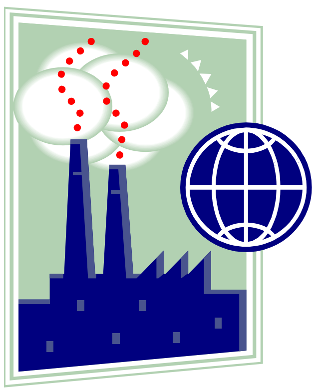
第十章 系统的运动稳定性

目 录



10.1 李雅普诺夫意义下的稳定性

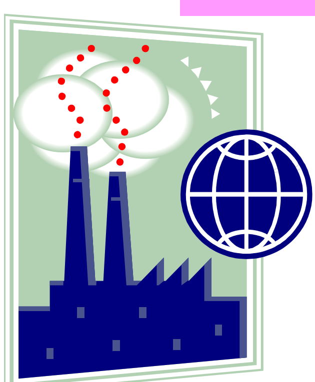
控制系统的稳定性是系统设计的首要问题。

单输入-单输出线性定常系统

Routh判据

Nyquist判据

Hurwitz判据



非线性系统和时变系统

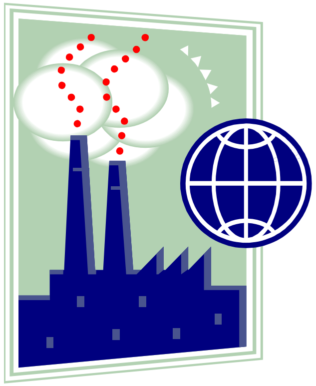
李雅普诺夫方法

李雅普诺夫第一法

李雅普诺夫第二法

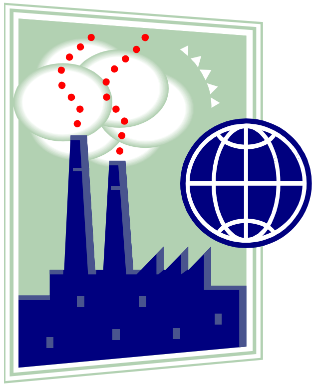
间接法

直接法



- 线性系统的稳定性只决定于系统的结构和参数，而与系统的初始条件及外界扰动无关。

- 非线性系统的情况要复杂得多。



10.1.1 系统状态的运动及平衡状态

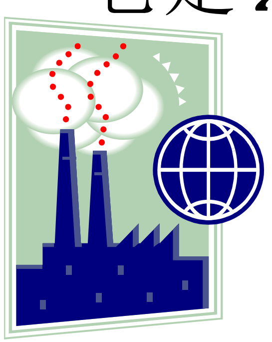
设所研究系统的齐次状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) \qquad (1)$$

其中，$\boldsymbol{x}$ —— n 维状态向量

$\boldsymbol{f}$ —— 与 $\boldsymbol{x}$ 同维的向量函数，

它是 $\boldsymbol{x}$ 的各元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和时间 t 的函数。



一般情况下，f 是时变的非线性函数，如果不显含 t，则为定常的非线性函数。

假设方程式（1）在给定初始条件(t_0, x_0)下，有唯一解

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}(t;\boldsymbol{x}_0,t_0) \qquad (2)$$

其中，

$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{\Phi}(t_0;\boldsymbol{x}_0,t_0)$ —— 初始时刻 t_0 的状态

t —— 从t_0开始观察的时间变量

式（2）实际上描述了系统（1）在 n 维状态空间中

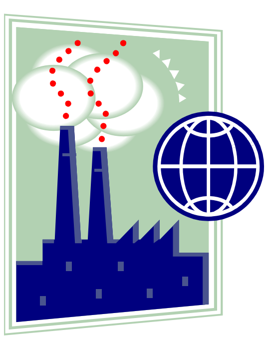
从初始条件 (t_0, x_0) 出发的一条状态运动的轨迹，

简称为**运动轨线**或**状态轨线**。

若系统（1）存在状态向量 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$，对所有时间 t，

都有下式成立

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}, t) \equiv \boldsymbol{0} \qquad （3）$$



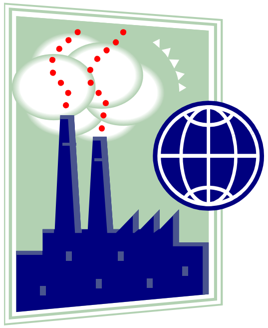
则称 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$ 为系统的**平衡状态**。

对于一个任意系统，不一定都存在平衡状态。

有时即使存在也未必是唯一的。例如对线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

- 当 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵时，满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}} \equiv \boldsymbol{0}$ 的解 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{0}$ 是系统唯一存在的平衡状态。
- 当 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵时， 系统将有无穷多个平衡状态。



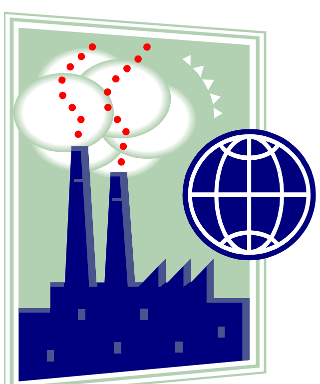
对于一个非线性系统，通常可有一个或多个平衡状态，它们是由方程式（3）所确定的常值解。

$$\boxed{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}},t)\equiv \boldsymbol{0}}$$

例如，系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

就有三个平衡状态：



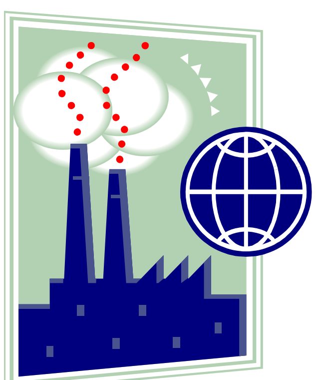
$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_{\mathrm{e}2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_{\mathrm{e}3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

△ 由于任意一个已知的平衡状态，都可以通过坐标变换将其移到坐标原点 $\boldsymbol{x}_\mathrm{e}=\boldsymbol{0}$ 处。所以，今后就只讨论系统在坐标原点处的稳定性就可以了。

注意：稳定性问题都是相对于某个平衡状态而言的。

线性定常系统，由于只有唯一的一个平衡点，所以才笼统地讲所谓的系统稳定性问题。

对其余系统，则由于可能存在多个平衡点，而不同平衡点可能表现出不同的稳定性，因此必须逐个分别讨论。



10.1.2 稳定性的几个定义

用$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}\|$表示状态向量$\boldsymbol{x}$与平衡状态$\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$的距离，

用点集$S(\varepsilon)$表示以$\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$为中心，$\varepsilon$为半径的超球体，

那么$\boldsymbol{x}\in S(\varepsilon)$，则表示

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}\|\le\varepsilon$$

式中

$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}\|$—— 欧几里德范数

在 n 维状态空间中，有

$$\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}\right\|=\sqrt{\left(x_{1}-x_{1\mathrm{e}}\right)^{2}+\left(x_{2}-x_{2\mathrm{e}}\right)^{2}+\cdots+\left(x_{n}-x_{n\mathrm{e}}\right)^{2}}$$

当 ε 很小时，称 $s(\varepsilon)$ 为 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$ 的邻域。因此，若有 $\boldsymbol{x}_{0}\in s(\delta)$，则意味着 $\left\|\boldsymbol{x}_{0}-\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}\right\|\leq\delta$。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$$

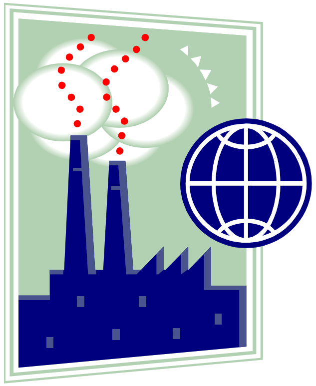
同理，若方程式（1）的解 $\boldsymbol{\Phi}(t;\boldsymbol{x}_0,t_0)$位于球域 $s(\varepsilon)$ 内，便有：

$$\left\| \boldsymbol{\Phi}(t;\boldsymbol{x}_0,t_0) - \boldsymbol{x}_\mathrm{e} \right\| \le \varepsilon \qquad t \ge t_0$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$$

上式表明齐次方程（1）由初态 $\boldsymbol{x}_0$ 或短暂扰动所引起的自由响应是有界的。

李雅普诺夫根据系统自由响应是否有界把系统的稳定性定义为四种情况。



一. 李雅普诺夫意义下稳定

如果由方程式（1）描述的系统对于任意选定的实数$\varepsilon > 0$， 都对应存在另一个实数$\delta(\varepsilon, t_0) > 0$，使当 $\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_\mathrm{e}\| \le \delta(\varepsilon, t_0)$ 时，

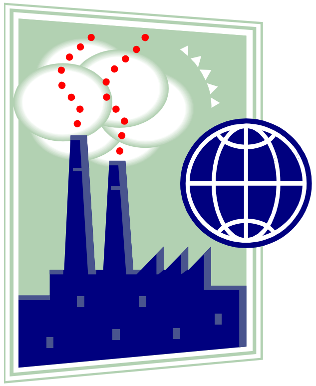
从任意初态 $\boldsymbol{x}_0$ 出发的解都满足

$$\|\boldsymbol{\Phi}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0) - \boldsymbol{x}_\mathrm{e}\| \le \varepsilon \qquad t_0 \le t < \infty$$

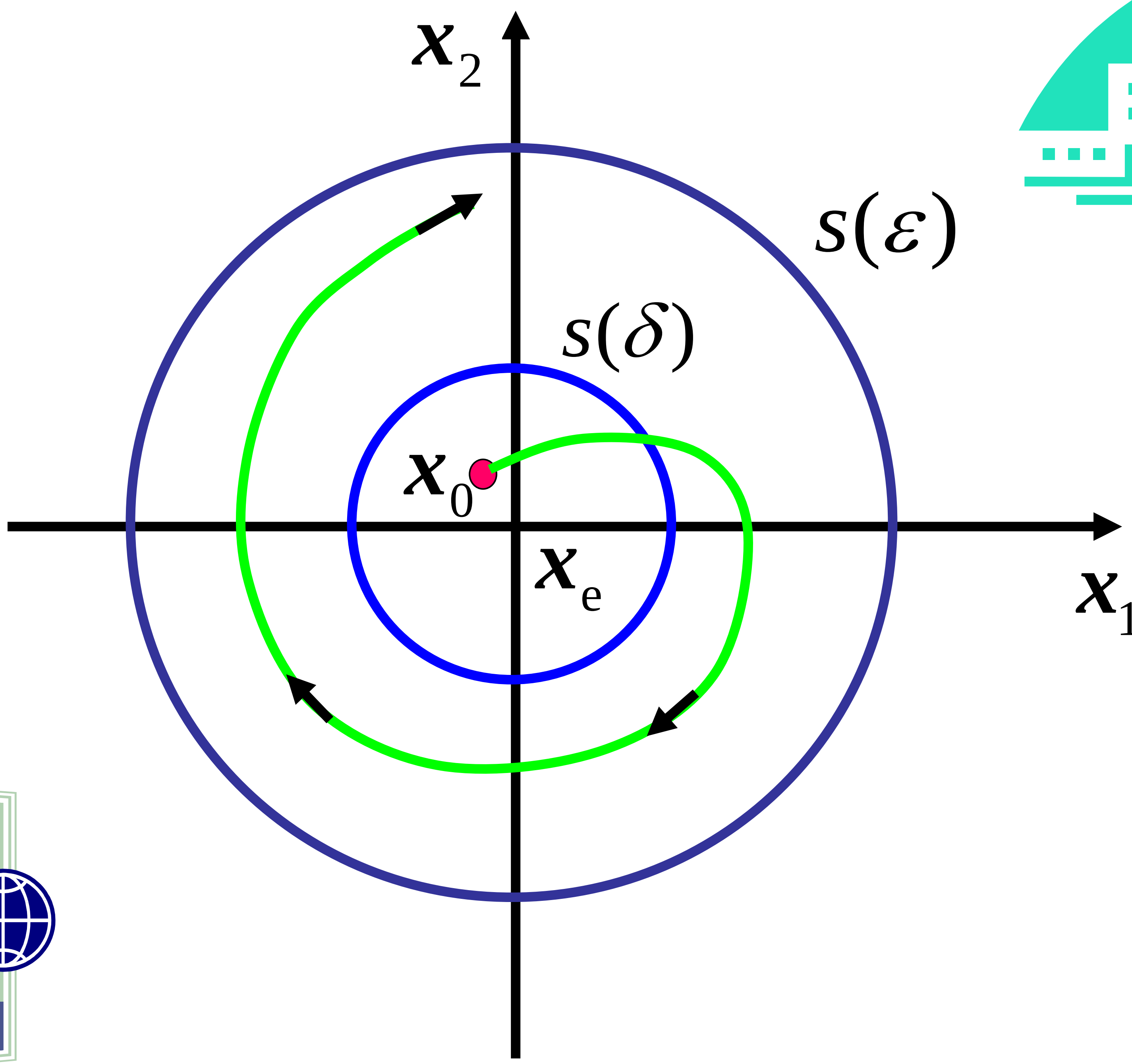
则称平衡状态 $\boldsymbol{x}_\mathrm{e}$为李雅普诺夫意义下稳定。

其中实数δ与ε有关，一般情况下，也与t_0有关。

如果δ与t_0无关，则称这种平衡状态是一致稳定的。



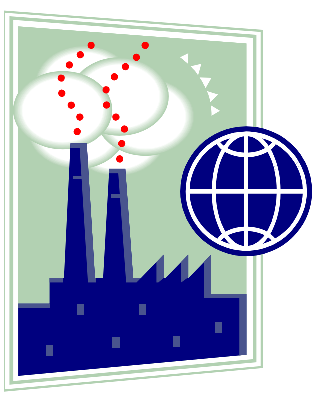
下图表示二阶系统稳定的平衡状态 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$，以及从初始状态 $\boldsymbol{x}_0 \in s(\delta)$ 出发的轨线 $\boldsymbol{x} \in s(\varepsilon)$。



x_2
$s(\varepsilon)$
$s(\delta)$
x_0
x_e
x_1

从图可知，若对应于每一个$s(\varepsilon)$，都存在一个$s(\delta)$，使得当 t 无限增长时， 从 $s(\delta)$ 出发的状态轨线（系统的响应）总离不开$s(\varepsilon)$， 即系统响应的幅值是有界的，则称平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 为**李雅普诺夫意义下稳定**。简称为**稳定**。

也可称为**BIBO稳定**。

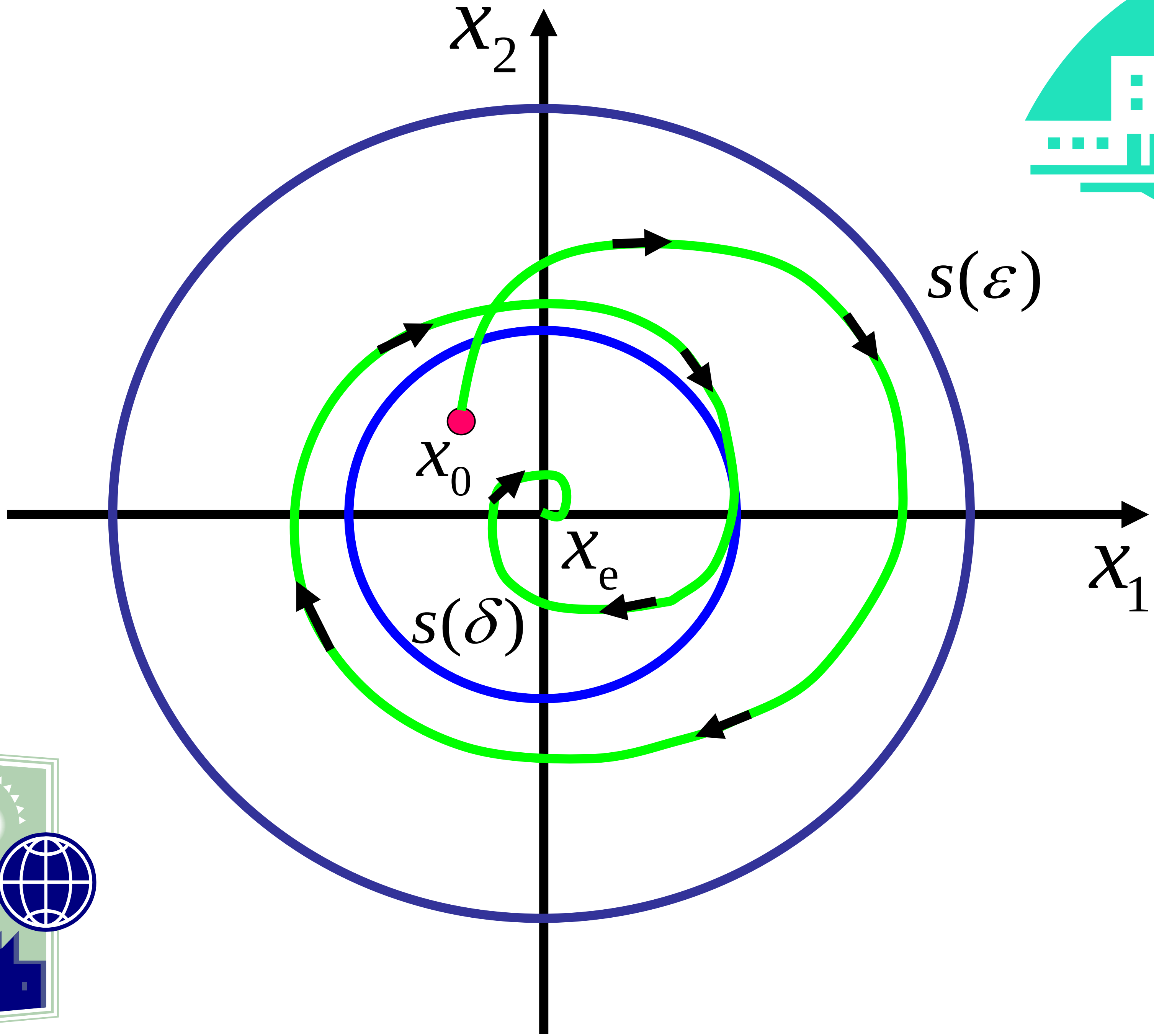


Boundary **I**nput **B**oundary **O**utput

二. 渐近稳定

如果平衡状态 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$ 是稳定的，而且当 t 无限增长时， 轨线不仅不超出 $S(\varepsilon)$，而且最终收敛于 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$ ，则称这种平衡状态 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$ 为**渐近稳定**。

下图表示二阶系统渐近稳定的平衡状态。

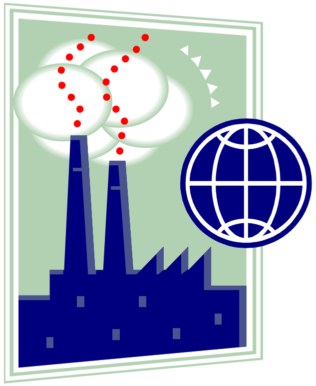


x_2
$s(\varepsilon)$
x_0
x_e
x_1
$s(\delta)$

从工程意义上来讲，渐近稳定比稳定更为重要。

渐近稳定是一个局部的概念，通常，只确定某一状态的渐近稳定性并不意味着整个系统就能正常工作。

因此，如何确定渐近稳定的最大区域，并且尽可能扩大其范围是尤其重要的。

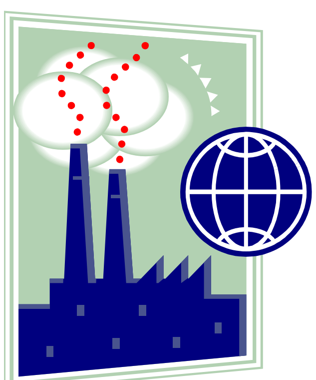


三. 大范围渐近稳定

如果平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$是稳定的，而且从状态空间中所有初始状态出发的轨线都具有渐近稳定性， 则称这种平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$为大范围渐近稳定。

- 大范围渐近稳定的**必要条件**是在整个状态空间只有一个平衡状态。

- 对于线性系统来说，如果平衡状态是渐近稳定的则必然也是大范围渐近稳定的。

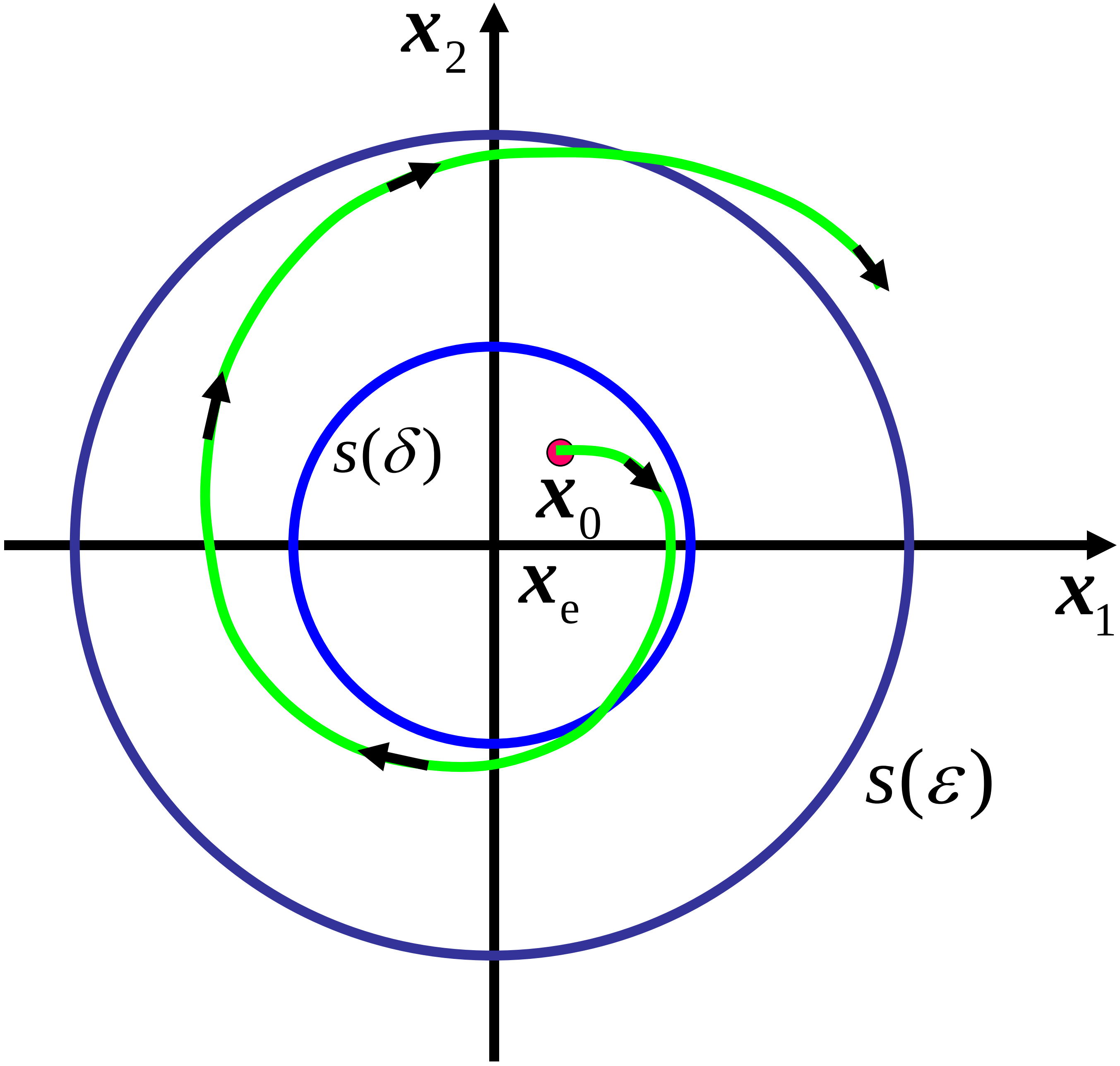


对于非线性系统来说，渐近稳定的平衡状态$\boldsymbol{x}_e$的球域 $s(\delta)$ 一般是不大的，常称这种平衡状态是**小范围渐近稳定的**。

局部渐近稳定

四. 不稳定

如果对于某个实数 $\varepsilon > 0$ 和任一实数 $\delta > 0$，不管 δ 这个实数多么小，由 $s(\delta)$ 内出发的状态轨线，至少有一条轨线越过 $s(\varepsilon)$，则称这种平衡状态 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$ **不稳定**。


x_2
$s(\delta)$
x_0
x_e
x_1
$s(\varepsilon)$

总结

球域$s(\delta)$限制着初始状态$\boldsymbol{x}_0$的取值， 球域$s(\varepsilon)$规定了系统自由响应$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}(t;\boldsymbol{x}_0,t_0)$的边界。

简单地说：

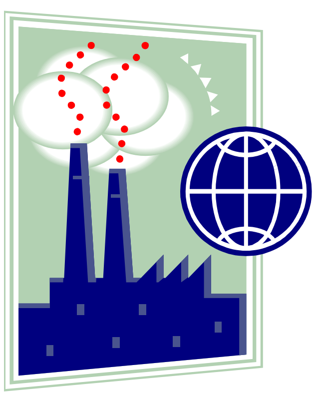
- 如果$\boldsymbol{x}(t)$为有界，则称 $\boldsymbol{x}_\mathrm{e}$ 为 **BIBO稳定**。
- 如果$\boldsymbol{x}(t)$不仅有界，而且有$\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_\mathrm{e}$，即收敛于原点，则称 $\boldsymbol{x}_\mathrm{e}$ **渐近稳定**。
- 如果$\boldsymbol{x}(t)$为无界，则称 $\boldsymbol{x}_\mathrm{e}$**不稳定**。

- 在经典控制理论中，只有渐近稳定的系统才称作稳定系统。只在李雅普诺夫意义下稳定，但不是渐近稳定的系统则称作临界稳定系统，这在工程上属于不稳定系统。

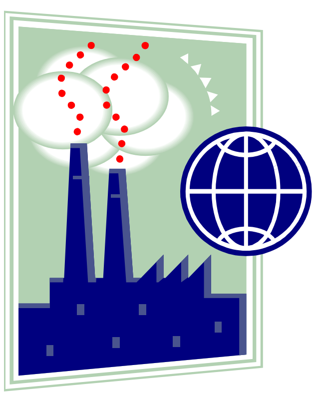
BIBO稳定

10.2 李雅普诺夫第一方法

李雅普诺夫第一方法又称为间接法。 它的基本思路是通过系统状态方程的解来判断系统的稳定性。



对于线性定常系统，只需解出特征方程的根即可作出稳定性的判断。对于非线性不很严重的系统，则可通过线性化处理，取其一次近似得到线性化方程，然后再根据其特征根来判断系统的稳定性。



10.2.1 线性系统的稳定判据

线性定常系统$\sum=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}u\\ y=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

的平衡状态$\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{0}$渐近稳定的充分必要条件是：

矩阵$\boldsymbol{A}$的所有特征值都具有负实部。

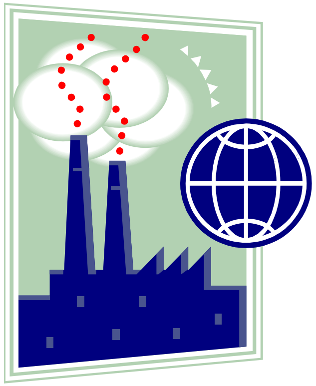
以上讨论的都是指系统的状态稳定性，或称为内部稳定性。在工程上，有时更重视输出稳定性。

如果系统对于有界输入 u 所引起的输出 y 是有界的，则称系统为**输出稳定**。

线性定常系统 $\sum=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 输出稳定的充分必要条件为：它的传递函数

$$W(s)=\boldsymbol{c}\left(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{b}$$

的极点全部位于 S 的左半平面。

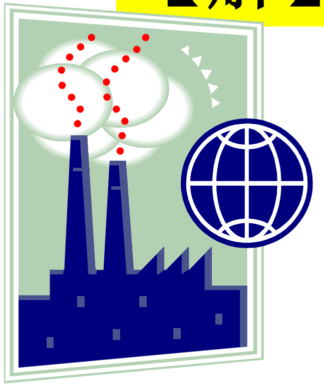


【例10-1】 设系统的状态空间表达式为

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}
\end{cases}
$$

分析其状态稳定性和输出稳定性。

【解】 先分析其状态稳定性



写出 $\boldsymbol{A}$ 阵的特征方程：

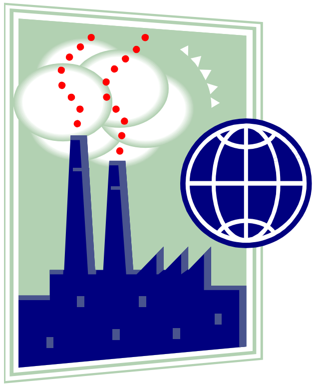
$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda+1)(\lambda-1)=0$$

可得特征值：

$$\lambda_1=-1 \qquad \lambda_2=1$$

显然，系统的状态不是渐近稳定的。

再分析其输出稳定性



$$W(s)=\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ 0 & s-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{s-1}{(s+1)(s-1)}$$

$$=\frac{1}{s+1}$$

可见，传递函数的极点$s=-1$位于s的左半平面，系统输出稳定。这是因为具有正实部的特征值被系统的零点抵消了，在系统的输出中没有表现出来。

重要结论

- 由此可见，只有当系统的传递函数$W(s)$不出现零、极点对消现象时，矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值才与系统传递函数$W(s)$的极点相同，此时系统的状态稳定性才和输出稳定性一致。

- 线性系统的状态稳定是输出稳定的充分条件，而输出稳定则是状态稳定的必要条件。

线性系统的状态稳定

$\Downarrow$

线性系统的输出稳定

10.2.2 非线性系统的稳定判据

设所研究系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$$

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$ —— 系统的平衡状态

$\boldsymbol{f}$ —— 与 $\boldsymbol{x}$ 同维的向量函数，且对 $\boldsymbol{x}$ 有连续的偏导数

为讨论系统在 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$ 处的稳定性，可将非线性向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$ 在 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$ 邻域内展成Taylor级数，

得

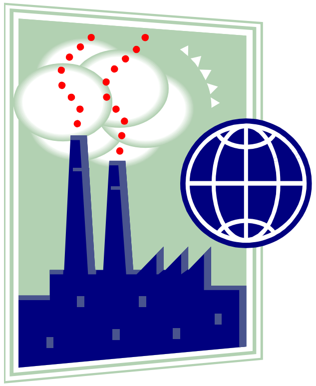
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}) + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$$

式中 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$ —— 级数展开式中的高阶项

而

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Jacobi矩阵

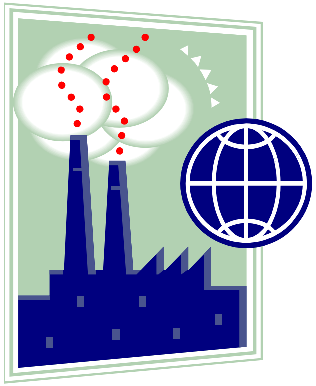


令 $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$， 并取上式的一次近似式，

得系统的线性化方程：

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{e}} = \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x} \qquad （4）$$

式中



$$\boldsymbol{A} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}}$$

Jacobi矩阵

在一次近似式的基础上，李雅普诺夫给出下述**结论**

- 如果方程式（1）中系数矩阵$\boldsymbol{A}$的所有特征值都具有负实部，则原非线性系统在平衡状态$\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$是渐近稳定的，而且系统的稳定性与$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$无关。
- 如果系数矩阵$\boldsymbol{A}$至少有一个特征值具有正实部，则原非线性系统平衡状态$\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$是不稳定的。
- 如果系数矩阵$\boldsymbol{A}$至少有一个特征值具有零实部，则原非线性系统平衡状态$\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$的稳定性取决于高阶导数项$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$，而不能由$\boldsymbol{A}$的特征值符号决定。

【例10-2】设系统的状态方程为

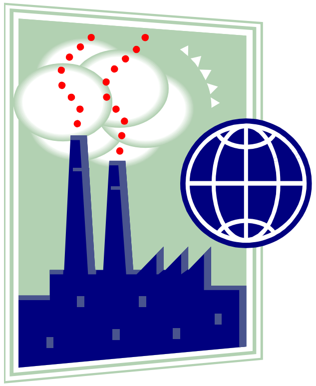
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1 x_2 \end{cases}$$

分析其平衡状态的稳定性。

【解】 先求系统的平衡状态

解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_1 x_2 = 0 \\ -x_2 + x_1 x_2 = 0 \end{cases}$$



解得

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

所以有两个平衡状态

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad \boldsymbol{x}_{\mathrm{e}2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

再求Jacobi矩阵

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1 - x_1 x_2\right) = 1 - x_2 \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1 - x_1 x_2\right) = -x_1$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-x_2 + x_1 x_2\right) = x_2 \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-x_2 + x_1 x_2\right) = x_1 - 1$$

在 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e1}}$ 处线性化得 $\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

在 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e2}}$ 处线性化得 $\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

求得线性化方程

在 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}1}$ 处的线性化方程为

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Delta\boldsymbol{x}$$

在 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}2}$ 处的线性化方程为

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta\boldsymbol{x}$$

求线性化系统的特征值，判断稳定性

在 $\boldsymbol{x}_{e1}$ 处

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1\right)=\det\left\{\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0\\ 0 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda+1)$$

特征值为 $\lambda_1=1$ $\lambda_2=-1$

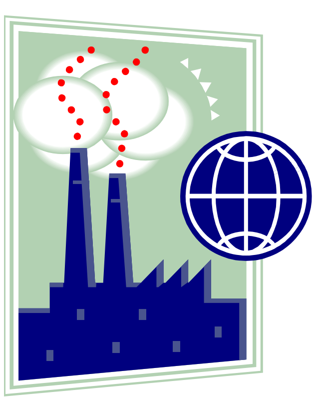
有一个正实部特征值，说明原非线性系统在 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}1}$ 处是不稳定的。

在 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}2}$ 处

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2)=\det\left\{\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2+1$$



特征值为 $\lambda = \pm j$

特征值的实部全为零， 在这种情况下，无法用李雅普诺夫第一法判定其稳定性。

本次课内容总结

- 李雅普诺夫意义下的稳定性
  - 有关平衡状态的概念
  - 稳定性的几个定义
- 李雅普诺夫第一方法—— 间接法

庞卡莱—李雅普诺夫第一近似定理