3．根据系统的传递函数建立状态空间表达式

系统的实现问题

—— 由传递函数建立状态空间表达式的问题。

考虑单变量线性定常系统

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y$$
$$=b_mu^{(m)}+b_{m-1}u^{(m-1)}+\cdots+b_1\dot{u}+b_0u$$

传递函数为

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$m\le n$$

实现具有非唯一性！

传递函数没有零极点对消现象的实现称为**最小实现**。

1. 传递函数中没有零点时的实现

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_0 u$$

$$W(s) = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$x_1 = \frac{y}{b_0}, x_2 = \left(\frac{y}{b_0}\right)', \cdots, x_n = \left(\frac{y}{b_0}\right)^{(n-1)}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \cdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + u \end{cases} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$y = b_0 x_1$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u$$

$$y = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

Companion Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

2. 传递函数中有零点时的实现

（1）$m < n$ 的情形

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

中间变量 $\rightarrow$ $\tilde{y}(t) \Longleftrightarrow \tilde{Y}(s)$

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 \\
\dot{x}_2 = x_3 \\
\vdots \\
\dot{x}_{n-1} = x_n \\
\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + u
\end{cases}
$$

$$
y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \cdots + b_m x_{m+1}
$$

矩阵形式

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u \\ y = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

友矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

（2）$m=n$的情形

$$G(s)=d+\frac{N(s)}{D(s)}$$

$N(s)$ 次数小于 $D(s)$

$$Y(s)=dU(s)+\frac{N(s)}{D(s)}U(s)$$

$$=dU(s)+\bar{Y}(s)$$

$$\bar{Y}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} U(s)$$

$$Y(s) = dU(s) + \bar{Y}(s)$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u \\ \bar{y} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

$$y = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + du$$

8.1.3 线性系统状态空间的线性变换

一. 系统状态空间表达式的非唯一性

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{cases} \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{z} \qquad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{T}$ —— 任意非奇异矩阵

变换矩阵

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{T}^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}$$

$$= \boldsymbol{T}^{-1}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\right)$$

$$= \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$$= \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$$

【例8-5】 某系统状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

1）取变换矩阵 $\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{T}_1^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0.5\\ 0.5 & -1.5\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0 & 0.5\\ 0.5 & -1.5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

$$\dot{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{z}+\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{B}u$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{z}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{T}_1 \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}$$

$$\boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{T}_1^{-1} \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2）取变换矩阵 $\boldsymbol{T}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{T}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{z}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{z}} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} u$$

二. 系统特征值的不变性及系统的不变量

1. 系统的特征值

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{cases}$$

求取传递函数？

$$\Downarrow$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \boldsymbol{C}\left(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$

$$G(s) = \boldsymbol{C}\left(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$

$$= \frac{\boldsymbol{C}\cdot \mathrm{adj}\left(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)\cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\det\left(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)}{\boxed{\det\left(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)}}$$

传递函数的分母

—— 特征多项式！

系统 $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{cases}$ 的特征值

$\Updownarrow$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值

$n \times n$方阵 $\boldsymbol{A}$有n个特征值

$\Updownarrow$

特征方程 $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$ 的根

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{cases}$$

特征方程 $\Downarrow$

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right) = 0$$

特征方程的不变性

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right) = \det\left(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)$$

?

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$$

$$= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0$$

系统的不变量

2. 系统的特征向量

$$Ap_i = \lambda_i p_i$$

p_i ⟺ λ_i

特征向量　　特征值

【例8-6】 试求

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

的特征向量。

3. 线性系统的传递函数（矩阵）

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx} + \boldsymbol{Du} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

传递函数矩阵 $\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases} \quad \xleftrightarrow[\boxed{x = Tz}]{\text{代数等价}} \quad \begin{cases}\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y = CTz + Du\end{cases}$$

1

2

$$G(s) = \tilde{G}(s) \; ?$$

重要结论

经过线性变换前后的两个等价系统具有下列不变量

1）特征值

2）特征方程

3）特征多项式

4）传递函数（矩阵）

三. 状态空间表达式的Jordan标准型

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \xrightarrow[x = Tz]{} \begin{cases} \dot{z} = Jz + T^{-1}Bu \\ y = CTz \end{cases}$$

Jordan标准型

（1）矩阵$\boldsymbol{A}$ 的特征值无重根

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{T}^{-1}A\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

（2）矩阵$\boldsymbol{A}$ 的特征值有重根

λ_1有q重根

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\left[\begin{array}{ccccc|cccc}
\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\
0 & \lambda_1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots\\
\vdots & & \ddots & \ddots & 1 & \vdots & & & \vdots\\
0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\
\hline
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_{q+1} & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & & & & \vdots & 0 & \lambda_{q+2} & \ddots & \vdots\\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n
\end{array}\right]$$

变换矩阵$\boldsymbol{T}$的求法

（1）矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值无重根

$\boldsymbol{A} \longrightarrow$ 特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

$\downarrow$

特征向量 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$

$\downarrow$

变换矩阵 $\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}$

【例8-7】 将下列状态空间表达式变换为对角标准型

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}
\end{cases}
$$

（2）矩阵$\boldsymbol{A}$ 的特征值有重根

假设$\boldsymbol{A}$的特征值有 q 个 λ_1 的重根，其余 $(n-q)$ 个根为互异。

变换为Jordan标准型

$$\boldsymbol{T}=\left[\begin{array}{cccc|ccc}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_q & \boldsymbol{p}_{q+1} & \cdots & \boldsymbol{p}_n\end{array}\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1-\lambda_1\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{0}\\ &\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2-\lambda_1\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1\\ &\vdots\\ &\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_q-\lambda_1\boldsymbol{p}_q=\boldsymbol{p}_{q-1} \end{aligned}}$$

$\boldsymbol{p}_1$ 为对应于 λ_1 的特征向量，其余 $\boldsymbol{p}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_q$ 称为广义特征向量。

8.2 线性系统的运动分析

8.2.1 运动分析的含义

一. 线性系统的运动分析与解的存在唯一性

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \qquad t \geq t_0$$

运动分析

求解精确的解析形式 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$

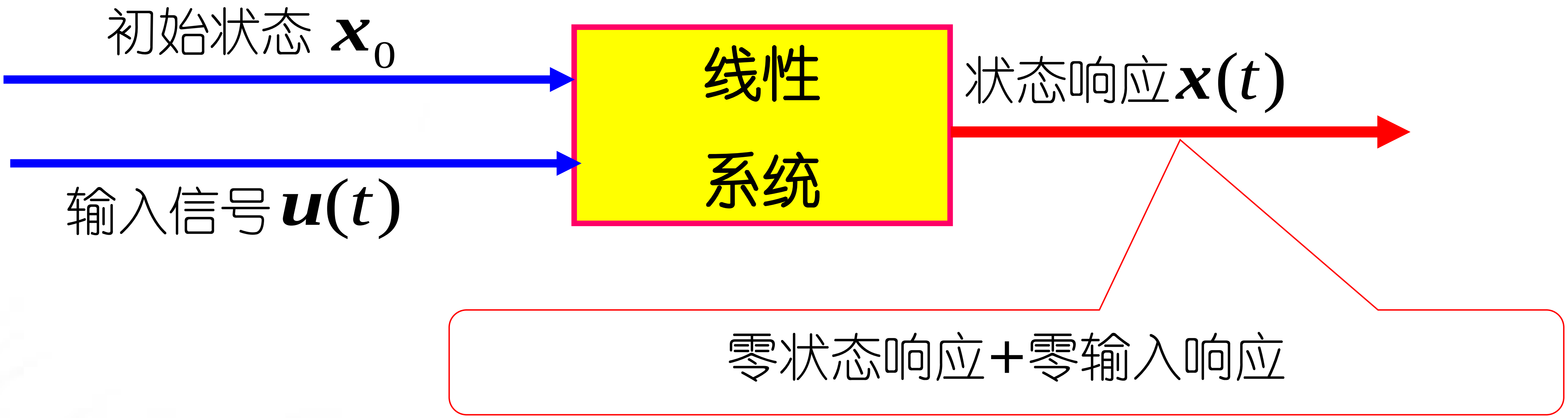
$\boldsymbol{A}(t), \boldsymbol{B}(t), \boldsymbol{u}(t) \xrightarrow[{[t_0, t_f]}]{}$ 连续实值函数

$\Updownarrow$

方程的解存在且唯一

二. 线性系统响应的特点

线性系统满足叠加原理



8.2.2 状态转移矩阵的概念、性质及求解方法

一. 状态转移矩阵的概念

1. 线性时变系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \qquad t \geq t_0$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \underbrace{\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)}_{\text{状态转移矩阵}}\boldsymbol{x}_0$$

2. 线性定常系统

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)=e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}$$

$$t_0=0 \quad \Downarrow$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}$$

二. 状态转移矩阵的性质

1. 初值性质

$$\boldsymbol{\Phi}(t_0, t_0) = \boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t_0 - t_0) = e^{\boldsymbol{A}(t_0 - t_0)} = \boldsymbol{I}$$

2. 满足矩阵微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}=\boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}$$

3. 传递性

$$\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1,t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_0)$$

$$e^{\boldsymbol{A}(t_2-t_1)}e^{\boldsymbol{A}(t_1-t_0)}=e^{\boldsymbol{A}(t_2-t_0)}$$

4. 可逆性

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t,t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)$$

$$[e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}]^{-1}=e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}$$

三. 状态转移矩阵的求解方法

1. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对角标准型

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\varLambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \rightarrow e^{\varLambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

2. 矩阵 $\boldsymbol{A}$为Jordan 标准型

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$
e^{\boldsymbol{J}t} = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}t^2 \\ \vdots & & \ddots & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}
$$

3. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可变换为对角标准型

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}^{-1}$$

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{T}e^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{T}^{-1}$$

$$=\boldsymbol{T}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}$$

4. 级数法

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^n t^n + \cdots$$

5. 拉氏反变换法

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \mathbb{L}^{-1}\left[\left(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)^{-1}\right]$$

【例8-8】

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$，求状态转移矩阵 $e^{\boldsymbol{A}t}$。

8.2.3 线性系统的状态响应分析

一. 线性时变系统的状态响应

1. 线性时变系统的零输入响应

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \qquad t \geq t_0$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\boldsymbol{x}_0$$

2. 线性时变系统的零初始状态响应

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \qquad t \geq t_0$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

3. 线性时变系统的整体状态响应

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \qquad t \geq t_0$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t, \tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

二. 线性定常系统的状态响应

1. 线性定常系统的零输入响应

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \qquad t \geq t_0$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0$$

2. 线性定常系统的零初始状态响应

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \qquad t \geq t_0$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \int_{t_0}^{t} e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)} \boldsymbol{B} u(\tau) \mathrm{d}\tau$$

3. 线性定常系统的整体状态响应

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \qquad t \geq t_0$$

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

本次课内容总结

- 根据系统的传递函数建立状态空间表达式；
- 线性系统状态空间的线性变换；
- 状态转移矩阵的概念、性质及求解方法；
- 线性系统的状态响应分析。