第九章 线性定常系统的状态空间综合法

目　录

控制系统研究的两大课题

控制系统的分析

状态空间描述

系统响应分析

系统结构分析

能控性　能观性

稳定性

控制系统的综合

控制系统的设计

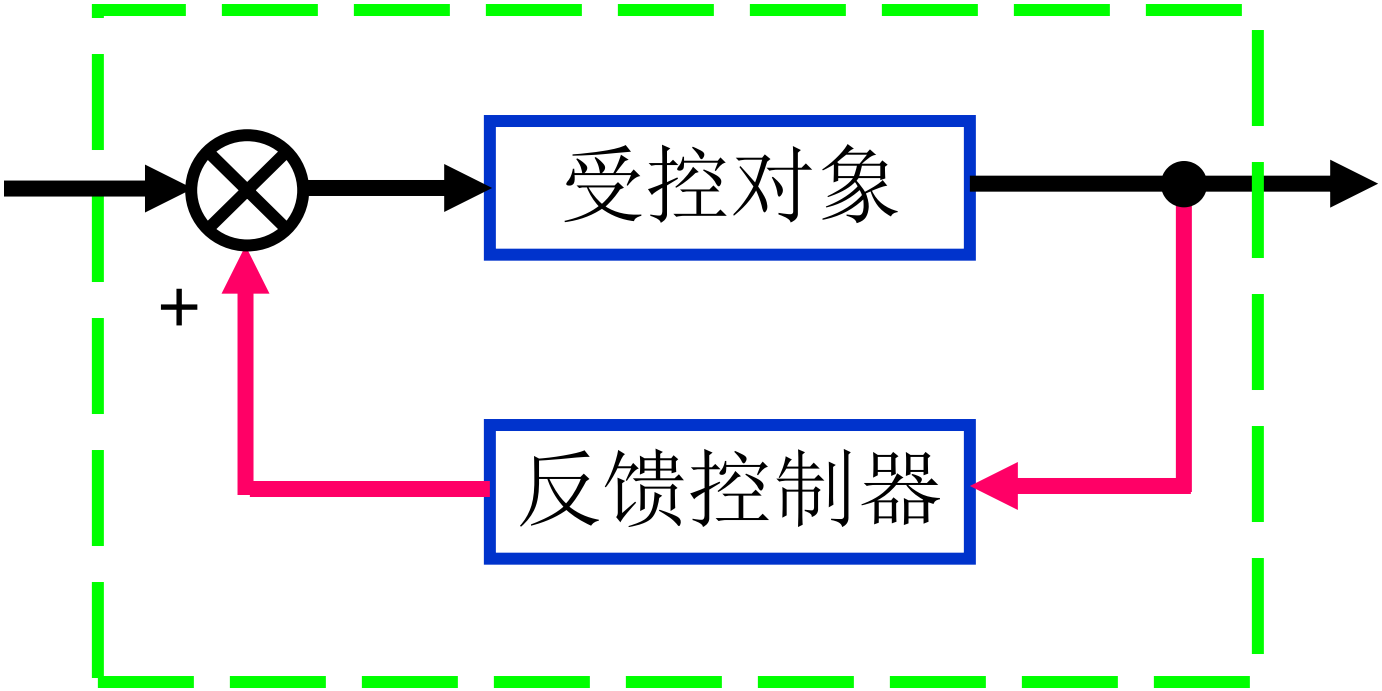
反馈的思想

状态反馈　输出反馈

动态补偿　观测器设计

解耦设计（略）

9.1 线性反馈控制系统的结构分析



闭环控制系统

一．状态反馈的结构

受控对象：
$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\end{cases}$$

若 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$，则受控系统为：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

简记为：
$$\sum\nolimits_0 = \left(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\right)$$

上式中： $\boldsymbol{x} \in R^n \quad \boldsymbol{u} \in R^r \quad \boldsymbol{y} \in R^m$

$\boldsymbol{A}$ —— $n \times n$ 矩阵

$\boldsymbol{B}$ —— $n \times r$ 矩阵

$\boldsymbol{C}$ —— $m \times n$ 矩阵

$\boldsymbol{D}$ —— $m \times r$ 矩阵

取线性状态反馈控制律

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$$

其中：$\boldsymbol{v}$ —— $r \times 1$ 维参考输入

$\boldsymbol{K}$ —— $r \times n$ 维状态反馈增益矩阵

对于单输入系统，$\boldsymbol{K}$ 为 $1 \times n$ 维的行向量

闭环系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{v} \end{cases}$$

即

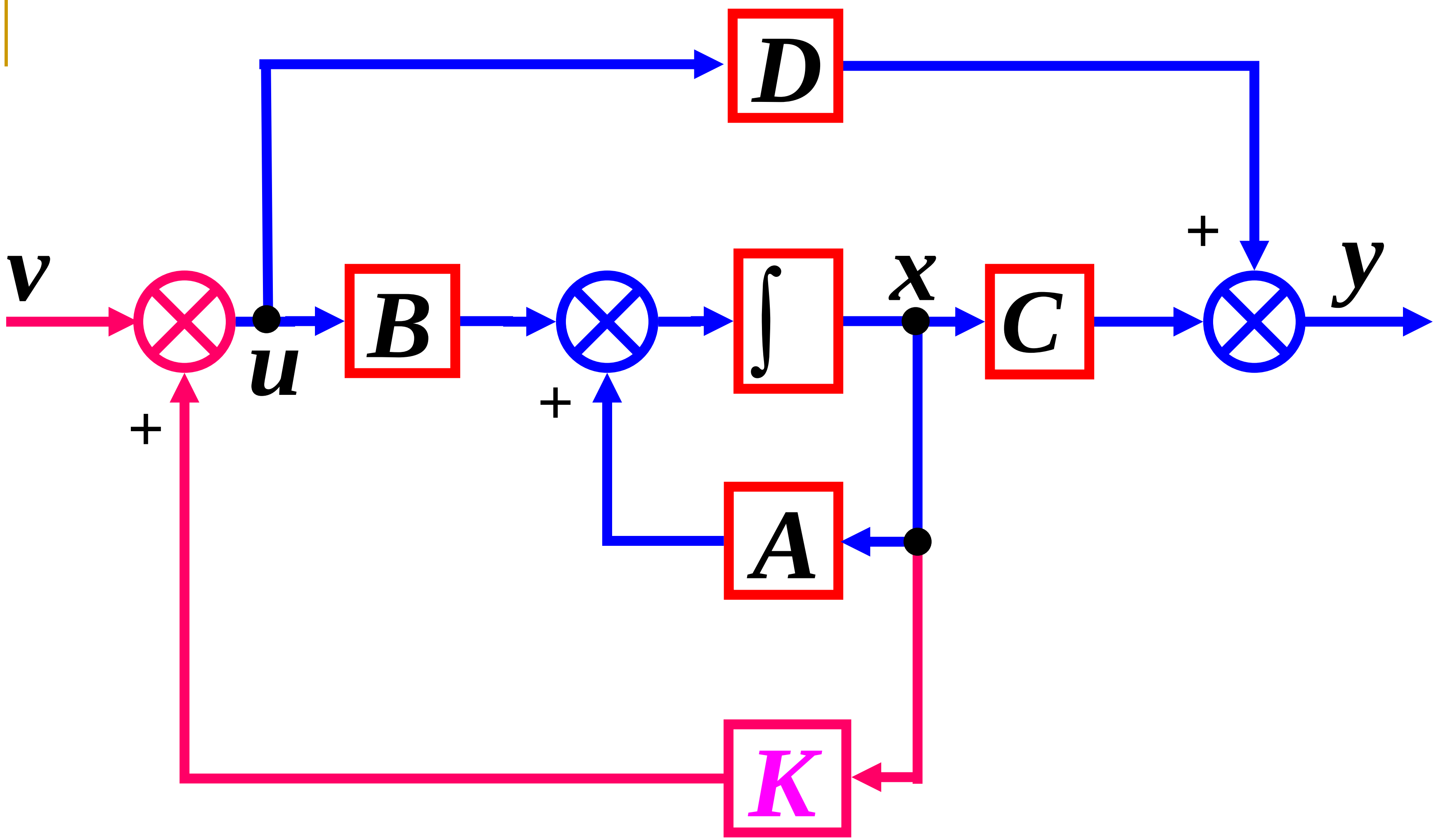
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{v} \end{cases}$$

若 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$，则闭环系统写为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{Bv}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{Cx}\end{cases}$$

简记为：

$$\sum\nolimits_{K}=\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\right)$$



状态反馈闭环系统的结构图

闭环系统的传递函数为：

$$W_{\boldsymbol{K}}(s)=\boldsymbol{C}\left[s\boldsymbol{I}-\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\right)\right]^{-1}\boldsymbol{B}$$

可见，状态反馈矩阵$\boldsymbol{K}$的引入，并不增加系统的维数，但可以通过选择不同的$\boldsymbol{K}$，来自由地改变系统的特征值，从而使系统获得所要求的性能。

二. 输出反馈的结构

输出反馈是经典控制理论所讨论的重点。

受控对象：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

取输出线性反馈控制律

$$u = Hy + v$$

其中：$\boldsymbol{v}$ —— $r\times1$维参考输入

$\boldsymbol{H}$ —— $r\times m$维输出反馈增益矩阵

对于单输出系统，$\boldsymbol{H}$为$r\times1$维的列向量

将系统的输出方程代入到输出反馈控制律表达式

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{H}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v} \\
&= \boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\right)+\boldsymbol{v} \\
&= \boldsymbol{H}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{H}\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}
\end{aligned}
$$

$$u = \left(I - HD\right)^{-1}\left(HCx + v\right)$$

$$\dot{x} = Ax + B\underline{\left(I - HD\right)^{-1}\left(HCx + v\right)}$$

$$= \left[A + B\left(I - HD\right)^{-1} HC\right]x + B\left(I - HD\right)^{-1} v$$

$$y = Cx + D\underline{\left(I - HD\right)^{-1}\left(HCx + v\right)}$$

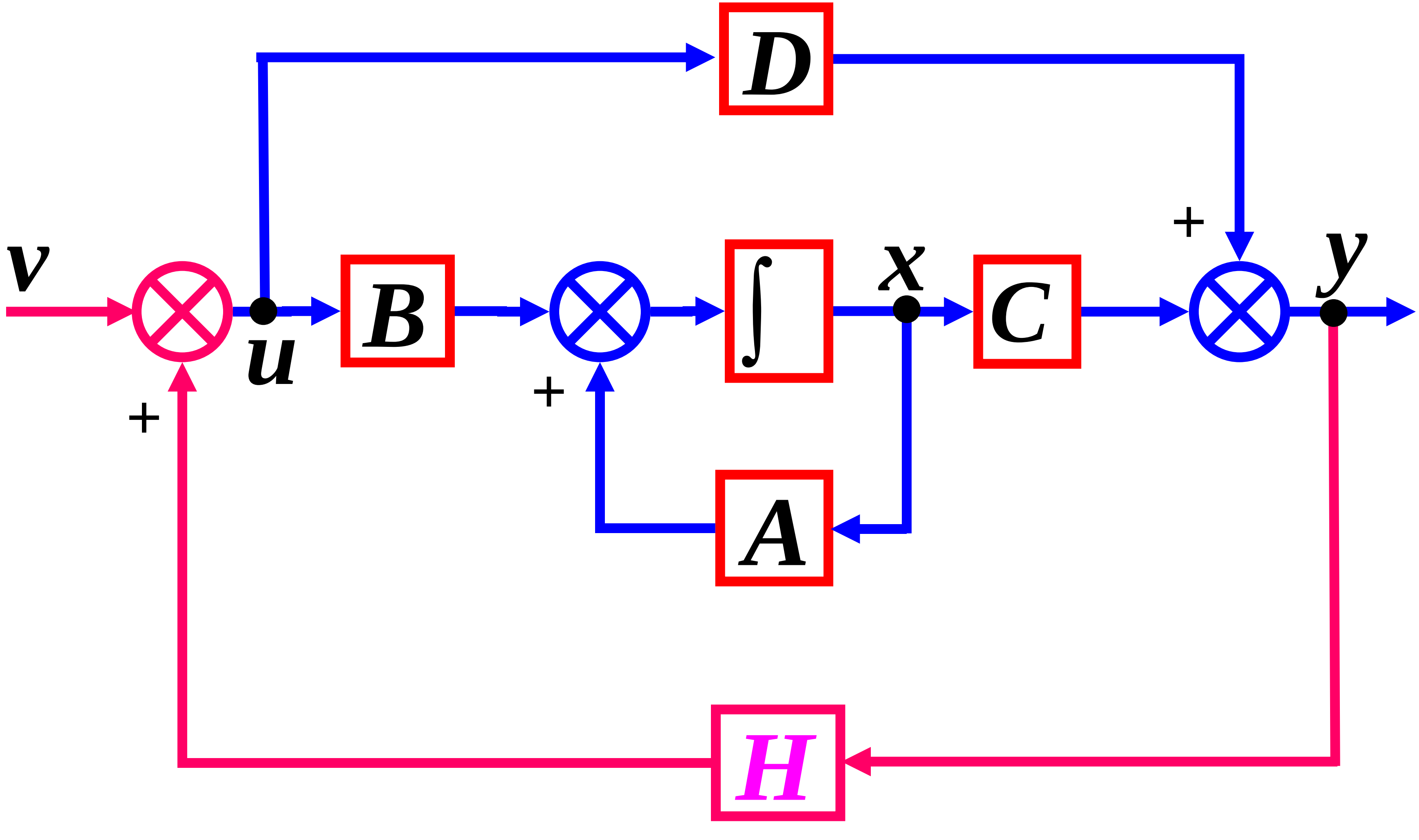
$$= \left[C + D\left(I - HD\right)^{-1} HC\right]x + D\left(I - HD\right)^{-1} v$$

若 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$，则闭环系统写为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BHC})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{Bv} \\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{Cx} \end{cases}$$

$$\sum\nolimits_{H}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BHC},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$$

可以选择输出反馈增益矩阵$\boldsymbol{H}$，也可以改变闭环系统的特征值，从而改变闭环系统的性能。



输出反馈闭环系统的结构图

输出反馈系统的传递函数矩阵为：

$$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{H}}(s)=\boldsymbol{C}\left[s\boldsymbol{I}-\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BHC}\right)\right]^{-1}\boldsymbol{B}$$

状态反馈与输出反馈的比较

$$W_K(s) = C\left[sI - \left(A + BK\right)\right]^{-1} B$$

$$W_H(s) = C\left[sI - \left(A + BHC\right)\right]^{-1} B$$

- 输出反馈中的HC相当于状态反馈中的K；
- 由于$m < n$，所以H可供选择的自由度小于K；
- 一般情况下，输出反馈相当于部分状态反馈，

  只有当$C = I$时，输出反馈才等价于全状态反馈；
- 状态反馈效果较好，输出反馈技术实现较容易。

三. 动态补偿器的结构

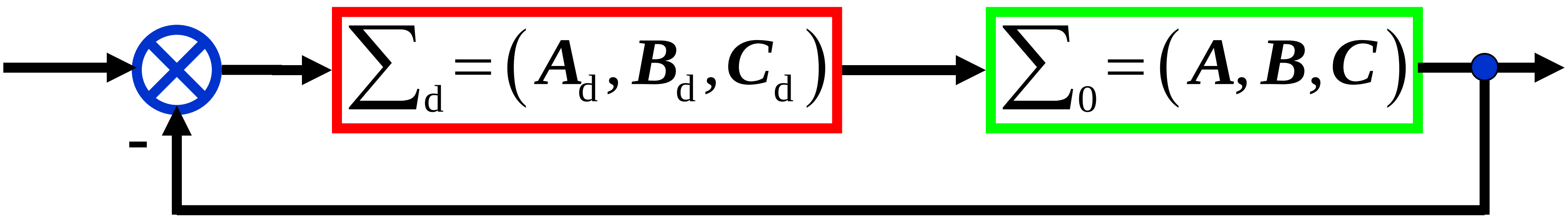
状态反馈和**输出反馈**的**共同特点**是：

- 不增加新的状态变量，开环与闭环同维数；
- 反馈增益矩阵均为常数矩阵；
- 反馈结构为线性反馈。

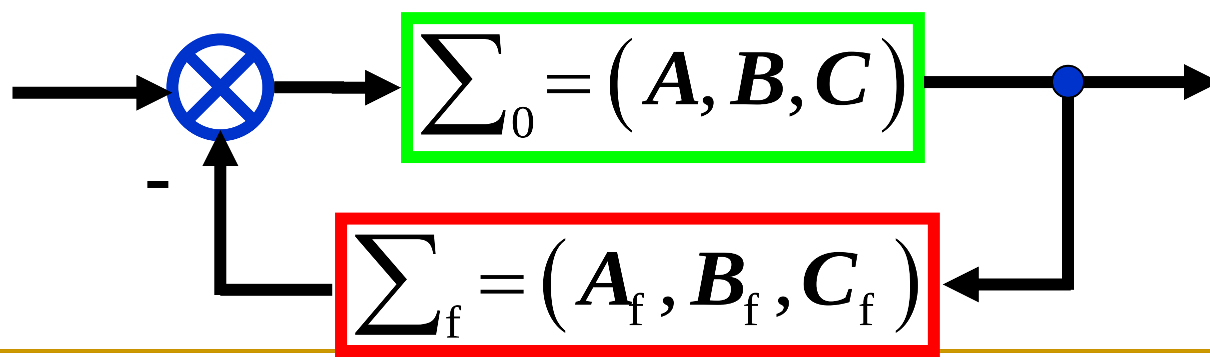
在更加复杂的情况下，常常需要引入一个动态子系统来改善系统的性能。这种动态子系统称为**动态补偿器**。

动态补偿器与受控系统的连接方式分为：

- 串联连接



- 反馈连接



输出反馈动态补偿器

被控系统
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases} \qquad (1)$$

的输出反馈动态补偿器形式为：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{v} \end{cases} \qquad (2)$$

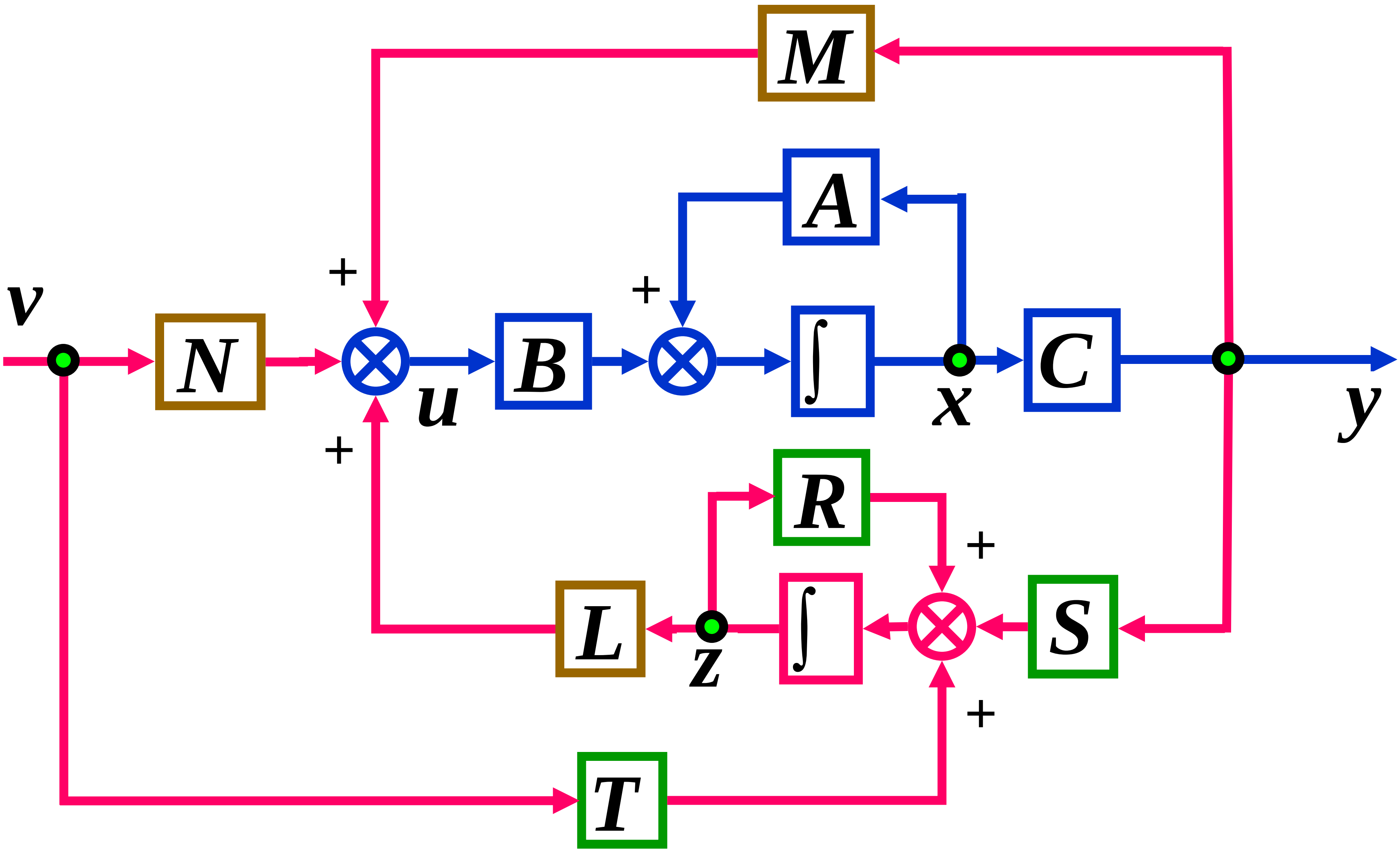
$\boldsymbol{z}$ —— q 维动态补偿器的状态向量

q —— 动态补偿器的阶次

$\boldsymbol{v}$ —— r 维外部参考输入

注释

当 $q = 0$ 时，输出反馈动态补偿器就变成静态输出反馈控制律。



带有输出反馈动态补偿器的闭环系统结构图

引入增广状态向量 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\
&= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{L}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{v}\right) \\
&= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{L}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{M}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{N}\boldsymbol{v} \\
&= \left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{M}\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{L}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{N}\boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

$$\dot{z} = Rz + Sy + Tv$$

$$= SCx + Rz + Tv$$

增广系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(A + BMC\right)x + BLz + BNv \\ \dot{z} = SCx + Rz + Tv \end{cases}$$

即

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix}}_{\dot{x}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} A + BMC & BL \\ SC & R \end{bmatrix}}_{A_e} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}}_{x_e} + \underbrace{\begin{bmatrix} BN \\ T \end{bmatrix}}_{B_e} v$$

进一步写为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{e}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{e}} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{e}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{e}} \end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BMC} & \boldsymbol{BL} \\ \boldsymbol{SC} & \boldsymbol{R} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{BN} \\ \boldsymbol{T} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

四. 闭环系统的能控性和能观性

【定理1】 状态反馈不改变受控系统$\sum_0 = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$的能控性，但是不能保证系统的能观性不变。

【证明】 只证能控性不变。

只要证明受控系统和状态反馈闭环系统的能控性矩阵的秩相同即可。

受控系统和状态反馈闭环系统的能控性矩阵分别为:

$$Q_{c0}=\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$Q_{cK}=\begin{bmatrix} B & (A+BK)B & (A+BK)^2B & \cdots & (A+BK)^{n-1}B \end{bmatrix}$$

比较这两个矩阵的各个分块

第一分块B相同。

Q_{cK}的第二分块 $(A+BK)B=\underline{AB}+\underline{B}KB$

由于KB是一个常数矩阵，因此$(A+BK)B$的列向量可表示成$\begin{bmatrix}\underline{B} & \underline{AB}\end{bmatrix}$的线性组合。

同理，$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{cK}}$的第三分块为

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^2\boldsymbol{B}\\
&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{B}\\
&=(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{B}\\
&=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}\\
&=\underline{\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}}+\underline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{B})+\underline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})+\underline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{B})
\end{aligned}
$$

所以$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^2\boldsymbol{B}$的列向量也可用$\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$的线性组合来表示。

其余各个分块的情况完全类似。

所以，$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{cK}}$可以看作是由$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{c0}}$经过初等变换而得到的，

而矩阵的初等变换并不改变它的秩，

所以,矩阵$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{cK}}$和$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{c0}}$的秩相同。

这就证明了状态反馈不改变受控系统的能控性。

状态反馈不保持系统的能观性。举例如下：

【例9-1】 考察系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{CA} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{o}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

显然有

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{o}} = 2 = n$$

开环系统是能观的。

引入状态反馈

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$$

可得闭环系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \right\} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{v} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

即得闭环系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{v} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

对于这个闭环系统

$$\boldsymbol{C}_K = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_K \boldsymbol{A}_K = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{Ko}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_K \\ \boldsymbol{C}_K \boldsymbol{A}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

显然有

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{Ko}} = 1 < n = 2$$

闭环系统是不完全能观的。

【例9-2】考虑下述系统在引入状态反馈前后的能控和能观性。

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

状态反馈控制律

$$u = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

【解】先列出相关的矩阵。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Ab}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{cA}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

先验证开环系统的能控性和能观性。

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{c}} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{Ab}\end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix} = 2$$

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{o}} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{cA}\end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix} = 2$$

说明开环系统既能控又能观。

引入状态反馈后

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{K})\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{K})=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$$

相应的有

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{Kc}}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b} & (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{K})\boldsymbol{b}\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=2$$

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{Ko}}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{c}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{bK})\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=1$$

可见，在引入状态反馈后，闭环系统的能控性保持不变，但却破坏了系统的能观性。

事实上，这反映在系统的传递函数出现了零极点对消现象。

$$\boldsymbol{W}_0(s)=\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1\\ -1 & s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\frac{s}{s^2-1}$$

$$\boldsymbol{W}_{\mathrm{K}}(s)=\boldsymbol{c}\left[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{bK})\right]^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\frac{s}{s^2}=\frac{1}{s}$$

【定理2】 输出反馈不改变受控系统$\sum_0=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$的能控性和能观性。

【证明】 先证闭环系统的能控性不变：

输出反馈闭环系统方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BHC})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{Bu}$$

若把$\boldsymbol{HC}$看成等效的状态反馈矩阵$\boldsymbol{K}$，那么状态反馈便保持系统的能控性不变。

再证闭环系统的能观性不变：

分别写出开环系统和输出反馈闭环系统的能观性矩阵：

$$Q_{o0}=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$Q_{oH}=\begin{bmatrix} C \\ C(A+BHC) \\ \vdots \\ C(A+BHC)^{n-1} \end{bmatrix}$$

仿照前一定理的证明方法，同样可以把$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{oH}}$看作由$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{o}0}$经过初等变换所得到的结果。而初等变换不改变矩阵的秩，因此能观性保持不变。

本次课内容总结

- 状态反馈的结构
- 输出反馈的结构
- 动态补偿器的结构
- 闭环系统的能控性和能观性