



第3章 控制系统的输入条件分析(3)

——2019年春季学期

授课教师：马 杰（控制与仿真中心）

罗 晶（控制科学与工程系）

马克茂（控制与仿真中心）

陈松林（控制与仿真中心）



上一节内容回顾

减小静态误差的方法总结

- 对于给定典型信号输入下静态误差为**无穷大**的系统，
- 必须通过**提高系统型别**来解决；
- 对于静差为**非零常数**的系统，
- 0型系统可以直接加**积分环节**解决；
- I型系统可以**提高增益**或加**比例+积分环节**或者**滞后**环节来解决或改善；
- II型系统则一般只能通过**提高增益**或**加入滞后**环节来改善；
- **顺馈**也可用来减小**原理性误差**，但对非线性因素引起的附加性误差无效，而且它的物理可实现性、对参数摄动的敏感性需要考虑。顺馈也会抬高系统闭环谐振峰；
- 系统型别和增益都提高到极限时，一般只能通过**补偿**方法来减小系统误差（**开环补偿**，要求误差必须有**重复性**）。



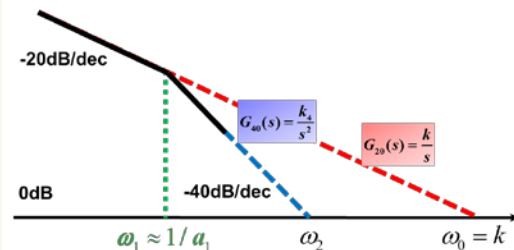
上一节内容回顾

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = C_0 r(t) + C_1 \frac{dr(t)}{dt} + \frac{C_2}{2!} \frac{d^2 r(t)}{dt^2} + \dots$$

动态误差系数的求取方法

- **求导方法**更具有普适性，但计算复杂。精度要求高时，需要求取多个系数时适用；
- **长除法**获得的动态误差系数表使用方便，但只能提供有限个系数，精度取决于所使用的系数个数；
- **图解法**简单方便，适用于没有精确数学模型只有对象bode图，而且精度要求不高的场合（I型，II型）；
- **低频模型法**使用简单，对输入信号频带有要求，精度不高。

$$C_n = \frac{d^n}{ds^n} \left[\frac{1}{1 + G_k(s)} \right] \bigg|_{s=0}$$



$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{K} s + \frac{\alpha T}{K} s^2$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = C_1 s + \frac{C_2}{2!} s^2$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_k(s)} = \frac{s^v (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1)}{s^v (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1) + k (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + 1)}$$



上一节内容回顾

静态误差系数和动态误差系数的关系

- 静态误差系数是动态误差系数的**特例**，动态误差系数是静态误差系数的**推广**；
- 静态误差系数和动态误差系数都用于描述系统时间趋于无穷时的**稳态误差**，不能描述系统的瞬态误差；
- 静态误差系数只适用于阶跃、斜坡和加速度**三种典型信号**（含组合），动态误差系数适用于任何时间函数信号；
- 动静态误差系数均只与系统的**型别和参数**有关，与输入信号的类型和幅值无关；

$$e_{ss} = AK_p + BK_v + CK_A$$

$$r(t) = A \cdot 1(t) + Bt \cdot 1(t) + C \frac{t^2}{2} \cdot 1(t)$$

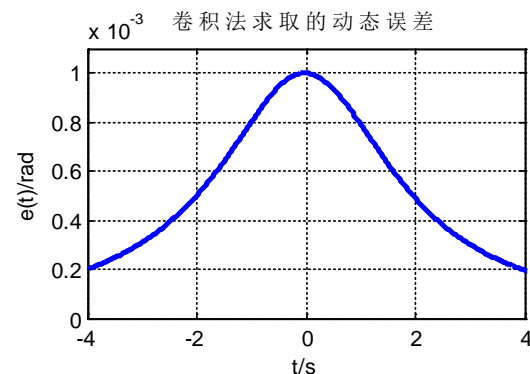
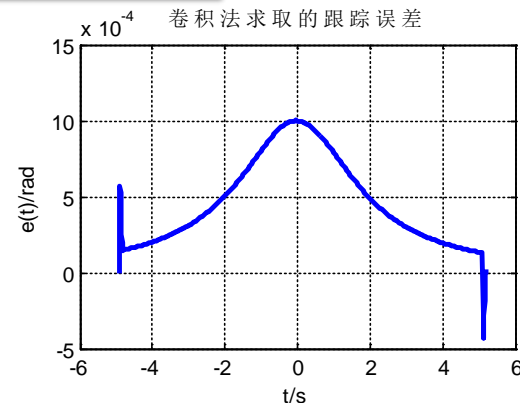
$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = C_0 r(t) + C_1 \frac{dr(t)}{dt} + \frac{C_2}{2!} \frac{d^2 r(t)}{dt^2} + \dots$$



上一节内容回顾

跟踪误差计算小结

- **卷积法**必须要有脉冲响应函数（必须通过推导、仿真或者实验的方法获得），还要进行求和计算，过程比较繁琐。优点是计算包含瞬态误差在内的**整个时段的误差**；
- **动态误差系数法**使用较为方便，但精度较低。应用时必须给定指令信号的各阶导数，结果中只包含**稳态误差**；



$$x(k) = \sum_{n=k-N}^k w(k-n)u(n)$$

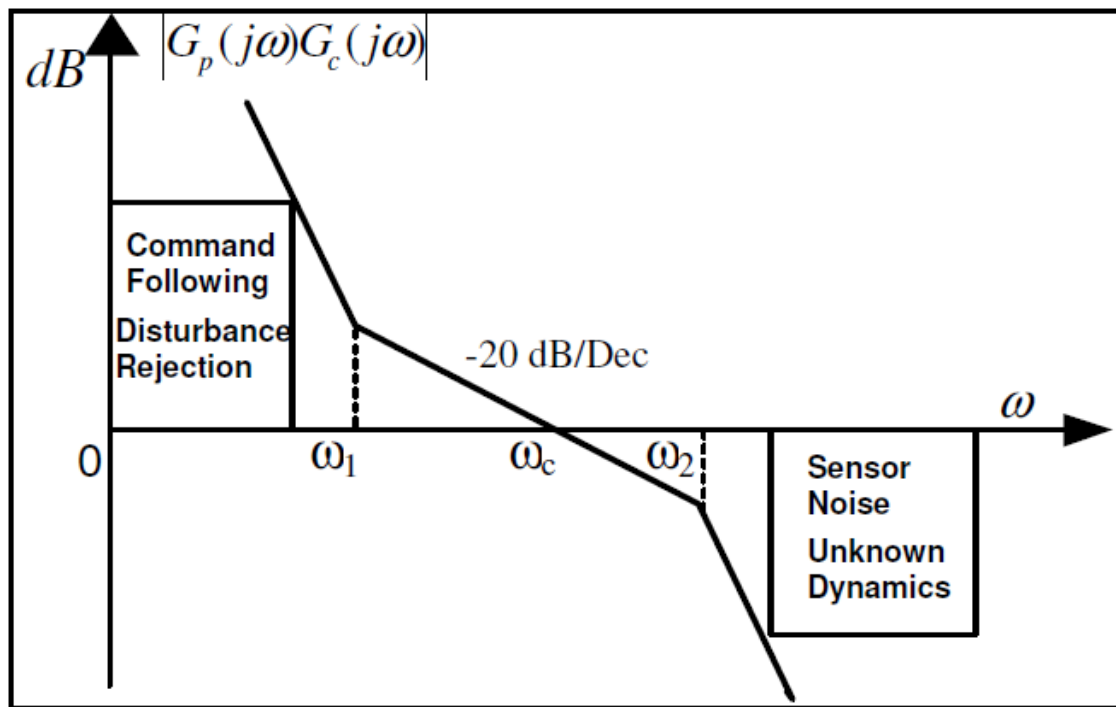
$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = C_0 r(t) + C_1 \frac{dr(t)}{dt} + \frac{C_2}{2!} \frac{d^2 r(t)}{dt^2} + \dots$$



上一节内容回顾

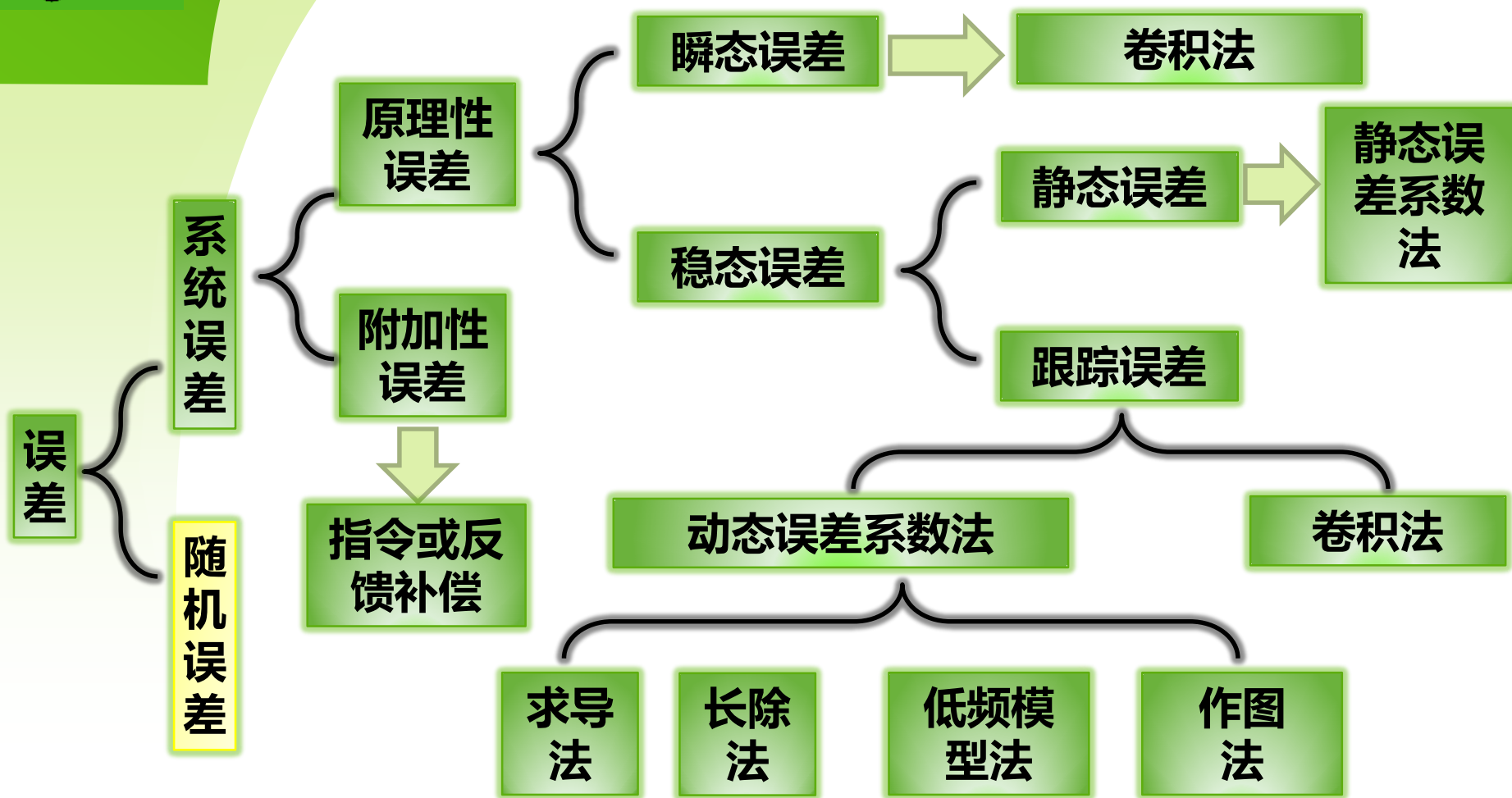
跟踪误差计算小结

根据系统误差要求确定下来的系统增益或型别是硬性要求，在系统设计中不允许改动；





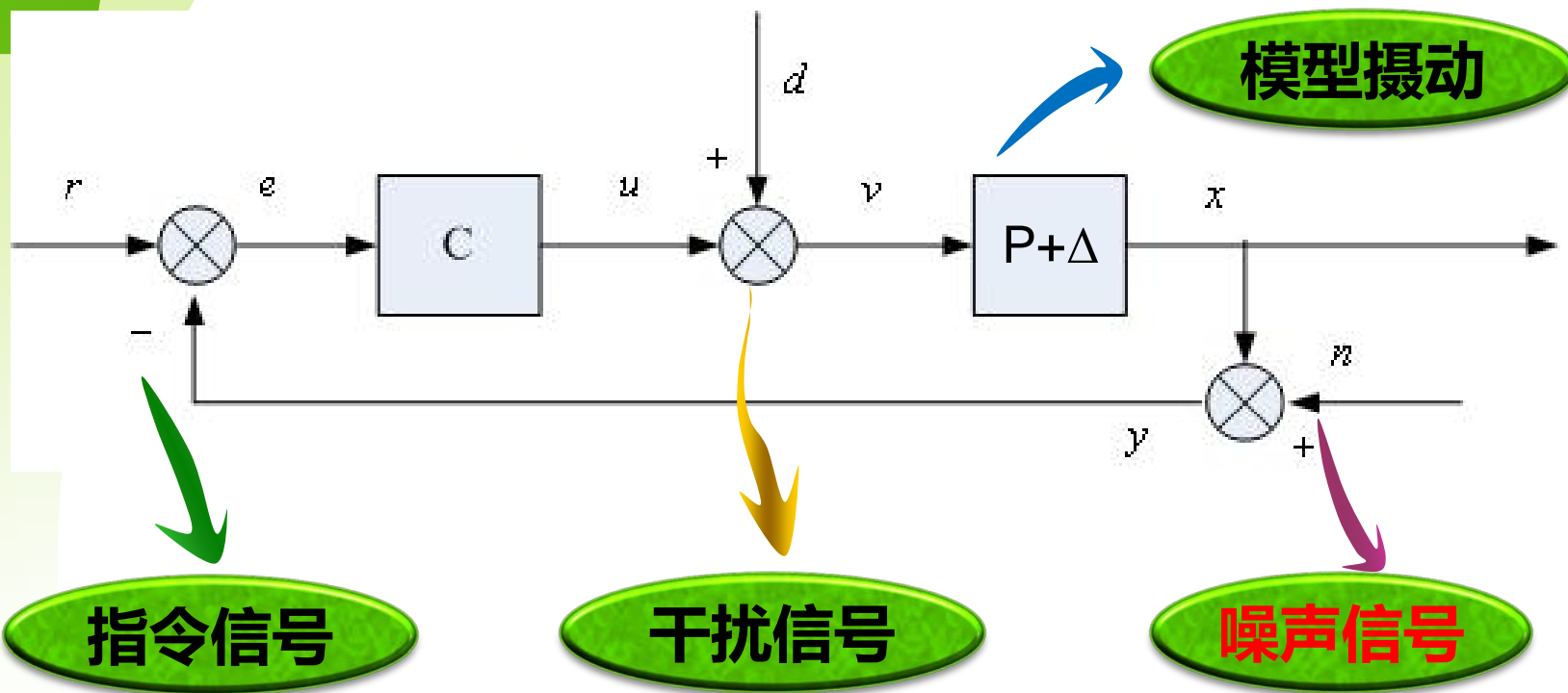
内容回顾



目的是确定系统的低频性能界限（型别和增益）



内容回顾



$$G_{xr} = \frac{PC}{1 + PC}$$

$$G_{xd} = \frac{P}{1 + PC}$$

$$G_{xn} = \frac{-PC}{1 + PC}$$



Contents

A1

输入信号和跟踪误差

A2

噪声和它引起的误差

A3

扰动响应及抑制



学习目标

本节课需要掌握的内容

- 1 了解噪声的形式和特性、作用形式、作用机理;
- 2 掌握分析噪声这类随机信号的方法, 复习概率论相关概念 (均值、方差、协方差等)、掌握随机变量, 随机向量, 随机过程的基本概念;
- 3 掌握平稳随机过程的特点、相关函数和功率谱密度等重要概念;
- 4 掌握噪声作用下系统性能的评价方法, 均方误差指标, 学会降低均方误差的方法。

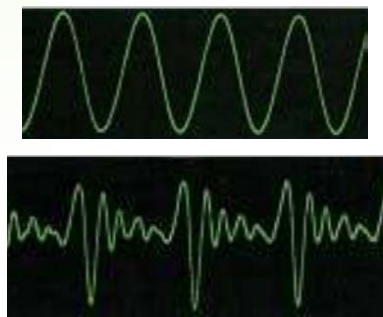


前言

噪声的基本概念

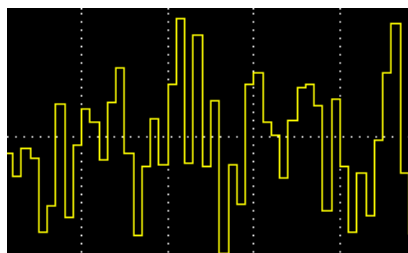
乐声

较有规律的振动所产生的周期性的声波组合而成。



噪声

物理学定义：
无规则、非周期性的杂乱声波。



噪声

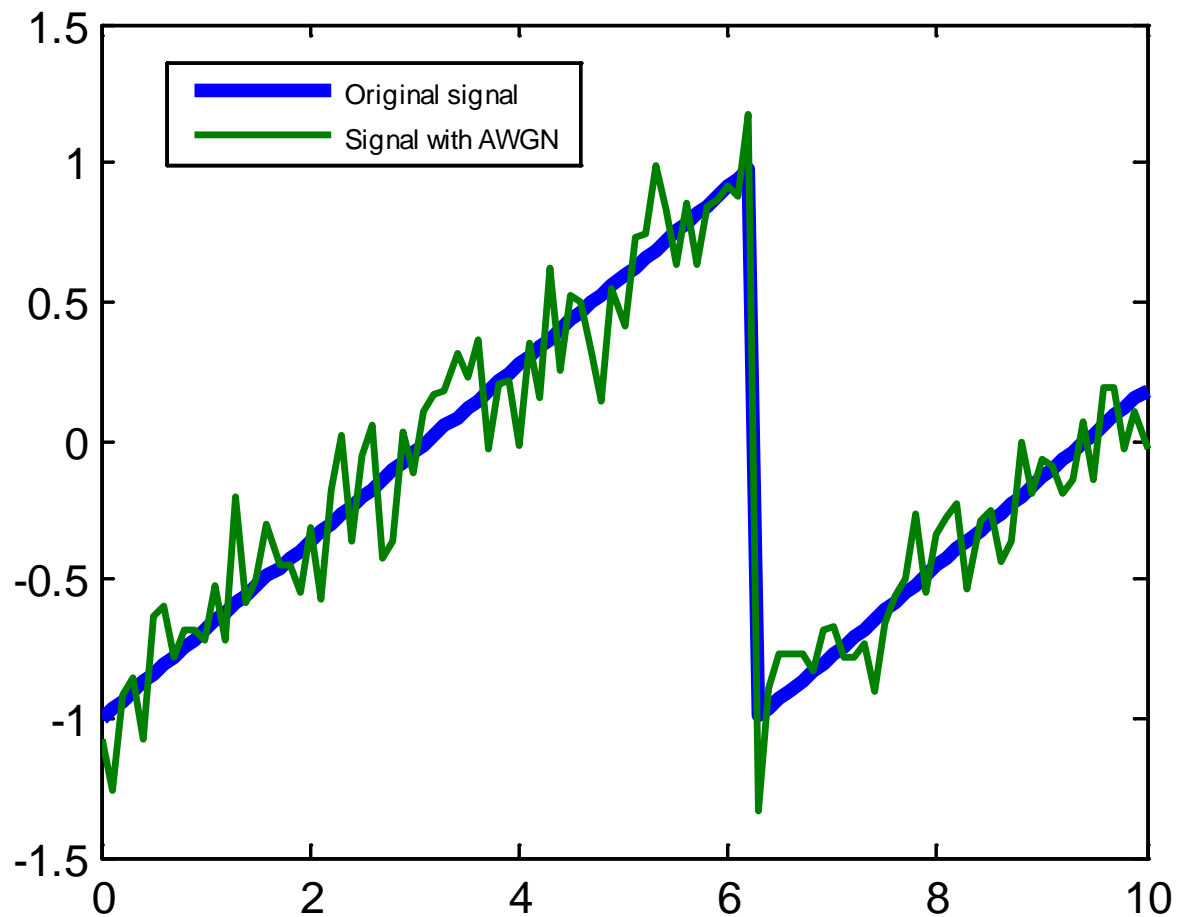
心理学定义：
一切“不需要的声音”。



前言

噪声的基本概念

锯齿波中加入白噪声





前言

量测噪声

应用光纤惯性测量单元对运5飞机飞行姿态实测曲线

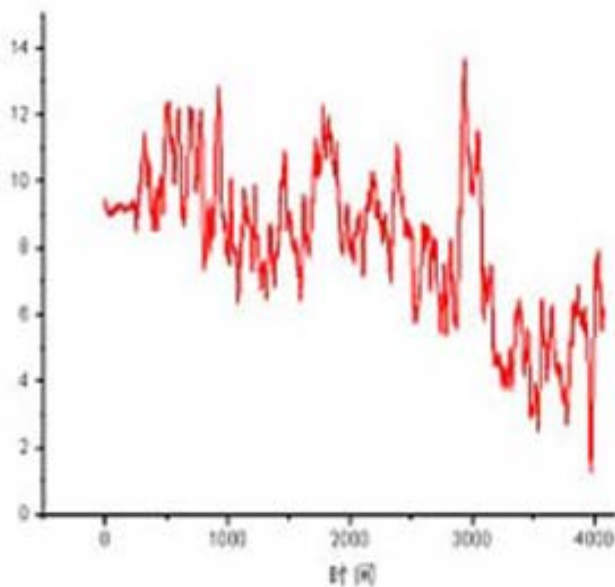


图 10: XW-ADU7600 横滚角曲线

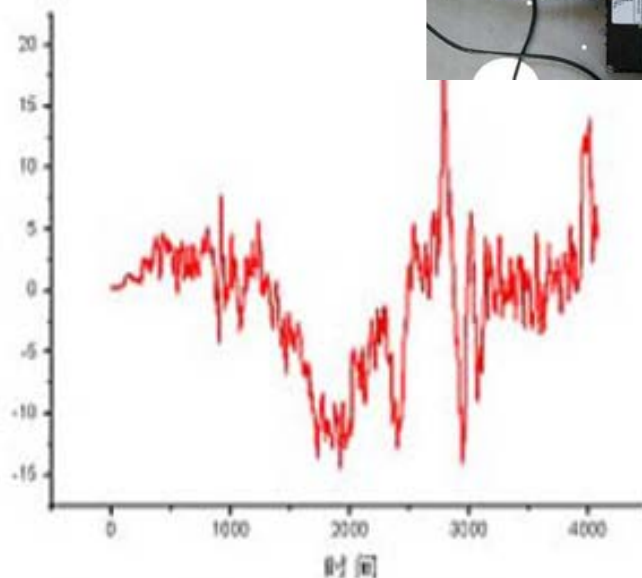


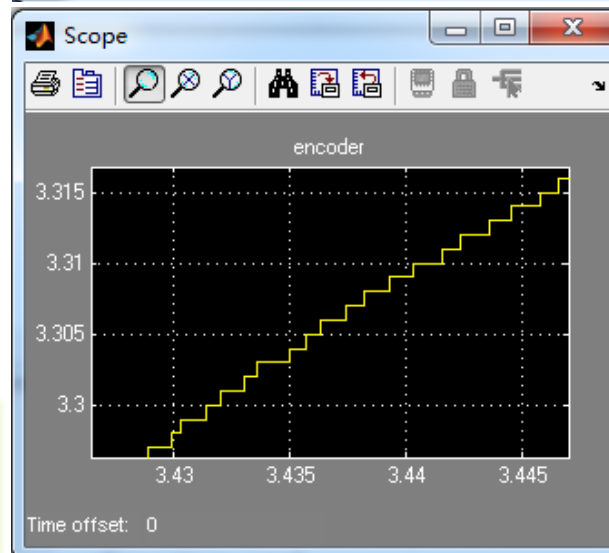
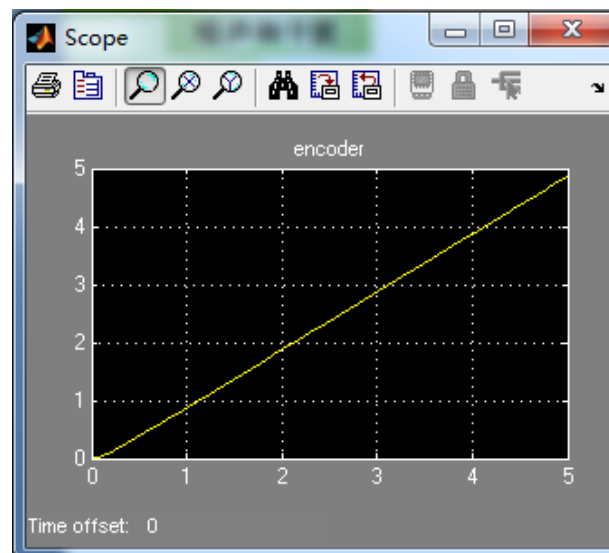
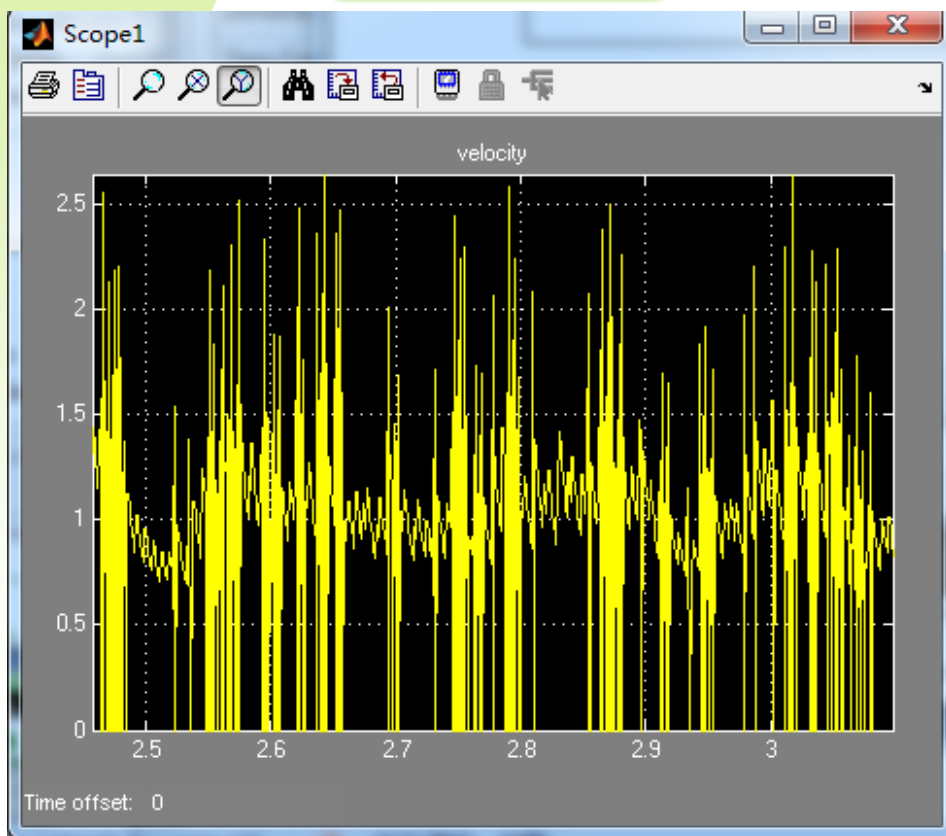
图 11: XW-ADU7600 俯仰角曲线

噪声主要通过测量元件引入系统，其他有电信号的传输和处理的环节都会引入噪声，只是形式不同。



前言

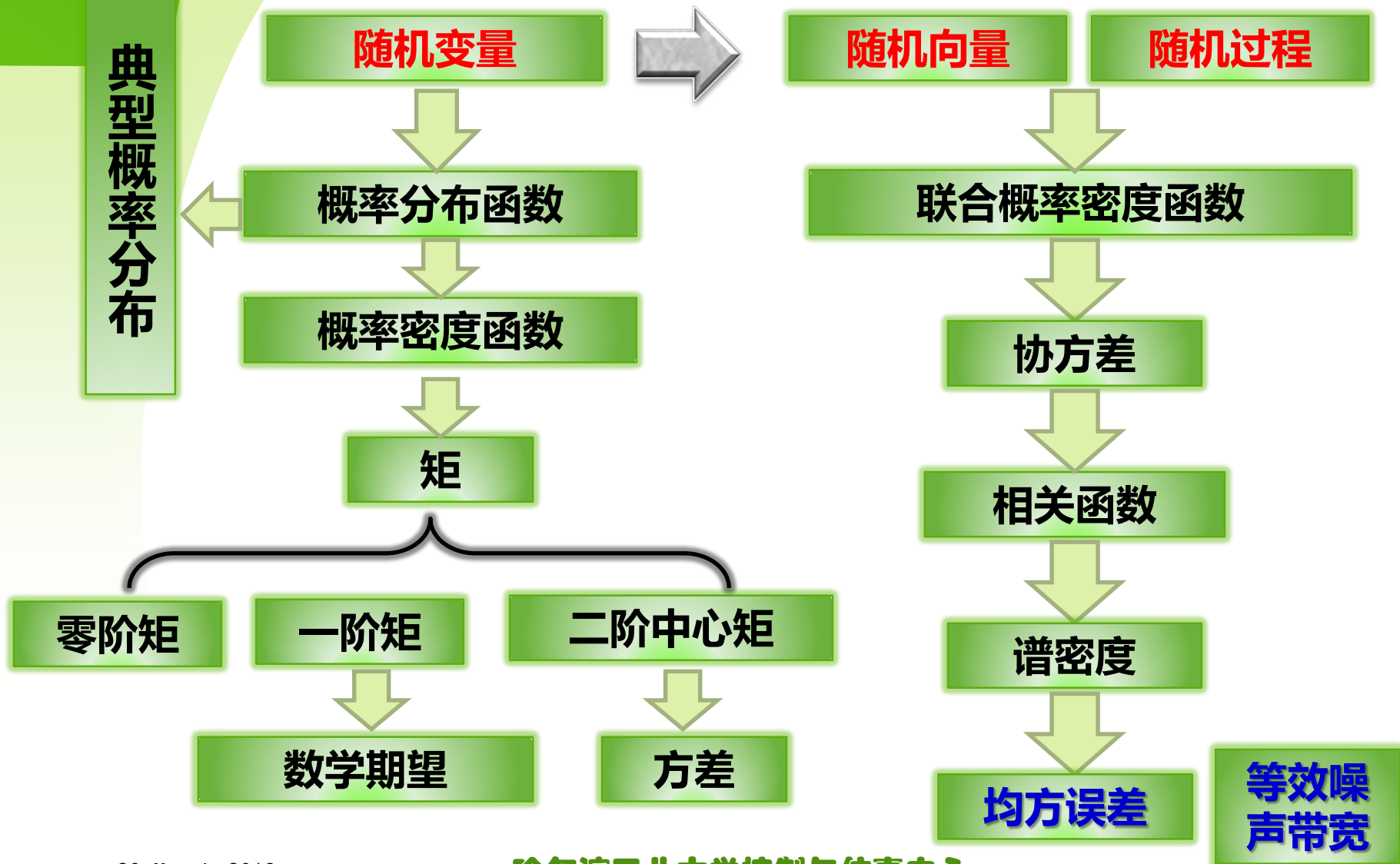
量化噪声



利用编码器获取的角位置信号来计算角速度时，
会因编码器的有限分辨率，引入严重的噪声



前言





3.2 噪声和它引起的误差

3.2.1 正态随机变量和正态随机向量

3.2.2 随机过程及相关函数

3.2.3 谱密度

3.2.4 均方误差

3.2.5 系统的等效噪声带宽



前言

噪声是一种**随机过程**,这就使状态向量和量测输出向量在噪声作用(污染)下,也变成了随机过程。随机过程不同于确定性过程,要用**统计特性**描述。

$$r = f(t)$$

随机过程中,事物的变化过程没有确定的形式,**不能用确定性函数描述**,即对每一个自变量时间点可取不同的函数值。当然,我们所研究的随机过程是具有统计规律的,而不是任意的随机现象。

$$n = ?$$

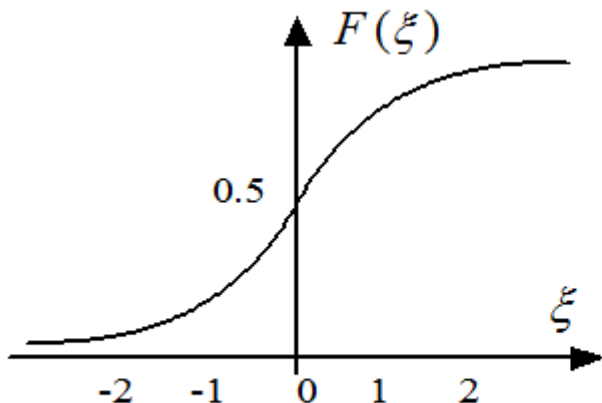


3.2.1 正态随机变量和正态随机向量

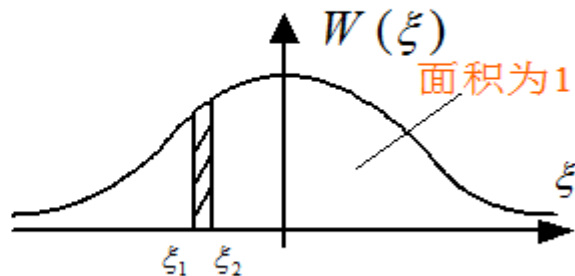
随机变量及其概率分布

❖ 累积分布函数 $F(\xi)$

以 ξ 为横坐标，取值在 $(-\infty, \xi)$ 的概率为 $F(\xi)$ 。



概率分布函数曲线



概率密度曲线

❖ 概率密度 $W(\xi)$ 的定义

$$W(\xi) = \frac{dF(\xi)}{d\xi}$$

$$P(\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} W(\xi) d\xi$$

$$P(\xi_1 \leq \xi \leq \xi_1 + \Delta\xi) = W(\xi_1) \cdot \Delta\xi$$



3.2.1 正态随机变量和正态随机向量

随机变量的统计特性

❖ 均值(数学期望值): 所有可能取值的加权平均值。

其几何意义为 $W(\xi)$ 质量中心的 ξ 坐标: $\bar{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi \cdot W(\xi) d\xi$

❖ 方差: 随机变量偏离均值的程度: $\sigma_{\xi}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{\xi})^2 \cdot W(\xi) d\xi$

❖ 二阶原点矩: $m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \cdot W(\xi) d\xi$

❖ ν 阶中心矩: $\sigma_{\xi}^{\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{\xi})^{\nu} \cdot W(\xi) d\xi$

$$\text{零阶中心矩: } \sigma_{\xi}^0 = \int_{-\infty}^{\infty} W(\xi) d\xi = 1$$

$$\text{一阶中心矩: } \sigma_{\xi}^1 = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{\xi}) \cdot W(\xi) d\xi = \bar{\xi} - \bar{\xi} = 0$$

$$\text{二阶中心矩: } \sigma_{\xi}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{\xi})^2 \cdot W(\xi) d\xi$$



3.2.1 正态随机变量和正态随机向量

典型概率分布

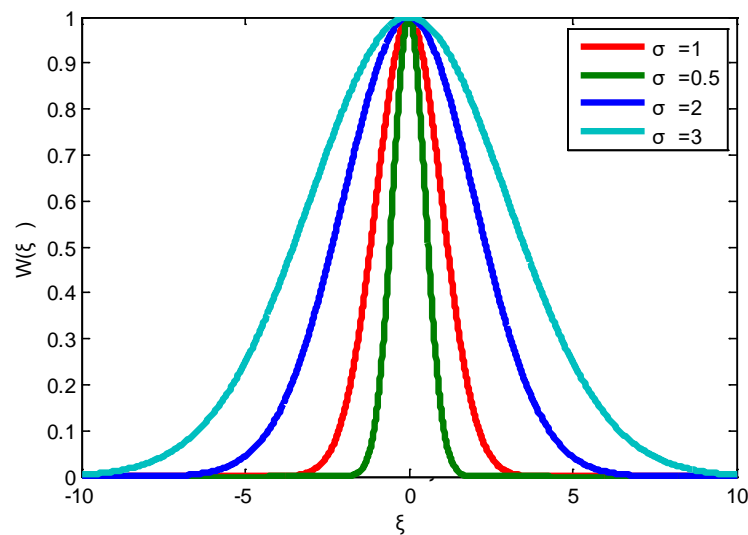
正态分布：具有两个参数 μ 和 σ^2 的连续型随机变量的分布，第一参数 μ 是服从正态分布的随机变量的均值，第二个参数 σ^2 是此随机变量的方差，所以正态分布记作 $N(\mu, \sigma^2)$ 。

一般来说，如果一个量是由许多微小的独立随机因素影响的结果，那么就可以认为这个量具有正态分布。

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}$$

当 $m = 0, \sigma = 1$ 时，为标准正态分布

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$





3.2.1 正态随机变量和正态随机向量

典型概率分布

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot W(x) dx = m (\text{均值})$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \cdot W(x) dx = \sigma^2 (\text{方差})$$

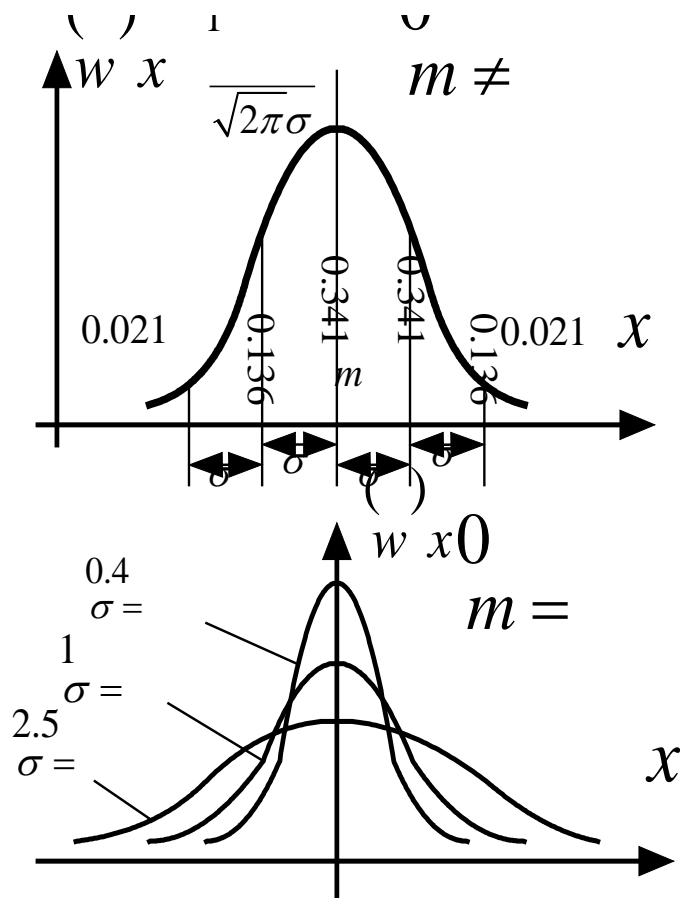
$m \pm \sigma, m \pm 2\sigma, m \pm 3\sigma$ 的概率为

$$p(|x-m| < \sigma) = 0.6827$$

$$p(|x-m| < 2\sigma) = 0.9545$$

$$p(|x-m| < 3\sigma) = 0.9973$$

工程上, 对正态分布的随机变量, 有99.73%的把握不会超出 m 的 3σ 范围。





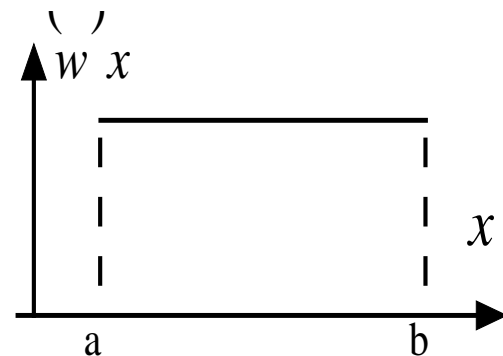
3.2.1 正态随机变量和正态随机向量

典型概率分布

❖ 均匀分布

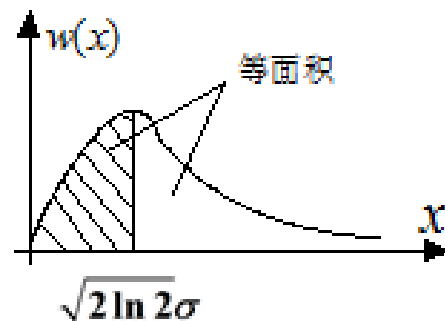
变量在 a 、 b 之间取值具有相同的概率分布

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a, x > b \end{cases} \quad E(x) = \frac{a+b}{2}, \quad D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$



❖ 瑞利分布

$$w(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad E(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma, \quad D(x) = \frac{(4-\pi)\sigma^2}{2}$$



一个连续性随机变量满足正态分布，而它的能量又分布在一个很窄的频带上时，那么这个随机变量满足瑞利分布。**不规则海浪的波幅幅度 ξ_m 符合瑞利分布。**



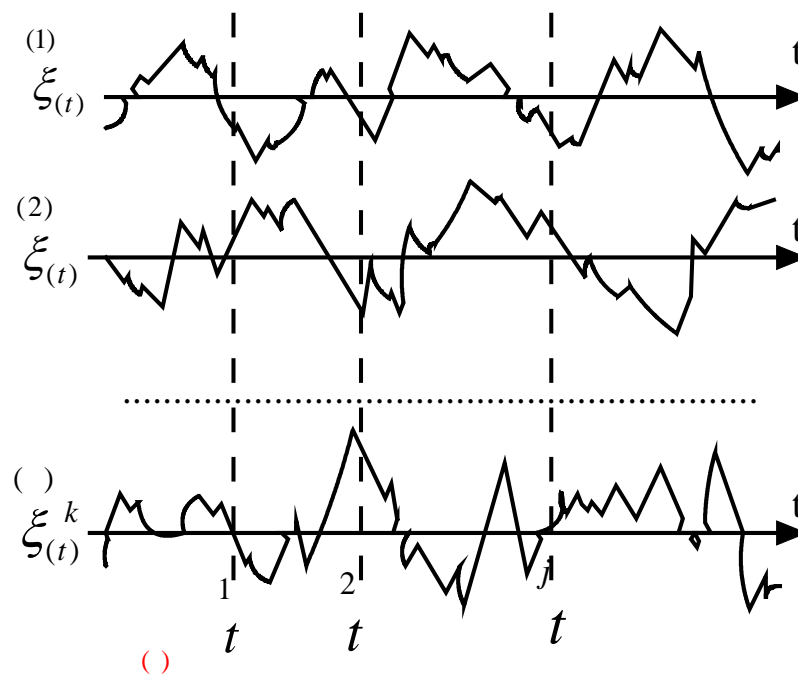
3.2.1 正态随机变量和正态随机向量

多维随机变量——随机向量

用向量形式来表示的多维随机变量，称之为**随机向量**。

每个 x_j 皆为一个一维随机变量。

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$



不规则海浪样本

$\xi_{(t)}^i$ 表示第 i 记录点的波形曲线

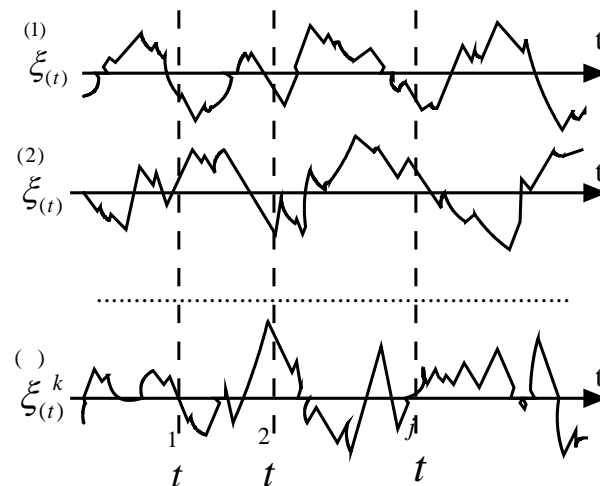


3.2.1 正态随机变量和正态随机向量

多维随机变量——随机向量

以二维为例：

$$X = [x_1, x_2]^T$$



不规则海浪样本

$\xi_{(t)}^i$ 表示第*i*记录点的波形曲线

两个分量分别取值在 $[x_1, x_1 + dx_1]$ 和 $[x_2, x_2 + dx_2]$ 中的概率是 $w(x_1, x_2)dx_1dx_2$ ，则 $w(x_1, x_2)$ 是随机变量 x_1, x_2 的联合概率密度函数。



3.2.1 正态随机变量和正态随机向量

多维随机变量——随机向量

k 维随机变量 $X = [x_1, x_2, \dots, x_k]^T$ 的统计特征

❖ 均值(一阶矩)

$$m_i = E(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

向量形式: $\mathbf{M} = (m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_k)^T$

❖ 协方差 (二阶中心矩)

$$r_{ij} = \text{COV}(x_i, x_j) = E[(x_i - m_i)(x_j - m_j)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_i)(x_j - m_j) w(x_i, x_j) dx_i dx_j$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & \dots & r_{kk} \end{bmatrix},$$

$$r_{ij} = r_{ji}$$



3.2.1 正态随机变量和正态随机向量

多维随机变量——随机向量

k 维随机变量 $X = [x_1, x_2, \dots, x_k]^T$ 的统计特征

给定 M 和 R , X 的联合概率密度为

$$w(X) = (2\pi)^{-k/2} (\det R)^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (X - M)^T R^{-1} (X - M) \right]$$

以二维为例 ($k=2$) :

$$M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix}$$

二维的联合概率密度函数为

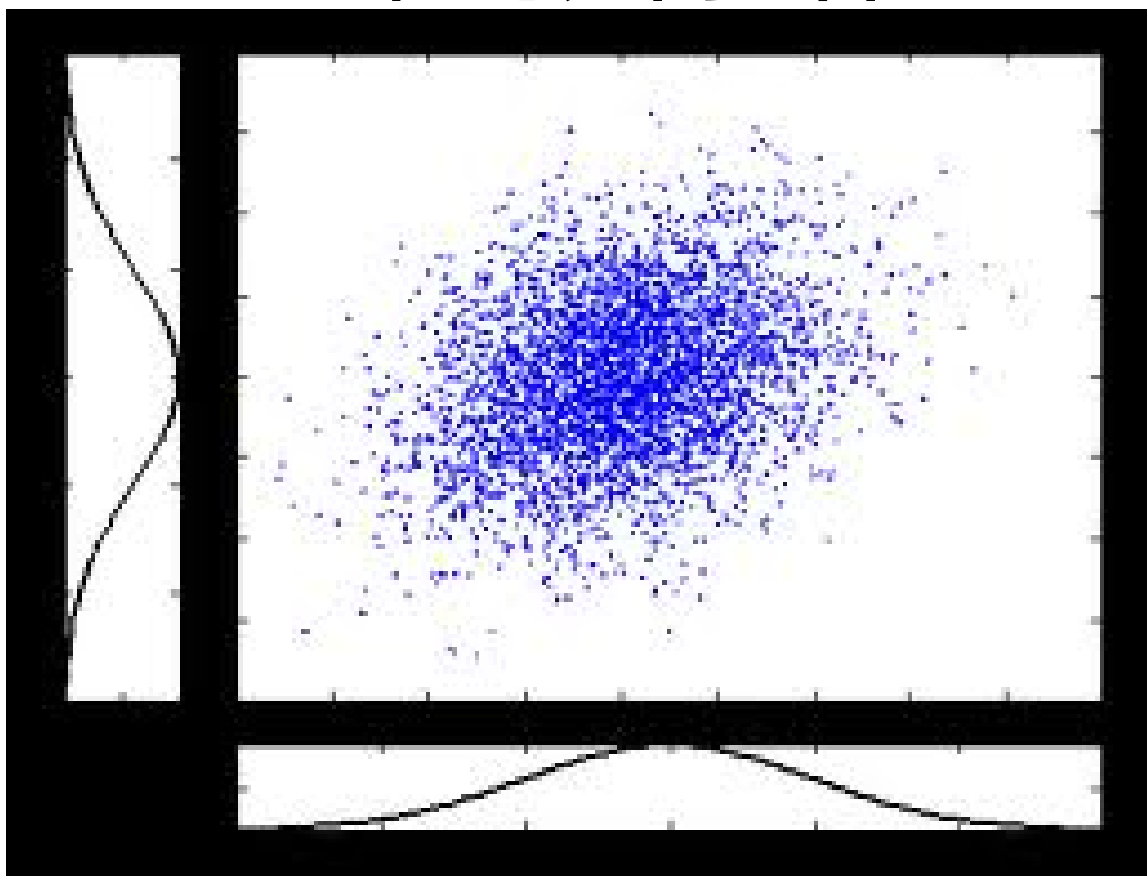
$$w(x_1, x_2) = \left(2\pi \sqrt{r_{11}r_{22} - r_{12}^2} \right)^{-1} \cdot \exp \left[-\frac{r_{22}(x_1 - m_1)^2 - 2r_{12}(x_1 - m_1)(x_2 - m_2) + r_{11}(x_2 - m_2)^2}{2(r_{11}r_{22} - r_{12}^2)} \right]$$



3.2.1 正态随机变量和正态随机向量

多维随机变量——随机向量

二维正态分布示意图





3.2 噪声和它引起的误差

3.2.1 正态随机变量和正态随机向量

3.2.2 随机过程及相关函数

3.2.3 谱密度

3.2.4 均方误差

3.2.5 系统的等效噪声带宽

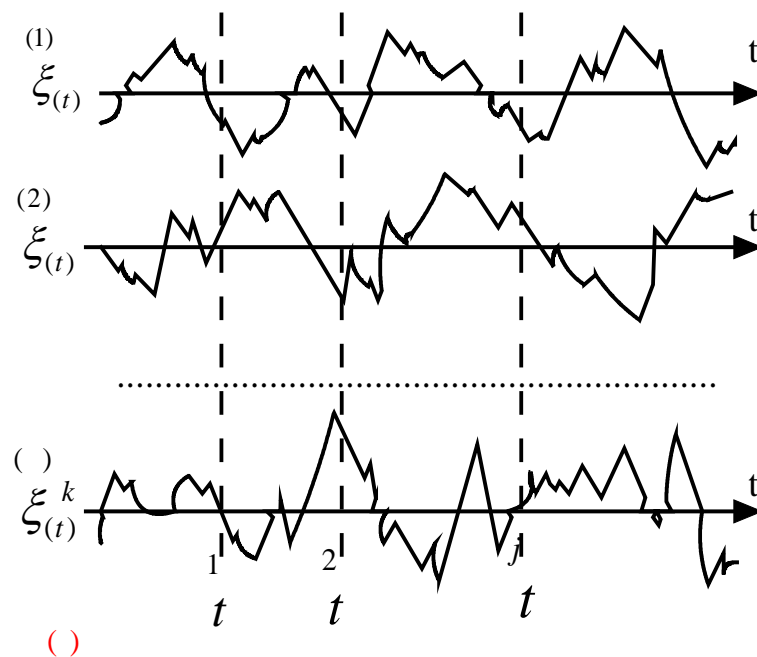


3.2.2 随机过程及相关函数

随机过程

观察不同点处的波幅随时间的变化 $\xi_{(t)}^{(1)}, \xi_{(t)}^{(2)}, \dots, \xi_{(t)}^{(k)}$ ，它们不仅是**测量点的随机变量**，而且还是**时间的函数** $\xi_{(t_1)}^{(i)}, \xi_{(t_2)}^{(i)}, \dots, \xi_{(t_j)}^{(i)}, \dots$ 称随时间变化而随机取值的时间随机函数为**随机过程**。

工程中，需要做一些假设，突出主要矛盾，形成满足一定假设条件的随机过程。



不规则海浪样本

$\xi_{(t)}^i$ 表示第 i 记录点的波形曲线



3.2.2 随机过程及相关函数

典型随机过程

❖ 马尔科夫随机过程

随机过程未来的进展和我们所取得的某一开始的时刻有关，而与这时刻以前的特性无关。（过去即使知道得再多，也无助于了解未来。比较容易进行数学处理，且结果与实际比较吻合。）

❖ 平稳随机过程

对于前一段的统计，可以很有意义地用来估计其未来的发展。其本质特点是：概率密度函数的形状不随时间而变化，即**其形状不随时间轴上的计时起点而变化。**



3.2.2 随机过程及相关函数

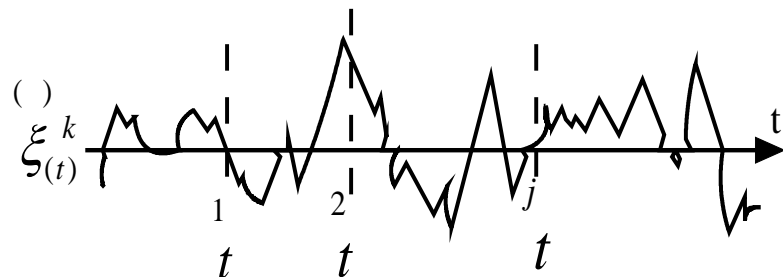
典型随机过程

❖ **平稳随机过程**：概率密度函数的形状**不随时间而变化**。即：其形状不随时间轴上的计时起点而变化。（许多工程实际符合该假设，海浪）

对第 k 个测量点 $\xi^{(k)}_{(t)}$ 所决定的随机过程是平稳随机过程，则有两组值，

$$(1) : \xi^{(k)}_{(t_1)}, \xi^{(k)}_{(t_2)}, \dots, \xi^{(k)}_{(t_k)}$$

$$(2) : \xi^{(k)}_{(t_1+\tau)}, \xi^{(k)}_{(t_2+\tau)}, \dots, \xi^{(k)}_{(t_k+\tau)}$$



它们的概率分布函数相同，与时刻 t 、测量点位 k 及组数 n 无关。即

$$\begin{aligned} & w(\xi^{(k)}_{(t_1)}, t_1; \xi^{(k)}_{(t_2)}, t_2; \dots; \xi^{(k)}_{(t_n)}, t_n) \\ &= w(\xi^{(k)}_{(t_1)}, t_1 + \tau; \xi^{(k)}_{(t_2)}, t_2 + \tau; \dots; \xi^{(k)}_{(t_n)}, t_n + \tau) \end{aligned}$$



3.2.2 随机过程及相关函数

典型随机过程

❖ 平稳随机过程的两个特点:

□ 平稳性

过程的统计特征值与 τ 无关，可以用过去对该过程的**认识**
预报未来和现在。

□ 遍历性（各态历经性）

过程的统计特征值与测量点 k 无关，可以用某一点的测量
数据来统计整个过程的概率分布。



3.2.2 随机过程及相关函数

典型随机过程

❖ “各态历经”的含义：

随机过程中的任一实现都经历了随机过程的所有可能状态。因此，我们无需（实际中也不可能）获得大量用来计算统计平均的样本函数，而只需从任意一个随机过程的样本函数中就可获得它的所有的数字特征，从而使“统计平均”化为“时间平均”，使实际测量和计算的问题大为简化。

利用平稳随机过程的这两个特点，可以使其实现空间（集合）和时间的转化。

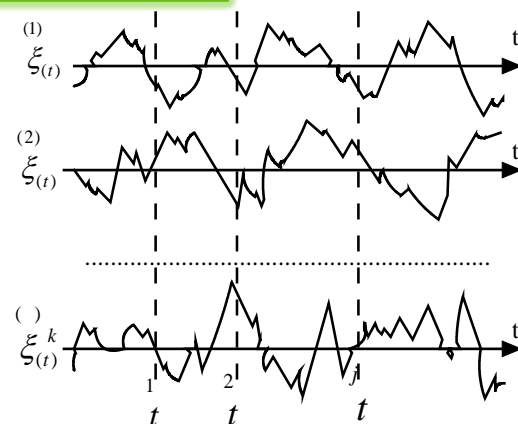


3.2.2 随机过程及相关函数

典型随机过程

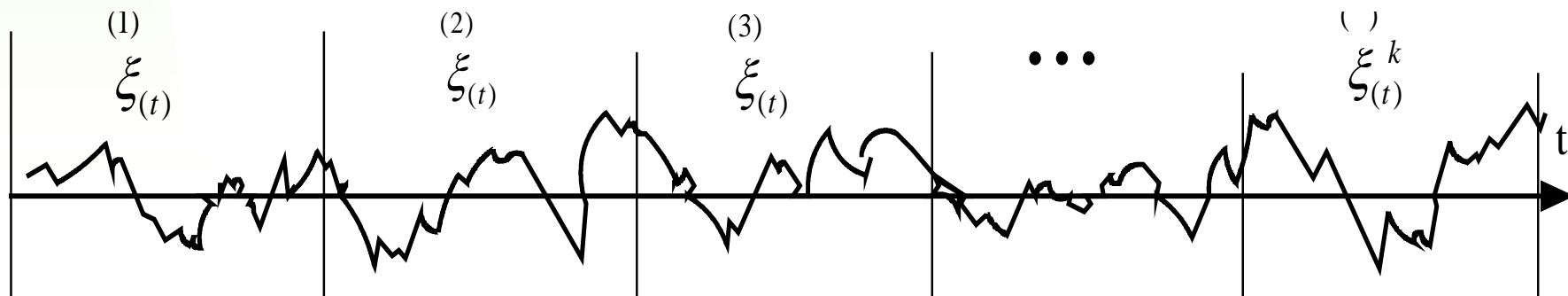
例：考察海浪的平稳随机过程

此时的海浪是一个平稳随机过程，可以在某个测量点处记录波幅 $\xi(t)$ 的足够长(相对于海浪的周期而言，一般测量200个波形)的变化，把记录分成一定长度的若干段，把其中的每一段记作 $\xi_{(t)}^{(k)}$ ，其中 $k=1, 2, \dots$



不规则海浪样本

$\xi_{(t)}^i$ 表示第 i 记录点的波形曲线

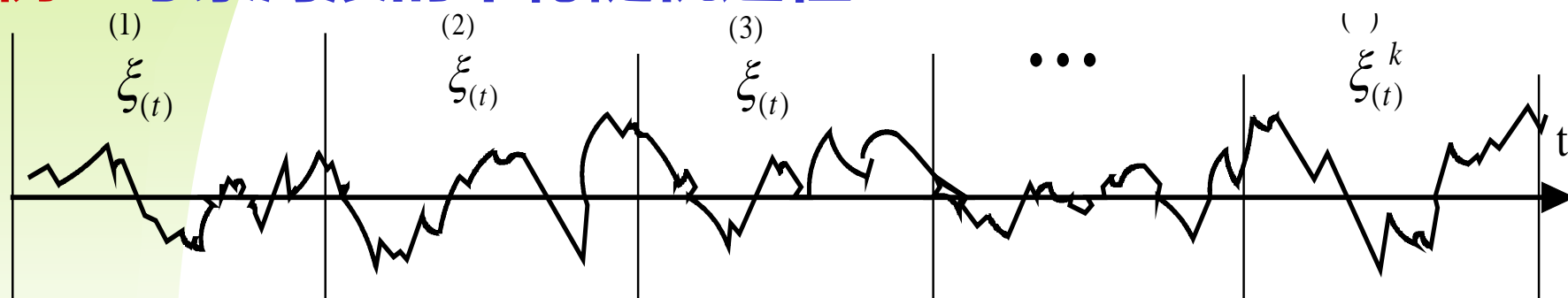




3.2.2 随机过程及相关函数

典型随机过程

例：考察海浪的平稳随机过程



均值: $\bar{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi \cdot W(\xi, t) d\xi \xleftrightarrow[\text{遍历性}]{\text{平稳性}} \bar{\xi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t) dt$

对时间的统计平均。 $\overline{\xi_{\text{平稳}}} = 0$

二阶原点矩:

$$m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \cdot W(\xi, t) d\xi \xleftrightarrow[\text{遍历性}]{\text{平稳性}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [\xi(t)]^2 dt, \quad m^2_{\text{平稳}} = \sigma_{\xi}^2$$



3.2.2 随机过程及相关函数

相关函数

对于平稳随机过程而言，它的**自相关函数**是特别重要的一个函数：

其一，平稳随机过程的**统计特性**，如数字特征等，可通过自相关函数来描述；

其二，自相关函数与平稳随机过程的**谱特性**有着内在的联系。

因此，我们有必要了解平稳随机过程自相关函数的性质。



3.2.2 随机过程及相关函数

相关函数

考虑具有各态历经的零均值平稳随机过程。

以海浪为例。考察 $\xi(t) \cdot \xi(t + \tau)$ 的均值，令： $\xi(t) = \xi_1, \xi(t + \tau) = \xi_2$ 有：

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \overline{\xi(t) \cdot \xi(t + \tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1 \xi_2 \cdot W(\xi_1, \xi_2, \tau) d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t + \tau) \xi(t) dt \end{aligned}$$

$R(\tau)$ 称为**相关函数**。表征 $\xi(t)$ 和 $\xi(t + \tau)$ 的关联程度。

用 $R(\tau)$ 描述平稳随机过程：一个随机过程均值为常数，而它的相关函数只与时间间隔 τ 有关，这样的随机过程为**平稳随机过程**。



3.2.2 随机过程及相关函数

相关函数的特点

- ① **零均值**的随机过程如果 τ 趋于无穷时 $X(t)$ 和 $X(t+\tau)$ 相互独立，则

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = R(\infty) = 0$$

- ② 初值

$$R(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t) \xi(t+0) dt = \sigma_{\xi}^2$$

- ③ 相关函数是**偶函数**，即 $R(\tau) = R(-\tau)$

$$R(\tau) = \overline{\xi(t) \cdot \xi(t+\tau)} = \overline{\xi(t) \cdot \xi(t-\tau)} = R(-\tau)$$



3.2.2 随机过程及相关函数

相关函数的特点

- ④ 对于两个 $\xi(t)$ 与 $\eta(t)$ 之间的互相关函数不是偶函数，而是 τ 的**共轭函数**。

$$\begin{aligned} R_{\xi,\eta}(\tau) &= \overline{\xi(t+\tau) \cdot \eta(t)} = \overline{\xi(t) \cdot \eta(t-\tau)} \\ &= \overline{\eta(t-\tau) \cdot \xi(t)} = R_{\eta,\xi}(-\tau) \end{aligned}$$

⑤ 自相关函数 $|R(\tau)| \leq R(0)$

互相关函数 $|R_{\xi,\eta}(\tau)|^2 \leq R_{\xi}(\tau) \cdot R_{\eta}(\tau)$



3.2.2 随机过程及相关函数

相关函数的计算

❖ 依据试验记录曲线求取相关函数

按定义：

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) \cdot x(t + \tau)] dt$$



3.2.2 随机过程及相关函数

相关函数的计算

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) \cdot x(t + \tau)] dt$$

用数值法： $x(t)$, $x(t + \tau)$ 取离散值

$$R(\tau) = R(n \cdot \Delta t) = \frac{1}{M - n} \sum_{l=1}^{M-n-1} x(l \cdot \Delta t) x(l \cdot \Delta t + n \cdot \Delta t)$$

数据点不多时，可简写为： $R(n) = \frac{1}{M - n} \sum_{l=1}^{M-n-1} x(l) x(l + n)$

注意：

M 为全部采样点数，且有 $n \cdot \Delta t = \tau$, $l \cdot \Delta t = t$ ；

数据长度 $M\Delta t$ 应大于 $x(t)$ 中**最大周期的10倍**以上；

采样间隔 Δt 要小于 $x(t)$ 中**最小周期的1/4**。



3.2 噪声和它引起的误差

3.2.1 正态随机变量和正态随机向量

3.2.2 随机过程及相关函数

3.2.3 谱密度

3.2.4 均方误差

3.2.5 系统的等效噪声带宽



3.2.3 谱密度

谱密度的物理意义

定义：设 $x(t)$ 为平稳随机过程，取 $-T \sim T$ 段，有

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & -T \leq t \leq T \\ 0, & t < -T, t > T \end{cases}$$

对 x_T 进行傅里叶变换

$$X_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时，定义 $\frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2$ 的极限值为 $x(t)$ 的谱密度函数，即

$$\Phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2$$



3.2.3 谱密度

谱密度的物理意义

定义：设 $x(t)$ 为平稳随机过程，取 $-T \sim T$ 段，有

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & -T \leq t \leq T \\ 0, & t < -T, t > T \end{cases}$$

$$X_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

其功率表示为

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T x(t)^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(-j\omega) X_T(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(j2\pi f)|^2 df \end{aligned}$$



3.2.3 谱密度

谱密度的物理意义

信号 $x(t)$ 的平均功率表示为

$$\Phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2$$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} |X_T(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(2\pi f) df \end{aligned}$$

可见，信号 $x(t)$ 的平均功率为其**谱密度函数**沿频率轴的**积分**，
谱密度函数 $\Phi(2\pi f)$ 表示了在频率 f 处的**平均功率密度**，故
称为**功率谱密度**或**谱密度**。



3.2.3 谱密度

谱密度与相关函数的关系

定义：设 $x(t)$ 为平稳随机过程，取 $-T \sim T$ 段，有

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & -T \leq t \leq T \\ 0, & t < -T, t > T \end{cases}$$

$x(t)$ 的相关函数为

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T(t) x_T(t + \tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(j\omega) e^{j\omega(t+\tau)} d\omega \right] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi 2T} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{j\omega t} dt \right) X_T(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi 2T} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(-j\omega) X_T(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega \end{aligned}$$

$$X_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\Phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |x_T(j\omega)|^2$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$



3.2.3 谱密度

谱密度与相关函数的关系

考虑总体平均值与时间均值相等，且 $T \rightarrow \infty$ ，有

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad \Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

可见， $\Phi(\omega)$ 就是 $R(\tau)$ 的傅里叶变换。可以推出：

$$R(0) = \sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) d\omega, \quad \Phi(\omega) \text{与} \omega \text{围成面积的} \frac{1}{2\pi}$$

因此，对于一个平稳随机过程，可以用实验数据来求取其**相关函数**，然后用傅里叶变换得到**谱密度函数**。



3.2.3 谱密度

谱密度量纲说明

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad \Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} S(f)$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f\tau} df, \quad S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$



3.2.3 谱密度

谱密度的计算方法

❖ 直接求取法

$x(t)$



傅里叶变换

$$X_T(j\omega_k) = \Delta t \cdot F(k)$$



求和平均

$$\Phi(\omega) = \overline{\Phi(\omega_k)} = \frac{\Delta t}{N} \overline{F(k)}$$

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_T(n) e^{-jnk 2\pi/N},$$
$$(k = 0, \dots, N-1)$$

$$\Phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2$$

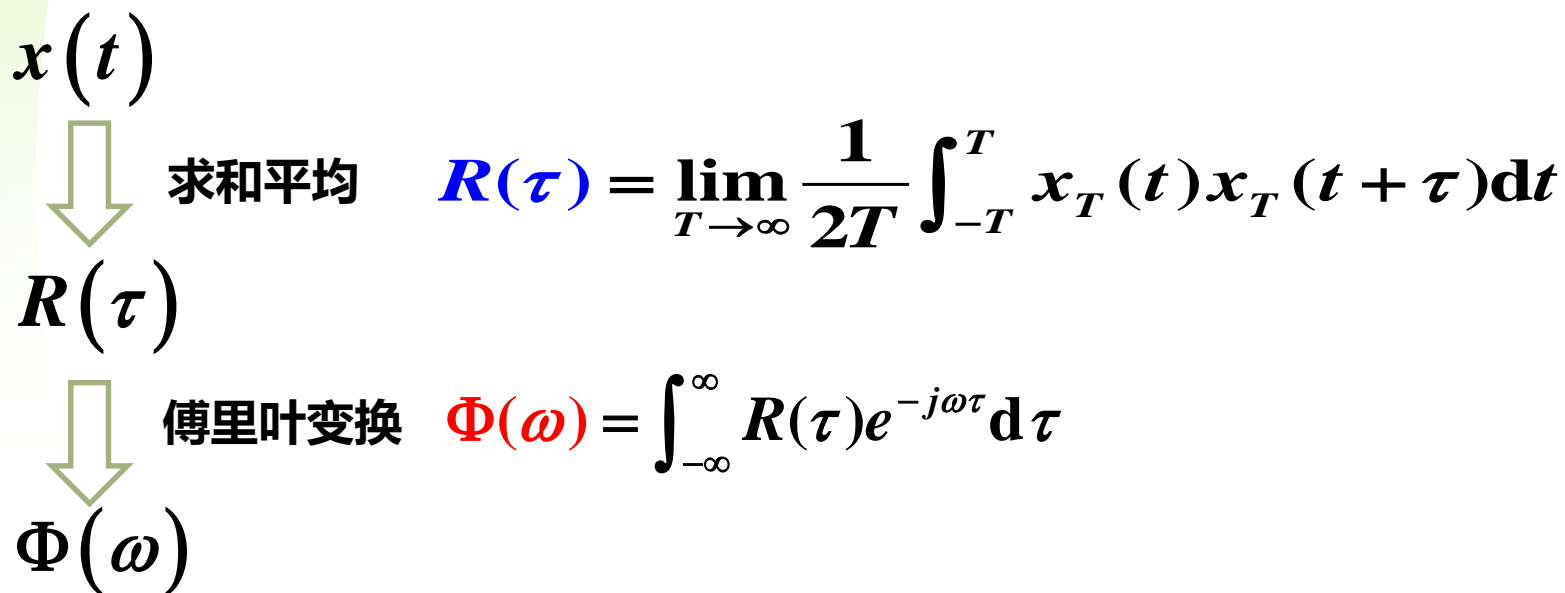


3.2.3 谱密度

谱密度的计算方法

❖ 相关函数法

对于一个平稳随机过程，可以用实验数据来求取其相关函数，然后用傅氏变换得到谱密度函数。





3.2.3 谱密度

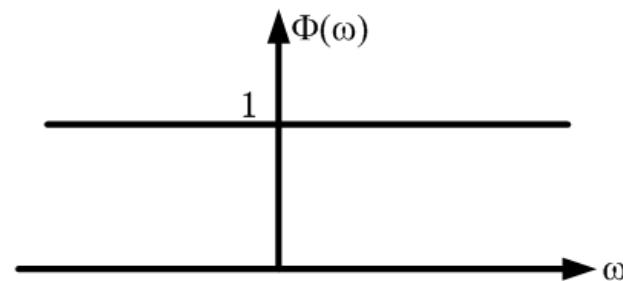
典型谱密度函数

❖ 常值谱密度——白噪声：

一种随机噪声，能量均匀沿 ω 分布，其相关函数是 $R(\tau)=\delta(\tau)$ 。

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 1$$

特点： $X(t)$ 的过去与未来之间没有任何关系（很好的干扰信号）其相关函数除 $\tau=0$ ， $R(0) \rightarrow \infty$ 外，其余 $R(\tau)=0$ 。



白噪声能量无穷大。工程上，白噪声不能实现。但可以取远大于系统带宽的噪声近似代替。



3.2.3 谱密度

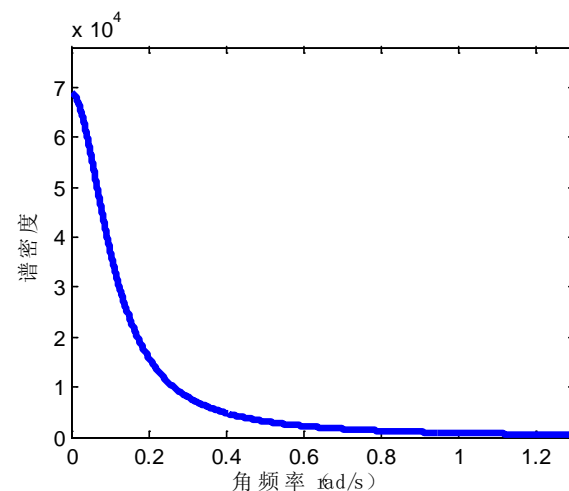
典型谱密度函数

❖ 指数相关的随机过程谱密度—风载扰动谱密度

例：p68,4-2

相关函数： $R(\tau) = \tilde{a}^2 \cdot e^{-\alpha|\tau|}$ ， α 为信号在单位时间内的变化次数

$$\begin{aligned}\text{谱密度: } \Phi(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \tilde{a}^2 \cdot \frac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}\end{aligned}$$





Thank You !

授课教师：马 杰（控制与仿真中心）

罗 晶（控制科学与工程系）

马克茂（控制与仿真中心）

陈松林（控制与仿真中心）



第3章 控制系统的输入条件分析(3)

——2019年春季学期

授课教师：马 杰（控制与仿真中心）

罗 晶（控制科学与工程系）

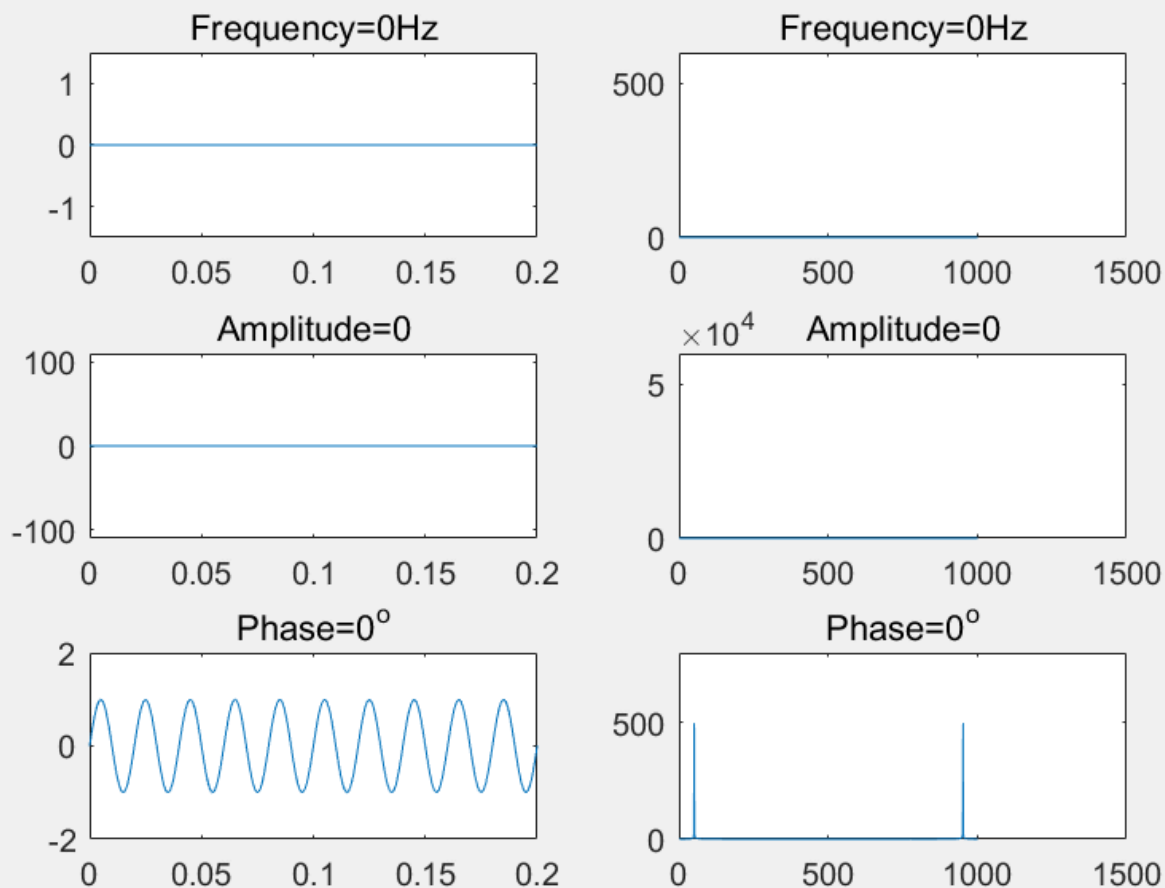
马克茂（控制与仿真中心）

陈松林（控制与仿真中心）



作业展示

第四次 正弦信号的傅里叶分析





上一节内容回顾

随机过程

- **随机变量**不能用确定的函数进行描述，只能通过统计特性对其进行描述，具有**均值和方差**两个主要特征参数；
- **随机向量**由多个随机变量组成，引入了联合概率密度和协方差等概念；
- 随时间变化而随机取值的时间随机函数称为**随机过程**；
- **平稳随机过程**是统计特性与时间无关随机过程，具有平稳性和遍历性，这两个特点可以使**统计平均**转化为**时间平均**；

$$\overline{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi \cdot W(\xi, t) d\xi \xrightleftharpoons[\text{遍历性}]{\text{平稳性}} \overline{\xi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t) dt$$



上一节内容回顾

相关函数

➤ 随机过程**相关函数**的定义

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \overline{\xi(t) \cdot \xi(t + \tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1 \xi_2 \cdot W(\xi_1, \xi_2, \tau) d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t + \tau) \xi(t) dt \end{aligned}$$

➤ 自相关函数的三个性质

$$R(0) = \sigma_{\xi}^2 \quad R(\infty) = 0 \quad R(\tau) = R(-\tau)$$

➤ 相关函数的计算方法

$$R(n) = \frac{1}{M-n} \sum_{l=1}^{M-n-1} x(l)x(l+n)$$



上一节内容回顾

谱密度

➤ 谱密度函数的定义

$$\Phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(2\pi f) df$$

➤ 谱密度函数与相关函数之间的关系（注意量纲问题）

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad \Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

➤ 谱密度的两种计算方法（直接法和相关函数法）



学习目标

本节课需要掌握的内容

- 掌握噪声作用下系统性能的评价指标，均方误差和等效噪声带宽的概念，以及相关的分析方法和结论；
- 掌握抑制噪声对系统性能影响的方法；



3.2 噪声和它引起的误差

3.2.1 正态随机变量和正态随机向量

3.2.2 随机过程及相关函数

3.2.3 谱密度

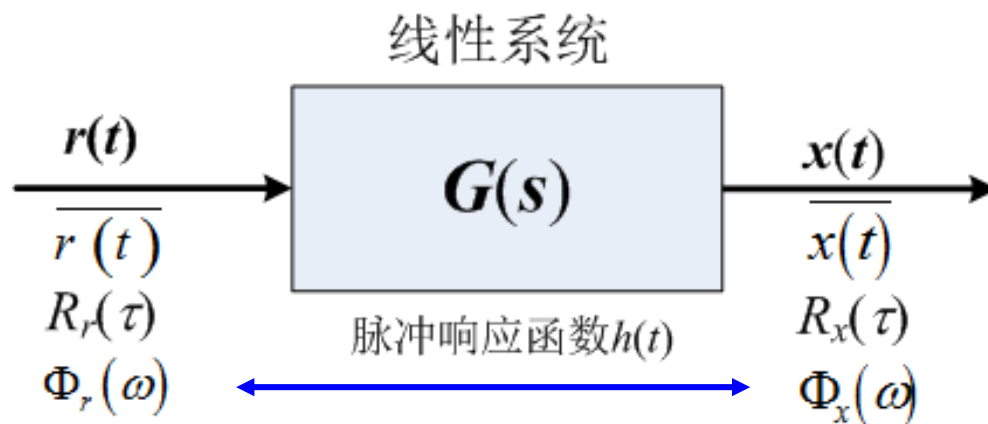
3.2.4 均方误差

3.2.5 系统的等效噪声带宽



3.2.4 均方误差

线性系统对平稳随机过程的响应



$r(t)$ 是一个平稳各态历经的随机过程，且服从高斯分布，
则 $x(t)$ 是一个平稳各态历经的随机过程，也服从高斯分布。



3.2.4 均方误差

线性系统对平稳随机过程的响应

$$\because x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t-\lambda)h(\lambda)d\lambda$$

$$\therefore R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} r(t-\lambda)h(\lambda)d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} r(t+\tau-\eta)h(\eta)d\eta \right] dt$$

$$\xleftrightarrow{\text{交换积分次序}} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [r(t-\lambda)r(t+\tau-\eta)]dt \right) d\eta \right\} d\lambda$$

$$\xleftrightarrow[\text{令 } t' = t - \lambda]{R_r(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [r(t+\tau)r(t)]dt} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} R_r(\tau + \lambda - \eta)h(\eta)d\eta \right] d\lambda$$





3.2.4 均方误差

线性系统对平稳随机过程的响应

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} R_r(\tau + \lambda - \eta) h(\eta) d\eta \right] d\lambda$$

利用上述公式来推导输入输出信号谱密度函数的关系

$$\Phi_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) e^{j\omega\eta} d\eta \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_r(\tau + \lambda - \eta) e^{j\omega(\tau + \lambda - \eta)} d\tau \right]$$

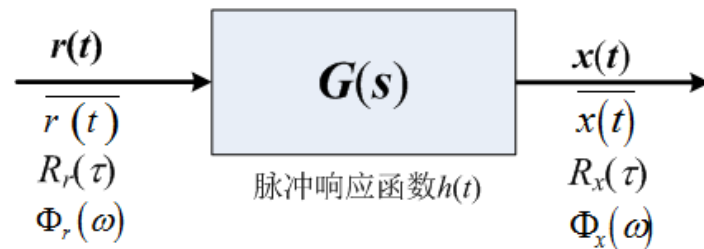
$$= G(j\omega) G(-j\omega) \Phi_r(\omega)$$

$$= |G(j\omega)|^2 \Phi_r(\omega)$$

功率谱密度的传递关系

$$\Phi_x(\omega) = |G(j\omega)|^2 \cdot \Phi_r(\omega)$$

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda$$



信号的传递关系

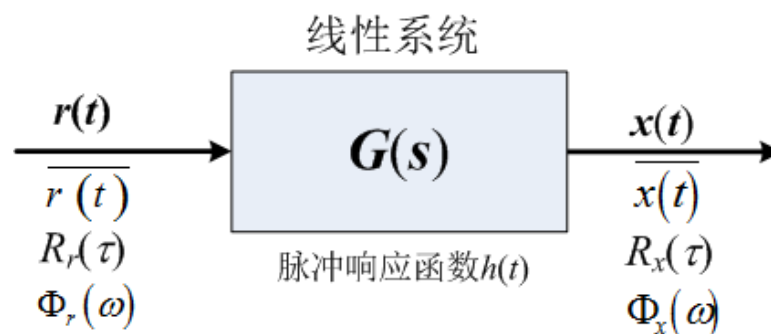
$$x(j\omega) = G(j\omega) \cdot r(j\omega)$$



3.2.4 均方误差

线性系统对平稳随机过程的响应

$$\Phi_x(\omega) = |G(j\omega)|^2 \cdot \Phi_r(\omega)$$



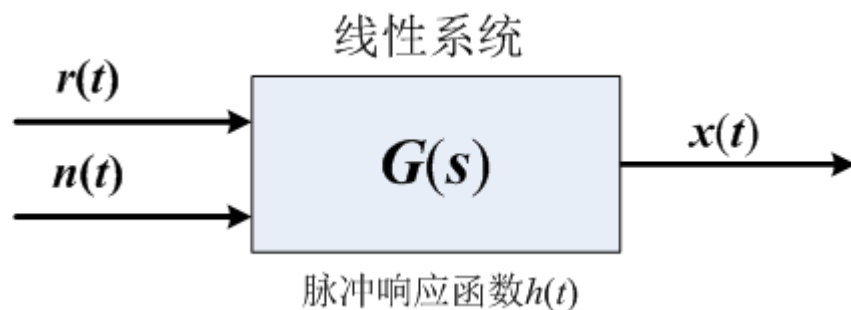
对一线性系统而言，输入功率谱密度 $\Phi_r(\omega)$ 通过 $|G(j\omega)|^2$ 传递到输出，所以有时把 $|G(j\omega)|^2$ 称为**功率传递函数**。



3.2.4 均方误差

线性系统对平稳随机过程的响应

若系统的两个输入（或干扰）独立不相关：



信号的
传递关系

$$x(j\omega) = G_r(j\omega) \cdot r(j\omega) + G_n(j\omega) \cdot n(j\omega)$$

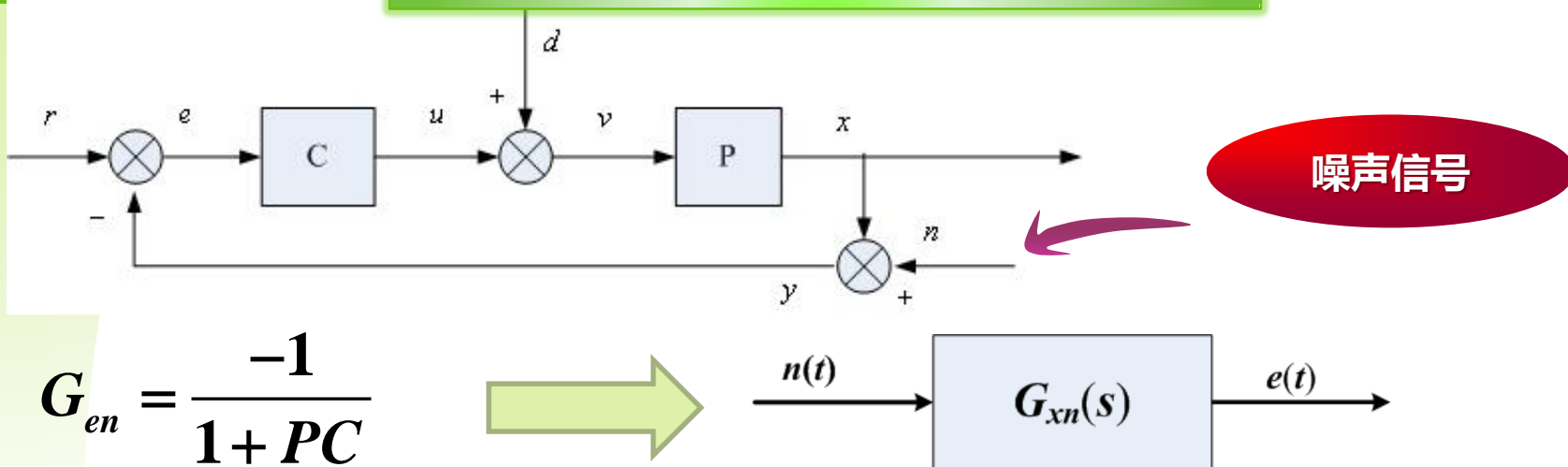
功率谱密度
的传递关系

$$\Phi_x(\omega) = |G_r(j\omega)|^2 \cdot \Phi_r(\omega) + |G_n(j\omega)|^2 \cdot \Phi_n(\omega)$$



3.2.4 均方误差

均方误差



噪声作用下，系统的误差也是一个随机信号，就要采用**均方误差**对系统进行评价

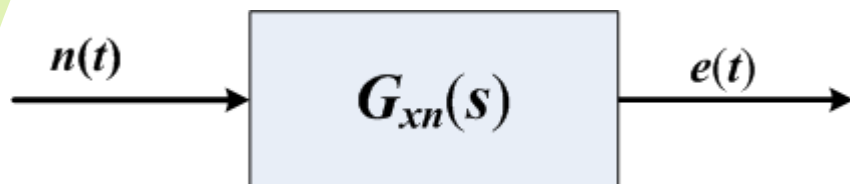
$$\overline{\varepsilon^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varepsilon^2(t) dt$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varepsilon(t) \varepsilon(t-0) dt = \mathbf{R}_{\varepsilon}(\mathbf{0}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\varepsilon}(\omega) d\omega$$



3.2.4 均方误差

均方误差



$$G_{en} = \frac{-PC}{1 + PC}$$

误差信号的谱密度 $\Phi_e(\omega)$ 表示为

$$\Phi_e(\omega) = |G_{en}(j\omega)|^2 \Phi_n(\omega)$$

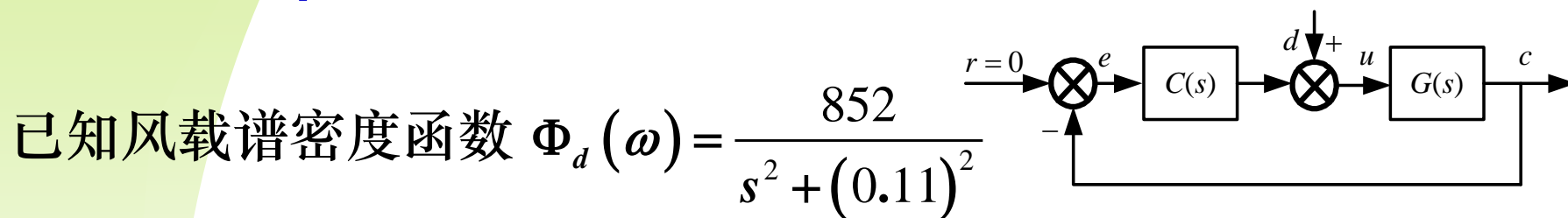
则均方误差 $\overline{\varepsilon^2}$ 表示为

$$\overline{\varepsilon^2} = R_e(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_e(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_{en}(j\omega)|^2 \Phi_n(\omega) d\omega$$



3.2.4 均方误差

例1: (p73 例4-4) 试计算天线风载引起的误差



控制器 $C(s)$, $C(j\omega) = K_1 = 1.38 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m/rad}$

$$\overline{\varepsilon^2} = R_e(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_{ed}(j\omega)|^2 \Phi_d(\omega) d\omega$$

$$G_{ed}(s) = \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

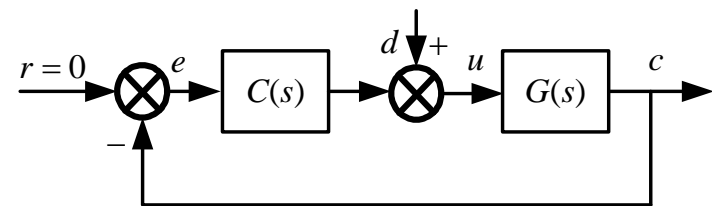
当 $C(s)G(s) \gg 1$ 时, $G_{ed}(s) = \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)} \approx \frac{1}{C(s)} = \frac{1}{K_1}$



3.2.4 均方误差

例1: (p73 例4-4) 试计算天线风载引起的误差

已知风载谱密度函数 $\Phi_d(\omega) = \frac{852}{s^2 + (0.11)^2}$



$$\int \frac{1}{x^2 + \alpha^2} dx = \frac{\arctan \frac{x}{\alpha}}{\alpha} + C$$

$$\overline{\varepsilon^2} = R_e(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_{ed}(j\omega)|^2 \Phi_d(\omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{852}{1.38^2 \times 10^{10}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + (0.11)^2} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{852}{1.38^2 \times 10^{10}} \cdot \frac{\pi}{0.11} = 2.0336 \times 10^{-7}$$



$$\varepsilon = 4.51 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

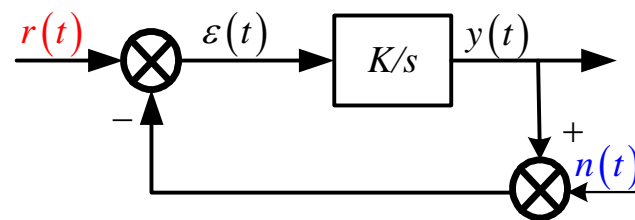


3.2.4 均方误差

◆ 例2: (p74 例4-5)试求使均方误差最小的系统增益。

已知输入信号的谱密度 $\Phi_r(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{4}{\omega^2 + 4}$

噪声信号的谱密度 $\Phi_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{8}{\omega^2 + 16}$



假设输入信号和噪声不相关，则

$$y = G_r(s) \cdot r + G_n(s) \cdot n = \frac{G}{1+G} \cdot r + \frac{-G}{1+G} \cdot n$$

$$\varepsilon = r - y = r - \frac{G}{1+G} \cdot r + \frac{G}{1+G} \cdot n = \frac{1}{1+G} \cdot r + \frac{G}{1+G} \cdot n$$

注: $n(t)$ 为噪声量，它所对应的输出皆为误差量。



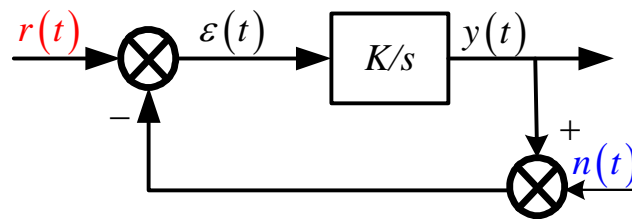
3.2.4 均方误差

◆ 例2: (p74 例4-5)试求使均方误差最小的系统增益。

已知输入信号的谱密度 $\Phi_r(\omega) = \frac{4}{\omega^2 + 4}$

噪声信号的谱密度 $\Phi_n(\omega) = \frac{8}{\omega^2 + 16}$

假设输入信号和噪声不相关，则



$$\varepsilon = \frac{1}{1+G} \cdot r + \frac{G}{1+G} \cdot n$$

$$\Phi_\varepsilon(\omega) = |G_{\varepsilon r}(j\omega)|^2 \cdot \Phi_r(\omega) + |G_{\varepsilon n}(j\omega)|^2 \cdot \Phi_n(\omega)$$

$$G_{\varepsilon r}(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{j\omega}{j\omega + K}$$

$$G_{\varepsilon n}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{j\omega + K}$$



3.2.4 均方误差

◆ 例2: (p74 例4-5)试求使均方误差最小的系统增益。

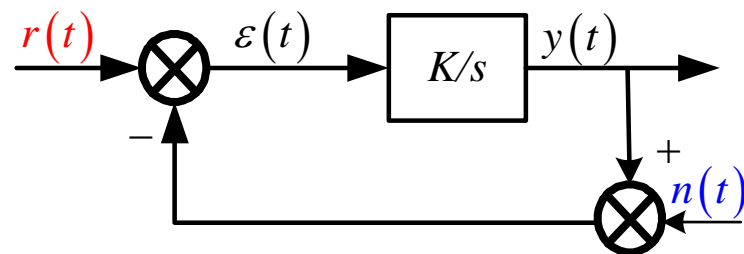
$$\overline{\varepsilon^2} = R_{\varepsilon}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\varepsilon}(\omega) d\omega$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\varepsilon}(\omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[|\Phi_{\varepsilon}(j\omega)|^2 \cdot \Phi_r(\omega) + |\Phi_n(j\omega)|^2 \cdot \Phi_n(\omega) \right] d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{j\omega}{j\omega + K} \cdot \frac{2}{j\omega + 2} \right|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{K}{j\omega + K} \cdot \frac{\sqrt{8}}{j\omega + 4} \right|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{j\omega}{j\omega + K} \right|^2 \cdot \frac{4}{\omega^2 + 4} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{K}{j\omega + K} \right|^2 \cdot \frac{8}{\omega^2 + 16} d\omega$$





3.2.4 均方误差

◆ 例2: (p74 例4-5)试求使均方误差最小的系统增益。

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{j\omega}{j\omega + K} \cdot \frac{2}{j\omega + 2} \right|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{K}{j\omega + K} \cdot \frac{\sqrt{8}}{j\omega + 4} \right|^2 d\omega$$

令: $s = j\omega$ 代入, 有

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{j}{2\pi} \left[\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{2s}{s^2 + 2Ks + 2K} \right|^2 ds + \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{\sqrt{8}K}{s^2 + (4 + K)s + 4K} \right|^2 ds \right]$$

查积分表得:
$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{2}{2 + K} + \frac{K}{4 + K}$$

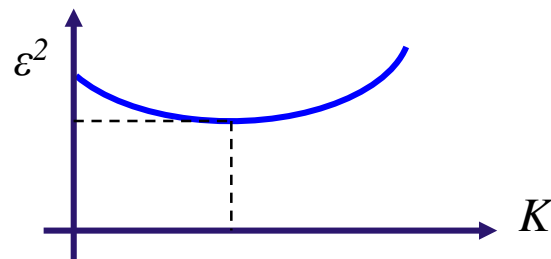
增大 K , 会减小输入 r 引入的均方误差, 但会增加噪声 n 引起的均方误差, 因此必须折中处理, 得到使综合均方误差最小的 K 值。



3.2.4 均方误差

◆ 例2: (p74 例4-5)试求使均方误差最小的系统增益。

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{2}{2+K} + \frac{K}{4+K}$$



$$\text{令 } \frac{d\bar{\varepsilon}^2}{dK} = 0, \quad \text{当 } K = \sqrt{8} \text{ 时, } \bar{\varepsilon}_{\min}^2 = 0.414 + 0.414 = 0.828$$

这个例子充分说明：在考虑指令和噪声等具有**不同特性的输入信号作用**时，控制系统设计中存在着**矛盾**，必须**折中**处理。



3.2 噪声和它引起的误差

3.2.1 正态随机变量和正态随机向量

3.2.2 随机过程及相关函数

3.2.3 谱密度

3.2.4 均方误差

3.2.5 系统的等效噪声带宽

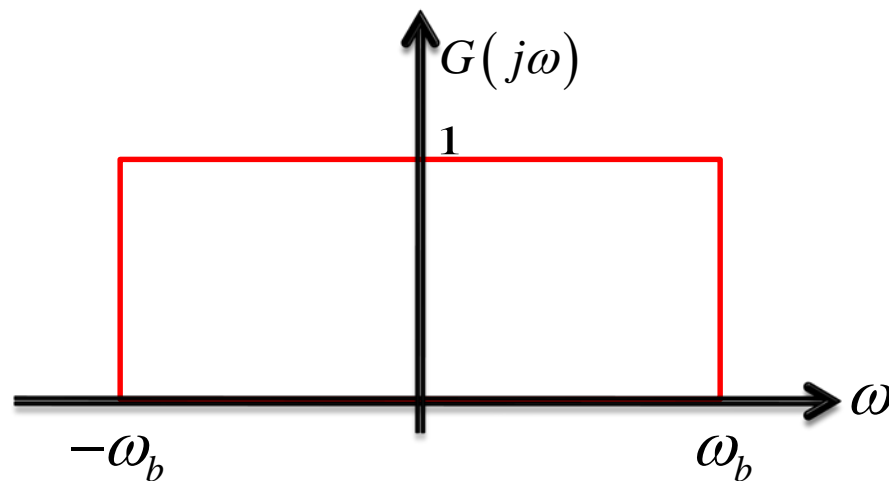


3.2.5 系统的等效噪声带宽

等效噪声带宽定义

- ❖ 系统的等效噪声带宽是指与其相当的一理想滤波器的带宽，在白噪声作用下，系统的均方输出与理想滤波器的均方输出相等。这里的理想滤波器特指其频率特性等于1，而带宽在 ω_b 外则完全截止。

$$\Phi_x(\omega) = |G(j\omega)|^2 \cdot \Phi_r(\omega)$$





3.2.5 系统的等效噪声带宽

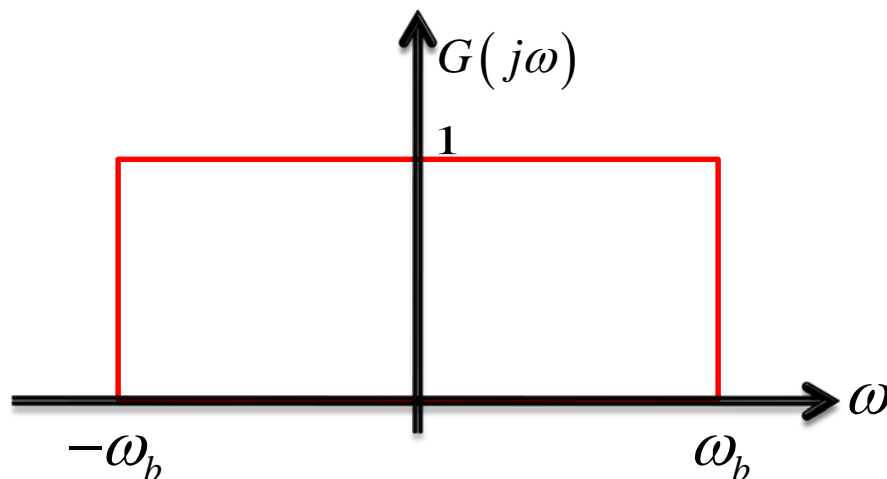
等效噪声带宽定义

❖ 设一白噪声，其谱密度在 ω_N 内为常值 K_N^2 ， $\omega_N \gg \omega_b$ ，则此噪声作用下，理想滤波器的均方输出为

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_N(\omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} K_N^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi} K_N^2 \omega_b$$



系统的均方输出与理想滤波器的带宽 ω_b 有关

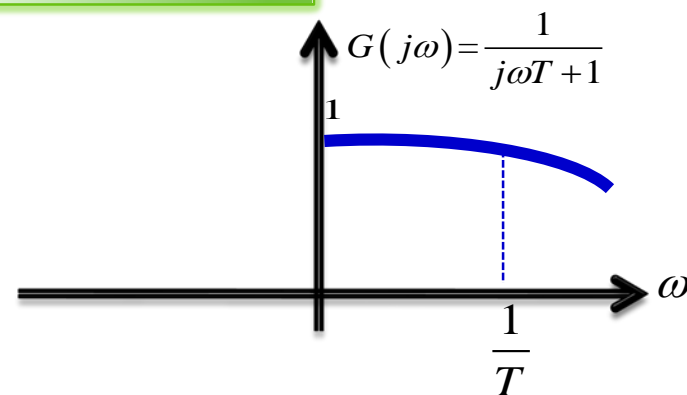


3.2.5 系统的等效噪声带宽

一阶系统的等效噪声带宽

❖ 考察白噪声通过一阶系统，

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$



此时，系统输出信号的均方误差为

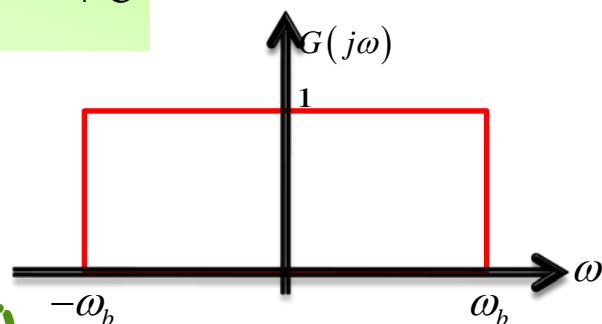
$$\overline{x^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} |G(j\omega)|^2 \Phi_N(\omega) d\omega = \frac{K_N^2}{2\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} d\omega$$

$$\overline{x^2} = \frac{K_N^2}{T\pi} \arctan(\omega_N T)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + \alpha^2} dx = \frac{\arctan \frac{x}{\alpha}}{\alpha} + C$$

当 $\omega_N T \gg 10$ 时，

$$\overline{x^2} = \frac{K_N^2}{T\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = K_N^2 \frac{1}{2T}$$





3.2.5 系统的等效噪声带宽

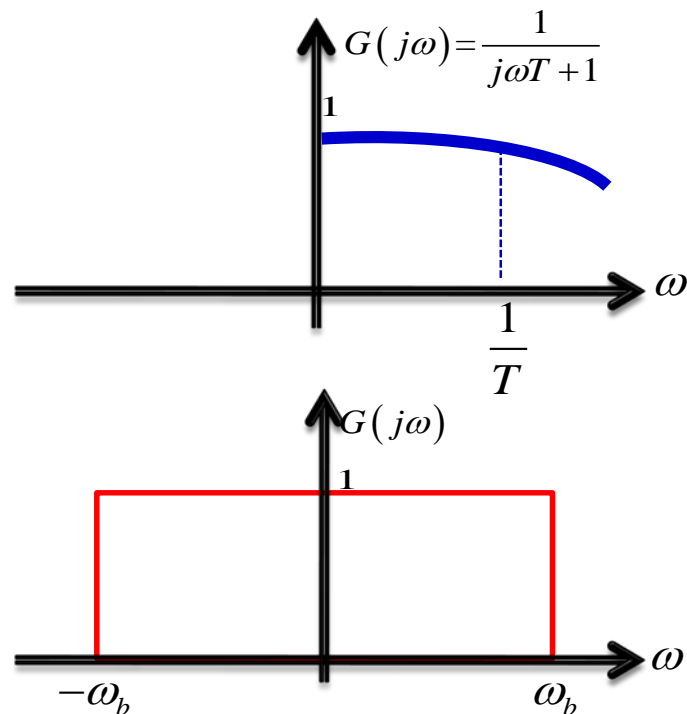
一阶系统的等效噪声带宽

❖ 一阶系统输出信号的均方误差为

$$\overline{x^2} = K_N^2 \frac{1}{2T}$$

理想滤波器输出信号的均方误差为

$$\overline{x^2} = K_N^2 \omega_b \quad \omega_b = \frac{1}{2T}$$



一阶系统等效噪声的带宽等于其本身带宽 $1/T$ 的 $1/2$ 倍，用同样的方法我们也可以计算二阶系统的等效噪声带宽。

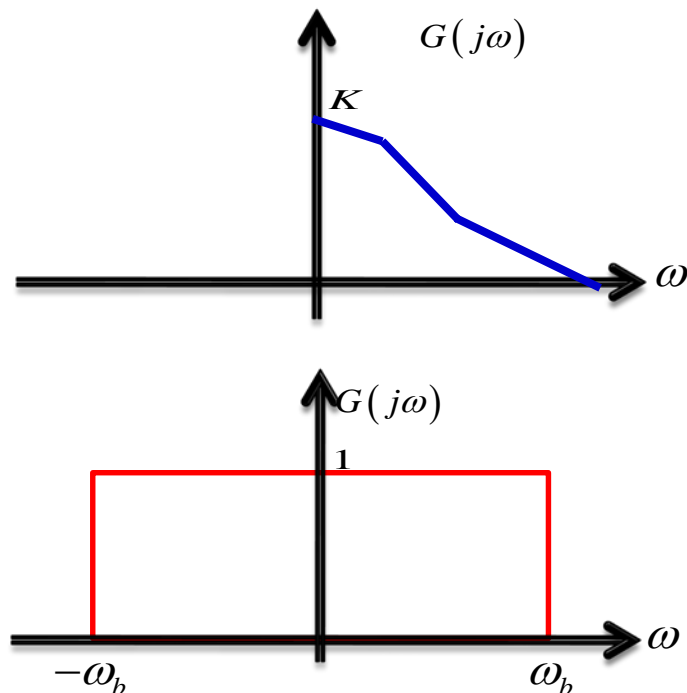


3.2.5 系统的等效噪声带宽

一阶系统的等效噪声带宽

❖ 一般系统的等效噪声带宽

$$\begin{aligned}\overline{x^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega) d\omega \\ &= 2K_N^2 \pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega \\ &= K_N^2 (I)\end{aligned}$$

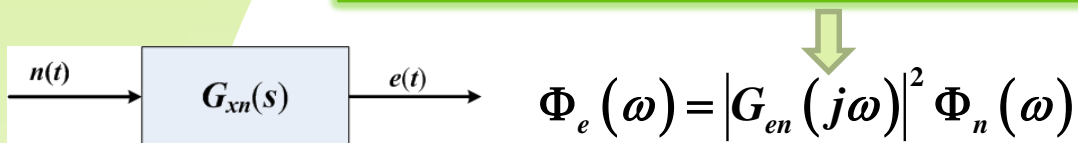


结论： I 由系统的传递函数确定，被控对象给定的情况下由**控制器的结构和参数**所确定。为了抑制噪声，可以通过调整控制器的结构和参数，使系统的等效噪声带宽尽可能小。



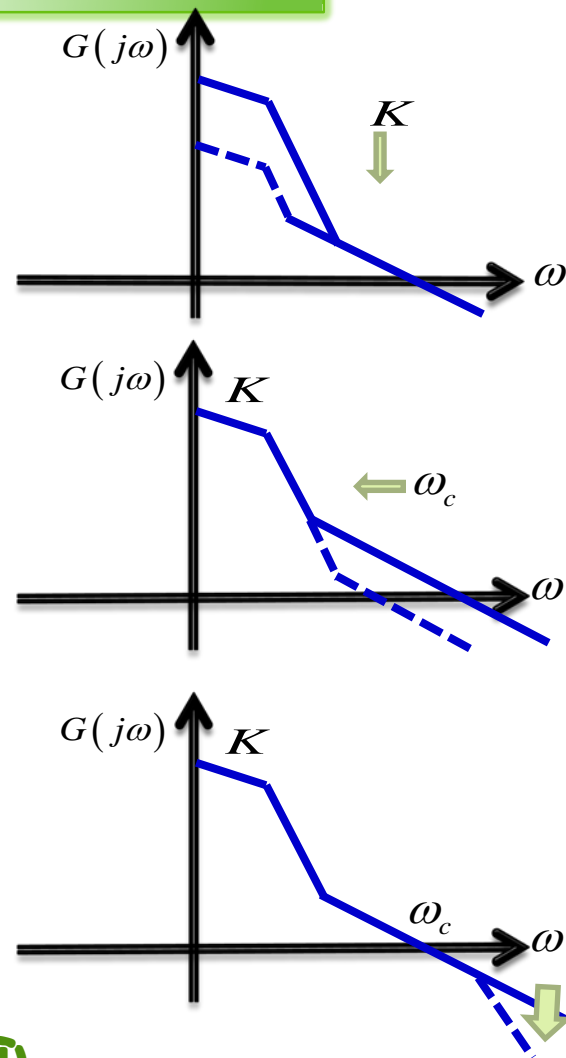
噪声抑制方法总结

减小噪声影响的方法（控制角度）



- 1 降低系统的增益
- 2 降低系统的穿越频率
- 3 降低系统的高频增益（惯性环节）

这些方法都与提升系统**指令跟踪**能力是矛盾的，我们能做的是保证指令跟踪性能的前提下，尽量采用上述方法将低噪声对系统的影响

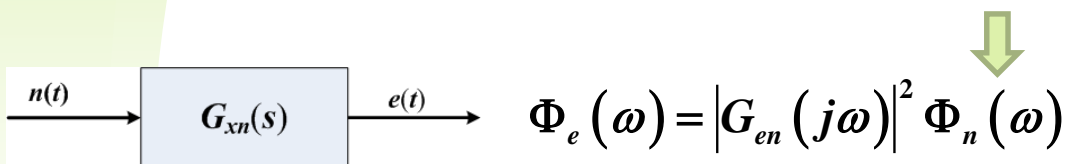




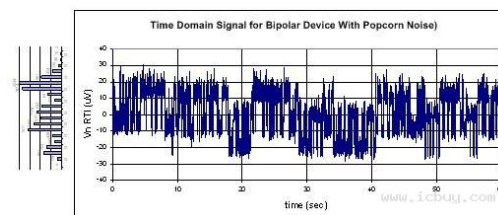
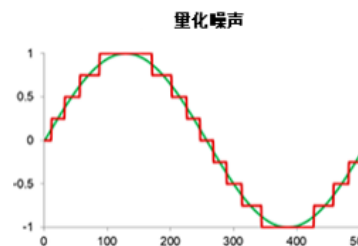
噪声抑制方法总结

减小噪声影响的方法（其他方面）

控制理论不是万能的，如果要降低噪声对系统的影响，还得根据噪声的来源想办法解决。



- 信号采集过程中引入噪声
- 信号传输过程引入的噪声
- 信号处理过程引入的噪声



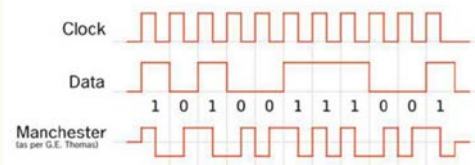


噪声抑制方法总结

减小噪声影响的方法（其他方面）

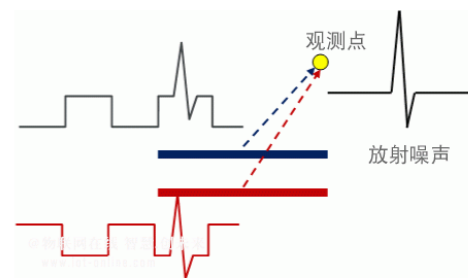
➤ 信号采集过程中引入噪声

用信噪比高、质量好的传感器，尽量用数字式传感器，分辨率要高。用测其他量的传感器结合运算间接；用多传感器融合（平均）。



➤ 信号传输过程引入的噪声

电流比电压传输好，差动比单端好，相位比幅值好，用数字比模拟好，串行比并行好，所以尽量用串行差动数字信号传输。用高质量的电缆，同时采用双绞、屏蔽和接地措施，用可靠性高的通信协议。



➤ 信号处理过程引入的噪声

用高位数AD，DA转换器，用性能高的处理器，采用高精度浮点数进行信号的存储、分析和运算操作，减小截断误差和计算舍入误差带来的噪声。





噪声抑制方法总结

减小噪声影响的方法（其他方面）

➤ 电路板设计要规范

走线方式要合理，数字模拟电路分开，强弱电分开，多用电容进行滤波，铺地和电源有讲究，应用光电隔离器件，使用高质量的电源和电源芯片。

➤ 观测器

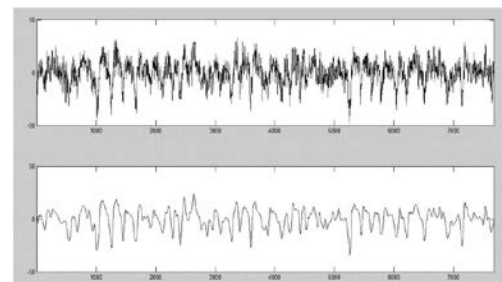
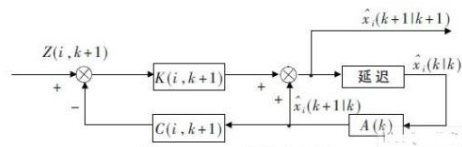
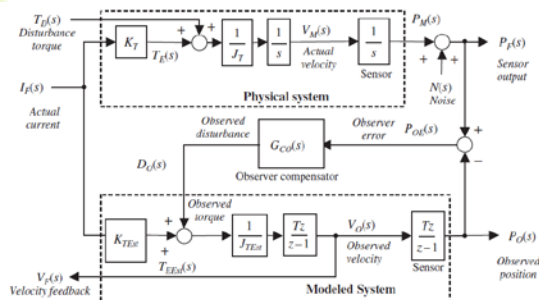
利用模型信息及系统的输入输出来**观测**系统的状态

➤ 卡尔曼滤波

利用模型信息及系统的输入输出来**估计**系统的状态

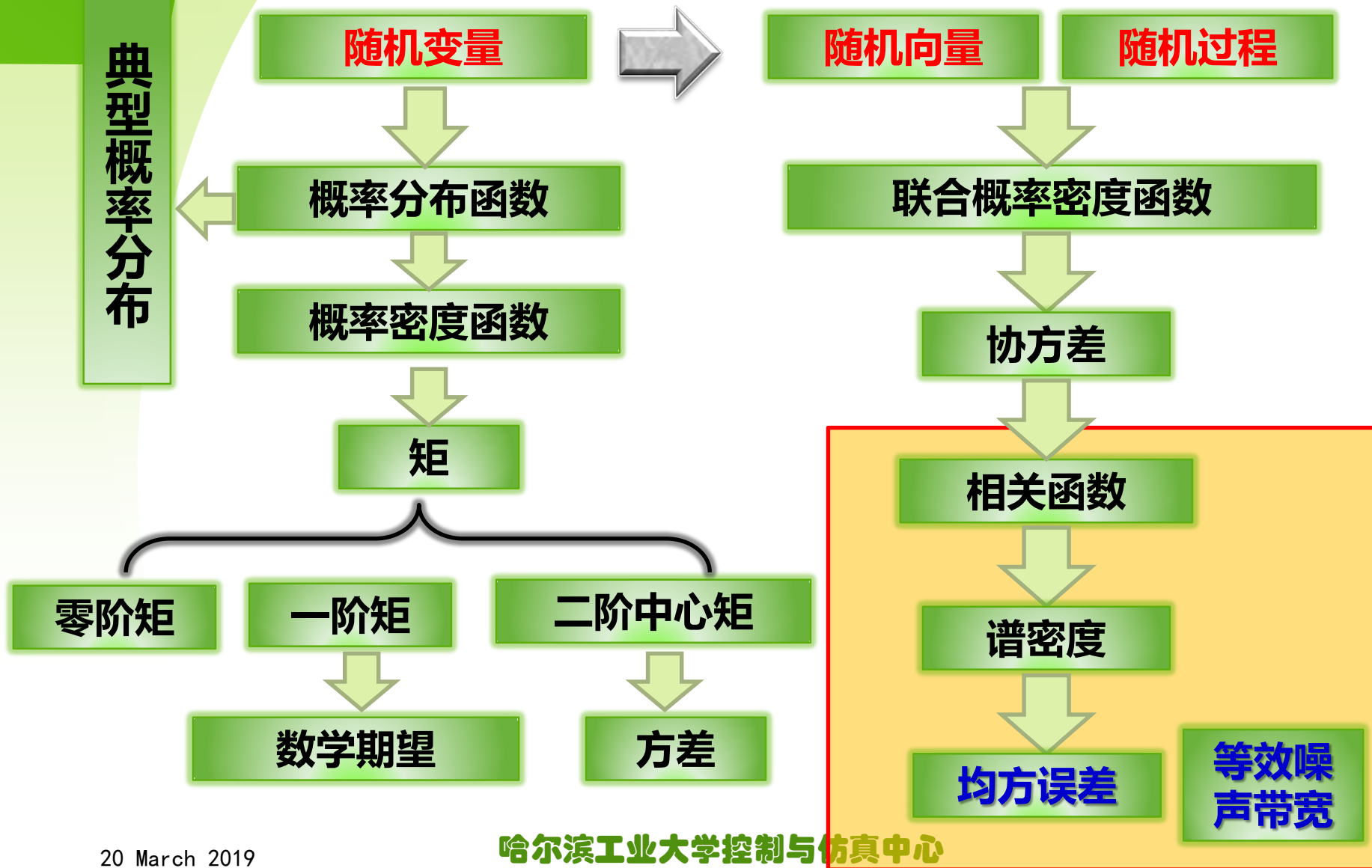
➤ 数字信号处理（软硬件滤波）

对野值和丢包的处理（外推），对固定频率噪声的处理用带阻滤波（如工频和特定频段信号处理）





总结





Thank You !

授课教师：马 杰（控制与仿真中心）

罗 晶（控制科学与工程系）

马克茂（控制与仿真中心）

陈松林（控制与仿真中心）