(-k)$

用状态转移矩阵表示离散系统的解：

式（2） $\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{x}(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{\Phi}(k-j-1)\boldsymbol{H}u(j)$

式（3） $\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{x}(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{\Phi}(j)\boldsymbol{H}u(k-j-1)$

式（4） $\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{\Phi}(k-h)\boldsymbol{x}(h)+\sum_{j=h}^{k-1}\boldsymbol{\Phi}(k-j-1)\boldsymbol{H}u(j)$

式（5） $\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{\Phi}(k-h)\boldsymbol{x}(h)+\sum_{j=h}^{k-1}\boldsymbol{\Phi}(j)\boldsymbol{H}u(k-j-1)$

【例8-21】

已知离散时间系统的状态方程

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{H}u(k)$$

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试求当初始状态 $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 和控制作用 $u(k)=1$ 时，此系统的 $\boldsymbol{\Phi}(k)$ 和 $\boldsymbol{x}(k)$。

【解】

$$\boldsymbol{\Phi}(k)=\boldsymbol{G}^k=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}^k$$

这样计算状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(k)$ 是十分困难的。

采用间接方法，将系统变换成Jordan规范型，即将$\boldsymbol{G}$变换成对角型。

令

$$\mathbf{x}(k)=\boldsymbol{T}\tilde{\mathbf{x}}(k)$$

则原系统变为

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1)=\boxed{\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{T}}\tilde{\mathbf{x}}(k)+\boxed{\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{H}}u(k)$$

相应地

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{T}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(k)=\boldsymbol{\Lambda}^{k}=\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{T}\right)^{k}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(k)=\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(k)\tilde{\boldsymbol{x}}(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(j)\underline{\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{H}}u(k-j-1) \qquad \text{(6)}$$

为此，先求矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的特征值：

$$\det\left(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}\right)=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 0.16 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+0.2)(\lambda+0.8)=0$$

$$\lambda_1=-0.2 \qquad\qquad \lambda_2=-0.8$$

因此有

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}-0.2 & 0\\ 0 & -0.8\end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(k)=\boldsymbol{\Lambda}^k=\begin{bmatrix}-0.2 & 0\\ 0 & -0.8\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}(-0.2)^k & 0\\ 0 & (-0.8)^k\end{bmatrix}$$

按照特征向量构成变换矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -0.2 & -0.8\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & \frac{5}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3}\end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(k)=\boldsymbol{\Lambda}^k=\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{T}\right)^k=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{G}^k\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{T}$$

因此有 $$\boldsymbol{\Phi}(k)=\boldsymbol{T}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(k)\boldsymbol{T}^{-1}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4(-0.2)^k-(-0.8)^k & 5(-0.2)^k-5(-0.8)^k \\ 4(-0.2)^{k+1}-(-0.8)^{k+1} & -(-0.2)^k+4(-0.8)^k \end{bmatrix}$$

下面计算式（6）右边 的第一项

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(k)\tilde{\boldsymbol{x}}(0)=\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(k)\underline{\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}(0)}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -(-0.2)^k \\ 4(-0.8)^k \end{bmatrix}$$

下面计算式（6）右边 的第二项

$$\sum_{j=0}^{k-1}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(j)\underline{\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{H}}u(k-j-1)$$

$$=\sum_{j=0}^{k-1}\begin{bmatrix}(-0.2)^j & 0\\ 0 & (-0.8)^j\end{bmatrix}\underline{\begin{bmatrix}\dfrac{4}{3} & \dfrac{5}{3}\\ -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{5}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}\cdot 1$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{5}{2}\left[1-(-0.2)^k\right]\\ -\dfrac{10}{9}\left[1-(-0.8)^k\right]\end{bmatrix}$$

等比数列的前k项求和问题！

根据式（6）得：

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(k)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-(-0.2)^k\\4(-0.8)^k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{5}{2}\left[1-(-0.2)^k\right]\\-\frac{10}{9}\left[1-(-0.8)^k\right]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{17}{6}(-0.2)^k+\frac{5}{2}\\\frac{22}{9}(-0.8)^k-\frac{10}{9}\end{bmatrix}$$

最后可得

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{T}\tilde{\mathbf{x}}(k)$$

$$=\begin{bmatrix} -\dfrac{17}{6}(-0.2)^k+\dfrac{22}{9}(-0.8)^k+\dfrac{25}{18} \\ \dfrac{17}{30}(-0.2)^k-\dfrac{88}{45}(-0.8)^k+\dfrac{7}{18} \end{bmatrix}$$

二. Z变换法

给定定常离散系统的状态方程

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{H}u(k)$$

对上式两端进行Z变换，得

$$z\boldsymbol{X}(z)-z\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{X}(z)+\boldsymbol{H}\boldsymbol{U}(z)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}\right)\boldsymbol{X}(z)=z\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{H}\boldsymbol{U}(z)$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{X}(z)=\left(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}\right)^{-1}z\boldsymbol{x}(0)+\left(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}\right)^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{U}(z)$$

对上式两端进行Z反变换，得

$$\boldsymbol{x}(k)=\mathbb{Z}^{-1}\left[\left(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}\right)^{-1}z\boldsymbol{x}(0)\right]+\mathbb{Z}^{-1}\left[\left(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}\right)^{-1}\boldsymbol{H}U(z)\right] \tag{7}$$

将上式与式（2）比较得：

$$\boldsymbol{G}^{k}\boldsymbol{x}(0)=\mathbb{Z}^{-1}\left[\left(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}\right)^{-1}z\boldsymbol{x}(0)\right]$$

$$\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{G}^{k-j-1}\boldsymbol{H}u(j)=\mathbb{Z}^{-1}\left[\left(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}\right)^{-1}\boldsymbol{H}U(z)\right]$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi}(k)=\boldsymbol{G}^{k}=\mathbb{Z}^{-1}\left[\left(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}\right)^{-1}z\right]}$$

【例8-22】已知离散时间系统的状态方程

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{H}u(k)$$

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

试求当初始状态 $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$ 和控制作用 $u(k)=1$ 时，此系统的 $\boldsymbol{\Phi}(k)$ 和 $\boldsymbol{x}(k)$。

【解】 （用Z变换法）

$$\boldsymbol{\Phi}(k)=\mathbb{Z}^{-1}\left[\left(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}\right)^{-1}z\right]$$

$$=\mathbb{Z}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.16 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} z\right\}$$

$$=\mathbb{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z+0.2)(z+0.8)}\begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ -0.16 & z \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \mathbb{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{3}\begin{bmatrix} \frac{4}{z+0.2}-\frac{1}{z+0.8} & \frac{5}{z+0.2}-\frac{5}{z+0.8} \\ -\frac{0.8}{z+0.2}+\frac{0.8}{z+0.8} & -\frac{1}{z+0.2}+\frac{4}{z+0.8} \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4(-0.2)^k-(-0.8)^k & 5(-0.2)^k-5(-0.8)^k \\ -0.8(-0.2)^k+0.8(-0.8)^k & -(-0.2)^k+4(-0.8)^k \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4(-0.2)^k-(-0.8)^k & 5(-0.2)^k-5(-0.8)^k \\ 4(-0.2)^{k+1}-(-0.8)^{k+1} & -(-0.2)^k+4(-0.8)^k \end{bmatrix}$$

再计算 $U(z)$

$$u(k)=1 \quad \Longrightarrow \quad U(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$z\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{H}U(z)=z\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\frac{z}{z-1}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{z^2}{z-1}\\ \dfrac{-z^2+2z}{z-1}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}(z)=\left(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}\right)^{-1}\left[z\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{H}U(z)\right]$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{(z^2+2)z}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)} \\ \dfrac{(-z^2+1.84z)z}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{-(17/6)z}{z+0.2}+\dfrac{(22/9)z}{z+0.8}+\dfrac{(25/18)z}{z-1} \\ \dfrac{(17/30)z}{z+0.2}+\dfrac{(-88/45)z}{z+0.8}+\dfrac{(7/18)z}{z-1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(k) = \mathbb{Z}^{-1}\left[\boldsymbol{X}(z)\right]$$

$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{17}{6}(-0.2)^k + \dfrac{22}{9}(-0.8)^k + \dfrac{25}{18} \\ \dfrac{17}{30}(-0.2)^k - \dfrac{88}{45}(-0.8)^k + \dfrac{7}{18} \end{bmatrix}$$

8.6.3 连续时间状态空间表达式的离散化

一．精确离散化

假设

1. 离散化按照一个等采样周期 $\boldsymbol{T}$ 进行；

2. 在一个采样周期 $\boldsymbol{T}$ 内，$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{u}(kT)$ 保持为常值。

$$\underbrace{\left[k\boldsymbol{T},(k+1)\boldsymbol{T}\right]}_{\boldsymbol{T}}$$

【定理】 连续时间状态空间表达式

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{cases} \qquad (8)$$

的离散化形式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}(T)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{H}(T)\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) \end{cases} \qquad (9)$$

其中

$$\boldsymbol{G}(T) = e^{\boldsymbol{A}T} \qquad \boldsymbol{H}(T) = \left(\int_0^T e^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{B}$$

$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 与式（8）完全一样

【证明】

输出方程是状态向量和输入向量的某种线性组合，离散化之后，这种组合关系不会改变。

因此，$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 是不变的。后一部分结论显然得证。

现证前一部分结论：

状态空间表达式（8）的解为：

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

令 $t_0 = kT$ $\longrightarrow$ $t = (k+1)T$ 的时间间隔内

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(kT) = \text{常量}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{x}[(k+1)T] = \boxed{e^{\boldsymbol{A}T}}\boldsymbol{x}(kT) + \boxed{\int_{kT}^{(k+1)T} e^{\boldsymbol{A}[(k+1)T-\tau]}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\tau}\,\boldsymbol{u}(kT)$$

$$\boxed{\boldsymbol{G}(T) = e^{\boldsymbol{A}T}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{H}(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\boldsymbol{A}[(k+1)T-\tau]}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\tau}$$

$$\boldsymbol{H}(T)=\int_{kT}^{(k+1)T} e^{\boldsymbol{A}[(k+1)T-\tau]}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\tau$$

$$t \stackrel{\Delta}{=} (k+1)T-\tau$$

$$\mathrm{d}\tau = -\mathrm{d}t$$

$$\tau = kT \Longrightarrow t = T$$

$$\tau = (k+1)T \Longrightarrow t = 0$$

$$\boldsymbol{H}(T)=\int_{T}^{0} e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\mathrm{d}(-t)=\left(\int_{0}^{T} e^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{B}$$

【证毕】

二. 近似离散化

当采样周期 T 较小，一般为系统时间常数的 $\frac{1}{10}$ 左右时，离散化状态方程可近似表示为：

$$\boldsymbol{x}[(k+1)T] = \underline{\left(T\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}\right)}\boldsymbol{x}(kT) + \underline{T\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}(kT)$$

即

$$\boldsymbol{G}(T) \approx T\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{H}(T) \approx T\boldsymbol{B}$$

【证明】

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{x}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{x}(t_0)}{\Delta t}$$

$$t_0=kT \quad \Rightarrow \quad t=(k+1)T$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(kT)=\lim_{T\to 0}\frac{\boldsymbol{x}[(k+1)T]-\boldsymbol{x}(kT)}{T}$$

$$\approx\frac{\boldsymbol{x}[(k+1)T]-\boldsymbol{x}(kT)}{T}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

⇩

$$\frac{\boldsymbol{x}[(k+1)T] - \boldsymbol{x}(kT)}{T} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(kT) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(kT)$$

⇩

$$\boldsymbol{x}[(k+1)T] = (T\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I})\boldsymbol{x}(kT) + T\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(kT)$$

【证毕】

【例8-23】将下面的状态方程离散化

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

【解】 1）先按精确离散化

$$\boldsymbol{G}(T)=e^{\boldsymbol{A}T}$$

$$=\mathbb{L}^{-1}\left[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\right]$$

$$= \mathbb{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}(T)=\left(\int_0^T e^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{B}$$

$$=\left\{\int_0^T\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\mathrm{d}t\right\}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}T & \frac{1}{2}\left(T+\frac{1}{2}e^{-2T}-\frac{1}{2}\right) \\ 0 & -\frac{1}{2}e^{-2T}+\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(T+\frac{1}{2}e^{-2T}-\frac{1}{2}\right) \\ -\frac{1}{2}e^{-2T}+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2）再按近似离散化

$$\boldsymbol{G}(T) \approx T\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & T \\ 0 & -2T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1-2T \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}(T) \approx T\boldsymbol{B}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix}$$

8.6.4 线性离散定常系统的能控和能观性

一. 能控性矩阵

给定单输入线性离散定常系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{h}u(k)$$

能控性矩阵为:

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{c}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{h} & \boldsymbol{G}\boldsymbol{h} & \cdots & \boldsymbol{G}^{n-1}\boldsymbol{h}\end{bmatrix}$$

系统状态完全能控 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{c}}=n$

二. 能观性矩阵

给定线性离散定常系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k) \\ \boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) \end{cases}$$

能观性矩阵为:

$$\boldsymbol{Q}_\mathrm{o}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G} \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}^{n-1} \end{bmatrix}$$

系统状态完全能观 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_\mathrm{o}=n$

【例8-24】给定单输入线性定常离散系统的状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u(k)$$

试判断其能控性。

【解】

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{h}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_c = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h} & \boldsymbol{G}\boldsymbol{h} & \boldsymbol{G}^2\boldsymbol{h} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_c = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} = 3 = n$$

系统能控。

离散系统模型在MATLAB中的表示

对于离散系统，其数学模型通常用差分方程来表示，而差分方程经过z变换以后可以得到脉冲传递函数

$$G(z)=\frac{f_1 z^m + f_2 z^{m-1} + \cdots + f_m z + f_{m+1}}{g_1 z^n + g_2 z^{n-1} + \cdots + g_n z + g_{n+1}}$$

对于线性时不变系统来说，上式中的 f_i 和 g_i 均为常数，且 $g_1 \neq 0$ 这种系统在MATLAB语言中可以方便地由其分子和分母系数所构成的两个行向量来唯一地表示。

$$num=[f_1, f_2, \cdots, f_{m+1}];$$

$$den=[g_1, g_2, \cdots, g_{n+1}];$$

$$sys=tf(num, den, Ts);$$

其中的Ts表示离散系统的采样周期。

对于线性离散系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) \end{cases}$$

只要先正确地输入四个系数矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ ，然后调用MATLAB的专用函数ss( )函数，以获得状态空间模型，其格式为

$$\boxed{\textbf{SYS = SS(A, B, C, D, Ts)}}$$

其中的Ts表示离散系统的采样周期。

连续系统离散化的MATLAB方法

函数c2d( )的调用格式

$$\boxed{sysd = \mathrm{c2d}(sysc, T_s)}$$

或

$$\boxed{sysd = \mathrm{c2d}(sysc, T_s, \mathrm{method})}$$

其中‘method’表示离散化的方法,具体为：

‘zoh’—— 采用零阶保持器

‘foh’ —— 采用一阶保持器

‘tustin’ —— 采用双线性逼近法

当其中的‘method’缺省时，表示离散化方法默认为‘zoh’。

【例25】 已知连续系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}$$

在MATLAB中用零阶保持器方法写出其连续状态方程与离散化状态方程。

【解】

编程序如下

```
num=[1];
den=[1 3 2];
sys=tf(num,den);
sys1=ss(sys);
sys2=c2d(sys1,1);
```

运行结果

```
>> lisanhua
>> sys

Transfer function:
      1
-------------
s^2 + 3 s + 2
```

```
>> sys1
a =
        x1  x2
   x1  -3  -2
   x2   1   0
 b =
        u1
   x1   1
   x2   0
 c =
        x1  x2
   y1   0   1
 d =
        u1
   y1   0
 Continuous-time model.
```

```
>> sys2
a =
              x1         x2
   x1  -0.09721   -0.4651
   x2    0.2325    0.6004
b =
            u1
   x1  0.2325
   x2  0.1998
 c =
       x1  x2
   y1   0   1
 d =
       u1
   y1   0
 Sampling time: 1
Discrete-time model.
```

本次课内容总结

离散时间系统的状态空间表达式

离散时间系统状态方程的解

连续时间状态空间表达式的离散化

线性离散定常系统的能控和能观性

离散系统模型在MATLAB中的表示

连续系统离散化的MATLAB方法