第4章 控制系统的设计约束（1）

授课教师： 马 杰 （控制与仿真中心）
罗 晶 （控制科学与工程系）
马克茂（控制与仿真中心）
陈松林（控制与仿真中心）

上一节内容回顾

扰动的抑制方法

- 不考虑扰动的性质，串联校正时，可以增加偏差点到扰动作用点之间积分环节个数或放大系数；可以采用比例加积分，滞后环节减小扰动产生的误差

- 对于可测的扰动，可以采用顺馈（前馈）的方法抑制

- 对于与系统状态有确定函数关系的扰动，直接进行补偿

- 对干扰更敏感的状态可测，则可采用多回路等方法抑制

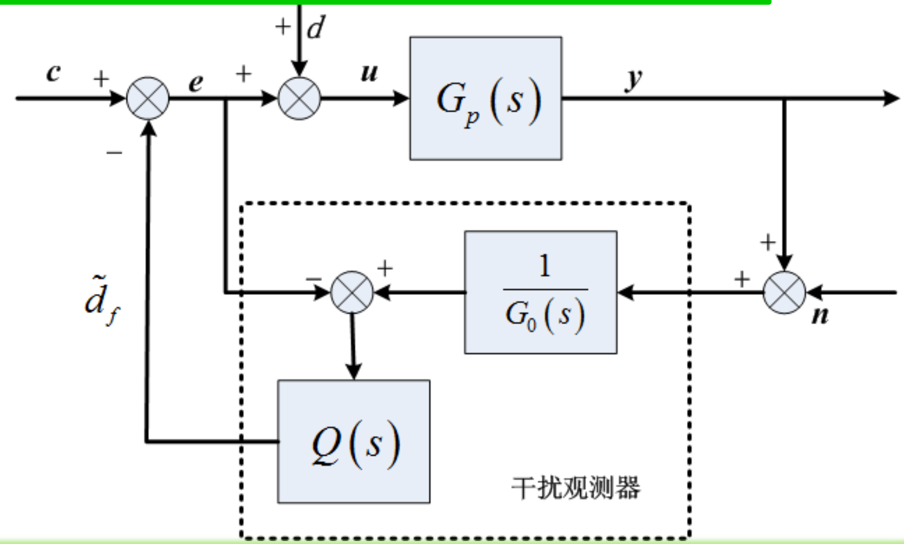
- 如果有标称模型可利用，则可以采用干扰观测器的方法进行扰动抑制

上一节内容回顾

干扰观测器的原理与设计

➢ 干扰观测器的原理

$$Q(s)=\frac{\sum_{k=0}^{N-r}\alpha_{Nk}(\tau s)^{k}}{(\tau s+1)^{N}}$$



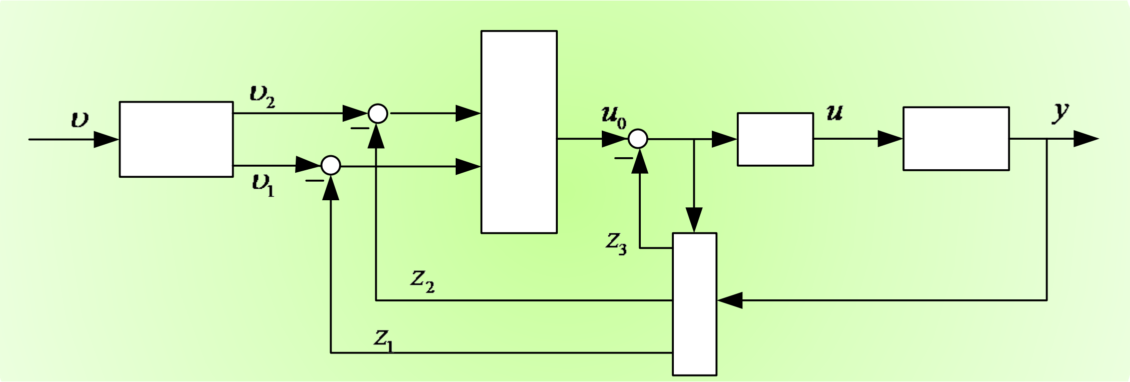
➢ 低通滤波器Q的设计原则

- ➢ 相对度：$Q(s)$的相对阶应当大于$G_p(s)$ 的相对阶；
- ➢ 低频幅值限制：为使$G_{yr}(s)$尽可能地逼近被控对象标称模型$G_0(s)$，在工作频段（指令和干扰的频谱范围）的幅值应当为1；
- ➢ 高频幅值限制：为使噪声对输出的影响尽可能小，在高频段$Q(s)$应当为0；
- ➢ 鲁棒稳定性：$\left\|\Delta(s)Q(s)\right\|_{\infty}\le 1$

上一节内容回顾

ADRC

➢ 自抗扰控制原理



➢ 从“控制论”角度出发来进行控制器设计

➢ 继承PID的优点，利用误差消除误差的原理

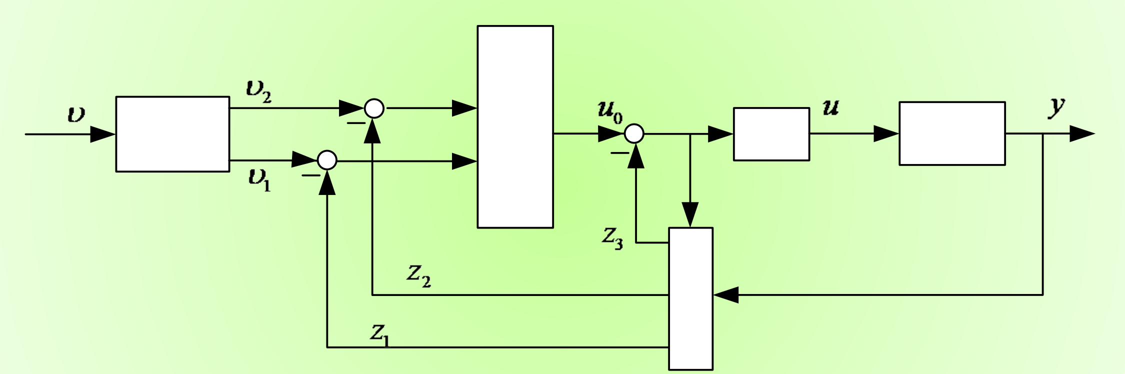
➢ 通过安排过渡过程、设计微分跟踪器、利用误差的非线性组合、提出扩张状态观测器来解决PID控制中存在的不足和缺点

上一节内容回顾

ADRC

- 自抗扰控制的优点

$$G_0(s) = \frac{b_0}{s^2}$$



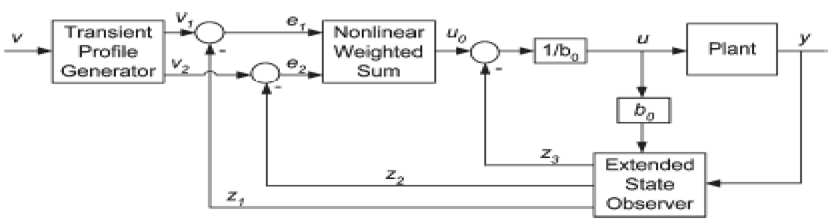
- 提出了总扰动的概念，不区分内扰和外扰
- 设计了多个经过优化的非线性函数
- 提出反馈标准型，积分串联型，不需要标称模型，还可以去除积分项
- 可以统一处理非线性、时变、扰动、模型摄动、时延、高阶、耦合等问题
- ESO可以与其他方法进行组合应用

上一节内容回顾

ADRC

➢ 自抗扰控制的缺点

$$G_0(s)=\frac{b_0}{s^2}$$



$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-r\,\mathrm{sign}\Big(x_1-v(t)+\frac{x_2|x_2|}{2r}\Big)\end{cases}$$

$$d=h_0r_0^2,\qquad a_0=h_0v_2,\qquad y=v_1+a_0$$

$$\begin{aligned}
a_1&=\sqrt{d\,(d+8|y|)}\\
a_2&=a_0+\mathrm{sign}(y)(a_1-d)/2\\
s_y&=\left(\mathrm{sign}(y+d)-\mathrm{sign}(y-d)\right)/2\\
a&=(a_0+y-a_2)s_y+a_2\\
s_a&=\left(\mathrm{sign}(a+d)-\mathrm{sign}(a-d)\right)/2\\
fhan&=-r_0\left(\frac{a}{d}-\mathrm{sign}(a)\right)s_a-r_0\mathrm{sign}(a).
\end{aligned}$$

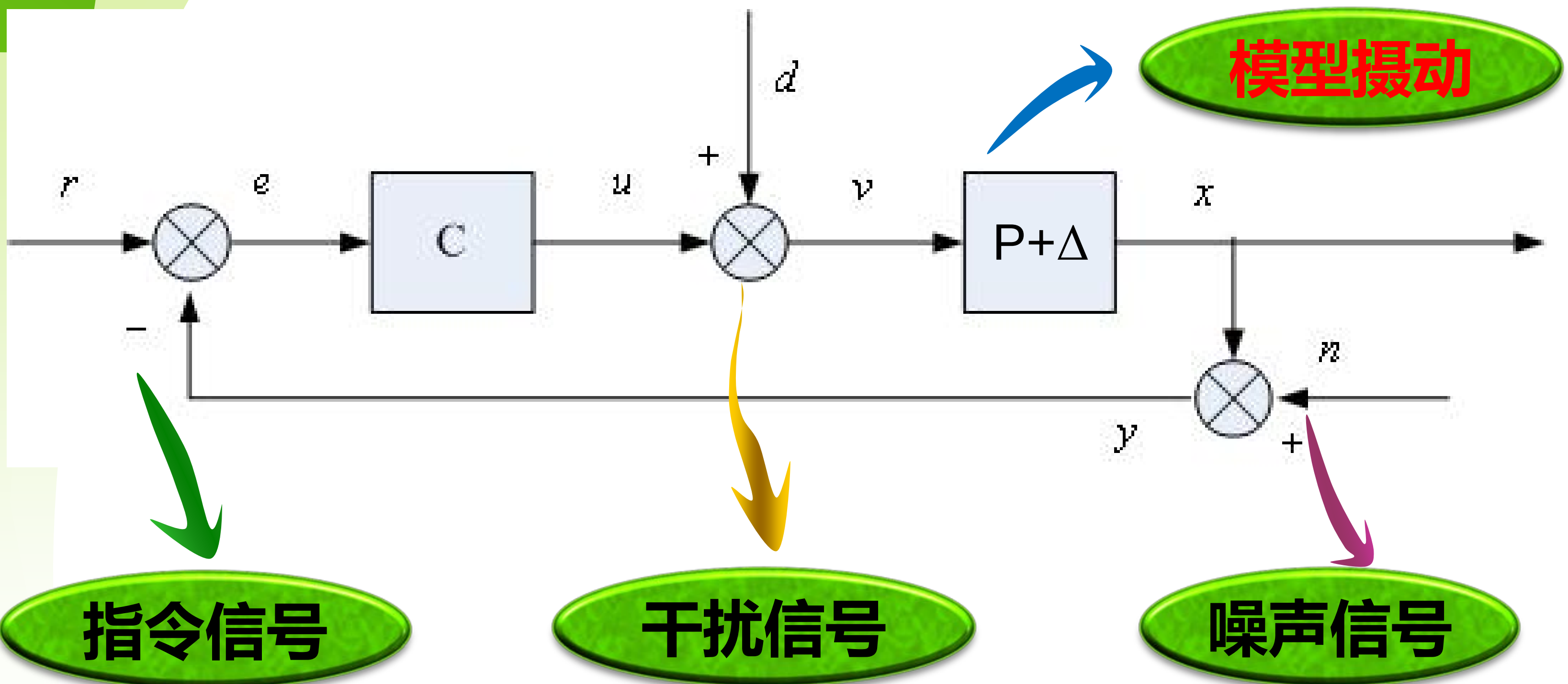
$$fal(e,\alpha,\delta)=\begin{cases}\frac{e}{\delta^{1-\alpha}}, & |x|\le\delta\\ |e|^{\alpha}\mathrm{sign}(e), & |x|\ge\delta\end{cases}$$

$$fhan(x_1,x_2,r,h_0)$$

$$\begin{cases}e=z_1-y\\ fe=fal(e,0.5,\delta),\qquad fe_1=fal(e,0.25,\delta)\\ \dot{z}_1=z_2-\beta_{01}e\\ \dot{z}_2=z_3+bu-\beta_{02}fe\\ \dot{z}_3=-\beta_{03}fe_1\end{cases}$$

- ➢ 调参复杂
- ➢ 理论分析困难
- ➢ 忽略了可用的模型信息
- ➢ 实现复杂

输入条件分析内容回顾



$$G_{xr}=\frac{PC}{1+PC}\qquad G_{xd}=\frac{P}{1+PC}\qquad G_{xn}=\frac{-PC}{1+PC}$$

学习目标

本节课需要掌握的内容

- 理解灵敏度的概念；
- 掌握灵敏度与系统性能之间的关系；
- 理解Bode积分约束；

本节课主要内容

A1 灵敏度和Bode积分约束

A2 对象的不确定性和鲁棒稳定性约束

A3 设计约束

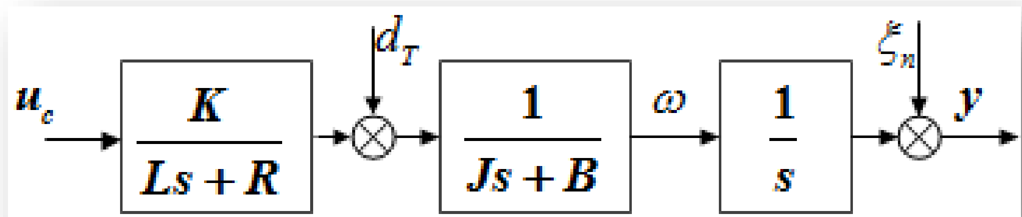
4.1　灵敏度和Bode积分约束

4.1.2　控制系统灵敏度

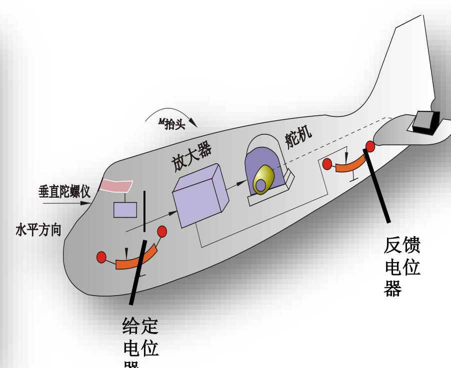
4.1.1　Bode积分约束

灵敏度的定义

无论传递函数 $G(s)$ 表示的具体对象是什么，它都要受到一些因素的影响，如：

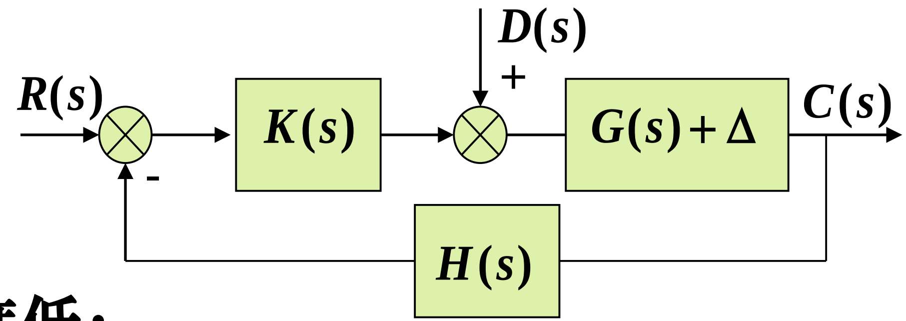


- 建模的不精确性等；
- 工况的变化（如负载）；
- 环境的变化（飞行高度的变化、磨损、变形、老化）；



4.1.1 控制系统的灵敏度

灵敏度的定义



控制系统应具有如下特点:

- **对系统中参数变化的敏感度低;**
- **在参数的允许变动范围内能保持稳定;**
- **参数发生较剧烈变化时，能够恢复和保持预期性能。**

当参数只在小范围摄动时，可以采用系统灵敏度来度量系统的稳定性。

灵敏度定义

问题：

由于被控对象的变化而引起的控制系统输出的变化有多大?

灵敏度的定义

对于开环系统而言，对象的变化将直接导致输出发生变化，使精度降低；而闭环系统则对因对象变化而引起的输出改变，并试图校正输出。

可见，控制系统对参数变化的灵敏度是很重要的系统特征。

闭环反馈控制系统最根本的优点就是能够减小系统的灵敏度。

灵敏度定义

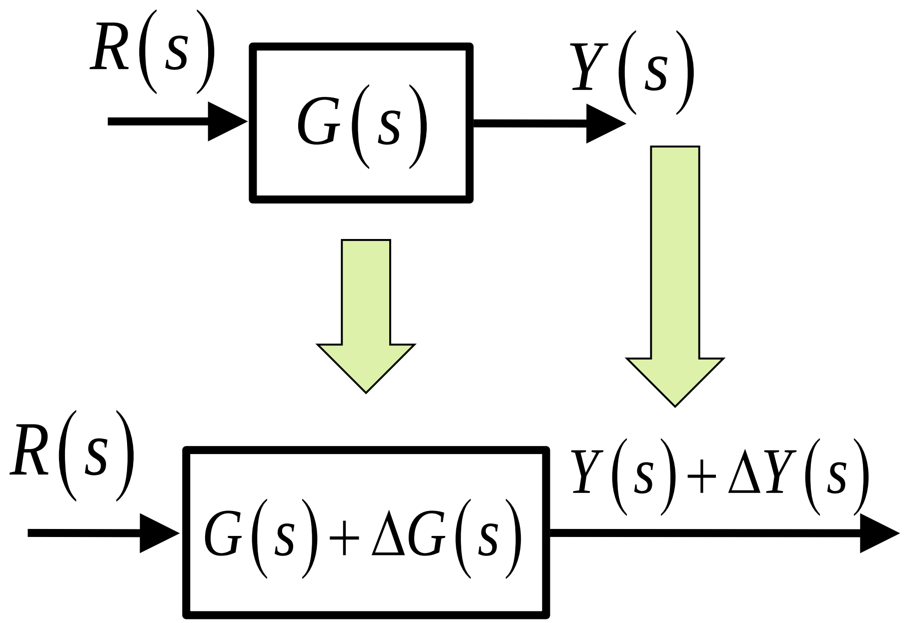
- 开环系统在对象摄动时的输出

为说明对象摄动对性能的影响，考虑由于参数或结构变化所导致的新的对象

$$G(s)+\Delta G(s)$$

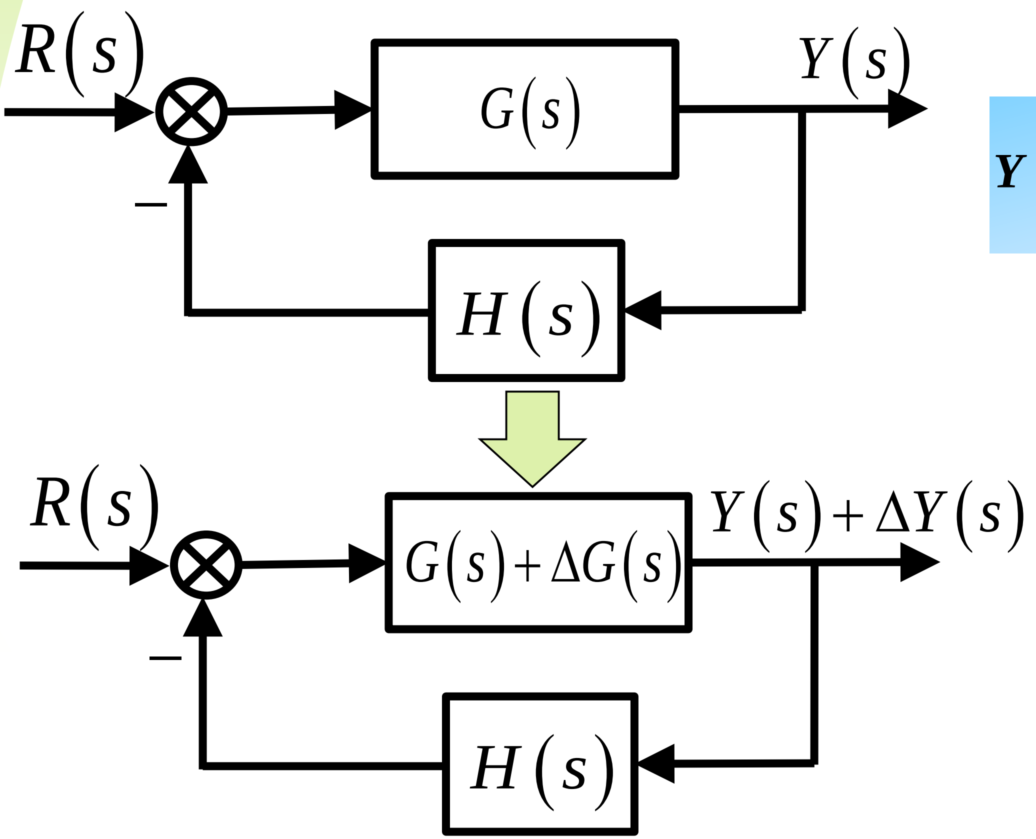
此时，输出的变化为

$$\Delta Y(s)=\Delta G(s)\cdot R(s)$$



灵敏度定义

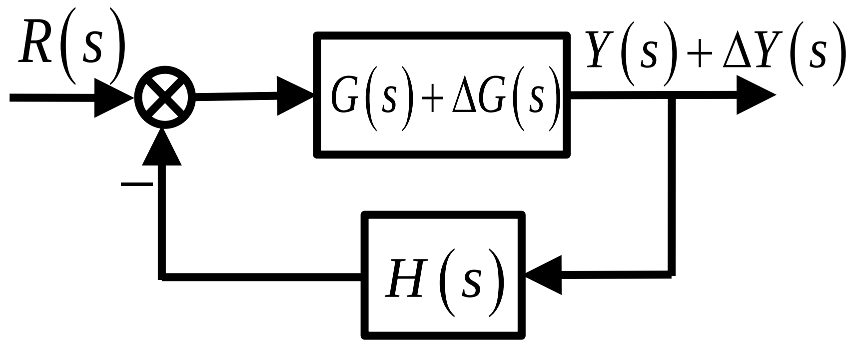
- 闭环系统在对象摄动时的输出变化



$$Y(s)=\frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}\cdot R(s)$$

灵敏度定义

- 闭环系统在对象摄动时的输出



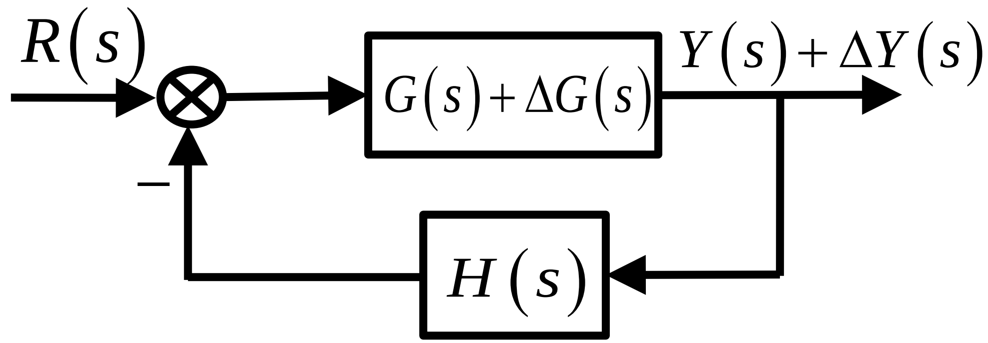
而对于闭环系统，有

$$Y(s)+\Delta Y(s)=\frac{\left[G(s)+\Delta G(s)\right]H(s)}{1+\left[G(s)+\Delta G(s)\right]H(s)}\cdot R(s)$$

输出的变化为：

$$\Delta Y(s)=\frac{\Delta G(s)}{\left[1+\left(G(s)+\Delta G(s)\right)H(s)\right]\cdot\left[1+G(s)H(s)\right]}\cdot R(s)$$

灵敏度定义



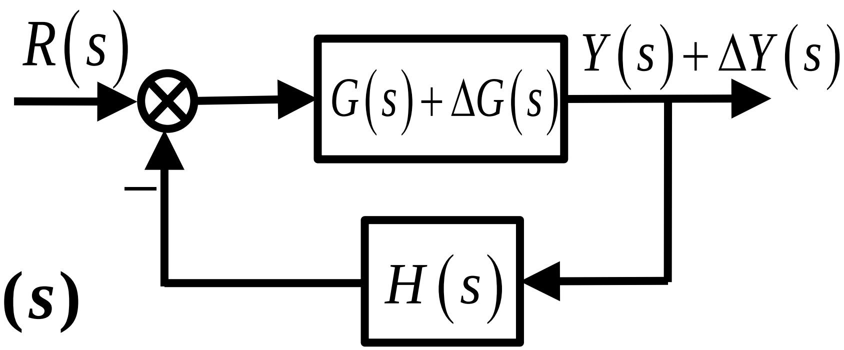
$$\Delta Y(s)=\frac{\Delta G(s)}{\left[1+\left(G(s)+\Delta G(s)\right)H(s)\right]\cdot\left[1+G(s)H(s)\right]}\cdot R(s)$$

通常在低频段，有 $G(s)H(s) >> \Delta G(s)H(s)$

于是，$$\Delta Y(s)=\frac{\Delta G(s)}{\left[1+G(s)H(s)\right]^2}\cdot R(s)$$

灵敏度定义

开环 $\Delta Y(s)=\Delta G(s)\cdot R(s)$



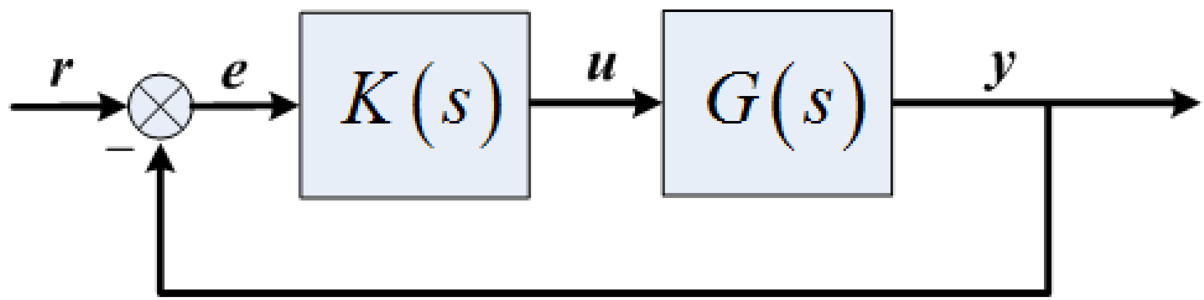
闭环 $\Delta Y(s)=\dfrac{\Delta G(s)}{\left[1+G(s)H(s)\right]^{2}}\cdot R(s)$

可见，由于 $\left[1+G(s)H(s)\right]$在所关心的复频率范围内常常是远大于1的，因此闭环系统输出的变化减小了。因子$\left[1+G(s)H(s)\right]$在反馈控制系统的特性中具有十分重要的作用。

4.1.1 控制系统的灵敏度

灵敏度定义

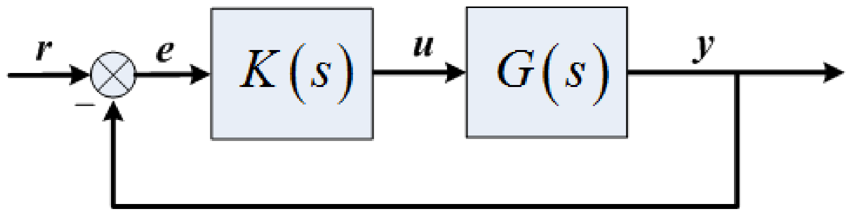
灵敏度（Sensitivity）是反馈控制系统的一个重要性能指标。系统灵敏度定义为：**系统传递函数的变化率与对象传递函数的变化率之比。**



$\Delta G(s)$ $\Delta T(s)$

$$\frac{\Delta G(s)}{G(s)} \qquad T(s)=\frac{KG}{1+KG} \qquad \frac{\Delta T(s)}{T(s)}$$

灵敏度定义



系统灵敏度定义为：**系统传递函数的变化率与对象传递函数的变化率之比。**

$$\frac{\Delta T(s)}{T(s)} \qquad \frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

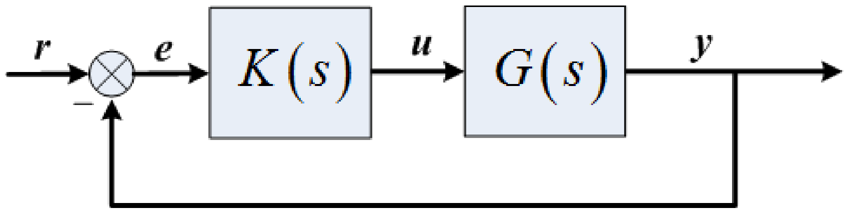
若系统传递函数为： $T=\dfrac{Y(s)}{R(s)}$

则灵敏度定义为： $$S=\frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta G(s)/G(s)}$$

灵敏度定义

◆ **灵敏度定义**

$$S = \frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta G(s)/G(s)}$$



取微小增量的极限形式，则：

$$\mathrm{d}\ln x = \frac{1}{x}dx$$

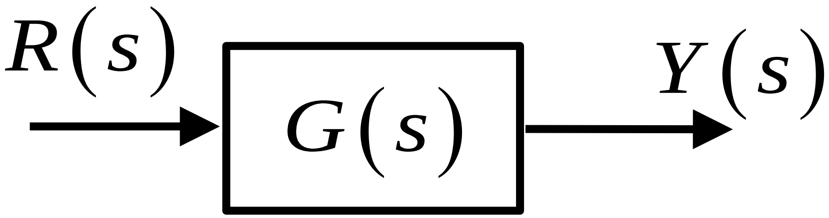
$$S = \frac{\mathrm{d}T(s)/T(s)}{\mathrm{d}G(s)/G(s)} = \frac{\mathrm{d}\ln T(s)}{\mathrm{d}\ln G(s)}$$

系统灵敏度是当变化量为**微小的增量**时，系统传递函数的变化率与对象传递函数的**变化率之比**。

灵敏度分析

① 开环系统对被控对象$G(s)$变化的灵敏度表示为

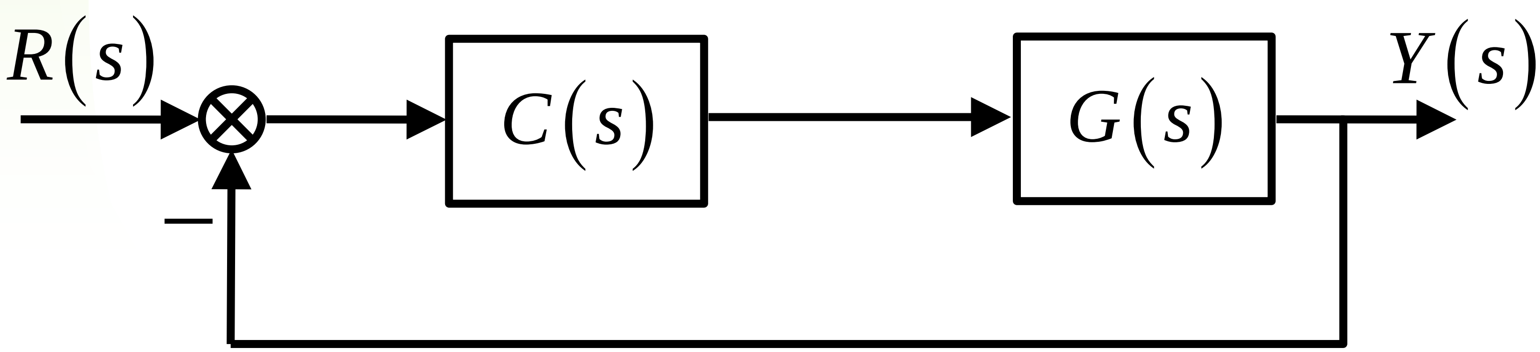
$$S_G^T=\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}\ln G}=\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}G}\cdot\frac{G}{T}=1$$



灵敏度分析

② 单位反馈闭环系统对**被控对象 $G(s)$ 变化**的灵敏度表示为

$$S_G^T = \frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}\ln G} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}G}\cdot\frac{G}{T} = \frac{1}{1+CG}$$

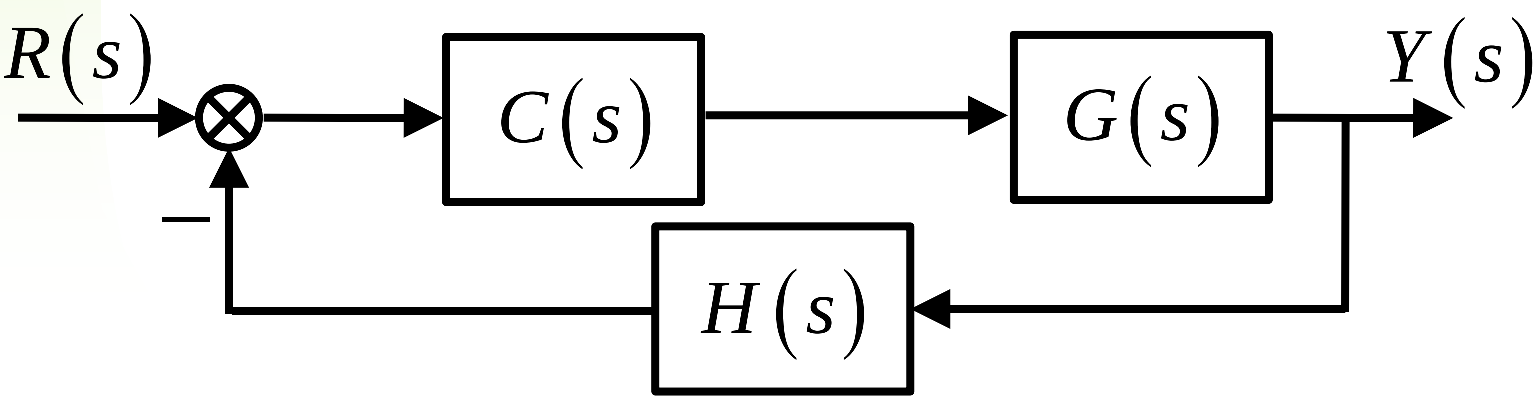


灵敏度分析

③ 非单位反馈闭环系统被控对象$G(s)$变化的灵敏度为

$$S_G^T = \frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}\ln G} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}G}\cdot\frac{G}{T} = \frac{1}{1+CGH}$$

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+C(s)G(s)H(s)}$$

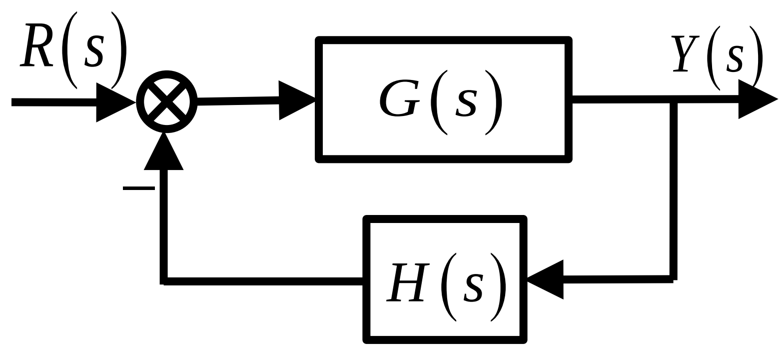


4.1.1 控制系统的灵敏度

灵敏度分析

④ 非单位反馈闭环系统对反馈因子$H(s)$变化的灵敏度为

$$S_H^T = \frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}\ln H} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}H}\cdot\frac{H}{T} = \frac{-CGH}{1+CGH}$$



当GH很大时，灵敏度约为-1，则H(s) 的变化将直接影响输出响应。因此，保持反馈部分不因环境的改变而改变，或者说保持反馈增益为常数，是非常重要的。

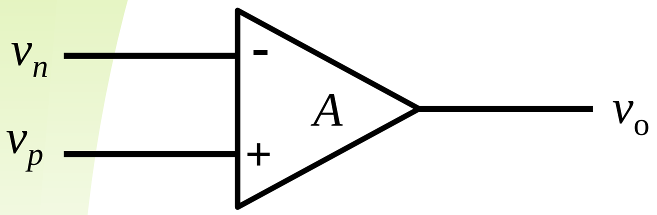
4.1.1 控制系统的灵敏度

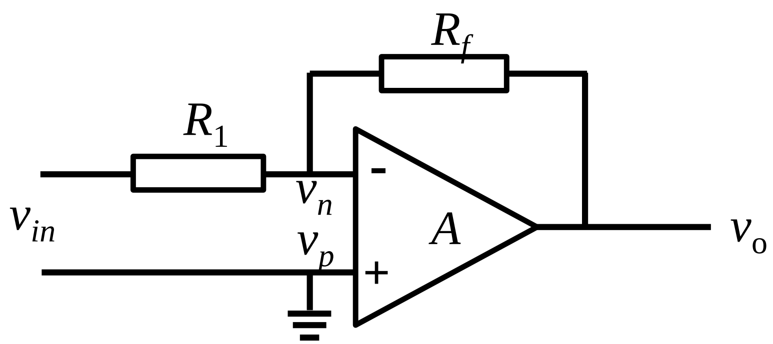
灵敏度分析

四种情况	可变参数	灵敏度
开环系统	被控对象$G(s)$	$S_G^T=1$
单位反馈闭环系统	被控对象$G(s)$	$S_G^T=\dfrac{1}{1+CG}$
非单位反馈闭环系统	被控对象$G(s)$	$S_G^T=\dfrac{1}{1+CGH}$
非单位反馈闭环系统	反馈环节$H(s)$	$S_H^T=\dfrac{-CGH}{1+CGH}$

灵敏度计算

例1：反馈放大器





节点n的电流方程为 $\dfrac{v_{in}-v_n}{R_1}+\dfrac{v_o-v_n}{R_f}=0$

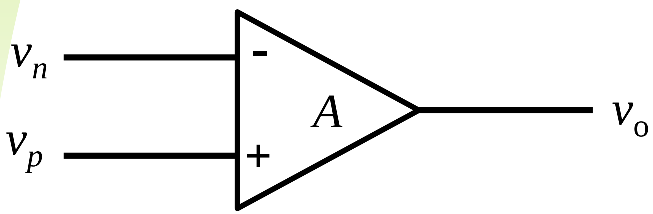
再由 $\dfrac{v_n}{v_o}=-\dfrac{1}{A}$ **可得** $\dfrac{v_{in}}{R_1}+\dfrac{v_o}{AR_1}+\dfrac{v_o}{R_f}+\dfrac{v_o}{AR_f}=0$

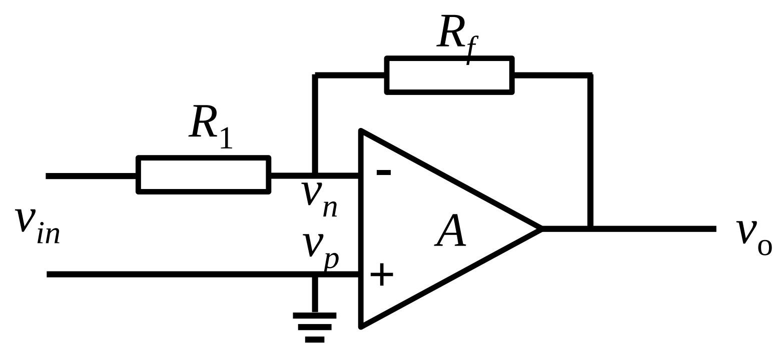
进一步可得输出电压为 $v_o=\dfrac{-A(R_f/R_1)}{1+(R_f/R_1)+A}v_{in}$

4.1.1　控制系统的灵敏度

灵敏度计算

例1：反馈放大器





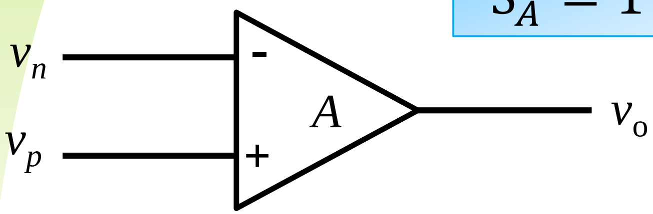
令 $k = R_1 / R_f$ 　**当A>>1时可得输入输出电压关系为**

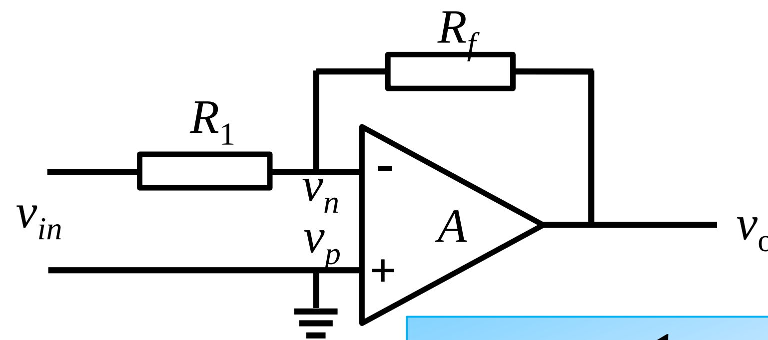
$$\frac{v_o}{v_{in}} = \frac{-A}{1 + A(R_1/R_f)} = \frac{-A}{1 + Ak}$$

灵敏度计算

例1：反馈放大器

$$S_A^T = 1$$





$$S_A^T = \frac{1}{1+Ak}$$

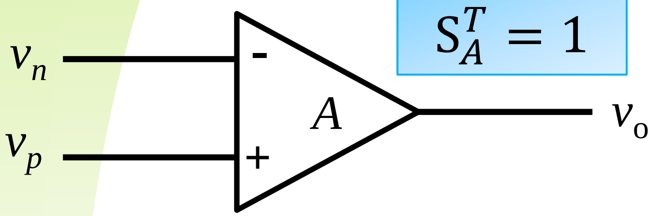
- 运算放大器输出电压受放大倍数A的影响；
- 开环灵敏度是1
- 闭环环灵敏度为 $$S_A^T = \frac{\partial T/T}{\partial A/A} = \frac{1}{1-GH} = \frac{1}{1+Ak}$$

如果A=10^4，k=0.1，则 $$S_A^T = \frac{1}{1+10^3}$$ 是开环灵敏度1/1000

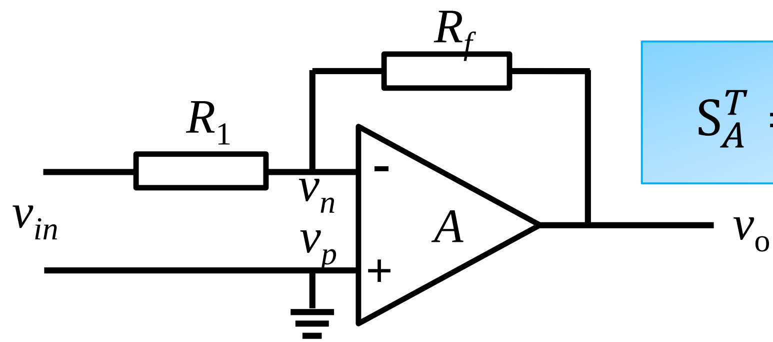
电路对增益因子k的灵敏度为 $$S_k^T = \frac{GH}{1-GH} = \frac{-Ak}{1+Ak}$$ 近似为1

灵敏度计算

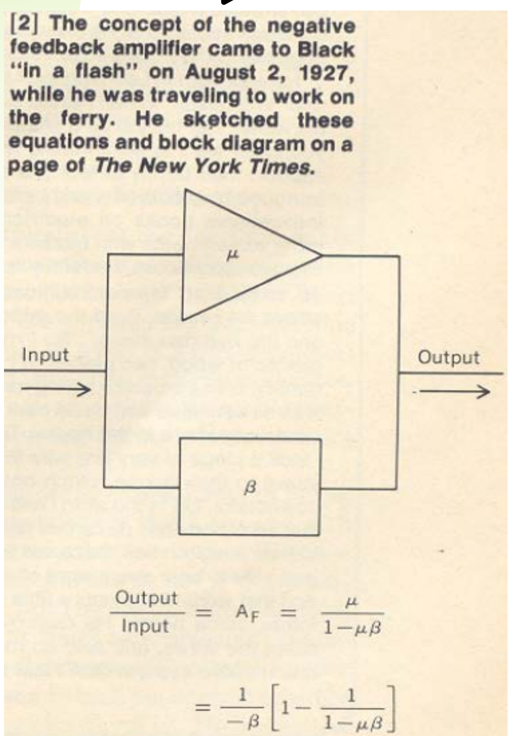
例1：反馈放大器



$$S_A^T = 1$$



$$S_A^T = \frac{1}{1 + Ak}$$


[2] The concept of the negative feedback amplifier came to Black "in a flash" on August 2, 1927, while he was traveling to work on the ferry. He sketched these equations and block diagram on a page of *The New York Times*.

$$\frac{\text{Output}}{\text{Input}} = A_F = \frac{\mu}{1-\mu\beta}$$

$$= \frac{1}{-\beta}\left[1 - \frac{1}{1-\mu\beta}\right]$$

The Bell System Technical Journal

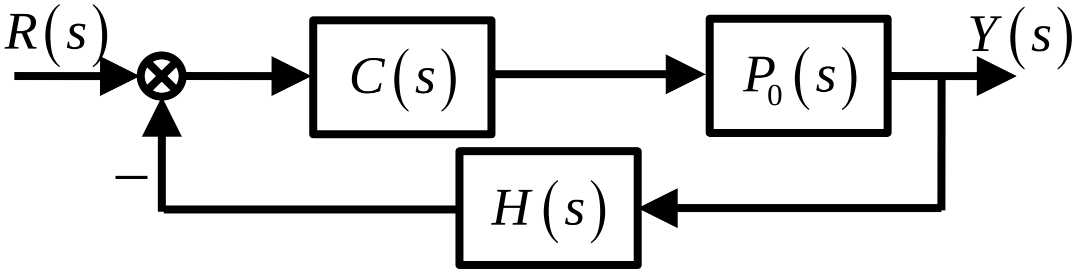
January, 1934

Stabilized Feedback Amplifiers*

By H. S. BLACK

This paper describes and explains the theory of the feedback principle and then demonstrates how stability of amplification and reduction of modulation products, as well as certain other advantages, follow when stabilized feedback is applied to an amplifier. The underlying principle of design by means of which singing is avoided is next set forth. The paper concludes with some examples of results obtained on amplifiers which have been built employing this new principle.

灵敏度计算



例2：天线的灵敏度函数

$$P_0(s)=\frac{1}{s(s+1)}\qquad C(s)=\frac{10(0.5s+1)}{0.1s+1}\qquad H(s)=1$$

天线系统的灵敏度函数为

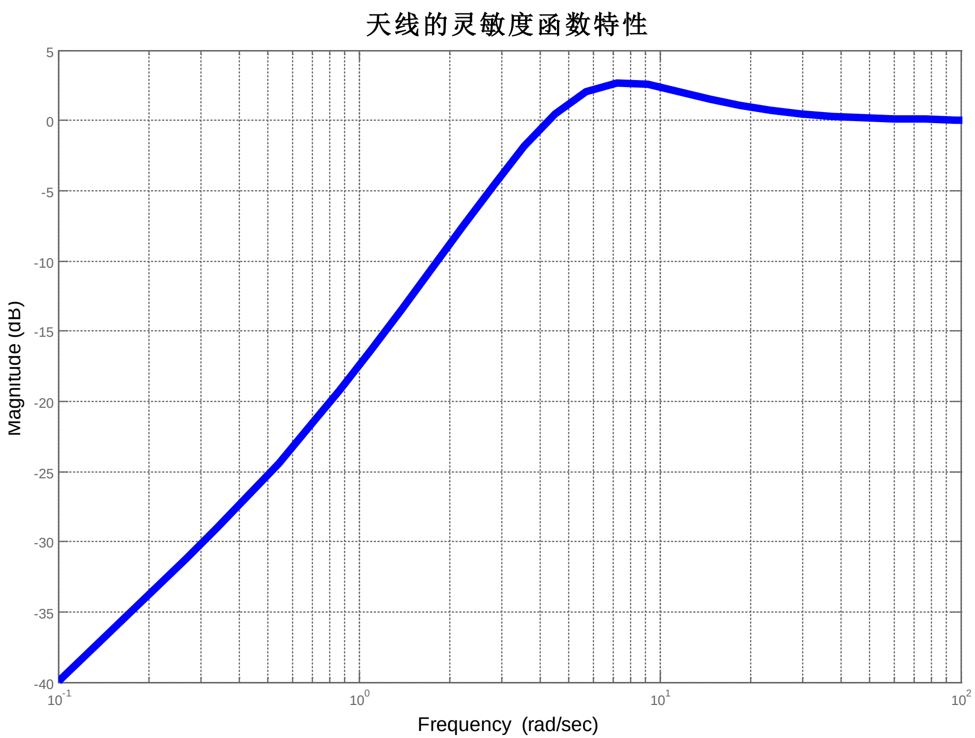
$$S=\frac{1}{1+P_0C}=\frac{0.1s^3+1.1s^2+1.1}{0.1s^3+1.1s^2+6s+10}$$

灵敏度计算

例2：天线的灵敏度函数

$$S=\frac{1}{1+P_0C}=\frac{0.1s^3+1.1s^2+1.1}{0.1s^3+1.1s^2+6s+10}$$

$S(j\omega)$



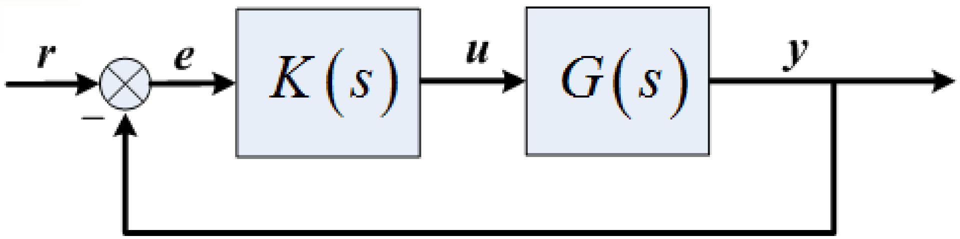
灵敏度函数特征

对于典型反馈控制系统，闭环系统关于被控对象的灵敏度为:

$$S=\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}\ln G}=\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}G}\cdot\frac{G}{T}=\frac{1}{1+KG}$$

$$\mathrm{d}\ln x=\frac{1}{x}dx$$

（1）灵敏度函数表征了闭环系统关于被控对象变化的**鲁棒性**。

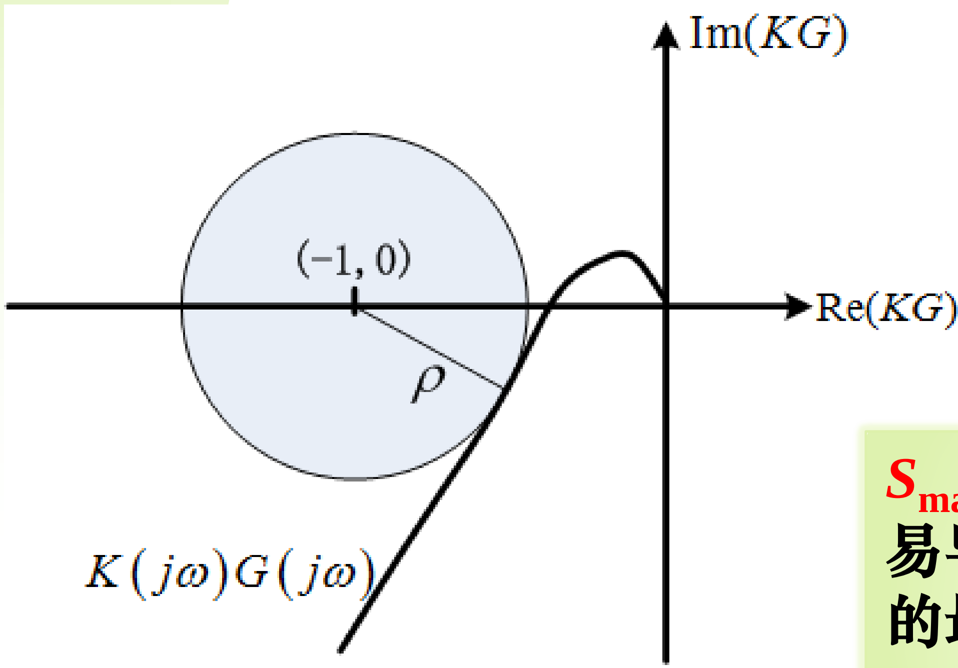


$$T(\mathrm{s})=\frac{K(\mathrm{s})G(\mathrm{s})}{1+K(\mathrm{s})G(\mathrm{s})}$$

4.1.1 控制系统的灵敏度

灵敏度函数特征

（2）Nyquist曲线中，KG距离（-1，j0）点的最小距离与灵敏度函数的最大值互为倒数。



KG是$j\omega$的函数

$$\rho = \min\left|1 + KG\right|$$

$$S_{\max} = \max\left|\frac{1}{1 + KG}\right| = \frac{1}{\rho}$$

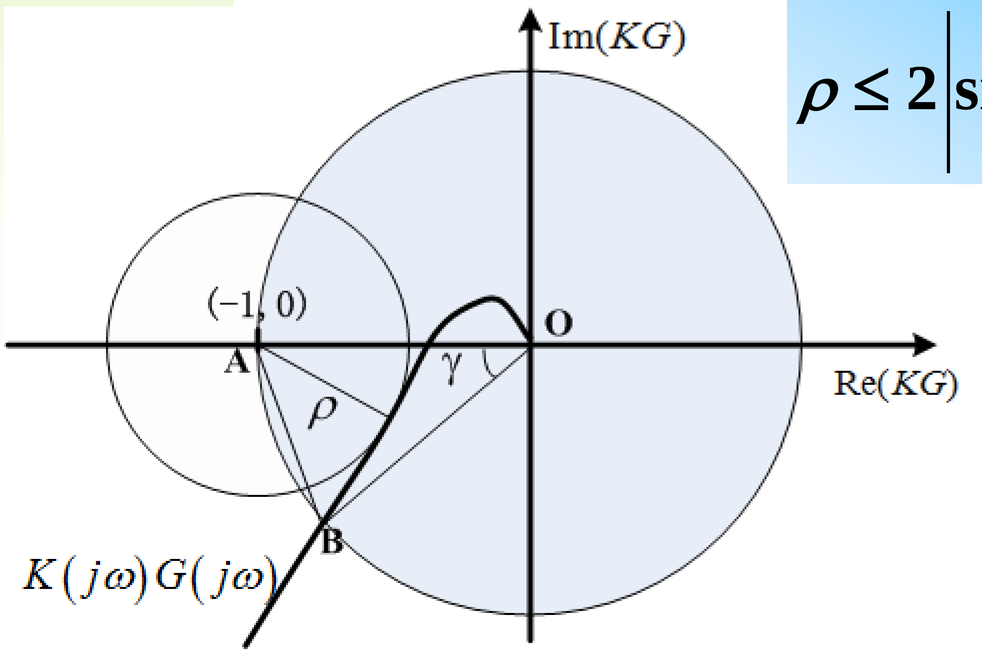
$S_{\max}$越大，ρ越小，G的变化很容易导致系统不稳定，常以灵敏度的最大值作为闭环系统**鲁棒性**的一个指标。

灵敏度函数特征

（3）灵敏度函数与相位裕度的关系

$$\left|\frac{1}{S(j\omega_c)}\right| = |1+KG| = 2\left|\sin\frac{\gamma}{2}\right|$$

$$S_{\max} = \frac{1}{\rho} \qquad S_{\max} \ge \frac{1}{2\left|\sin\frac{\gamma}{2}\right|}$$



$$\rho \le 2\left|\sin\frac{\gamma}{2}\right|$$

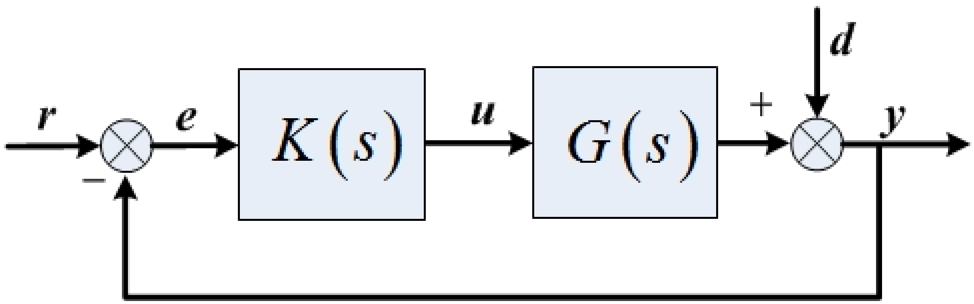
相位裕度只能给出 ρ 的上限，并不能给出代表鲁棒性的 $S_{\max}$ 的真实值。事实上，相位裕度和幅值裕度都很好的系统，$S_{\max}$ 可能会很大而没有鲁棒性。因此，灵敏度的**最大值 $S_{\max}$** 才真正反映了系统的稳定程度，才是**真正意义上的稳定裕度**。

灵敏度函数特征

（4）灵敏度函数与扰动传递函数的关系

$$S=\frac{1}{1+KG}$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)}=\frac{1}{1+KG}$$



从输出端扰动 d 到输出 y 的传递函数

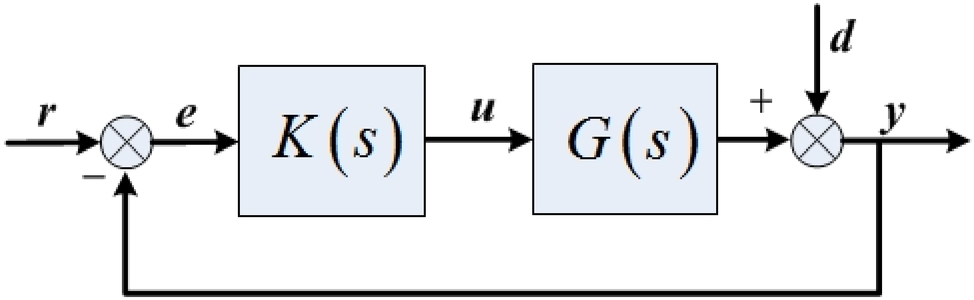
——**反映系统对输出端扰动d的抑制特性**

灵敏度函数特征

（5）灵敏度函数与误差传递函数的关系

$$S=\frac{1}{1+KG}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+KG}$$



从输入 r 到误差信号 e 的传递函数——**系统跟踪输入信号的性能**

灵敏度函数小结

$$S=\frac{1}{1+KG}$$

灵敏度函数表示了系统在 r 和 d 作用下的性能，其峰值还表示了参数变化对系统稳定性的影响。故一般均以灵敏度函数来表示反馈系统的性能，设计时要尽量压低其灵敏度。

但是灵敏度函数却不是可以任意设计的，灵敏度函数要受到Bode定理的制约。

4.1 灵敏度和Bode积分约束

4.1.1 控制系统的灵敏度

4.1.2 Bode积分约束

Bode积分定理

定理:

设开环传递函数 $L(s)$有不稳定极点 $p_1, p_2, \cdots, p_N$，系统的相对阶为 v，并设闭环系统是稳定的，则系统的灵敏度函数满足下列关系式:

$$\int_0^{\infty} \ln\left|S(j\omega)\right| d\omega = \pi \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Re}(p_i), \quad v > 1$$

$$\int_0^{\infty} \ln\left|S(j\omega)\right| d\omega = -\gamma \frac{\pi}{2} + \pi \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Re}(p_i), \quad v = 1$$

n为传递函数 $L(s)$分母的阶次，m为分子的阶次，$\gamma = \lim\limits_{s \to \infty} sL(s)$

Bode积分定理

Bode积分定理说明，对数灵敏度的积分是一个常数

$$\int_0^\infty \ln\left|S(j\omega)\right| d\omega = \pi \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Re}(p_i), \quad v>1$$

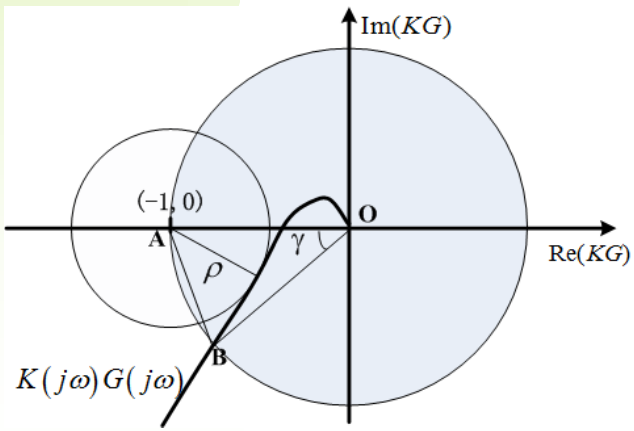
如果传函是稳定的，那么这个积分等于零（v >1），即

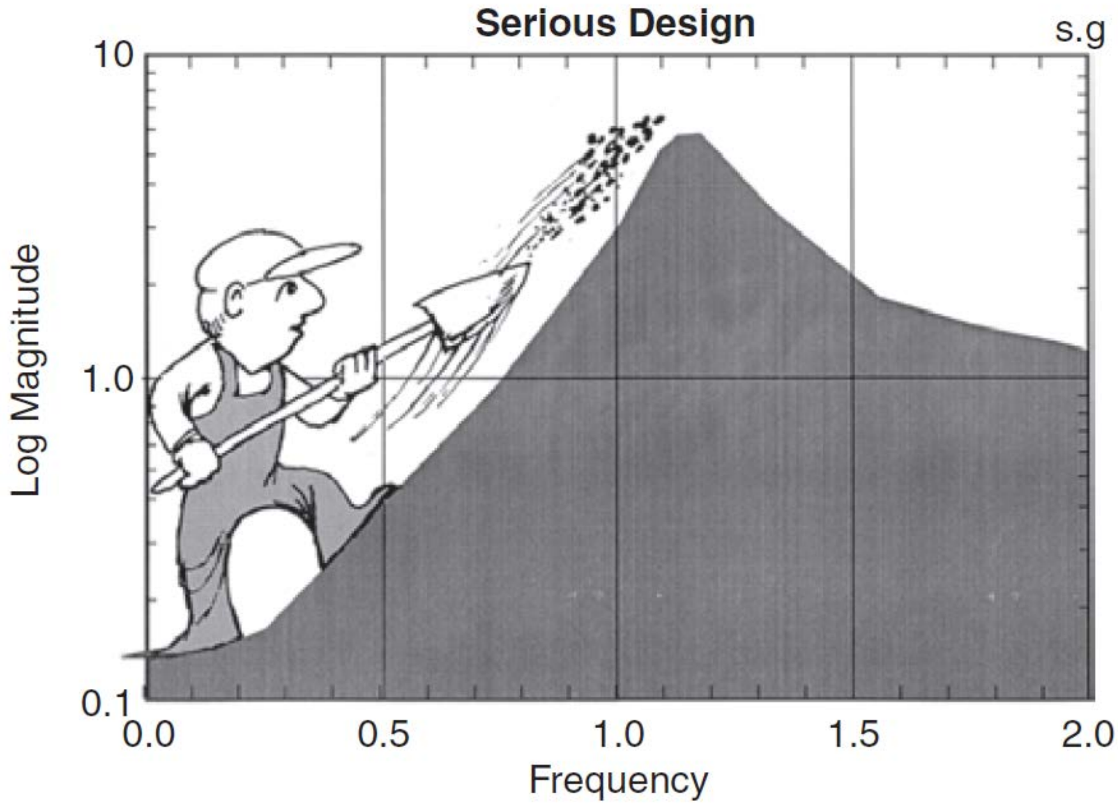
$$\int_0^\infty \ln\left|S(j\omega)\right| d\omega = 0, \quad v>1$$

4.1.2 Bode积分约束

Bode积分定理

$$S=\frac{1}{1+KG}$$





$$\int_0^{\infty}\ln\left|S(j\omega)\right|d\omega=0,\quad v>1$$

由于面积是固定的，所以灵敏度函数在整个频段上不能任意设计，处理不当，可能导致S_{max}过大

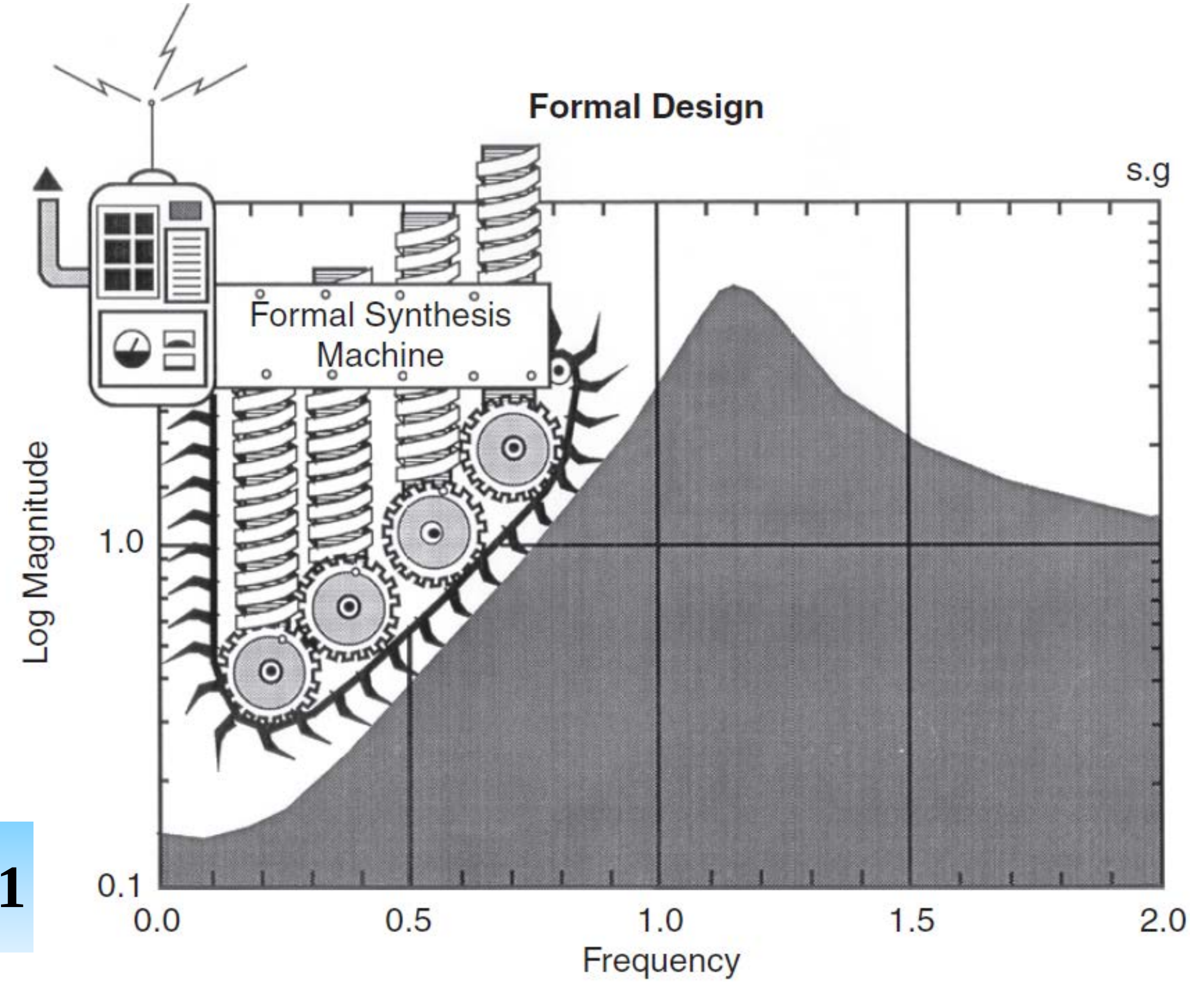
4.1.2 Bode积分约束

Bode积分定理

$$S = \frac{1}{1+KG}$$

Bode积分约束只适用于线性控制方法和线性系统，若采用非线性控制方法，或对于非线性系统，可以不受Bode积分的约束。

$$\int_0^{\infty} \ln\left|S(j\omega)\right| d\omega = 0, \quad v > 1$$



Thank You !