第1章 控制系统的输入条件分析

——2019年春季学期

授课教师： 马 杰 （控制与仿真中心）

罗 晶 （控制科学与工程系）

马克茂（控制与仿真中心）

陈松林（控制与仿真中心）

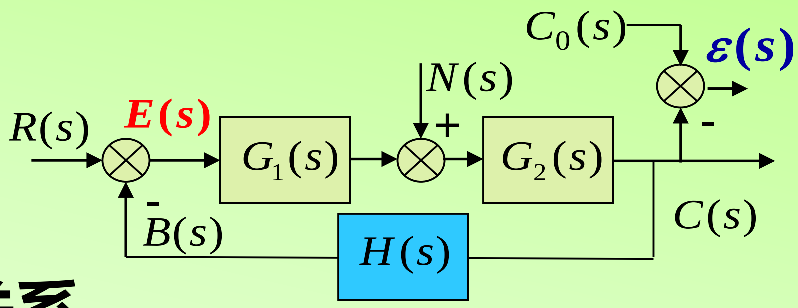
哈尔滨工业大学控制与仿真中心

上一节课内容回顾

关于误差的基本概念

几个基本概念

- 原理性误差与附加性误差
- 系统误差与随机误差
- 瞬态误差与稳态误差
- 静态误差与动态误差
- 误差与偏差的定义，区别和关系



几种误差指标

- 时域积分指标
- 时域静态误差和动态误差指标（常值）
- 频域的误差指标（幅值和相位误差）

上一节课内容回顾

静态误差系数法

记住3种典型信号（包括并联和串联组合）作用下不同型别系统的静态误差（静态误差系数），记住适用条件。

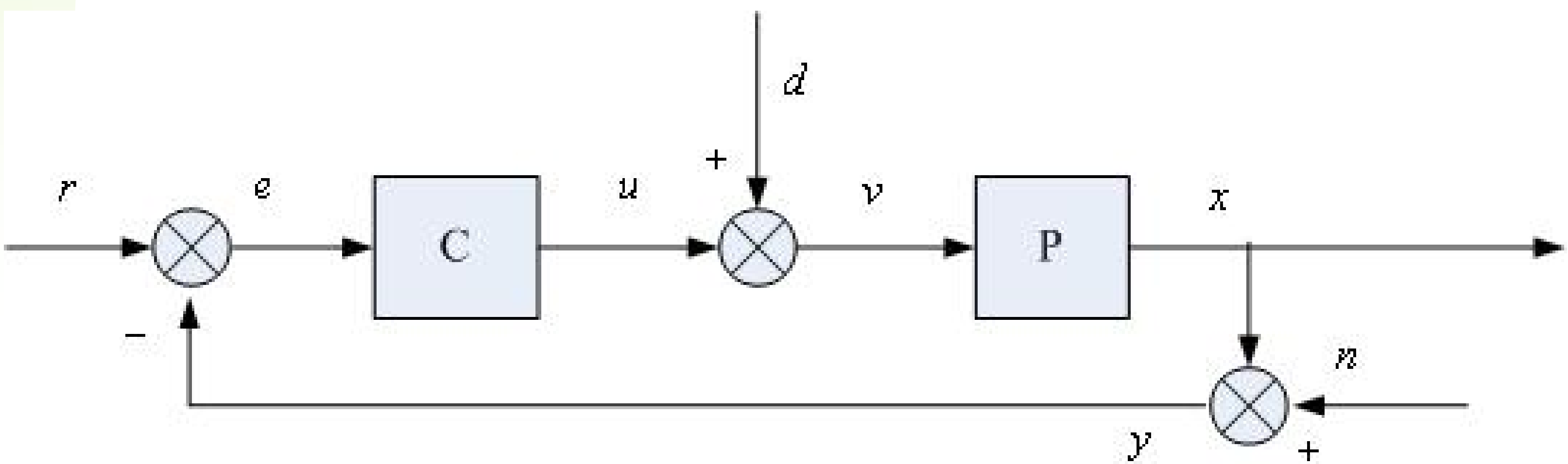
决定静态误差的因素

- 系统的增益
- 信号的形式和幅值
- 系统的型别

减小静态误差的方法：

- 提高增益（会影响稳定性和动态性能）
- 提高型别（不是所有系统都可以）
- 改变控制方式

Contents



1.1 输入信号和跟踪误差

1.1.1 输入信号的分析

1.1.2 静态误差系数和动态误差系数

1.1.3 跟踪误差的计算及在控制系统设计中的应用

学习目标

本节课需要掌握的内容

1 掌握除了提高增益和型别之外的减小静态误差的方法，学会灵活应用减小静态误差的所有方法；

2 掌握几种动态误差系统法，求导法、长除法、图解法、低频模型法；理解动静态误差系数法的区别，各自的适用条件；

3 掌握可以求取瞬态误差的卷积法原理与具体步骤和方法，理解它与动态误差系数法的区别；

4 通过实例来理解如何使用动态误差系数法来进行控制器设计。

滞后（迟后）环节对减小静态误差的作用

滞后校正主要利用其对高频**幅值衰减性来提高增益**，提高的最大幅度为

$$20\log\alpha$$

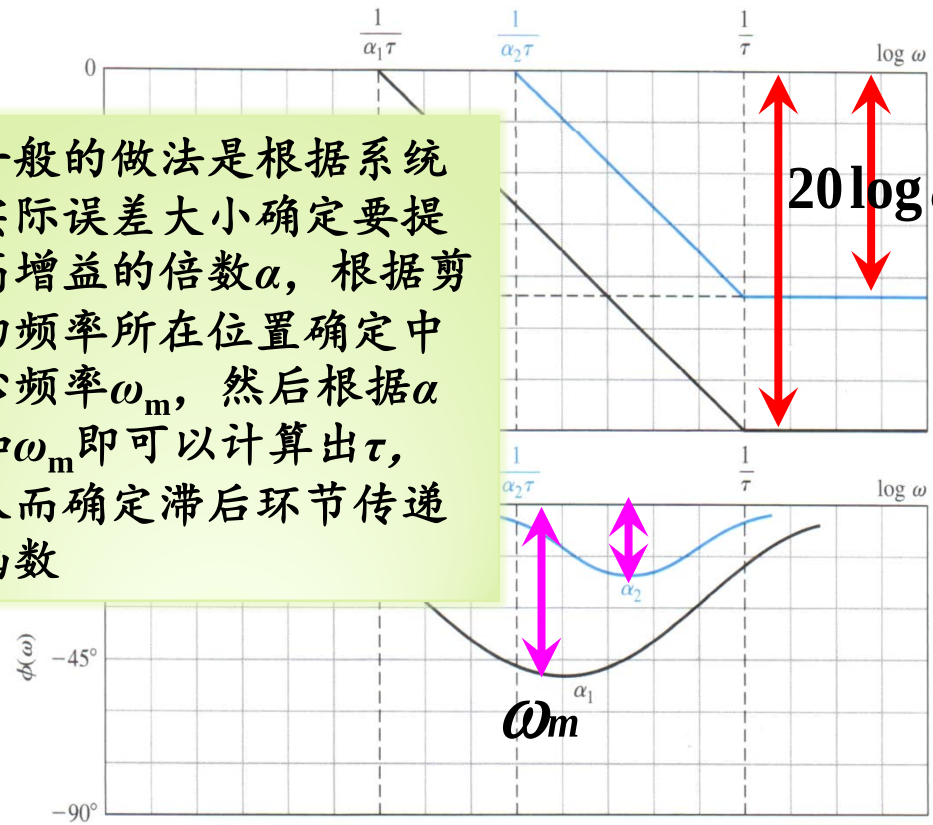
但是滞后环节会在 ω_m 处出现最大滞后相角，必须合理选择 ω_m

$$\omega_m=\sqrt{zp}=\frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$$

应用滞后环节较小静态误差时，必须要在加入滞后环节后重新调整系统增益，**使调整前后的剪切频率不变**，这样就达到了提高了系统低频增益的作用。

$$G_c(s)=\frac{\tau s+1}{\alpha\tau s+1}=\frac{1}{\alpha}\frac{(s+z)}{(s+p)}$$

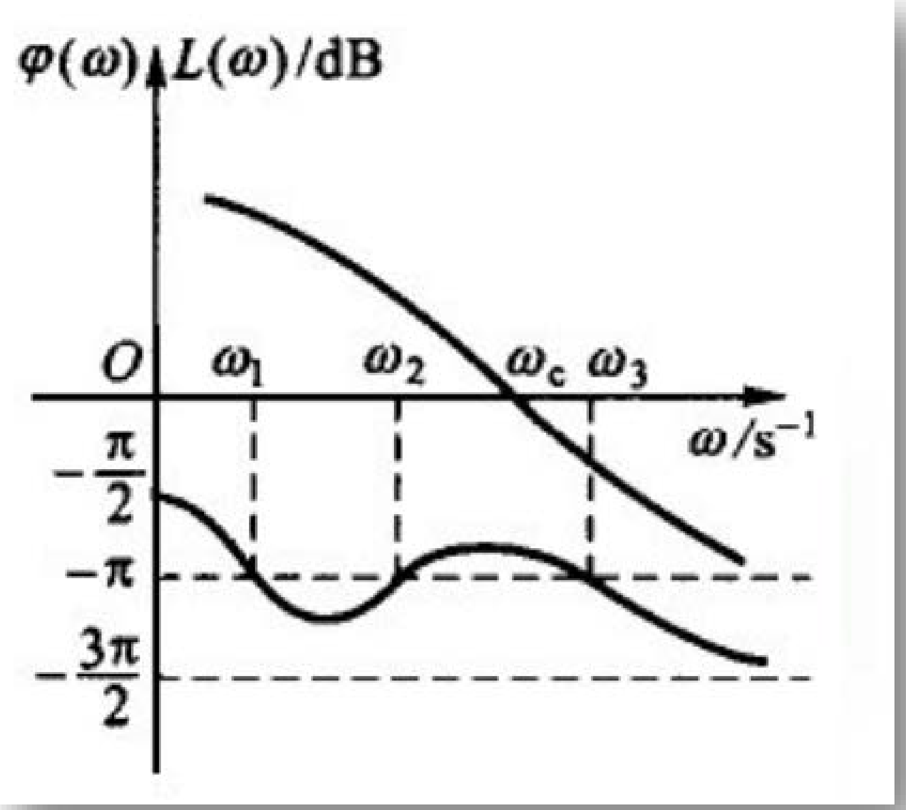
一般的做法是根据系统实际误差大小确定要提高增益的倍数α，根据剪切频率所在位置确定中心频率ω_m，然后根据α和ω_m即可以计算出τ，从而确定滞后环节传递函数



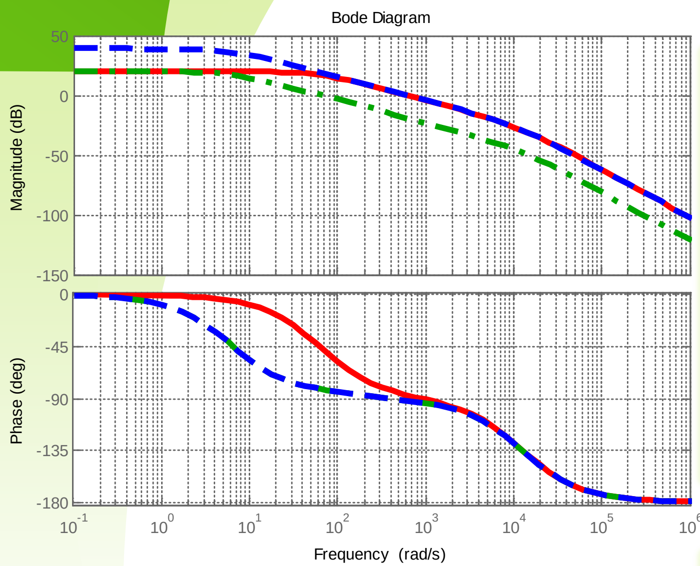
滞后环节对减小静态误差的作用

应用滞后环节注意事项：

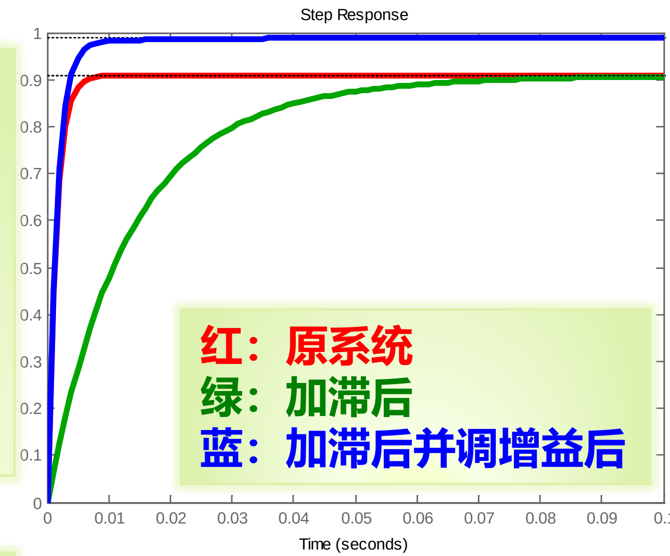
- 提高同样的增益，用**多个中心频率(ω_m)不同**的小幅值(α)滞后环节比一个大幅值的更好，但环节要中心频率要错开，以避免在局部损失过大的相角从而导致条件稳定；
- 滞后环节**要应用于低频**，并尽量远离剪切频率，以减小剪切频率处的相角损失；
- 滞后环节由于处于低频，时间常数较大，因此**误差收敛的速度很慢**，对于要求误差快速收敛的系统并不适用。

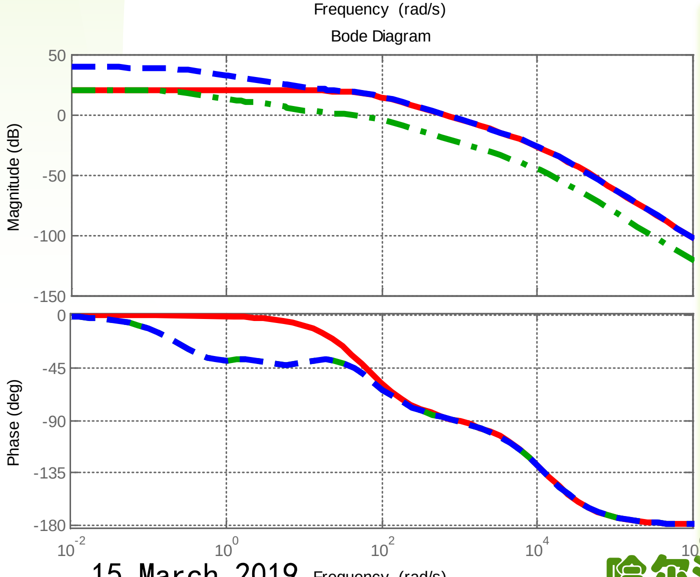


滞后环节减小静态误差的作用

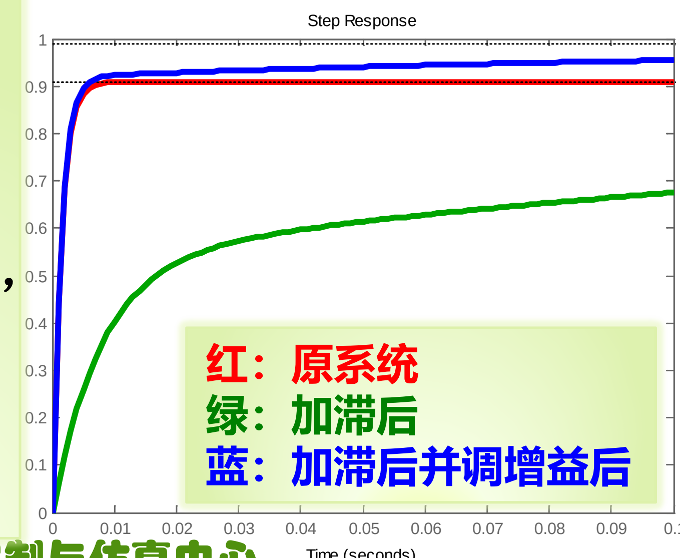


一个3Hz提高增益9倍的滞后环节，损失相角很多，但误差收敛速度快



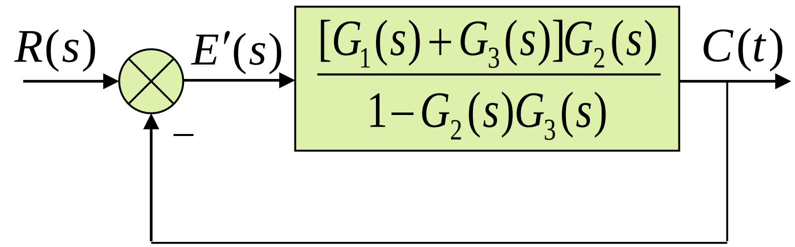


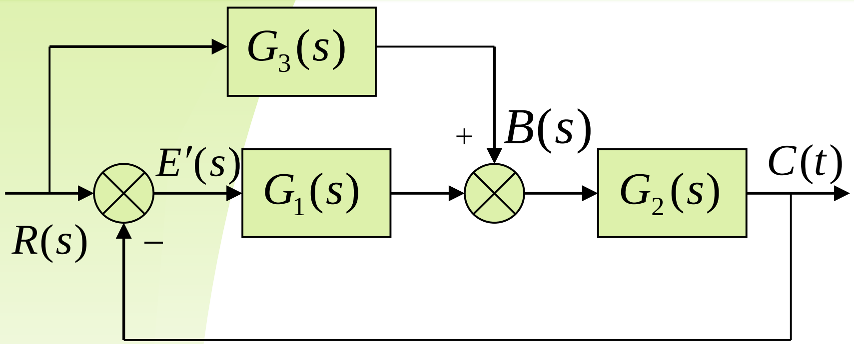
两个1Hz和0.1Hz提高增益各3倍的滞后环节(共9倍)，损失相角很小，但误差收敛速度慢

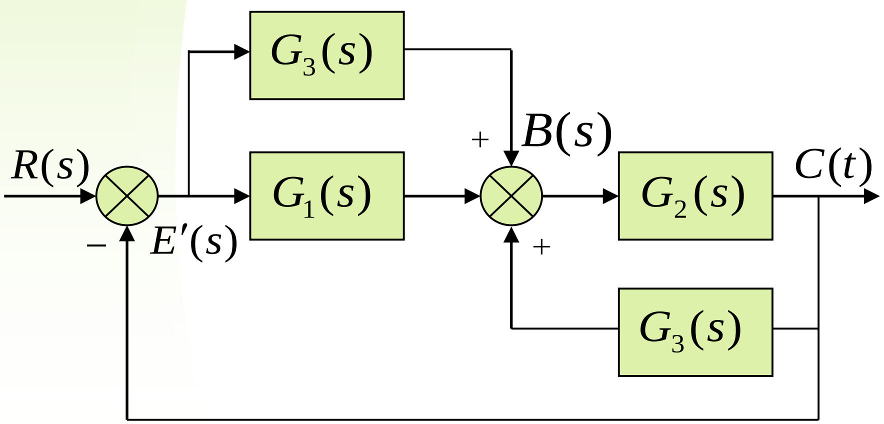


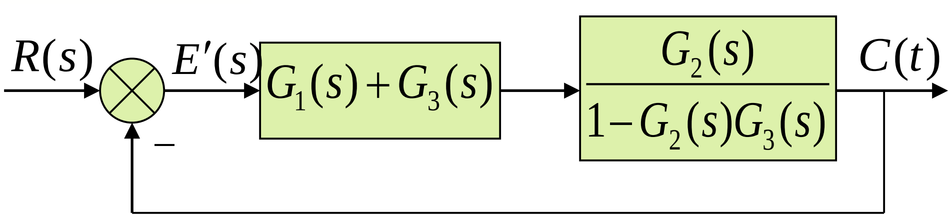
1.1.2 误差系数

复合控制对消除误差的作用









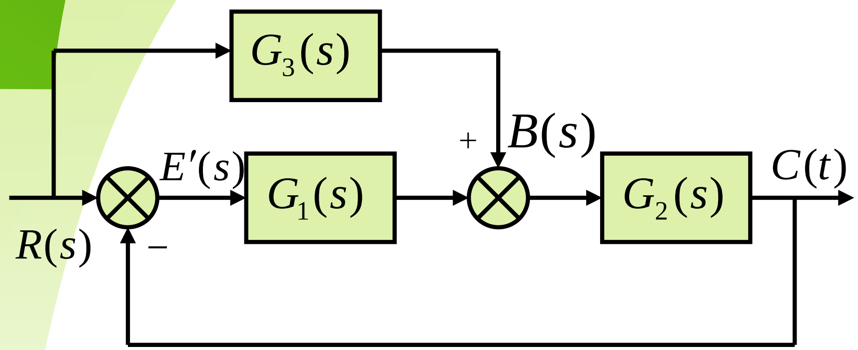
$$\frac{E'(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+\dfrac{[G_1(s)+G_3(s)]G_2(s)}{1-G_2(s)G_3(s)}}=\frac{1-G_2(s)G_3(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$

$$\therefore E'(s)=\frac{1-G_2G_3}{1+G_1G_2}\cdot R(s)$$

若满足 $G_3=\dfrac{1}{G_2}$，则 $E'(s)=0$，

即由给定引起的稳态误差为零，输出完全复现给定输入。该式称为按给定作用实现完全不变性的条件。

1.1.2 复合控制应用时的注意事项



$$G(s)=\frac{1}{(\tau_e s+1)(\tau_m s+1)}\Rightarrow$$

$$G^{-1}(s)\approx\frac{(\tau_e s+1)(\tau_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$$

- 顺馈环节也可用来减小**原理性误差（静态和动态）**，但对非线性因素引起的附加性误差无效；
  因为它的输入只包含指令信息，而没有反馈信息，是一种开环控制方式；
- 顺馈环节应用时，在输入指令各阶导数不可用的情况下，必须考虑它的**物理可实现性；**
  可以通过附加极点的方式来近似实现；
- 顺馈环节的结构和参数依赖于被控对象的精确模型，因此对被控对象的结构和参数摄动等不确定性**不具有鲁棒性。**
  因此对于不确定性较大的系统，使用时要慎重。

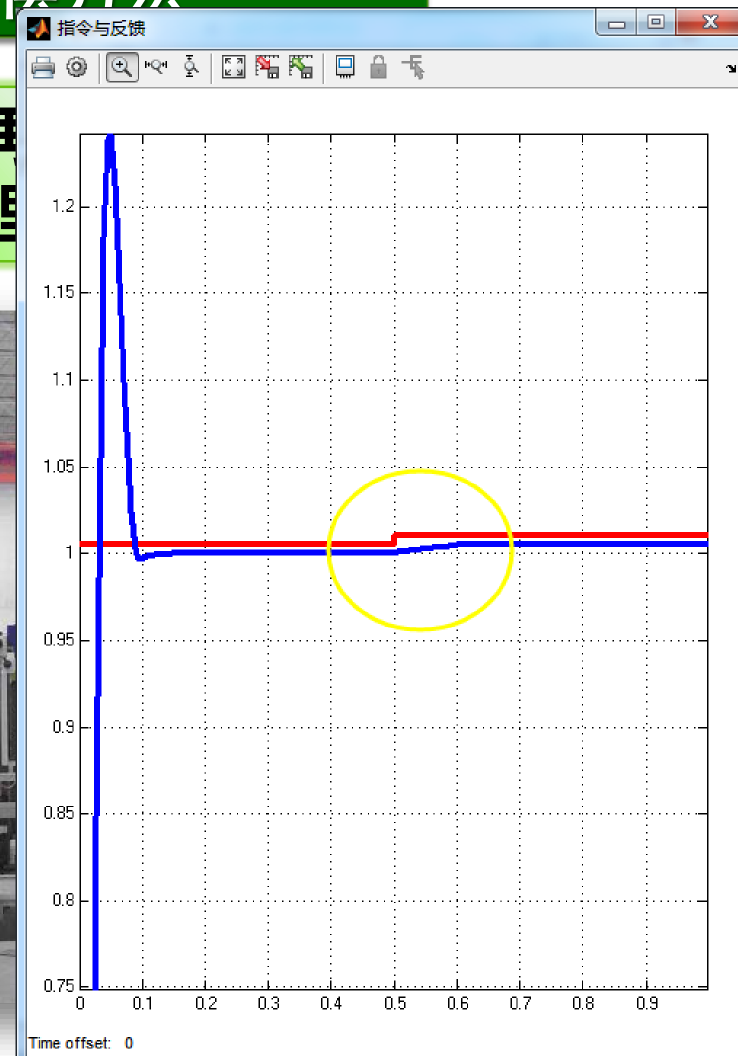
1.1.2 误差系数

误差的补偿方法

如果型别不能提升了，滞后也不能再
因素存在，顺馈也无效了，如何处理

如果误差具有重复性，则可以采用补偿得方法来减小误差：

1 指令修正
2 反馈修正



可以补偿原理性误差

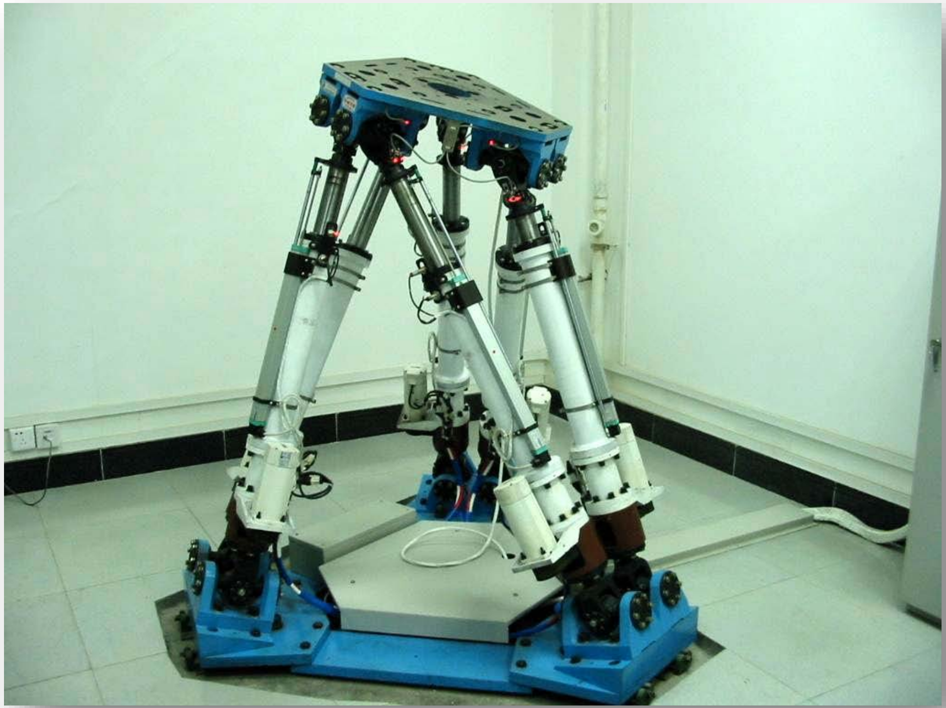
误差的补偿方法

如果型别不能提升，滞后也不能再增加了，由于非线性因素存在顺馈也无效了，如何处理？

如果误差具有重复性，则可以采用补偿得方法来减小误差：

1 指令修正
2 反馈修正

可以补偿一些附加性误差



减小静态误差的方法总结

- 对于给定典型信号输入下静态误差为**无穷大**的系统，
- 必须通过**提高系统型别**来解决；

- 对于静差为**非零常数**的系统，
- 0型系统可以直接加**积分环节**解决；
- I型系统可以**提高增益**或加**比例+积分环节**或者**滞后**环节来解决或改善；
- II型系统则一般只能通过**提高增益**或**加入滞后**环节来改善；

- **顺馈**也可用来减小**原理性误差**，但对非线性因素引起的附加性误差无效，而且它的物理可实现性、对参数摄动的敏感性需要考虑。顺馈也会抬高系统闭环谐振峰；

- 系统型别和增益都提高到极限时，一般只能通过**补偿**方法来减小系统误差（**开环补偿**，要求误差必须有**重复性**）。

1.1.2 误差系数

提示：

根据终值定理算出的稳态误差是误差信号稳态分量$e_{ss}(t)$在t趋于无穷时的数值，故有时称为终值误差，不能反映$e_{ss}(t)$随时间t的变化规律，具有一定的局限性。

通过静态误差系数求得的稳态误差或是零，或是有限非零值，或是无穷大，不反映误差与时间的关系。

对于任意时间信号输入的系统或者关心动态误差的系统，如何处理？

三、动态误差系数

动态误差系数法——研究输入信号几乎为任意时间函数时的系统稳态误差与时间的关系，因此动态误差系数又称广义误差系数。

考虑系统输入与偏差之间的传递函数

$$\Phi_E(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_k}$$

考虑到$t\to\infty$时的情况，也就是$s\to 0$的情况。将误差传递函数在$s=0$的邻域内展开成泰勒级数

$$\Phi_E(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=C_0+C_1 s+\frac{C_2}{2!}s^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n s^n}{n!}$$

三、动态误差系数

$$\Phi_E(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=C_0+C_1s+\frac{C_2}{2!}s^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_ns^n}{n!}$$

其中:

$$C_0=\left.\frac{1}{1+G_k(s)}\right|_{s=0}\qquad C_1=\left.\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{1+G_k(s)}\right]\right|_{s=0}\qquad C_2=\left.\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{1+G_k(s)}\right]\right|_{s=0}$$

$$C_n=\left.\frac{d^n}{ds^n}\left[\frac{1}{1+G_k(s)}\right]\right|_{s=0}$$

此级数的收敛域是 $s=0$ 的邻域，相当于 $t\to\infty$ 时的情况。求拉氏反变换，可得 $t\to\infty$ 时误差函数的表达式

$$\lim_{t\to\infty}e(t)=C_0r(t)+C_1\frac{dr(t)}{dt}+\frac{C_2}{2!}\frac{d^2r(t)}{dt^2}+\cdots$$

三、动态误差系数

$$C_n = \frac{d^n}{ds^n}\left[\frac{1}{1+G_k(s)}\right]\Bigg|_{s=0}$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = C_0 r(t) + C_1 \frac{dr(t)}{dt} + \frac{C_2}{2!}\frac{d^2 r(t)}{dt^2} + \cdots$$

可见，$t\to\infty$时的误差函数的表达式与**输入信号及其各阶导数**有关。仿照静态误差系数的定义,可定义动态误差系数如下:

C_0 —动态位置误差系数

C_1 —动态速度误差系数

C_2 —动态加速度误差系数

用公式求系数比较麻烦，有没有简单的方法?

三、动态误差系数

将误差传递函数写成s有理分式形式，利用长除法得到各动态误差系数。

$$G_k(s)=\frac{k}{s^{\nu}}\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+1}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+1}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_k(s)}$$

$$=\frac{s^{\nu}(a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+1)}{s^{\nu}(a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+1)+k(b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+1)}$$

三、动态误差系数

$$\Phi_E(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=C_0+C_1s+\frac{C_2}{2!}s^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_ns^n}{n!}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{s^{\nu}(a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+1)}{s^{\nu}(a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+1)+k(b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1s+1)}$$

当v=0时

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1+a_1s++a_2s^2\ldots+a_{n-1}s^{n-1}+a_ns^n}{(1+k)+(a_1+b_1k)s+(a_2+b_2k)s^2+\ldots}$$

$$C_0=\frac{1}{1+k}$$

$$C_1=\frac{k(a_1-b_1)}{(1+k)^2}$$

$$\frac{C_2}{2!}=\frac{(a_2-b_2)k}{(1+k)^3}+\frac{a_1(b_1-a_1)k}{(1+k)^3}+\frac{b_1(b_1-a_1)k^2}{(1+k)^3}$$

1.1.2 误差系数

三、动态误差系数

$$\Phi_E(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=C_0+C_1s+\frac{C_2}{2!}s^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_ns^n}{n!}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{s^v(a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+1)}{s^v(a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+1)+k(b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1s+1)}$$

当v=1时

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{s+a_1s^2++a_2s^3\ldots+a_{n-1}s^n+a_ns^{n+1}}{k+(b_1k+1)s+(b_2k+a_1)s^2+\ldots}$$

$$C_0=0$$

$$C_1=\frac{1}{k}$$

$$\frac{C_2}{2!}=\frac{a_1-b_1}{k}-\frac{1}{k^2}$$

三、动态误差系数

$$\Phi_E(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=C_0+C_1s+\frac{C_2}{2!}s^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_ns^n}{n!}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{s^{\nu}(a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+1)}{s^{\nu}(a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+1)+k(b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1s+1)}$$

当v=2时

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{s^2+a_1s^3++a_2s^4\ldots+a_{n-1}s^{n+1}+a_ns^{n+2}}{k+b_1ks+(b_2k+1)s^2+\ldots}$$

$$C_0=0$$

$$C_1=0$$

$$\frac{C_2}{2!}=\frac{1}{k}$$

$$\frac{C_3}{3!}=\frac{a_1-b_1}{k}$$

1.1.2 误差系数

静态误差系数与动态误差系数对比

系统类型	静态误差系数			动态误差系数		
	K_P	K_V	K_A	C_0	C_1	C_2
0型	$\frac{1}{1+k}$	∞	∞	$\frac{1}{1+k}$	$\frac{k(a_1-b_1)}{(1+k)^2}$	$\frac{(a_2-b_2)k}{(1+k)^3}+\cdots$
I型	0	$\frac{1}{k}$	∞	0	$\frac{1}{k}$	$\frac{a_1-b_1}{k}-\frac{1}{k^2}$
II型	0	0	$\frac{1}{k}$	0	0	$\frac{1}{k}$

$$r(t)=A\cdot 1(t)+Bt\cdot 1(t)+C\frac{t^2}{2}\cdot 1(t)$$

$$e_{ss}=AK_P+BK_V+CK_A$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t)=C_0 r(t)+C_1\frac{dr(t)}{dt}+\frac{C_2}{2!}\frac{d^2r(t)}{dt^2}+\cdots$$

动态误差系数---图解法（I型系统）

什么情况下，我们会用到图解法?

$$G_1(s)=\frac{k}{s}\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+1}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+1}$$

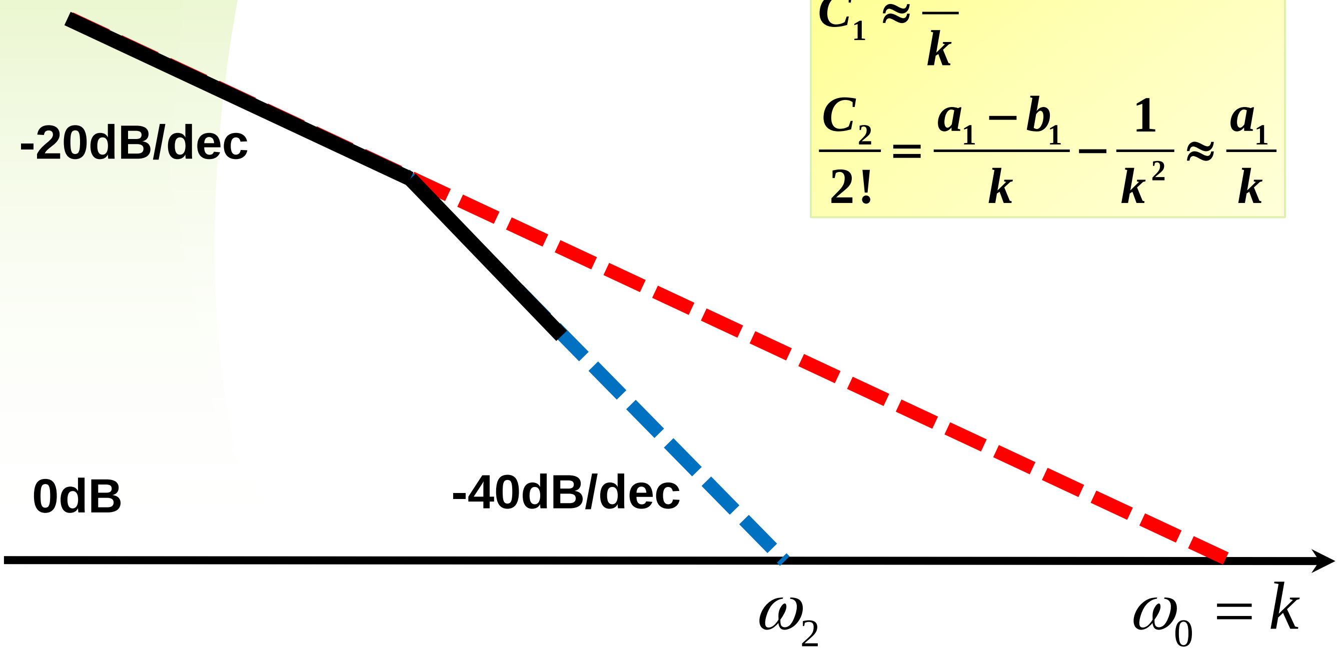
$$C_0=0$$

$$C_1\approx\frac{1}{k}$$

$$\frac{C_2}{2!}=\frac{a_1-b_1}{k}-\frac{1}{k^2}\approx\frac{a_1}{k}$$

$$C_1=\frac{1}{k}=\frac{1}{\omega_0}$$

$$\frac{C_2}{2!}\approx\frac{a_1}{k}=\frac{1}{\omega_1\omega_0}=\left(\frac{1}{\omega_2}\right)^2$$



I 型系统

动态误差系数---图解法（I型系统）

推导过程：

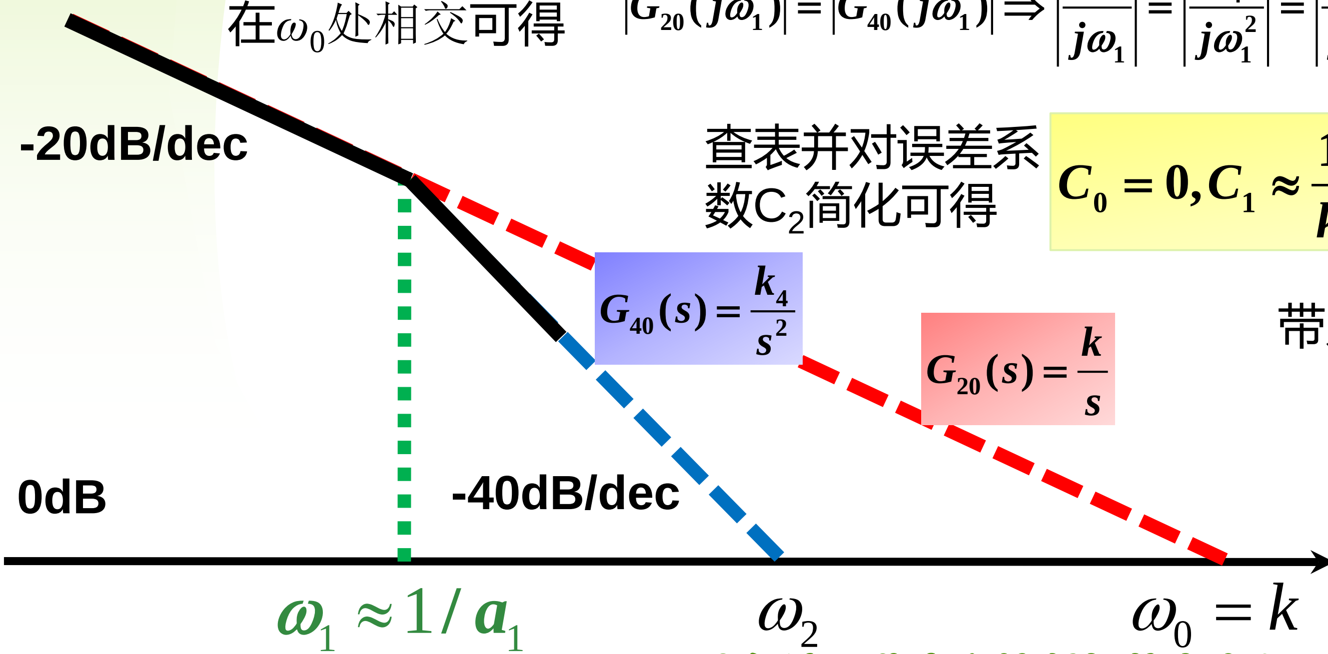
由bode图可得被控对象传函为 $G(s)=\dfrac{k}{s}\dfrac{1}{a_1 s+1}$

已知斜率，已知两端的两个交点ω_0和 ω_2，求取k和a_1

由$G_{40}(s)$可得 $|G_{40}(j\omega_2)|=\left|\dfrac{k_4}{j\omega_2^2}\right|=1\Rightarrow k_4=\omega_2^2\Rightarrow G_{40}(s)=\dfrac{\omega_2^2}{s}$

由$G_{20}(s)$可得 $|G_{20}(j\omega_0)|=\left|\dfrac{k}{j\omega_0}\right|=1\Rightarrow k=\omega_0\Rightarrow G_{20}(s)=\dfrac{\omega_0}{s}$

由$G_{20}(s)$和$G_{40}(s)$在ω_0处相交可得 $|G_{20}(j\omega_1)|=|G_{40}(j\omega_1)|\Rightarrow\left|\dfrac{k}{j\omega_1}\right|=\left|\dfrac{k_4}{j\omega_1^2}\right|=\left|\dfrac{\omega_2^2}{j\omega_1^2}\right|\Rightarrow k=\dfrac{\omega_2^2}{\omega_1}\Rightarrow\dfrac{1}{a_1}=\omega_1=\dfrac{\omega_2^2}{\omega_0}$



查表并对误差系数C_2简化可得

$$C_0=0,C_1\approx\frac{1}{k},\frac{C_2}{2!}=\frac{a_1-b_1}{k}-\frac{1}{k^2}\approx\frac{a_1}{k}$$

带入k和a_1的值可得

$$C_1=\frac{1}{k}=\frac{1}{\omega_0}$$

$$\frac{C_2}{2!}\approx\frac{a_1}{k}=\frac{1}{\omega_1\omega_0}=\left(\frac{1}{\omega_2}\right)^2$$

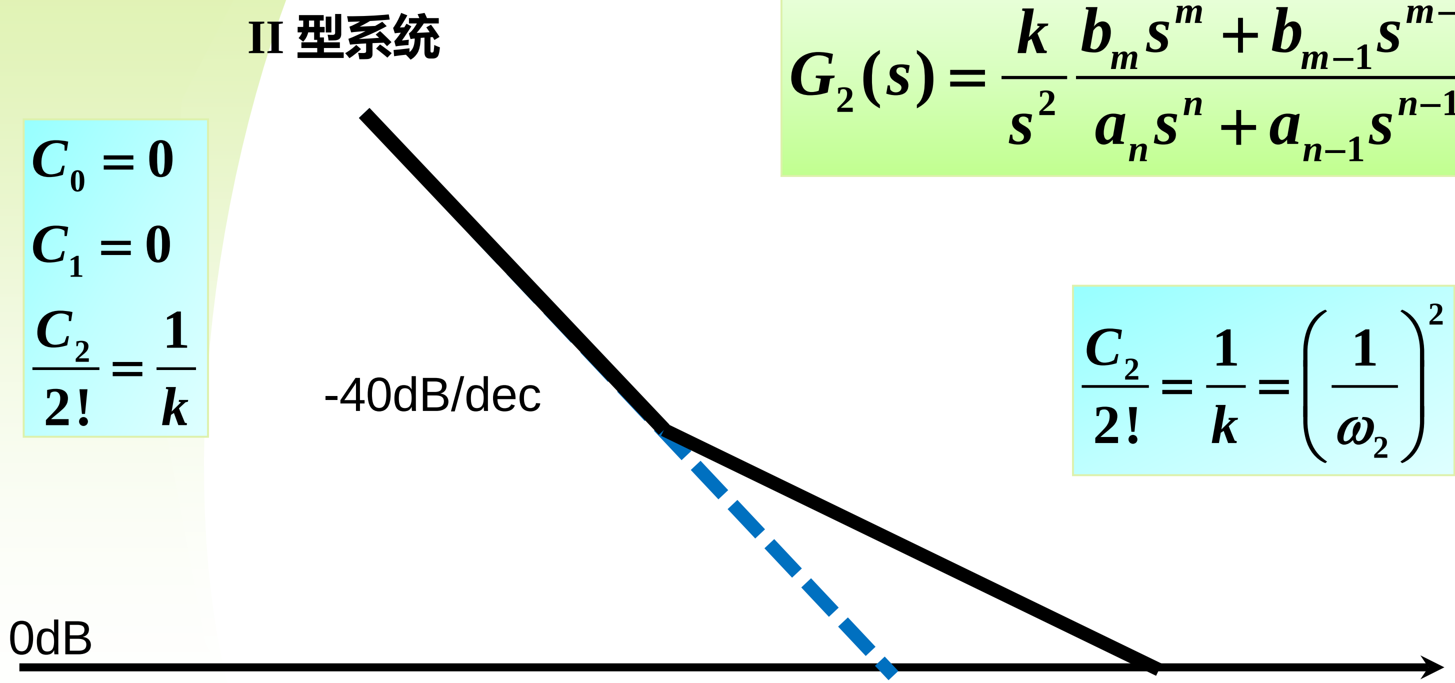
动态误差系数--图解法（II型系统）

$$G_2(s)=\frac{k}{s^2}\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+1}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+1}$$

$$C_0=0$$

$$C_1=0$$

$$\frac{C_2}{2!}=\frac{1}{k}$$



$$\omega_2=\sqrt{k}$$

$$\frac{C_2}{2!}=\frac{1}{k}=\left(\frac{1}{\omega_2}\right)^2$$

总结：用-20dB延长线求C_1，用-40dB延长线求C_2

动态误差系数--低频模型法

假定系统输入信号的频谱完全处于系统的低频段，系统开环传函为

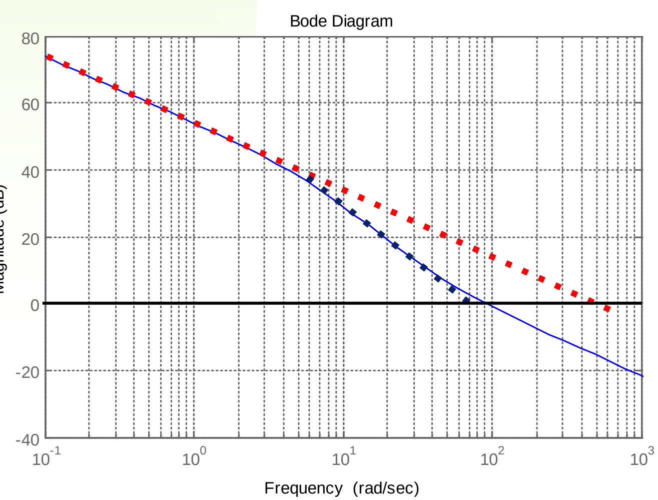
$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_k(s)}\approx\frac{1}{G_k(s)}$$

$$G_k=\frac{K}{s}\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

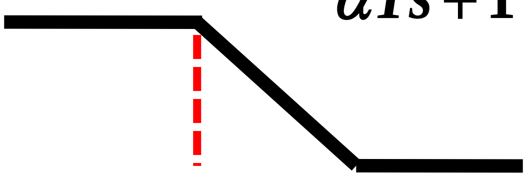
$$\alpha>1$$

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{K}\frac{\alpha Ts^2+s}{Ts+1}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{\alpha Ts^2+s}{K}$$



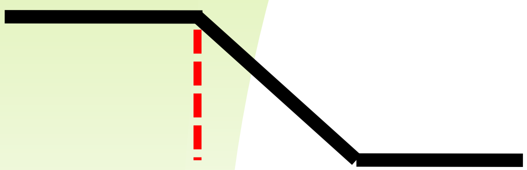
$$G=\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$



$$\frac{1}{\alpha T}=6.67rad/s$$

动态误差系数-低频模型法

$$G=\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$



$$\frac{1}{\alpha T}=6.67rad/s$$

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{\alpha Ts^2+s}{K}$$

跟踪误差的低频模型

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{K}s+\frac{\alpha T}{K}s^2$$

动态误差系数法

$$\frac{E(s)}{R(s)}=C_1 s+\frac{C_2}{2!}s^2$$

$$\frac{C_2}{2!}=\frac{a_1-b_1}{K}-\frac{1}{K^2}$$
$$=\frac{\alpha T-T}{K}-\frac{1}{K^2}$$

1.1.3 跟踪误差的计算及应用

动态误差系数-低频模型法

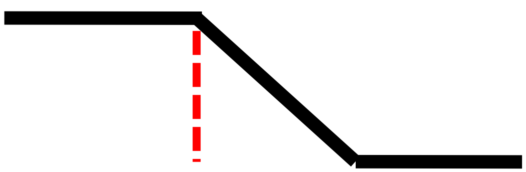
说 明

输入信号的频谱完全处于系统的低频段时，动态误差系数就是低频模型的各次系数；

若输入信号频谱延伸至高频段，模型精度降低。

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{K}s+\frac{\alpha T}{K}s^2$$

$$\boxed{\frac{E(s)}{R(s)}=C_1 s+\frac{C_2}{2!}s^2}$$



$$\frac{1}{\alpha T}=6.67rad/s$$

1.1.2 误差系数

动态误差系数求取方法总结

- **求导方法**更具有普适性，但计算复杂。精度要求高时，需要求取多个系数时或被控对象比较简单时适用；
- **长除法**获得的动态误差系数表使用方便，但只能提供有限个系数，精度取决于所使用的系数个数；
- **图解法**简单方便，适用于没有精确数学模型，只有对象bode图情况，而且精度要求不高的场合；
- **低频模型法**使用简单，对输入信号频带有要求，精度不高。

1.1.2 误差系数

说明：

这里所谓“动态”两字的含义是指这种方法可以完整描述系统稳态误差$e_{ss}(t)$随时间变化的规律，而不是指误差信号中的瞬态分量$e_{ts}(t)$随时间变化的情况，即不应包含误差信号中随时间趋于零的分量。

此外上面给出的误差级数仅在$t\rightarrow\infty$时成立，因此如果输入信号$r(t)$中包含有随时间趋于零的分量，则这些分量不应包含在稳态误差级数表达式中的输入函数及其各阶导数之内。

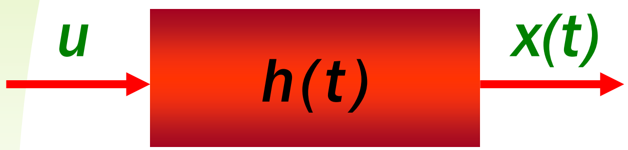
1.1 输入信号和跟踪误差

- 1.1.1 输入信号的分析
- 1.1.2 静态误差系数和动态误差系数
- 1.1.3 跟踪误差的计算及在控制系统设计中的应用

卷积法

复习一下卷积法

线性控制系统脉冲响应的拉氏变换等于其传递函数



$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

拉氏变换

$$L[h(t)]=\frac{X(s)}{U(s)}=G(s)$$

$$X(s)=G(s)\bullet U(s)$$

$$u(t)=\delta(t)$$

$$X(s)=G(s)$$

可以把系统输入看做无数个幅值随u(t)变化的脉冲函数的和，每一个都会产生脉冲响应，线性系统的输出就是这些脉冲响应的线性叠加

卷积法

已知系统的输入与输出之间满足卷积关系

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)u(\tau)d\tau=h(t)*u(t)$$

式中 $h(t-\tau)$ 是控制系统的单位脉冲响应。

思路：通过系统误差的脉冲响应（即$r(t)$到$e(t)$的脉冲响应）求解跟踪误差！

卷积法

$$e(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)u(\tau)d\tau=h(t)*u(t)$$

具体计算时，采用数值法，用卷积和代替卷积分

$$e(k)=\Delta t\sum_{n=-\infty}^{+\infty}w(k-n)u(n)$$

式中 $w(k)$ 是单位脉冲响应。$w(k)$ 具有一定的宽度N，即

$$w(k)=0,\quad k<0 \text{或} k\geq N$$

则

$$e(k)=\Delta t\sum_{n=k-N}^{k}w(k-n)u(n)$$

1.1.3 跟踪误差的计算及应用

卷积法步骤

$$e(k)=\Delta t\sum_{n=k-N}^{k}w(k-n)u(n)$$

获取脉冲响应函数的3种方法

1. **解析**（传递函数的反拉氏变换）
2. **仿真**（根据传递函数matlab仿真）
3. **实验**（给实际系统注入脉冲信号获取）

首先求解从$r(t)$到$e(t)$的脉冲响应$h(t)$

↓

根据$h(t)$的宽度确定$w(k)$宽度$\underline{N}$

↓

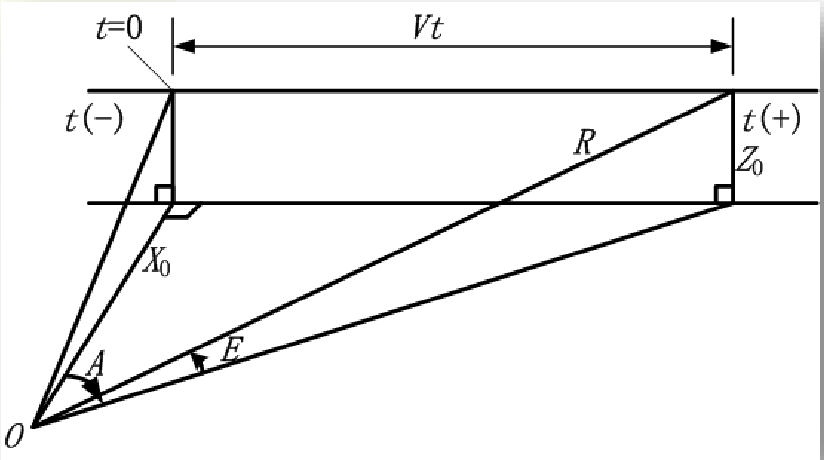
计算：$$e(k)=\Delta t\sum_{n=k-N}^{k}w(k-n)u(n)$$

卷积法

例1：计算一小功率随动系统的跟踪误差。

设该系统初步设计后，开环传递函数 $G_k(s)=\dfrac{K}{s}\dfrac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$

式中，K=500，T=0.025，αT=0.15



$$A(t)=\arctan\left(\frac{Vt}{X_0}\right)=\arctan(at)$$

$$\frac{dA}{dt}=a\cos^2 A$$

$$\frac{d^2A}{dt^2}=-a^2\sin 2A\cdot\cos^2 A$$

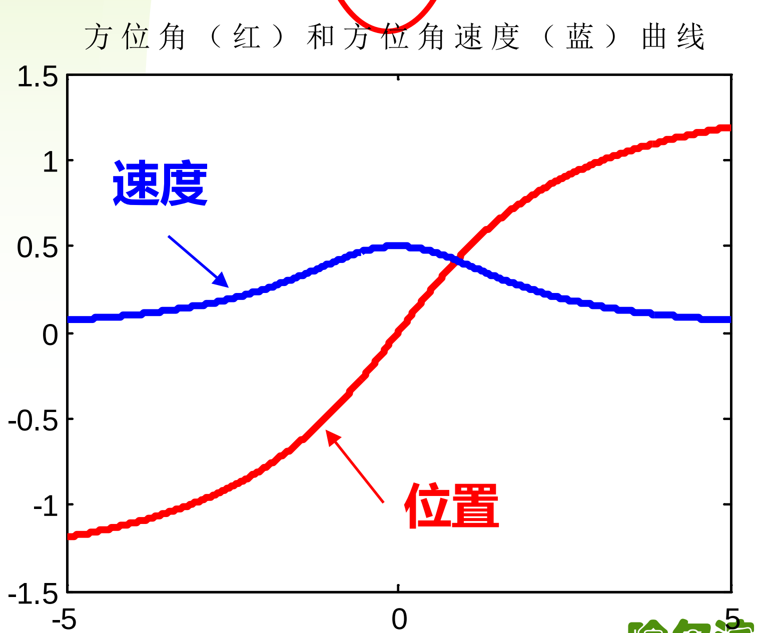
卷积法

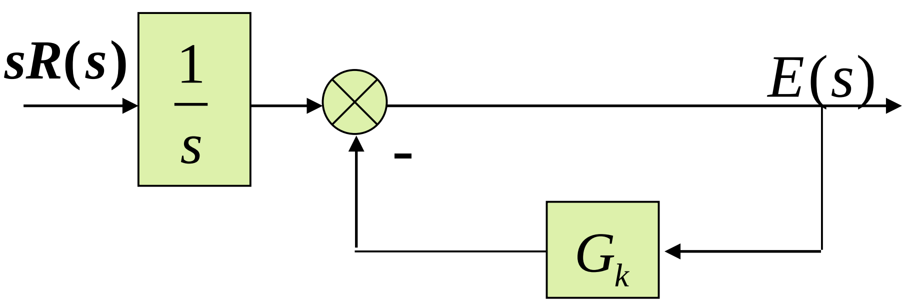
例1：计算一小功率随动系统的跟踪误差。

$$G_k(s)=\frac{K}{s}\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

首先求解从 $\dot{r}(t)$ 到$e(t)$的脉冲响应。

$$\frac{E(s)}{sR(s)}=\frac{1}{s}\frac{1}{1+G_k}$$

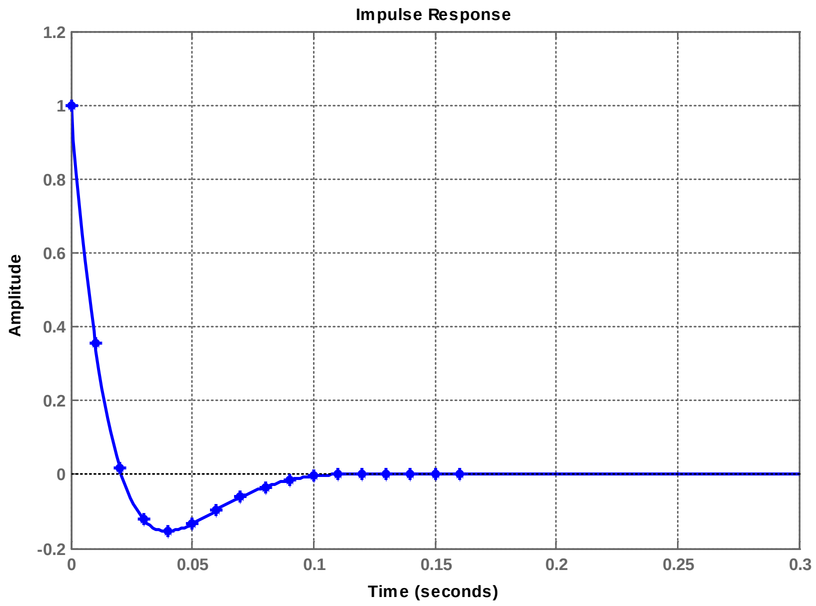




卷积法

例1：计算一小功率随动系统的跟踪误差（卷积法）。

从 $\dot{r}(t)$ 到$e(t)$的脉冲响应（利用MATLAB中的 lsim计算）



当 $t \geq 0.16s$ ，脉冲响应为零。

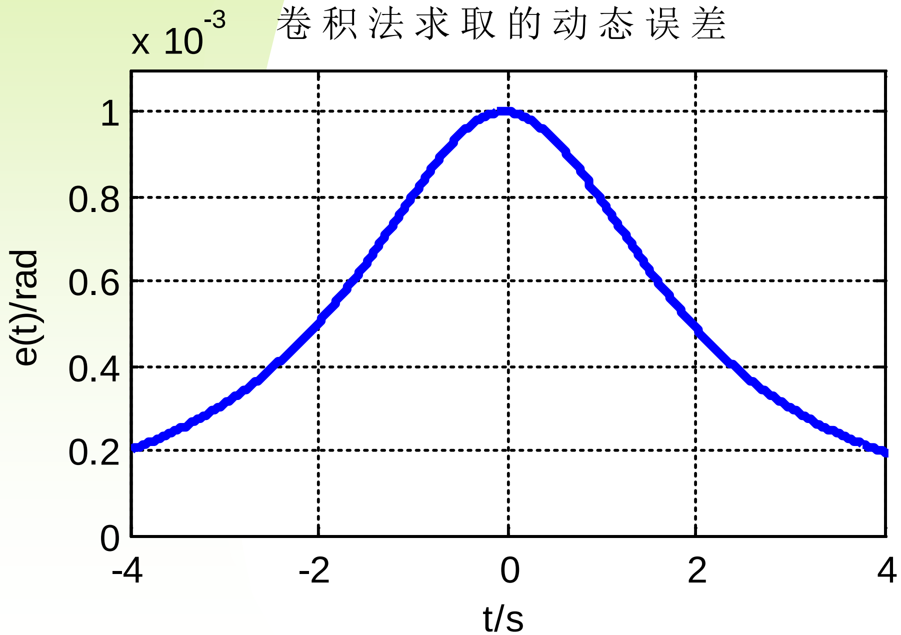
若 $\Delta t = 0.01s$ ， $N = 16$ ，即

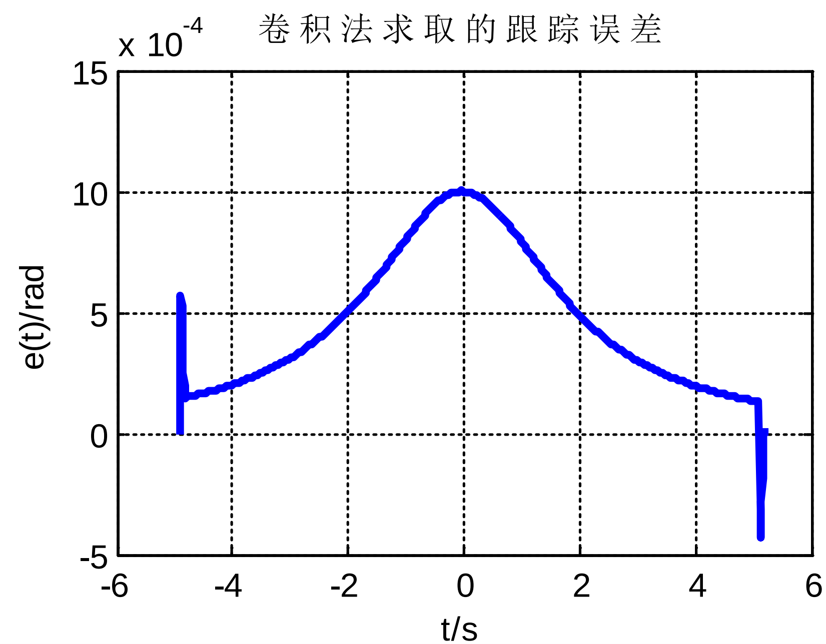
$$w(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ h(k \cdot \Delta t) & 0 \leq k < N \\ 0 & k \geq N \end{cases}$$

$$e(k) = \Delta t \sum_{n=k-N}^{k} w(k-n) r(n)$$

卷积法

计算 $\dot{r}(t)$ 和 $w(k)$ 的卷积，$N=16$。





跟踪误差中的稳态部分

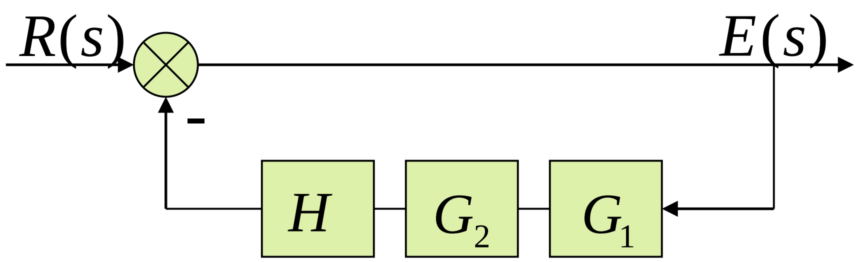
卷积法可以计算包含瞬态误差在内的跟踪误差，该图曲线包含速度阶跃作用下的瞬态误差。

动态误差系数法

例2：计算一小功率随动系统的跟踪误差（查表法）。

设该系统初步设计后，开环传递函数 $G_k(s)=\dfrac{K}{s}\dfrac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$

式中，$K=500$，$T=0.025$，$\alpha T=0.15$



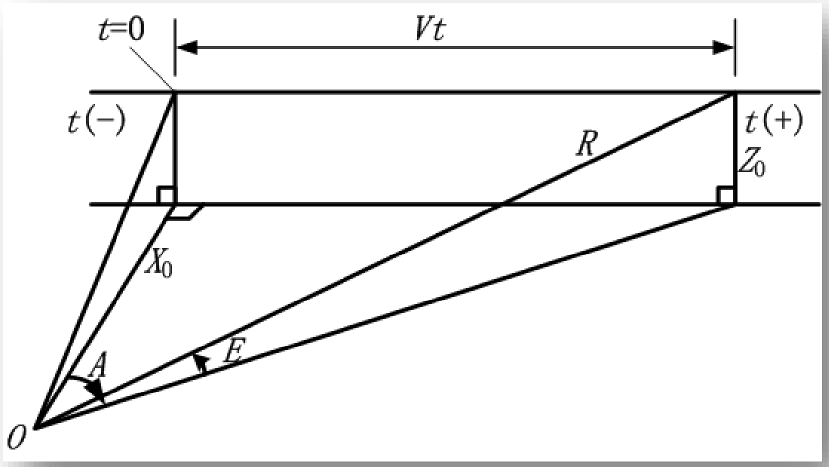
动态误差系数法

该系统跟踪直线飞行目标时，输入信号分析结果为：

$$A(t) = \arctan\left(\frac{Vt}{X_0}\right) = \arctan(at)$$

$$\frac{dA}{dt} = a\cos^2 A$$

$$\frac{d^2A}{dt^2} = -a^2 \sin 2A \cdot \cos^2 A$$



动态误差系数法

$$G_k(s)=\frac{K}{s}\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

动态误差及动态误差系数为:

$$\lim_{t\to\infty} e(t)=C_0 r(t)+C_1\frac{dr(t)}{dt}+\frac{C_2}{2!}\frac{d^2 r(t)}{dt^2}+\cdots$$

$$C_n=\frac{d^n}{ds^n}\left[\frac{1}{1+G_k(s)}\right]\bigg|_{s=0}$$

查表或求导

I型系统

$$C_0=0$$

$$C_1=\frac{1}{K}=0.002$$

$$\frac{C_2}{2!}=\frac{a_1-b_1}{K}-\frac{1}{K^2}=2.46\times10^{-4}$$

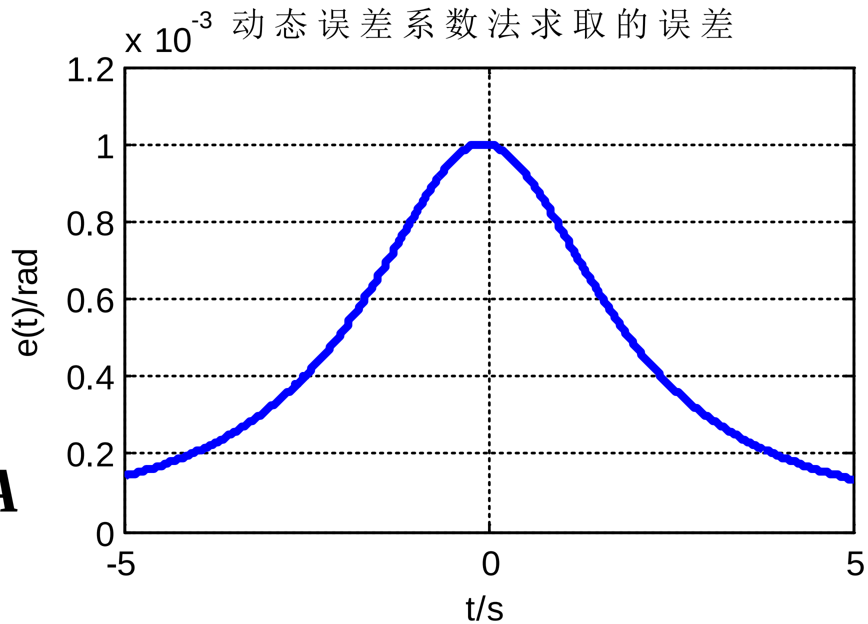
1.1.3 跟踪误差的计算及应用

动态误差系数法

动态误差计算结果:

$$e(t)=C_1\frac{dA}{dt}+\frac{C_2}{2!}\frac{d^2A}{dt^2}$$

$$=C_1\times a\cos^2 A-\frac{C_2}{2}a^2\sin 2A\cos^2 A$$



如果没有解析表达式，动态误差系数法如何应用?

跟踪误差计算的其它用途?

动态误差系数法

例2：计算一小功率随动系统的跟踪误差（低频模型法）。

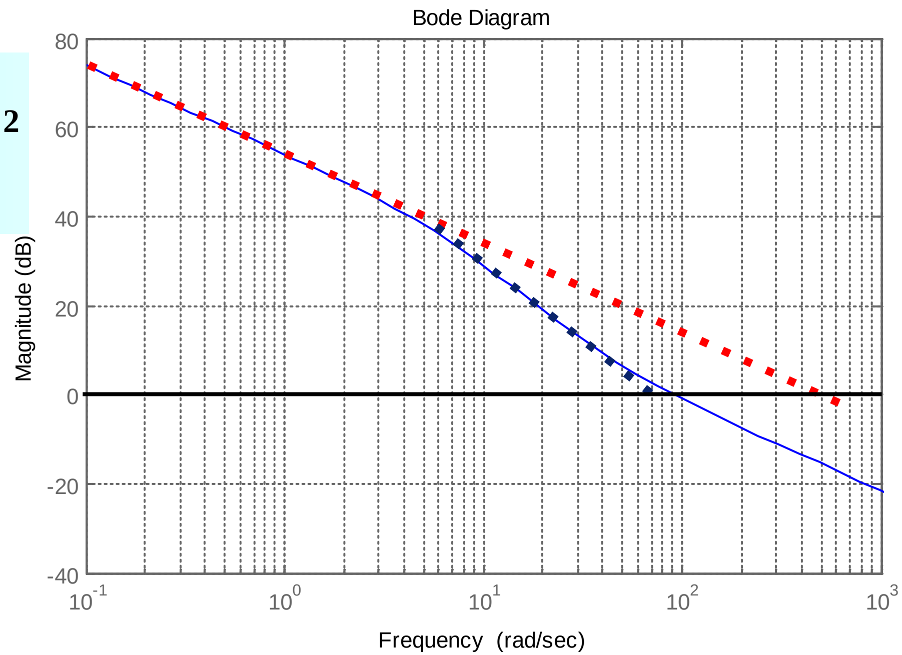
设该系统初步设计后，开环传递函数 $G_k(s)=\dfrac{K}{s}\dfrac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$

式中，$K=500$，$T=0.025$，$\alpha T=0.15$

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{K}s+\frac{\alpha T}{K}s^2 \qquad \frac{E(s)}{R(s)}=C_1 s+\frac{C_2}{2!}s^2$$

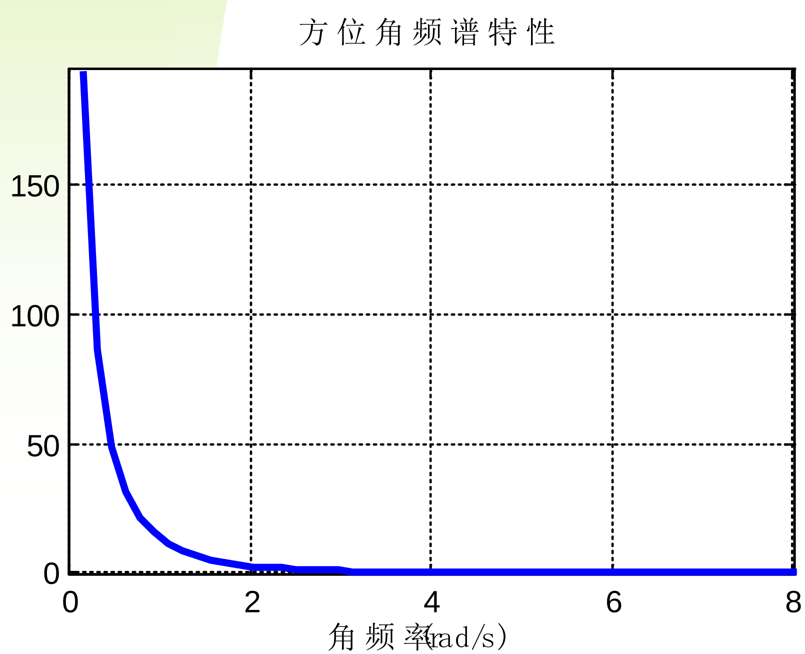
$$C_1=\frac{1}{K}=\frac{1}{500}=0.002$$

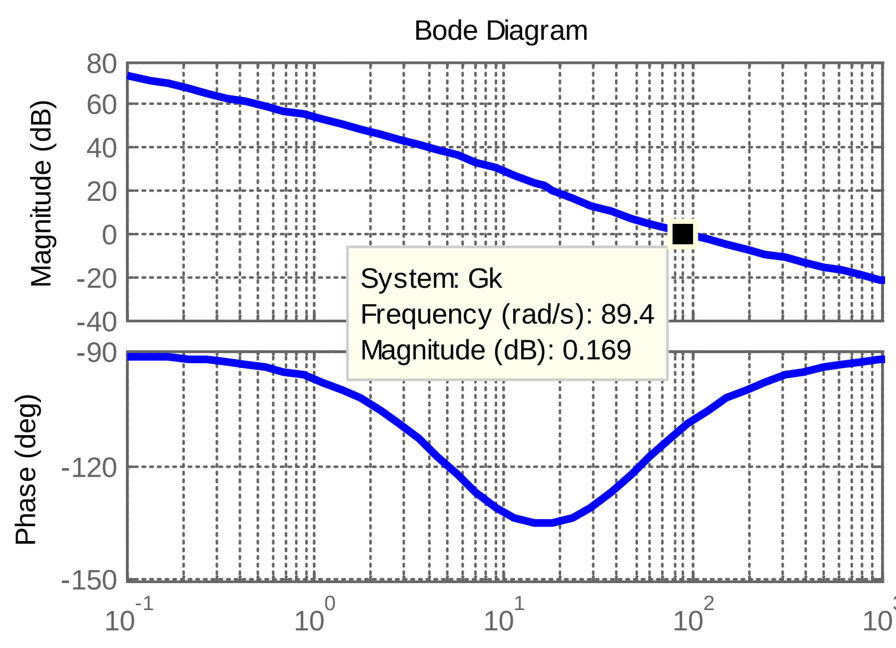
$$\frac{C_2}{2!}=\frac{\alpha T}{K}=\frac{0.15}{500}=3\times10^{-4}$$



动态误差系数-低频模型

由方位角频谱特性和开环系统bode图比较可知，输入信号的频谱完全处于系统的低频段，因此可以用低频数学模型法求取动态误差系数。





跟踪误差应用

$$G_k(s)=\frac{K}{s}\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

例3：小功率随动系统。

(1) 若方位角最大角速度为a=0.5s^{-1}，跟踪误差不大于1mrad，确定系统增益。

跟踪误差的低频模型 $\frac{E(s)}{sR(s)}=\frac{1}{K}+\frac{\alpha T}{K}s$，输入信号频谱在第一个转折频率之前，故可将误差模型进一步简化（忽略C_2）为

$$\frac{E(s)}{sR(s)}=\frac{1}{K} \Rightarrow e(t)=\frac{1}{K}\dot{r}(t)=\frac{0.5}{K}<0.001 \Rightarrow K\geq 500$$

跟踪误差应用

例3：小功率随动系统。

(2)若方位角最大角速度为a=0.244rad/s，最大角加速度为0.039rad/s^2，跟踪误差不大于3′，确定系统增益。

假设采用**II型系统**，跟踪误差的低频模型简化为

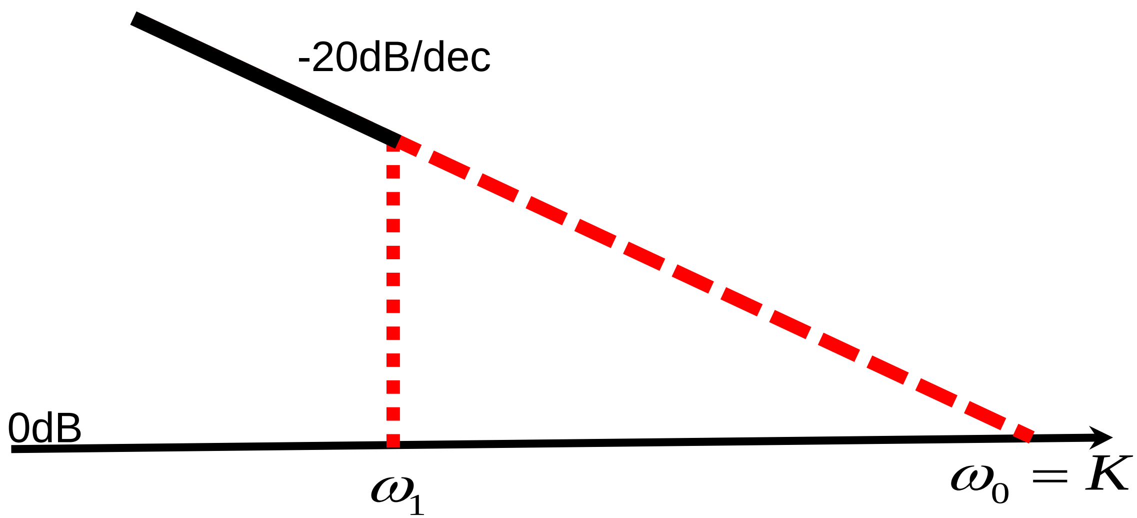
$$e(t)=\frac{C_2}{2!}\ddot{r}(t)=\frac{1}{K_a}\ddot{r}(t) \Rightarrow K_a>\frac{0.039}{3/60/57.3}=44.7$$

1.1.3 跟踪误差的计算及应用

说明：

1、根据系统误差要求确定下来的系统增益或型别是硬性要求，在系统设计中不允许改动；

2、系统设计时第一个转折频率要超出输入信号的频谱宽度；



跟踪误差计算小结

- **卷积法**必须要有脉冲响应函数（必须通过解析、仿真或者实验的方法获得），还要进行求和计算，过程比较繁琐。优点是可以计算包含瞬态误差在内的整个时段的误差；

- **动态误差系数法**使用较为方便，但精度较低。应用时必须给定指令信号的各阶导数，结果中只包含稳态误差；

Thank You！

哈尔滨工业大学控制与仿真中心