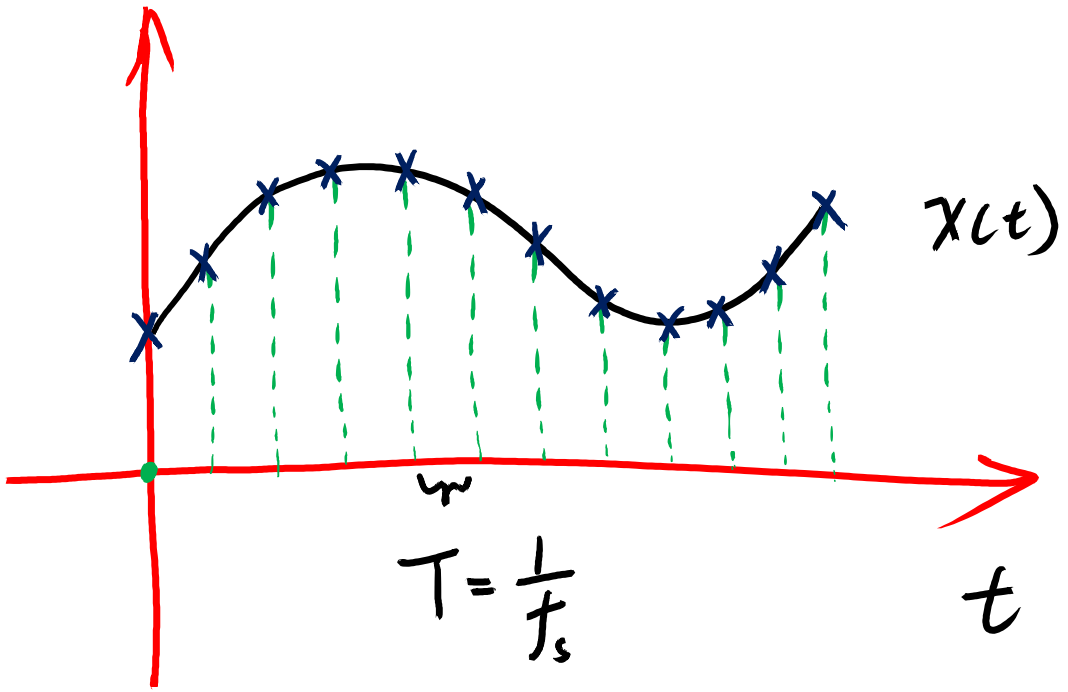
① 对 $x(t)$ 以 f_s 为频率采样，得到 $x[n]$，$n=0,1,\cdots,N-1$

N 个采样点，N 为偶数



② 用 MATLAB 对 $x[n]$，$n=0,\cdots,N-1$ 进行 FFT，得 $X[k]$，$k=0,\cdots,N-1$

$$X = fft(x)$$

③ X 是一列复数，它与 x 有什么关系呢？

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\cdot e^{j(2\pi/N)kn}$$

← 必须展开成三角函数才能得到频谱！

$$= \frac{1}{N}\left(X[0]\cdot e^{j(2\pi/N)n\cdot 0} + X[1]\cdot e^{j(2\pi/N)n\cdot 1} + \cdots + X[N/2]\cdot e^{j(2\pi/N)n\cdot N/2} + \cdots + X[N-1]\cdot e^{j(2\pi/N)n\cdot(N-1)} \right)$$

$e^{j(2\pi/N)n\cdot 0} = 1$

$e^{j(2\pi/N)n\cdot N/2} = e^{j\pi n}$

$$= \frac{1}{N}\left(X[0] + X[1]e^{j(2\pi/N)n\cdot 1} + X[2]e^{j(2\pi/N)n\cdot 2} + \cdots + X[N/2]e^{j\pi n} + \cdots + X[N-2]e^{j(2\pi/N)n\cdot(N-2)} + X[N-1]e^{j(2\pi/N)n\cdot(N-1)} \right)$$

设 $X[k] = a_k + ib_k$，

只需 $X[k]e^{j(2\pi/N)n\cdot k} + X[N-k]e^{j(2\pi/N)n(N-k)}$

$= X[k]e^{j(2\pi/N)n\cdot k} + X[N-k]e^{-j(2\pi/N)nk}$

易证共轭

$= a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{N}n\right) + b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{N}n\right)$

$$= \frac{1}{N}\left[a_0 \right.$$ 直流

$$+ 2a_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\cdot 1\right) - 2b_1 \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\cdot 1\right)$$ 基频

$$+ 2a_2 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\cdot 2\right) - 2b_2 \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\cdot 2\right)$$ 2倍频

$$\vdots$$

$$+ 2a_{\frac{N}{2}-1} \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\cdot\left(\frac{N}{2}-1\right)\right) - 2b_{\frac{N}{2}-1} \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\cdot\left(\frac{N}{2}-1\right)\right)$$ $\left(\frac{N}{2}-1\right)$倍频

$$\left. + a_{\frac{N}{2}} \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\cdot\frac{N}{2}\right)\right]$$ $\frac{N}{2}$倍频

易证

$X[0], X[\frac{N}{2}]$ 虚部为0

将 $n = f_s \cdot t$ 代入得：

$$x(t) = \frac{a_0}{N} + \frac{2\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{N} \cos\left(2\pi \frac{f_s}{N} \cdot 1t + \phi_1\right) + \frac{2\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{N} \cos\left(2\pi \frac{f_s}{N} \cdot 2t + \phi_2\right) + \cdots + \frac{2\sqrt{a_{\frac{N}{2}-1}^2 + b_{\frac{N}{2}-1}^2}}{N} \cos\left(2\pi \frac{f_s}{N} \cdot \left(\frac{N}{2}-1\right)t + \phi_{\frac{N}{2}-1}\right) + \frac{a_{\frac{N}{2}}}{N} \cos\left(2\pi \frac{f_s}{N}\left(\frac{N}{2}\right)t\right)$$

基频为 f_s/N

各频率幅值为：

- $\frac{|X[0]|}{N}$ 基频
- $\frac{2|X[1]|}{N}$ 2倍频
- $\frac{2|X[\frac{N}{2}-1]|}{N}$ $(\frac{N}{2}-1)$倍频
- $\frac{|X[\frac{N}{2}]|}{N}$ $\frac{N}{2}$倍频