



第1章 控制系统的输入条件分析

——2019年春季学期

授课教师：马 杰（控制与仿真中心）

罗 晶（控制科学与工程系）

马克茂（控制与仿真中心）

陈松林（控制与仿真中心）

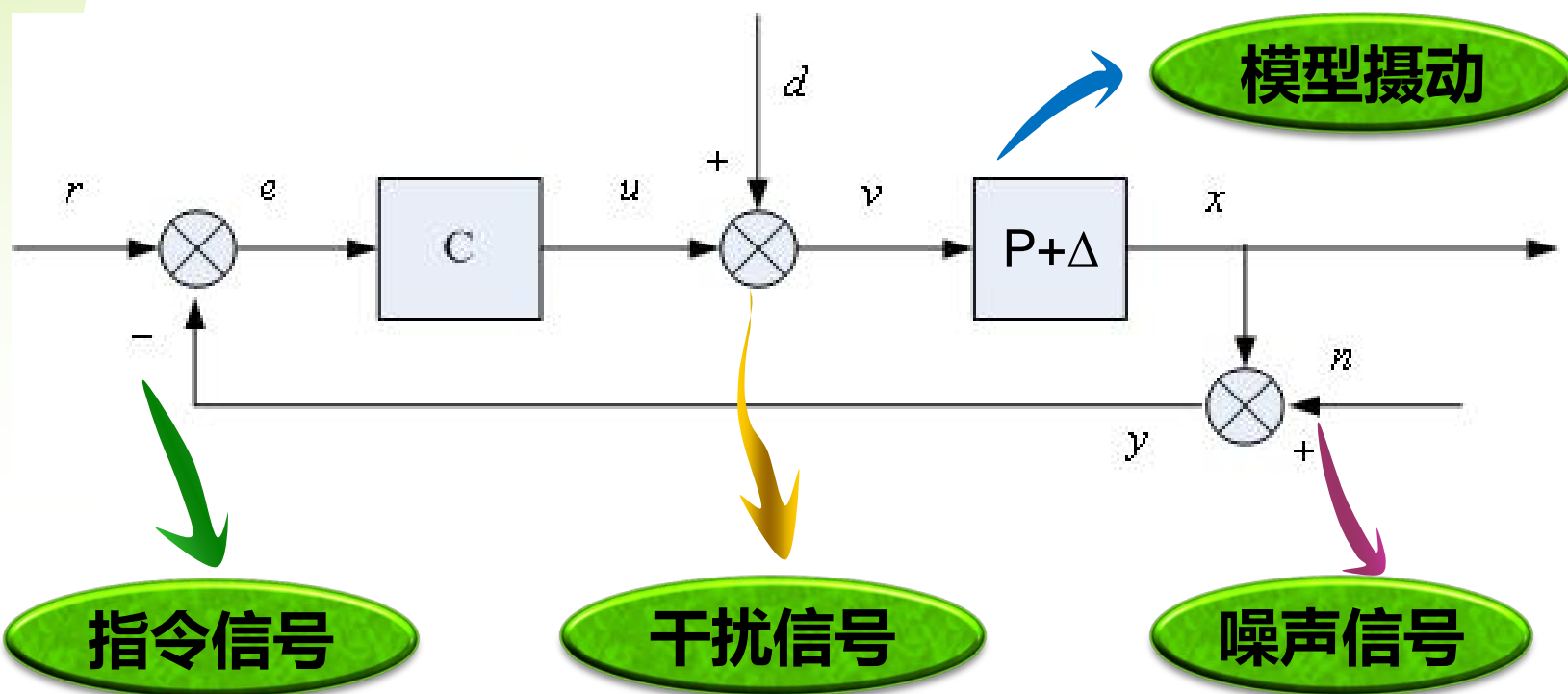


哈尔滨工业大学控制与仿真中心



上一节课内容回顾

一个控制系统的性能是由多种因素决定的，我们把这些因素统称为控制系统的输入条件。在控制系统设计时，必须充分分析它们对控制性能的影响，并明确他们的形式和特征，以及他们与系统输出的关系，并据此来设计有效的控制器。





上一节课内容回顾

分析什么？分析的目的？

分析典型输入信号的作用：



根据典型输入信号的幅值、变化率及二阶或高阶导数确定元件的参数；



根据典型输入信号的幅值、变化率及二阶或高阶导数计算跟踪误差，指导控制设计；



确定输入信号的频带以及系统的带宽。



上一节课内容回顾

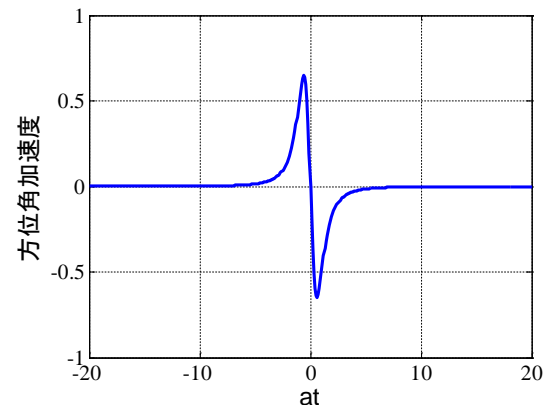
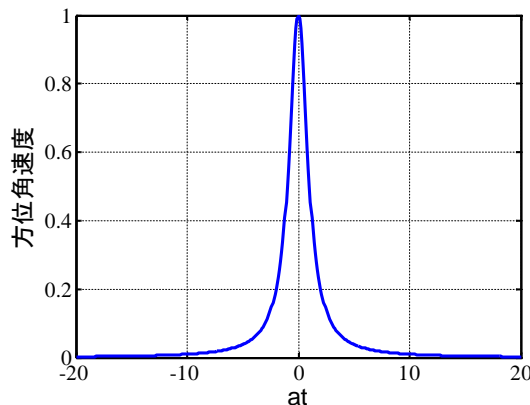
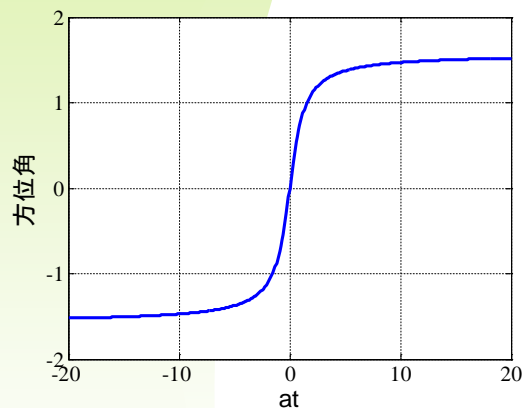
1. 根据系统的**需求和功能要求**，确定系统的**典型输入信号**
 - a. 根据系统特点确定（如阶跃指令是调节系统的典型输入）
 - b. 通过实验测定（如海浪特性）；
 - c. 确定典型工况，进行机理分析，得到解析函数；
 - d. 仿真分析。

例子：温度控制系统，电梯系统，稳瞄系统（雷达伺服系统），导弹，卫星，机械臂（串并联）。



上一节课内容回顾

2. 通过对信号的分析可以得到信号幅值及其**导数**信息，用于**元器件选型**（**最大速度、最大力矩，量程等静态参数**）；



$$A = \arctan \frac{Vt}{X_0}$$

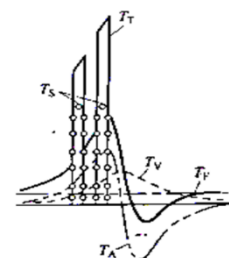
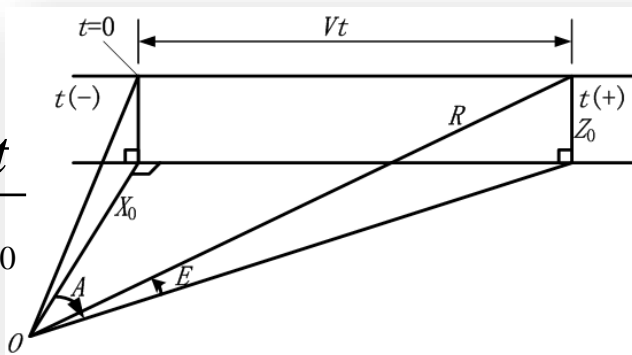


图 3-5 跟踪过程的力矩分量
 T_A —加速度力矩； T_V —速度力矩； T_F —摩擦力矩；
 T_S —冲击力矩； T_T —总负载力矩

加速度力矩、
速度力矩、
摩擦力矩、
冲击力矩、
偏载力矩

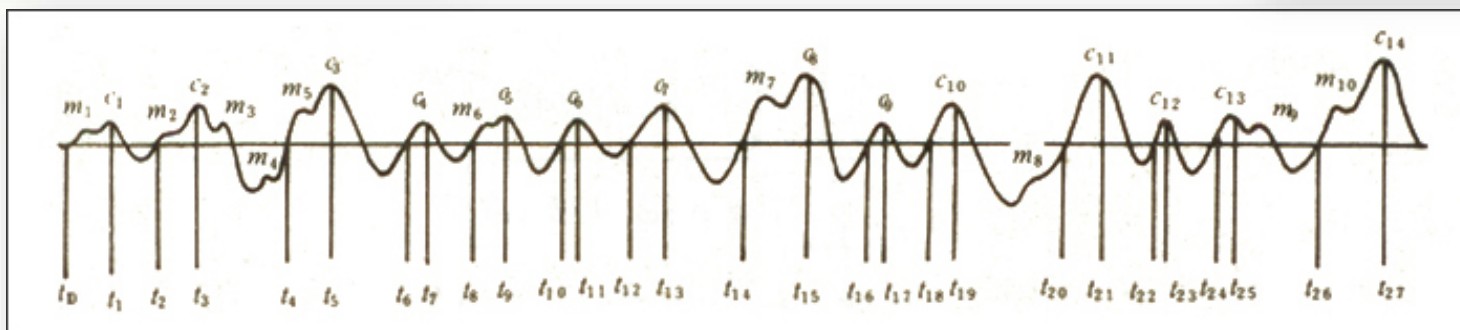
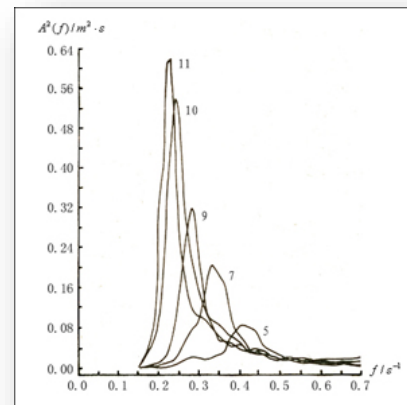


上一节课内容回顾

3. 通过对典型信号的**频谱分析**可以获得信号的频谱成分，用于确定系统的**带宽**，也可用于确定元器件的动态参数。



解析和数值
两种情况





1.1.1 输入信号的分析

关于傅里叶变换需要掌握的内容

- 1 理解时域和频率区别与联系
- 2 理解傅里叶变换与反变换的物理意义以及数学形式
- 3 掌握相关概念：傅里叶级数 傅里叶积分 离散傅里叶变换 快速傅里叶变换
- 4 理解他们之间的关系，记住典型信号的傅里叶变换结果
- 5 记住傅里叶变换在控制系统设计中用途
- 6 学会使用MATLAB对给定信号进行FFT计算，绘制系统Bode图，辨识系统的模型参数



1.1.1 输入信号的分析

时域与频率

什么是**时域**？从我们出生，我们看到的世界都以时间贯穿，股票的走势、人的身高、汽车的轨迹都会随着时间发生改变。这种以时间作为参照来观察动态世界的方法我们称其为时域分析。而我们也想当然的认为，世间万物都在随着时间不停的改变，并且永远不会静止下来。

什么是频域？**频域**(frequency domain)是描述信号在频率方面特性时用到的一种坐标系。用线性代数的语言就是装着正弦函数的空间。频域最重要的性质是：它不是真实的，**而是一个数学构造。频域是一个遵循特定规则的数学范畴。**正弦波是频域中唯一存在的波形，这是频域中最重要的规则，即正弦波是对频域的描述，因为时域中的任何波形都可用正弦波合成。



1.1.1 输入信号的分析

时域与频率

对于一个信号来说，信号强度随时间的变化规律就是**时域特性**，信号中所包含的单一频率的信号成分就是**频域特性**。

时域分析与频域分析是对**信号**的两个观察面。时域分析是以时间轴为坐标表示动态信号的关系；频域分析是把信号变为以频率轴为坐标表示出来。**一般来说，时域表示较为形象与直观，频域分析则更为简练，剖析问题更为深刻和方便。**目前，信号分析的趋势是从时域向频域发展。然而，它们是互相联系，缺一不可，相辅相成的。贯穿时域与频域的方法之一，就是传说中的傅里叶分析。傅里叶分析可分为傅里叶级数（Fourier Serie）和傅里叶变换（Fourier Transformation）。



1.1.1 输入信号的分析

傅里叶变换的产生

傅里叶1768年生于法国,1807年提出“任何周期信号都可用正弦函数级数表示”,1822年在“热的分析理论”一书中再次提出。1829年狄里赫利给出傅里叶变换收敛条件。傅里叶变换得到大规模的应用,则是到了上世纪60年代之后。



傅里叶的两个最主要的贡献:

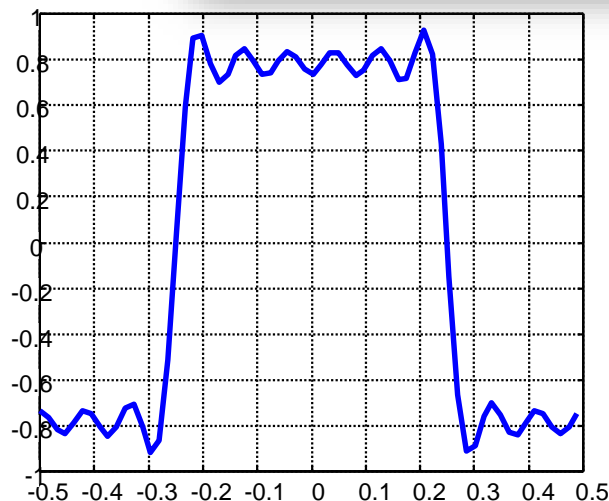
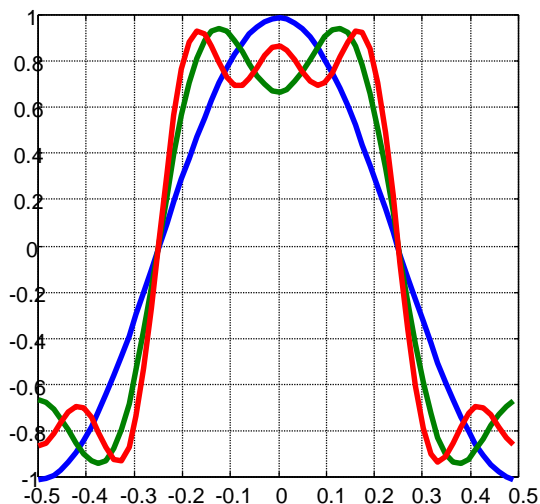
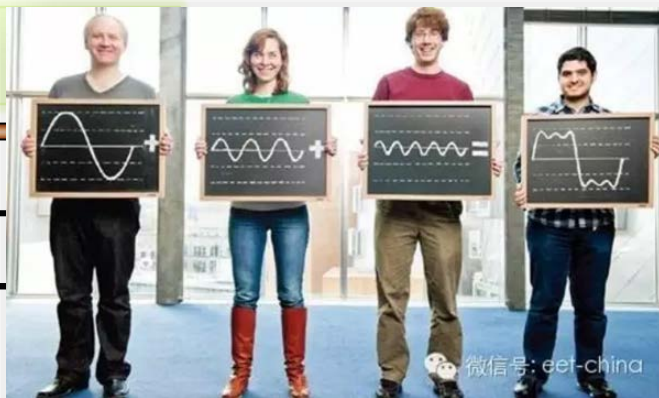
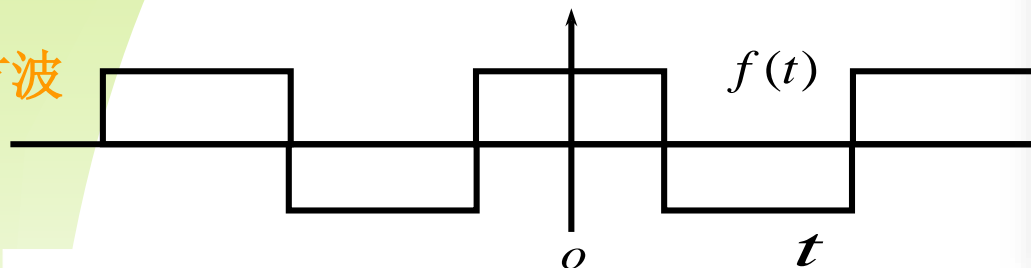
- (1) “周期信号都可表示为谐波关系的正弦信号的加权和”;
- (2) “非周期信号都可用正弦信号的加权积分表示”。



1.1.1 输入信号的分析

傅里叶变换的原理

周期方波

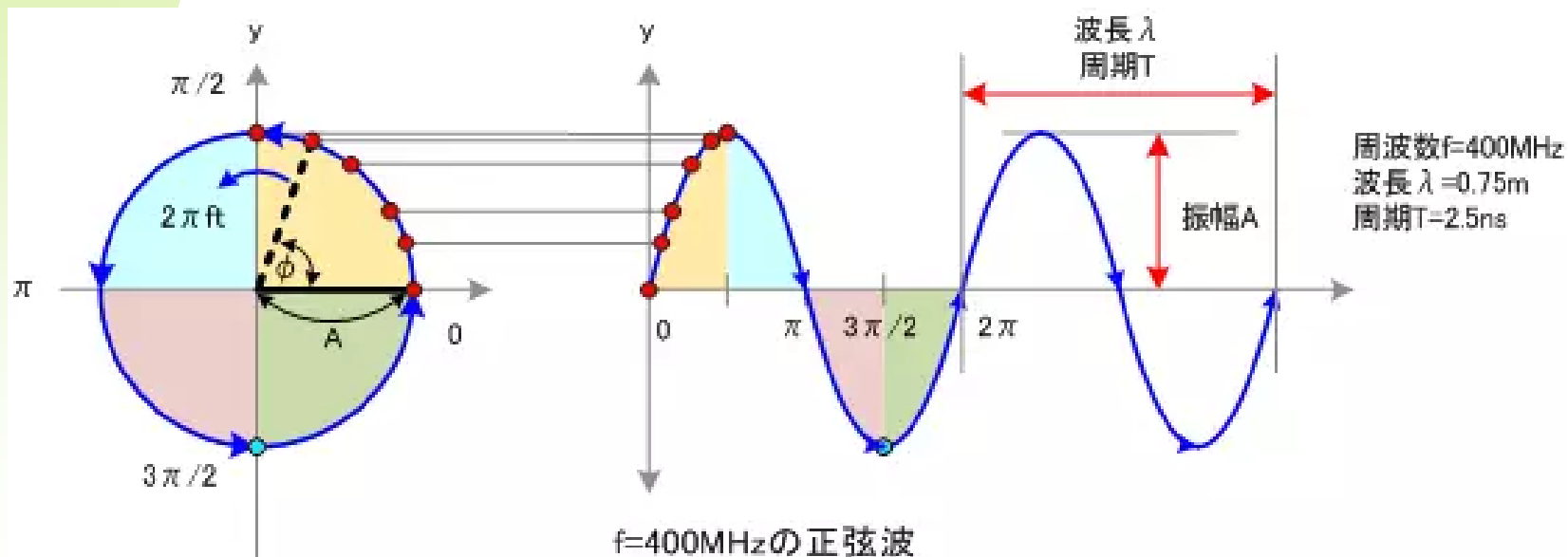


$$S_6 = \frac{2E}{\pi} \left(\cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t \right)$$



1.1.1 输入信号的分析

傅里叶变换的原理

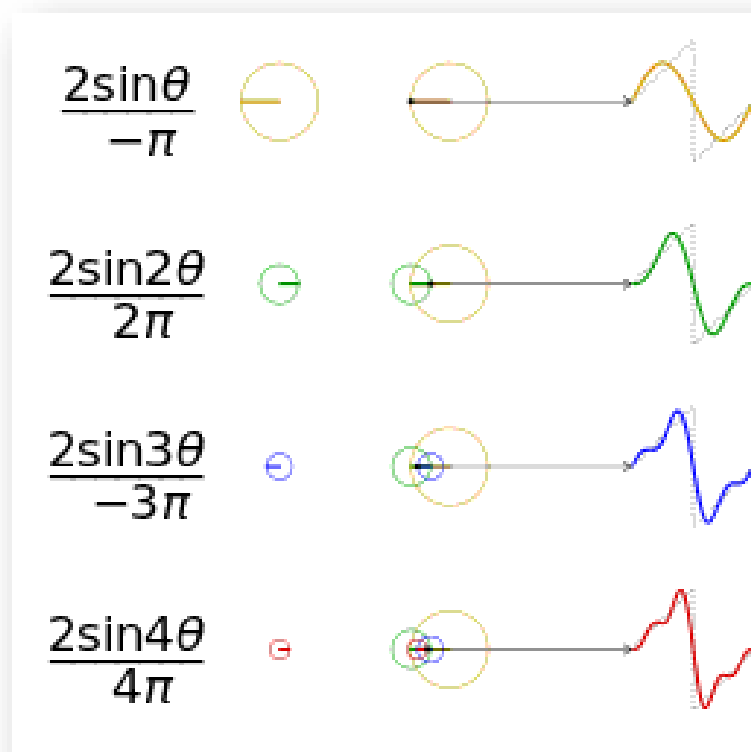
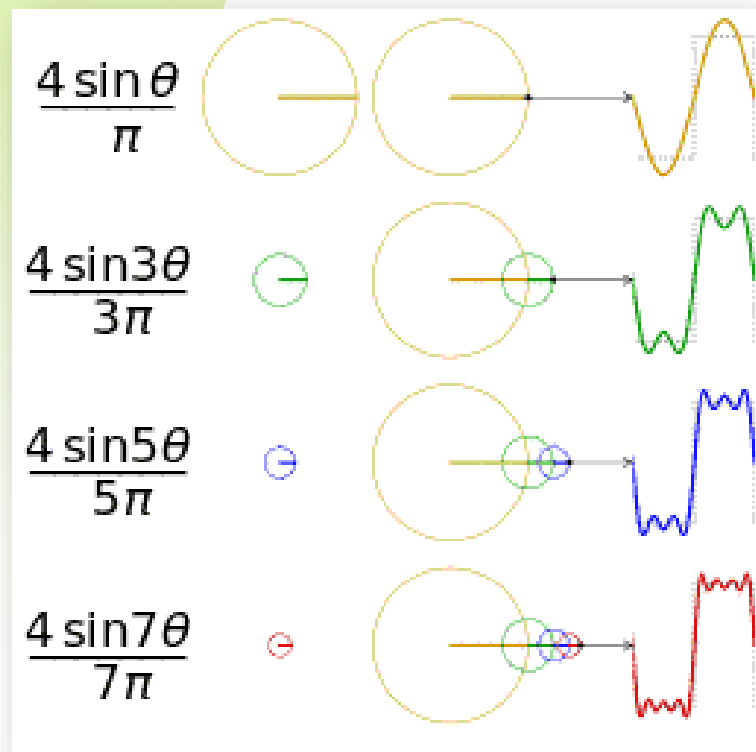


正弦波可以由圆周运动生成



1.1.1 输入信号的分析

傅里叶变换的原理

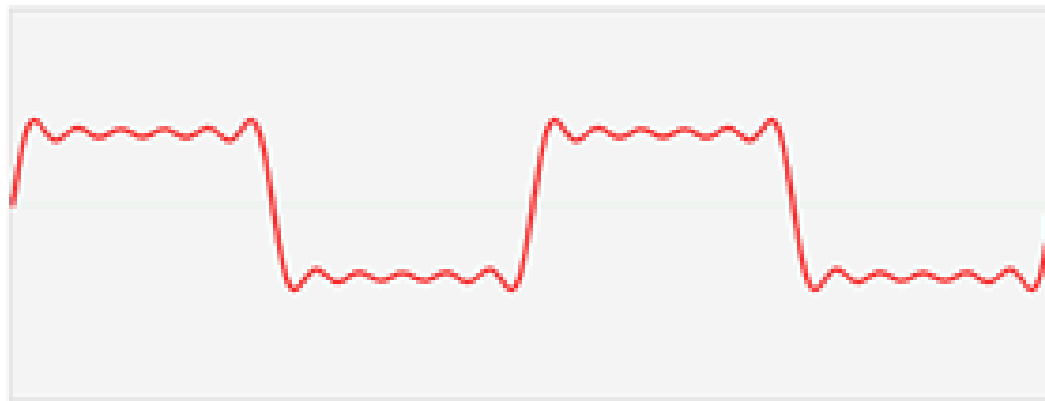


由4个频率的正弦曲线合成的近似方波和近似三角波



1.1.1 输入信号的分析

傅里叶变换的原理

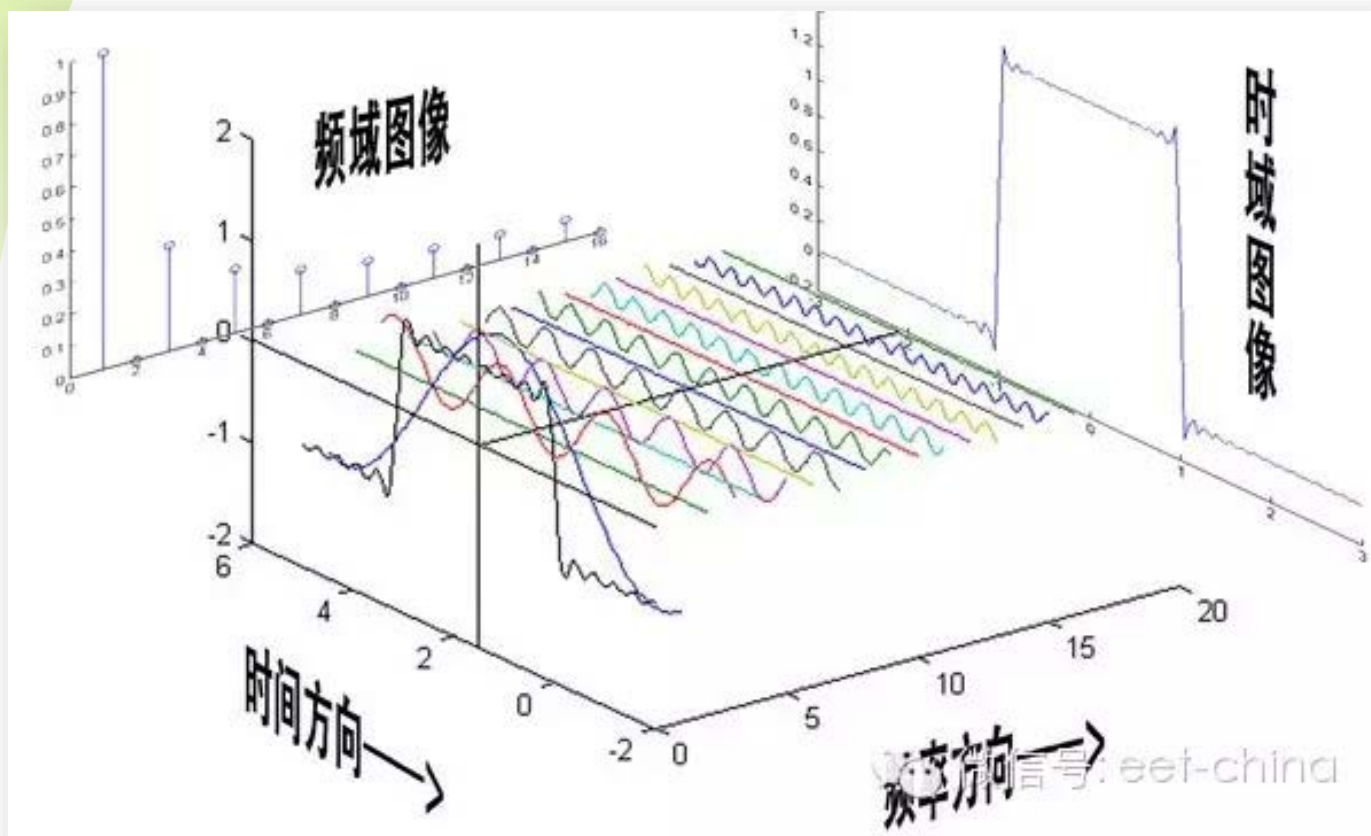


傅里叶变换：时域和频域的关系



1.1.1 输入信号的分析

傅里叶变换的原理



傅里叶变换：时域和频域的关系



1.1.1 输入信号的分析

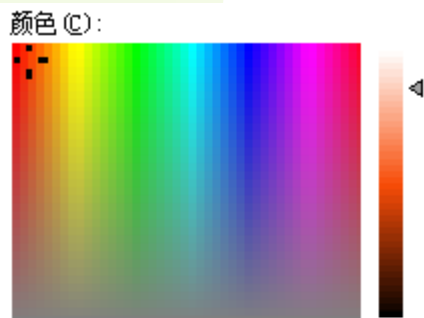
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

傅里叶级数的
三角展开式

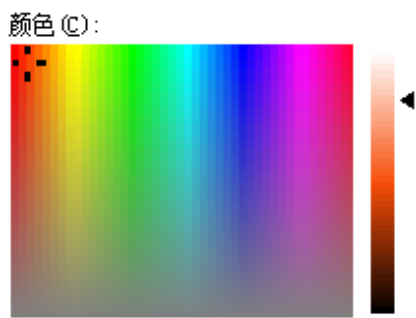
T_1 为信号的周期

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt$$



颜色模式 (M): HSL
色调 (H): 12
饱和度 (S): 240
亮度 (L): 219



颜色模式 (M): RGB
红色 (R): 252
绿色 (G): 188
蓝色 (B): 162

为什么要分解成正弦余弦?



1.1.1 输入信号的分析

三角函数 $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos kt, \sin kt, \dots$

就是一个标准的两两正交的函数空间。它满足下列

完备正交函数的三个条件：

1. 归一化：
$$\int_{t_1}^{t_2} f_i(t) f_i^*(t) dt = 1$$

2. 归一正交化：
$$\int_{t_1}^{t_2} f_i(t) f_j^*(t) dt = 0, \quad i \neq j$$

3. 归一化完备性：可以用其线性组合表示任意信号



1.1.1 输入信号的分析

三角函数

$1, \cos \omega_1 t, \sin \omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \dots, \cos k\omega_1 t, \sin k\omega_1 t, \dots$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \cos(n\omega_1 t) \sin(m\omega_1 t) dt = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \sin(n\omega_1 t) \sin(m\omega_1 t) dt = \begin{cases} \frac{T_1}{2} & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \cos n\omega_1 t \cos m\omega_1 t dt = \begin{cases} \frac{T_1}{2} & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$



1.1.1 输入信号的分析



并非任意周期信号都能进行傅里叶级数展开！

$f(t)$ 可展开为傅里叶级数的条件：

(1) $f(t)$ 绝对可积，即： $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$

(2) $f(t)$ 在区间内有有限个间断点；

(3) $f(t)$ 在区间内有有限个极值点。

Direchlet条件

傅里叶级数存在的充要条件

一般周期信号都满足这些条件



1.1.1 输入信号的分析

三角函数式的傅立里叶级数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \phi_n)$$

$$f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(n\omega_1 t + \theta_n)$$

$$a_n = c_n \cos \phi_n = d_n \sin \theta_n \quad a_0 = c_0 = d_0$$

$$b_n = -c_n \sin \phi_n = d_n \cos \theta_n \quad c_n = d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\operatorname{tg} \theta_n = \frac{a_n}{b_n} \quad \operatorname{tg} \phi_n = -\frac{b_n}{a_n}$$



1.1.1 输入信号的分析

周期函数的傅里叶级数

复指数函数式的傅里叶级数

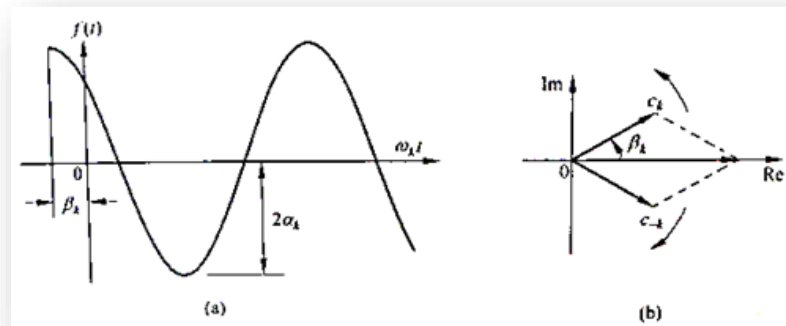
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_1 n t}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n e^{j\omega_1 n t} + c_{-n} e^{-j\omega_1 n t} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2\alpha_n \cos(\omega_1 n t + \beta_n)$$

$$e^{j\omega_1 n t} = \cos(\omega_1 n t) + j \sin(\omega_1 n t)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_1 n t} dt$$



引入复数和负频率只是为了方便数学描述



1.1.1 输入信号的分析

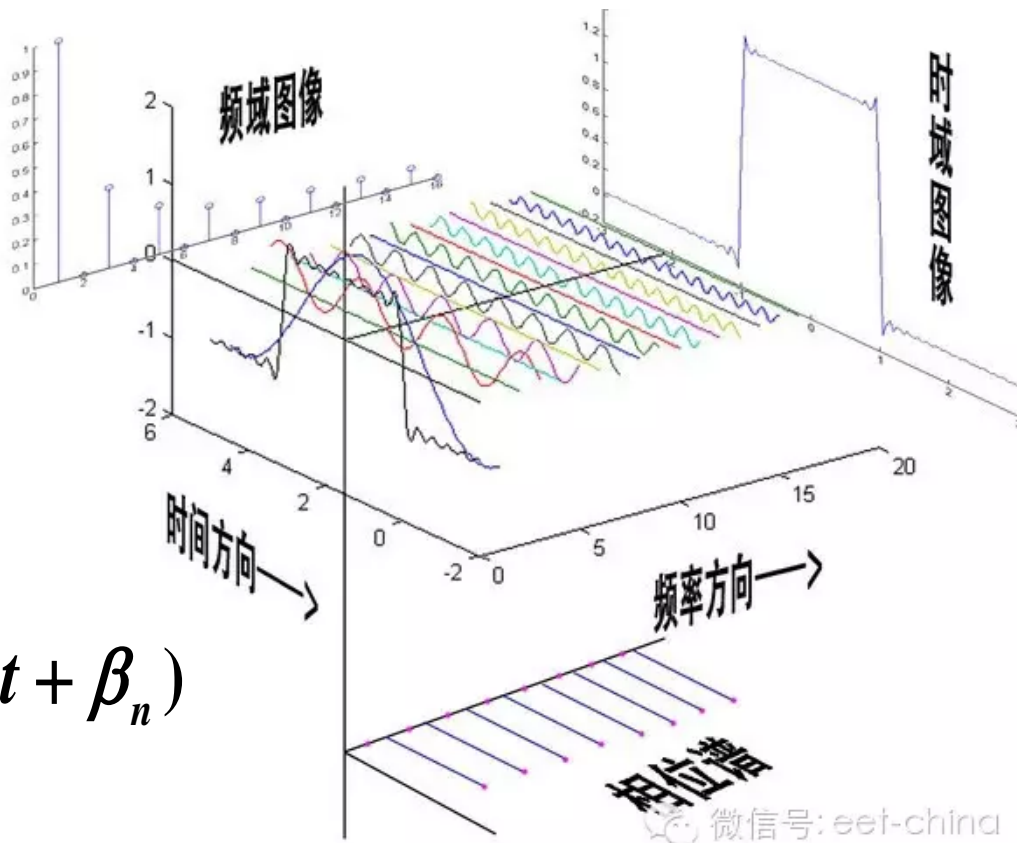
周期函数的傅里叶级数

复指数函数式的傅里叶级数

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_1 n t} dt$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_1 n t}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2\alpha_n \cos(\omega_1 n t + \beta_n)$$



最终得到的是各个频率成分的幅值和相位



1.1.1 输入信号的分析

非周期函数的傅里叶积分

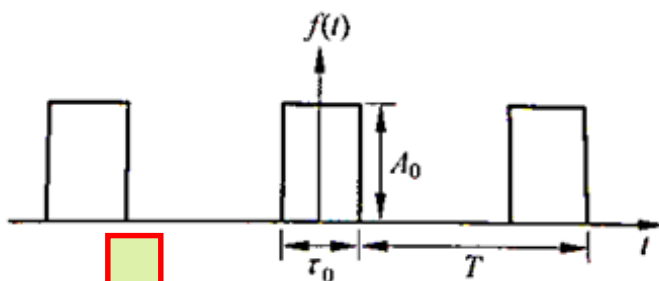
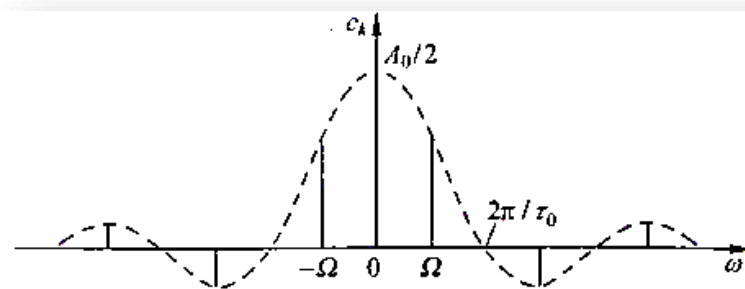


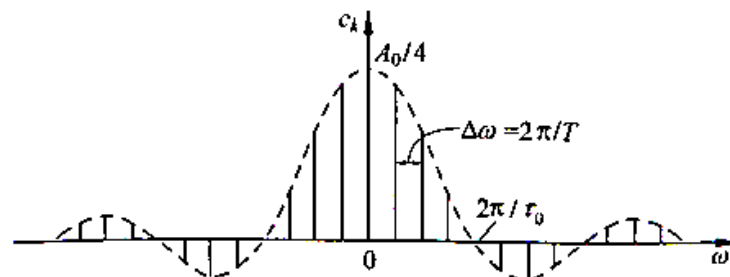
图 2-4 方波序列

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_1 n t}$$

$$c_k = \frac{A_0 \tau_0}{T} \frac{\sin(\pi k \tau_0 / T)}{\pi k \tau_0 / T}$$



(a) $T=2\tau_0$



(b) $T=4\tau_0$

图 2-5 方波的频谱

随着周期 T 趋于无穷，线谱之间的频率间隔将趋于零



1.1.1 输入信号的分析

非周期函数的傅里叶积分

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_1 n t}$$

$T \rightarrow \infty$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_1 n t} dt$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$F(j\omega_n) = c_n T$$

随着函数周期 T 趋于无穷，傅里叶级数转变为傅里叶积分



1.1.1 输入信号的分析

典型信号的频谱特性---理想脉冲信号

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, t \neq 0 \\ \delta(t) = \infty, t = 0 \end{cases} \quad \delta_\lambda(t) = \frac{\lambda}{\pi(1 + \lambda^2 t^2)}$$

理想脉冲傅里叶变换

$$F_\lambda(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\lambda(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-|\omega|/\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} F_\lambda(j\omega) = 1$$

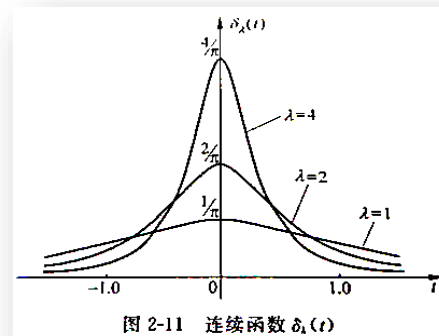


图 2-11 连续函数 $\delta_\lambda(t)$

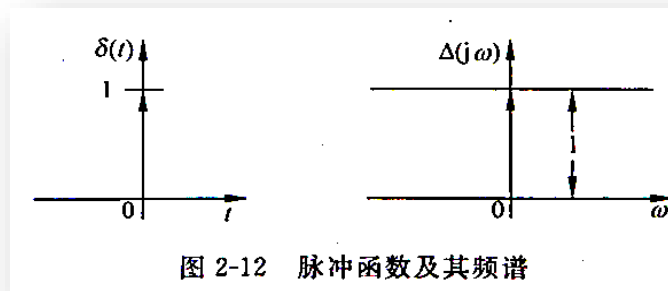


图 2-12 脉冲函数及其频谱

由理想脉冲信号作用下的系统输出可获得**系统的频率特性**



1.1.1 输入信号的分析

典型信号的频谱特性---实际脉冲信号

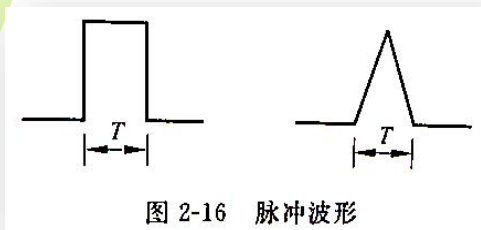


图 2-16 脉冲波形

三角波和方波

$$|F(j\omega)| = \left| \frac{\sin(\omega T / 2)}{\omega T / 2} \right|$$

$$|F(j\omega)| = \left| \frac{\sin^2(\omega T / 4)}{(\omega T / 2)^2} \right|$$

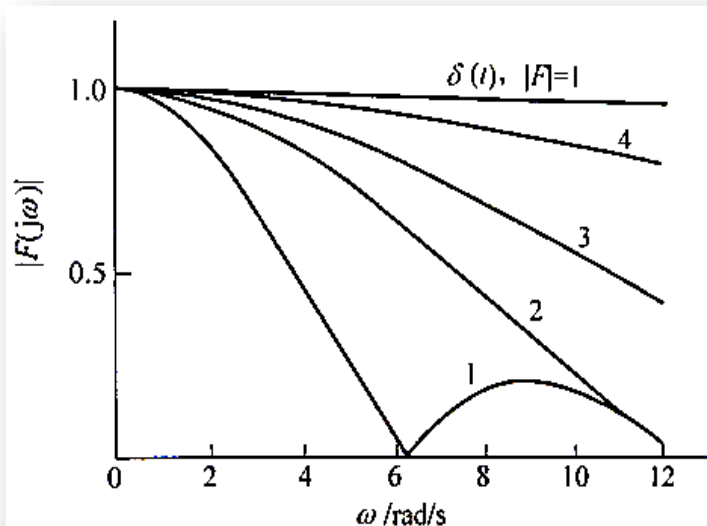


图 2-17 实际脉冲信号的频谱

1— $T=1$ s 方波；2— $T=0.5$ s 方波；
3— $T=0.5$ s 三角波；4— $T=0.25$ s 方波

- ❖ 如果脉冲信号为系统的典型输入信号，可由给定 T 对应的频率特性确定实际系统的**带宽指标**；
- ❖ 如果要选择脉冲信号对系统进行测试，可根据系统的带宽选择 T 的**宽度**。



1.1.1 输入信号的分析

典型信号的频谱特性---阶跃信号

$$1(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(t)$$

$$f_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} e^{-\varepsilon t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

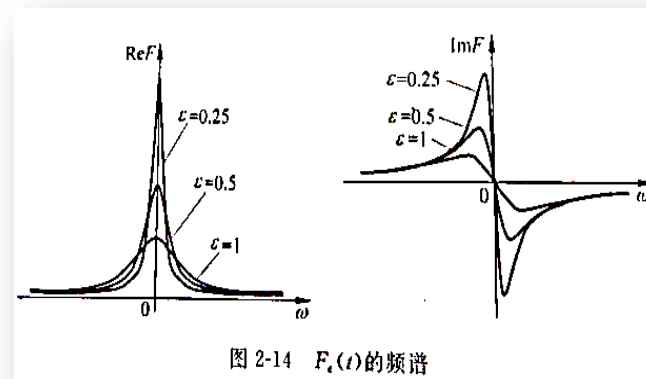


图 2-14 $F_{\varepsilon}(t)$ 的频谱

阶跃信号的频谱特性：

$$F(j\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_{\varepsilon}(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

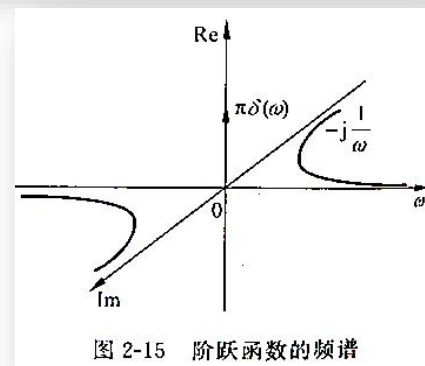


图 2-15 阶跃函数的频谱

由频谱特性可知，**阶跃**信号只能用于测量系统的**低频**模型



1.1.1 输入信号的分析

有限长度离散信号的离散傅里叶变换DFT

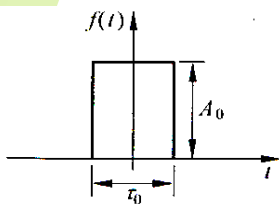


图 2-9 单个方波

$$F(j\omega) = \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{\frac{\tau_0}{2}} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

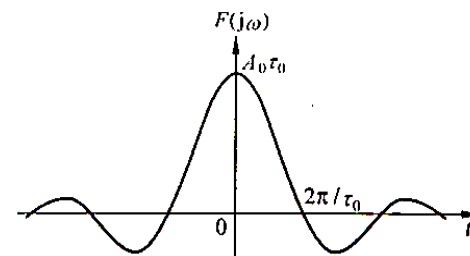
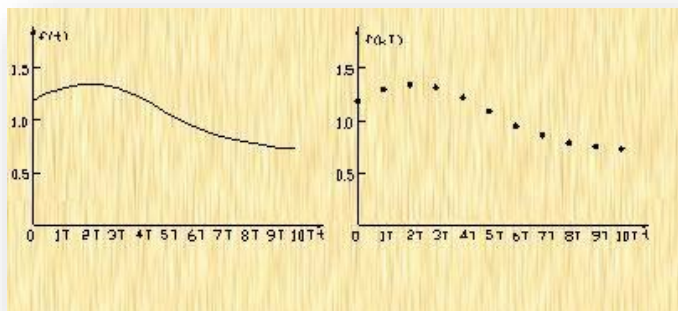


图 2-10 单个方波的频谱特性



对于实际信号：有限长度，非周期，没有解析表达式，离散

希望得到一个过程有限项求和、结果为有限个线谱的离散变换



1.1.1 输入信号的分析

有限长度离散信号的散傅里叶变换 DFT

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jnk2\pi/N},$$

$$(k = 0, \dots, N-1)$$

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{jnk2\pi/N},$$

$$(n = 0, \dots, N-1)$$

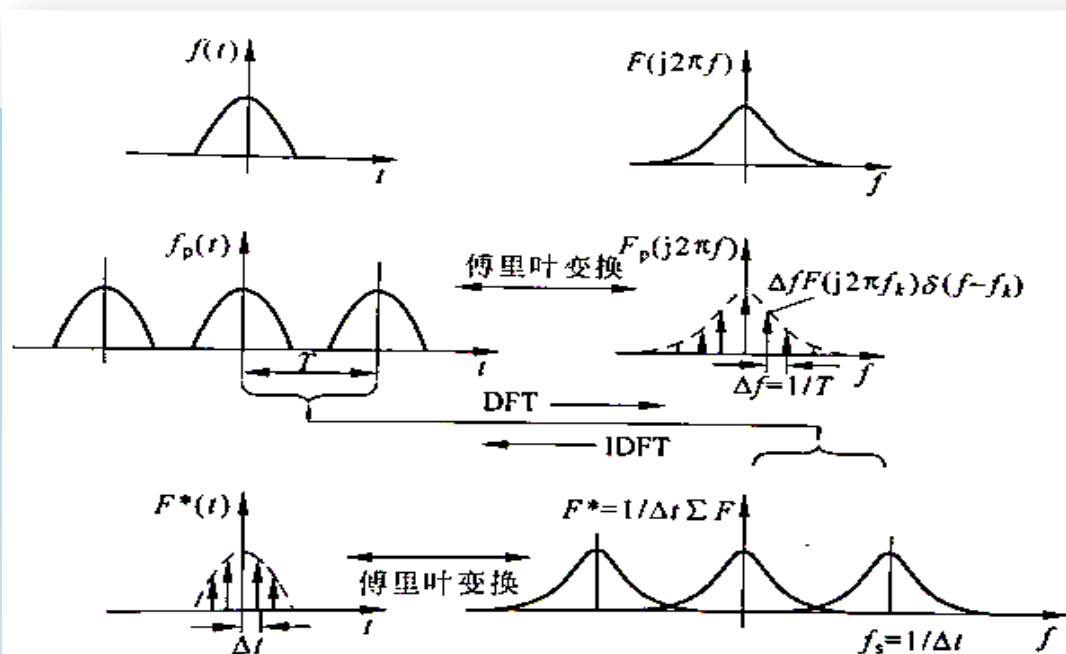


图 2-18 数值计算中的信号与频谱

对非周期信号进行延拓、采样、截断，最后得到离散傅里叶变换



1.1.1 输入信号的分析

快速傅里叶变换FFT

1 采样点数进行限制 $N = 2^r$ ($r=3$) $nk = n_1(k_1 \times 2^2 + k_2 \times 2 + k_3)$

2 利用表达式指数函数的周期性

$$F(k) = \sum_n^{N-1} f(n) \varpi^{nk}$$

$$\varpi = e^{-j2\pi/N}$$

$$\varpi^{p+mN} = \varpi^p$$

$$\begin{aligned} &+2n_2(k_1 \times 2^2 + k_2 \times 2 + k_3) \\ &+2^2 n_3(k_1 \times 2^2 + k_2 \times 2 + k_3) \\ &= n_1(k_1 \times 2^2 + k_2 \times 2 + k_3) \\ &+2n_2(k_2 \times 2 + k_3) \\ &+2^2 n_3 k_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varpi_3 &= \varpi = e^{-j\pi/4} \\ \varpi_2 &= \varpi^2 = e^{-j\pi/2} \\ \varpi_1 &= \varpi^4 = e^{-j\pi} \end{aligned}$$

3 将幂展开用二进制展开

$$n = n_1 + 2n_2 + 2^2 n_3, \quad n_i = 0, 1$$

$$k = k_1 \times 2^2 + k_2 \times 2 + k_3, \quad k_i = 0, 1$$

4 调整运算次序, 用常值减少幂运算

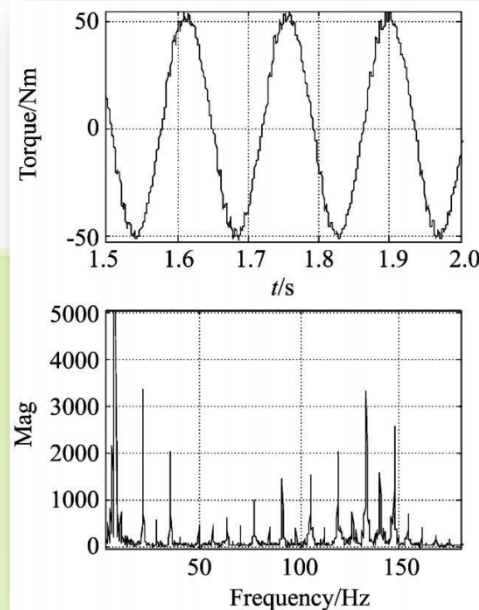
$$\begin{aligned} F(k) &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} f(n) \varpi^{nk} \\ &= \sum_{n_1=0}^1 \varpi_3^{n_1(k_1 \times 4 + k_2 \times 2 + k_3)} \sum_{n_2=0}^1 \varpi_2^{n_2(k_2 \times 2 + k_3)} \sum_{n_3=0}^1 \varpi_1^{n_3 k_3} f(n) \end{aligned}$$



1.1.1 输入信号的分析

信号频率特性分析在控制系统设计中的作用

- 1 基于典型的输入信号分析，可以指导元部件选型；
- 2 基于典型的输入信号分析，可以对模型进行简化；
- 3 基于典型的输入信号分析，可以确定带宽和频响指标；
- 4 通过对系统输入和输出信号的频谱分析测得系统的频率特性；
- 5 可以用于选取典型的测试信号；
- 6 分析信号中各种特殊的频率成分（如谐振频率，波动力矩，间隙等）；





1.1.1 输入信号的分析

小结

系统工作原理分析



确定典型的输入信号类型



典型输入信号特性分析



输入信号及导数幅值



执行元件、测量元件等
部件选择依据



频谱分析



带宽设计依据之一



误差计算



控制设计依据之一

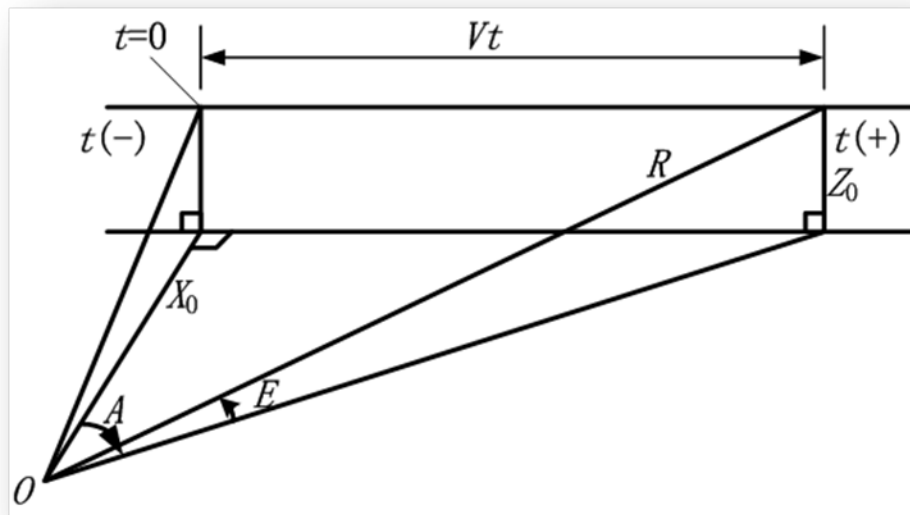


1.1.1 输入信号的分析

作业

分析稳瞄系统俯仰角的角位置、角速度和角加速度的变化规律和频谱特性给出表达式和FFT分析曲线（用MATLAB分析）。并分析目标速度对俯仰角典型输入信号特性的影响（上交的作业不能超过2页，4月5日完成）

条件: $X_0 = 300\text{m}$
 $Z_0 = 1500\text{m}$
 $V_1 = 1500\text{m/s}$
 $V_2 = 4500\text{m/s}$





Thank You !



哈尔滨工业大学控制与仿真中心