第三章习题

3-1 判断下列系统的状态能控性和能观测性。系统中 a,b,c,d 的取值对能控性和能观性是否有关，若有关，其取值条件如何？

（1）系统中x_2肯定不能控，x_4肯定不能观。去掉x_2和x_4，其他的状态x_1,x_3构成系统的最小实现。

若$b \neq a$, x_2能观，可根据去掉x_4状态后系统的能观性矩阵看出；

因为x_3能控能观，它作为x_4环节的输入，使x_4始终能控。可根据去掉x_2状态后系统的能控性矩阵看出。

（2）解：有关系。

由图可知$\begin{cases}\dot{x}_1 = u - ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 = u - cx_1 - dx_2 \\ y = x_1\end{cases}$，整理后即$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-a & b \\ -c & -d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}u \\ y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}\end{cases}$

$M = (b \quad Ab) = \begin{pmatrix}1 & -a+b \\ 1 & -c-d\end{pmatrix}$当$a - b - c - d \neq 0$时，系统可控。

$N = \begin{pmatrix}c \\ cA\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ -a & b\end{pmatrix}$，当$b \neq 0$时，系统可观。

（3）A 矩阵为约当标准型，且两个约当块对应的特征值互异。

完全能控的条件是每个约当块最后一行对应的 B 阵那一行不全为零，所以要求 a 和 b 都不为零，此时完全能控。

完全能观的条件是每个约当块第一列对应的 C 阵那一列不全为零，所以要求 c 和 d 都不为零，此时完全能观。

3-2 时不变系统

$$\dot{X} = \begin{bmatrix}-3 & 1 \\ 1 & -3\end{bmatrix}X + \begin{bmatrix}1 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ 1 & -1\end{bmatrix}X$$

试用两种方法判别其能控性和能观性。

解：方法一：

$$A = \begin{bmatrix}-3 & 1 \\ 1 & -3\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$M=[B\quad AB]=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & -2\\ 1 & 1 & -2 & -2\end{bmatrix}$$

$rankM=1<2,$ *系统不能控。*

$$N=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ -2 & -2\\ -4 & 4\end{bmatrix}$$

$rankN=2,$ *系统能观。*

方法二：将系统化为约旦标准形。

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+3 & -1\\ -1 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda+3)^2-1=0$$

$$\lambda_1=-2,\ \lambda_2=-4$$

则状态矢量： $A_1P_1=\lambda_1P_1\Rightarrow P_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

$$A_2P_2=\lambda_2P_2\Rightarrow P_2=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\ T^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}$$

$$T^{-1}B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$CT=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$T^{-1}B$中有全为零的行，系统不可控。CT中没有全为 0 的列，系统可观。

方法三：检查传函中零极点相消现象

$$(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}{(s+3)^2-1}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix} s+4 & s+4 \\ s+4 & s+4 \end{bmatrix}}{(s+2)(s+4)}=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

出现零极点相消现象，所以系统不完全能控。

$$C(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{\begin{bmatrix} s+4 & s+4 \\ s+2 & -s-2 \end{bmatrix}}{(s+2)(s+4)}=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+4} & \frac{-1}{s+4} \end{bmatrix}$$

没有零极点相消现象，所以系统完全能观。

3-3

（1）

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{C}=[1 \quad -1]$$

能控性矩阵$[B \quad AB]=\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ 当$\alpha_1 \neq \alpha_2$时能控性矩阵满秩，状态完全能控

能观性矩阵$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix}$，当$\alpha_1 \neq \alpha_2$时能观性矩阵满秩，状态完全能观

当$\boldsymbol{\alpha_1=\alpha_2}$时 $\begin{cases} \dot{x}_1=\boldsymbol{\alpha_1 x_1+u} \\ \dot{x}_2=\boldsymbol{\alpha_1 x_2+u} \end{cases}$，两个状态的微分方程完全相同，在同一个输入的控制下，不可能到达二维状态空间的任意点，例如从零初始状态$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，到状态$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$。所以不完全能控。

当$\boldsymbol{\alpha_1=\alpha_2}$时 输出的自由运动为$\mathrm{y(t)}=x_1(t)-x_2(t)=e^{\alpha_1 t}[x_1(0)-x_2(0)]$，通过观测输出，可以确定$x_1(0)-x_2(0)$，但无法确定$x_1(0)$和$x_2(0)$的具体值。所以状态不完全能观。

（3）能观标准 II 型

$$G(s)=\frac{\beta_3 s^2+\beta_2 s+1}{s^3+4s^2+3s-2}=\frac{\beta_3 s^2+\beta_2 s+1}{(s^2+2s-1)(s+2)}$$

有三个极点λ_i为-2 和$-1\pm\sqrt{2}$。系统完全能控能观的充要条件是传函没有零极点相消，即

$$\begin{cases} 4\beta_3-2\beta_2+1\neq 0 \\ (-1\pm\sqrt{2})^2\beta_3+(-1\pm\sqrt{2})\beta_2+1\neq 0 \end{cases}$$

3-4 系统传函为

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+\alpha}{s^3+10s^2+27s+18}=\frac{s+\alpha}{(s+6)(s+3)(s+1)}$$

(1) 当α等于 6、3 或 1 时，传函出现零极点相消，系统不能控或不能观。

(2) 能控标准 I 型为完全能控：

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-18&-27&-10\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\quad C=[\alpha\quad 1\quad 0]$$

(3) 能观标准 II 型为完全能观：

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}0&0&-18\\1&0&-27\\0&1&-10\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}\alpha\\1\\0\end{bmatrix}\quad C=[0\quad 0\quad 1]$$

3-5 看书中证明

3-6 已知系统的微分方程为：$\dddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}+6y=6u$

试写出其对偶系统的状态空间表达式及其传递函数。

解：系统的状态空间表达式写为能控标准 I 型

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\mathrm{u}$$

$$y=[6\quad 0\quad 0]\,\mathrm{x}$$

传递函数为

$$W(s)=C(s\mathrm{I}\text{-}\mathrm{A})^{-1}B=[6\quad 0\quad 0]\begin{bmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\6&11&s+6\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\frac{6}{s^3+6s^2+11s+6}$$

其对偶系统的状态空间表达式为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&-6\\1&0&-11\\0&1&-6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}\mathrm{u}$$

$$y=[0\quad 0\quad 1]\,\mathrm{x}$$

3-7 输入到状态的传函为

$$G(s)=(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}s-1 & 2\\ -3 & s-4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix}s-4 & -2\\ 3 & s-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}{s^2-5s+10}=\frac{\begin{bmatrix}s-6\\ s+2\end{bmatrix}}{s^2-5s+10}$$

$$\mathrm{T}=[AB \quad B]\begin{bmatrix}1 & 0\\ a_1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 7 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}-6 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{2}{8} & \frac{6}{8}\end{bmatrix}$$

能控标准 I 型实现

$$\mathrm{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-\frac{1}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{2}{8} & \frac{6}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & 5\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B}=T^{-1}B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{2}{8} & \frac{6}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

3-8 解：

系统传函为

$$C(sI-A)^{-1}B=[-1 \quad 1]\begin{bmatrix}s-1 & 1\\ -1 & s-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\frac{[-1 \quad 1]\begin{bmatrix}s-1 & -1\\ 1 & s-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}}{(s-1)^2+1}=\frac{-s+4}{s^2-2s+2}$$

能观标准 II 型

$$A'=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix};B'=\begin{bmatrix}4\\ -1\end{bmatrix};C'=[0 \quad 1]$$

3-9 已知系统的传递函数为

$$W(s)=\frac{s^2+6s+8}{s^2+4s+3}$$

试求其能控标准型和能观标准型。

解：$W(s)=\frac{s^2+6s+8}{s^2+4s+3}=1+\frac{2s+5}{s^2+4s+3}$

系统的能控标准 I 型为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [5 \quad 2]x + \mathrm{u}$$

能观标准 II 型为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 1]x + \mathrm{u}$$

3-10 状态空间方程能否转换为能控标准型取决于其是否完全能控，因为

$$[B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 7 \\ 2 & -5 & 11 \end{bmatrix}$$

不满秩，系统不完全能控，所以不能转换成能控标准型。

状态空间方程能否转换为能观标准型取决于其是否完全能观，因为

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 9 \end{bmatrix}$$

满秩，系统完全能观，所以能转换为能观标准型。

3-14 求下列传递函数阵的最小实现。

（1） $w(s) = \frac{1}{s+1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $w(s) = \frac{1}{s^3}\begin{bmatrix} s^2 & s \\ s & 1 \end{bmatrix}$

解： （1）$\alpha_0 = 1$，$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，

则能控标准型为$A_c = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,$B_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$C_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$。

系统能控不能观

取$R_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，则$R_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

所以$\hat{A} = R_0^{-1}AR_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，$\hat{B} = R_0^{-1}B_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\hat{C} = C_c R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，$\hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

所以最小实现为$\hat{A}_m = -1$，$\hat{B}_m = [1 \quad 1]$，$\hat{C}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\hat{D}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

验证：$\hat{C}_m(sI - \hat{A}_m)^{-1}\hat{B}_m = \frac{1}{s+1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = w(s)$

（2）$w(s) = \frac{1}{s^3}\begin{bmatrix} s^2 & s \\ s & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^3}\left\{s^2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

对照书本上式 3.127 可知

$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0,$

$\beta 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \beta 1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \beta 2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

可知能控标准型为

$$A = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & I_2 \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0_2 \\ 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$C = [\beta 0 \quad \beta 1 \quad \beta 2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。

rank(N)=3。系统能控不能观。

取$R_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则$R_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

得$\hat{A}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\hat{B}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\hat{C}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，

验证：$\hat{C}_m(sI - \hat{A}_m)^{-1}\hat{B}_m = w(s)$，故其为实最小实现

3-16

证明：设系统开环传函为$G(s)=\dfrac{N(s)}{M(s)}$，其中 $N(s)$、$M(s)$为 s 的有限多项式。则单位反馈系统的闭环传函为

$$\emptyset(s)=\frac{G(s)}{1\pm G(s)}=\frac{N(s)}{M(s)\pm N(s)}$$

证明若$G(s)$无零极点相消现象，则$\emptyset(s)$也无零极点相消现象。反证法，假设$\emptyset(s)$有一个 $s=a$ 的零极点相消现象，则

$$\begin{cases} N(s)|_{s=a}=N(a)=0 \\ M(s)\pm N(s)|_{s=a}=M(a)\pm N(a)=0 \end{cases} \Rightarrow M(a)=0$$

则说明$N(s)$、$M(s)$都包含（$s+a$）项，会出现零极点相消现象，这与$G(s)$无零极点相消现象的假设矛盾，所以$\emptyset(s)$必然也无零极点相消现象。

若$G(s)$有零极点相消现象，很容易证明$\emptyset(s)$也有零极点相消现象。

所以图 3.18 单位反馈系统中，开环系统与闭环系统的能观能控性是一致的。