第1章 控制系统的输入条件分析

——2019年春季学期

授课教师：马 杰 （控制与仿真中心）

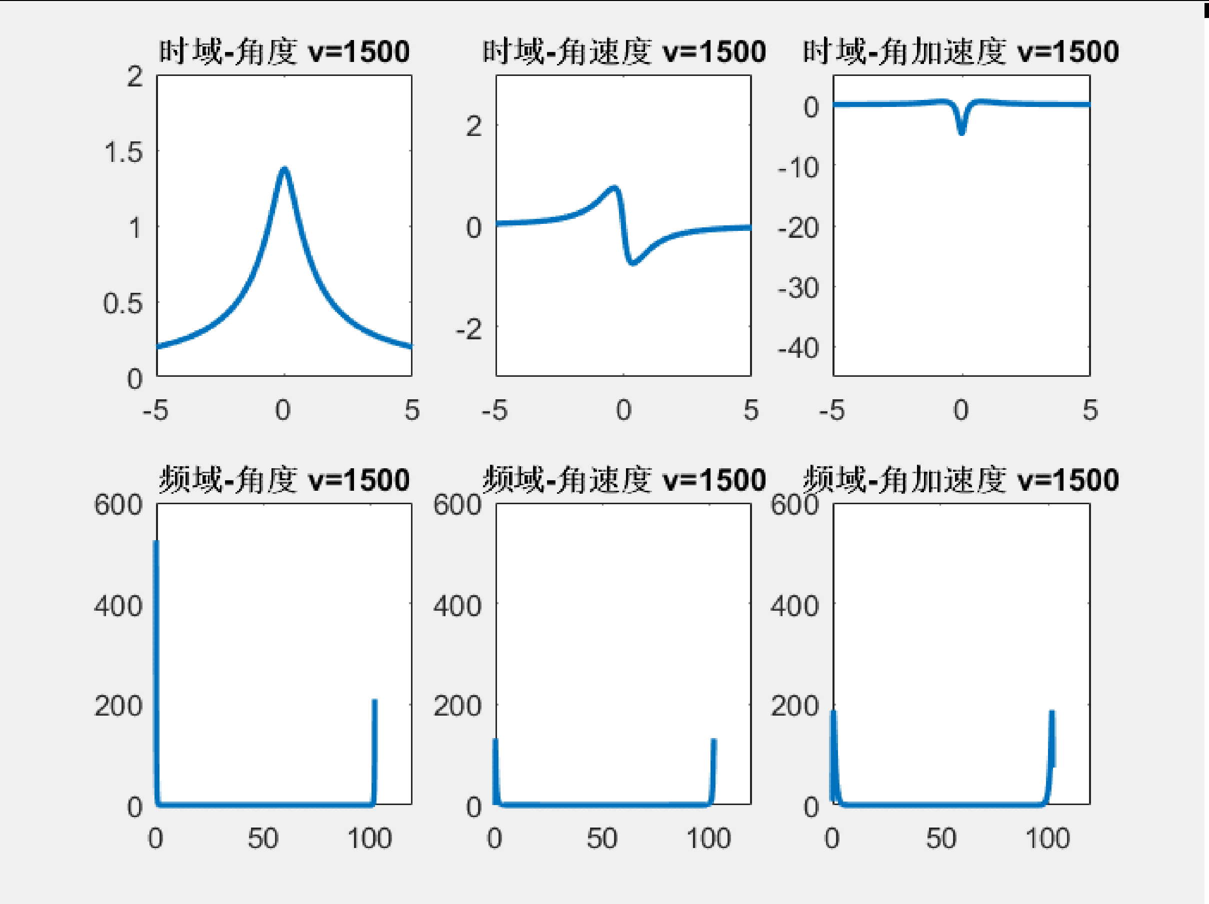
罗 晶 （控制科学与工程系）

马克茂（控制与仿真中心）

陈松林（控制与仿真中心）

哈尔滨工业大学控制与仿真中心

可视化技术在作业中的应用



动画演示工况变化对典型输入信号特性变化的影响——学以致用的好例子

自选实验立项答辩要求

提交纸质报告一份，并做PPT讲解5分钟，答辩10分钟。若两人一组，要求两个人都能回答老师的提问，老师会根据情况随机选择回答问题的学生。

报告和答辩内容：

1 给出控制系统具体的功能和指标要求，必须包含具体的量化指标，例如精度和速度等。另外还要明确控制系统的工况，例如负载大小和有无外扰等。

2 给出控制系统的具体设计和实现方案，例如系统如何搭建、元部件如何选型，采用何种控制方法等

3 指出控制系统的设计难点及应对解决措施

4 给出大作业实施的详细计划安排（具体的时间节点）

上一节内容回顾

傅里叶变换的相关概念

1.任何满足狄里特利条件的**周期信号**都可以由频率 f 整数倍的正余弦信号的加权和表示；

2.傅里叶**级数**（描述周期信号）和傅里叶**积分**（非周期信号）之间的关系，傅里叶变换**FT**和傅里叶反变换**IFT;**

3.考虑到实际信号多是非周期，有限长度，离散的，数值的，所以通过对信号进行周期延拓，采样和截断等处理，得到了 **DFT**变换表达式；

$$\begin{cases} F(k)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-jnk2\pi/N}, & (k=0,\cdots,N-1) \\ f(n)=\dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F(k)e^{jnk2\pi/N}, & (n=0,\cdots,N-1) \end{cases}$$

4.利用二进制特点，幂运算周期性，调整运算次序，提出了计算量更小的**FFT**算法。

上一节内容回顾

傅里叶变换在控制系统设计中的用途

1.基于典型的输入信号频谱分析，可以指导元部件选型；

2.基于典型的输入信号频谱分析，可以确定带宽和频响指标、对模型进行简化；

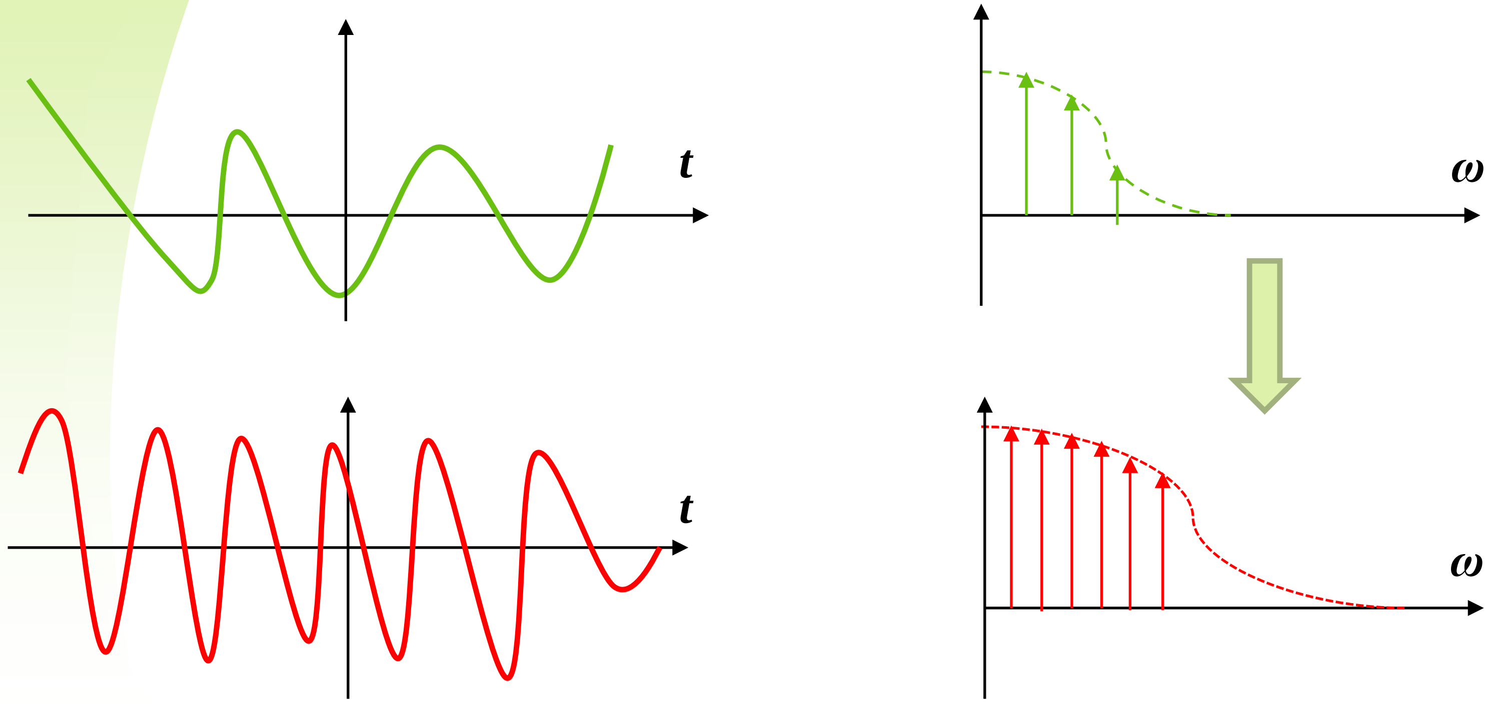
3.输入和输出信号的频谱分析，可以获得系统的频率特性（绘制bode图，辨识参数）；

4.可以用于测试信号的选取，测试系统的频率响应性能；

5.分析信号中各种特殊的频率成分，如谐振，波动力矩等。

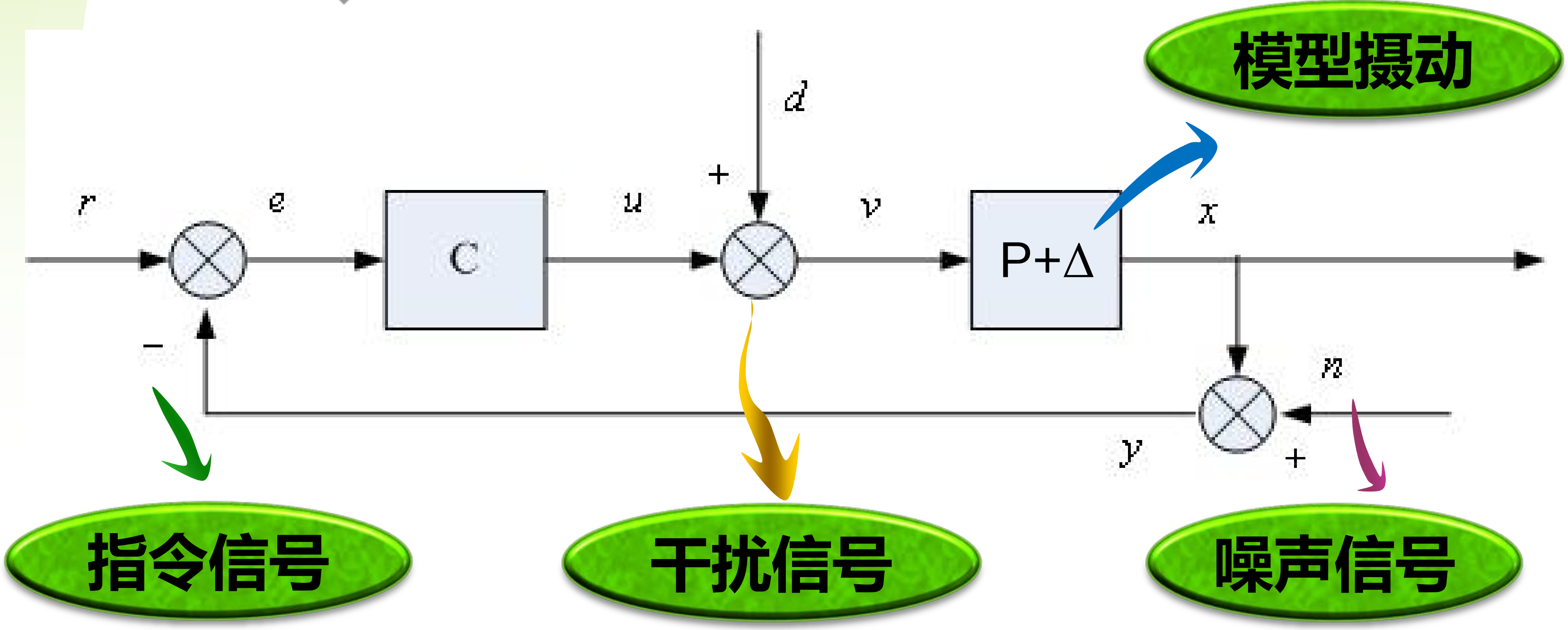
上一节内容回顾

由傅里叶变换引发的对人生的思考



不要简单的重复过去，而要努力改变自己，让人生的频谱更丰富

Contents



1.1.1 输入信号的分析

本节课需要掌握的内容

1 了解误差的分类

2 了解误差的指标形式，理解控制系统指标的重要性

3 掌握误差与偏差，稳态误差与暂态误差，动态误差与静态误差，系统误差与随机误差等概念的区别

4 掌握静态误差系数法及其适用条件

5 理解误差与稳定性之间的矛盾

6 掌握减小误差的常用方法及其使用条件

1.1 输入信号和跟踪误差

1.1.1 输入信号的分析

1.1.2 静态误差系数和动态误差系数

1.1.3 跟踪误差的计算及在控制系统设计中的应用

1.1.1 输入信号的分析

分析流程

系统工作原理分析

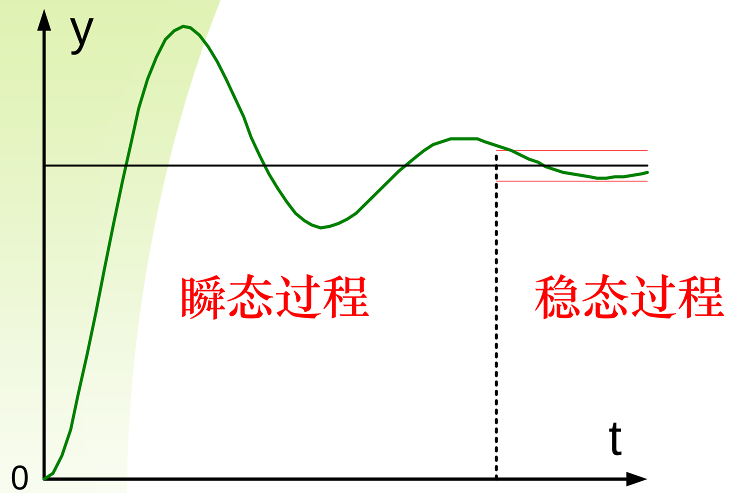
确定典型的输入信号类型

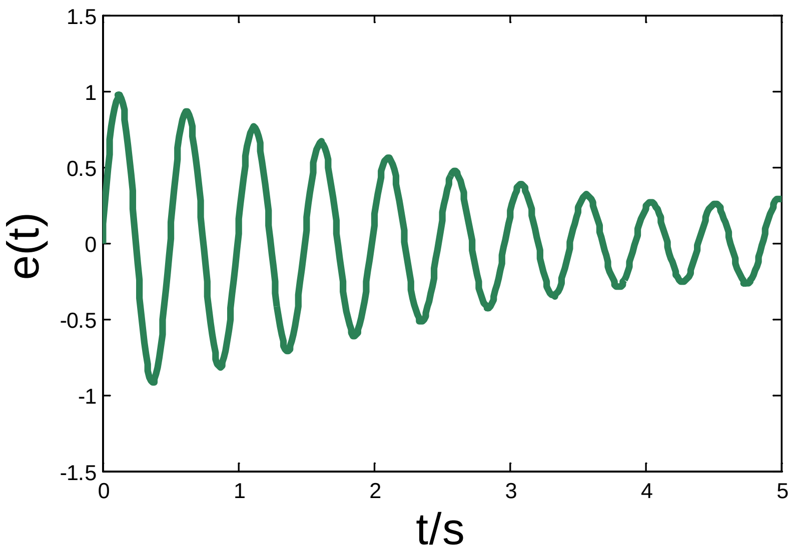
典型输入信号特性分析

输入信号及导数幅值	频谱分析	误差分析
执行元件、测量元件等部件选择依据	元部件选型及带宽设计依据之一	控制器设计依据之一

1.1.2 误差系数

引　言





$t \to \infty ?$

$e(t) = const ?$

暂态（瞬态）误差

稳态误差

静态误差

动态误差

1.1.2 误差系数

引　言

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2},\qquad R(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$y(t)=t-\boxed{\frac{2\zeta}{\omega_n}}+\boxed{\frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_d t+2\beta\right)}$$

$t\to\infty$?

$e(t)=const$?

暂态（瞬态）误差

稳态误差

静态误差

动态误差

引 言

强调静态误差的系统：温控、滚梯、印刷机、离心机

1.1.2 误差系数

引　言

强调动态误差的系统：数控车床，雷达系统，导引头（位标器）

1.1.2 误差系数

引　言

性能指标的提法也是控制理论研究的一个主要内容。它是评价系统的标准，也是控制系统设计的依据。理想的指标函数不仅更好的刻画（反映）设计者关心的系统性能，还可以方便控制系统的设计。

➢跟踪误差性能指标形式

ISE $J=\int_0^{\infty} e^2(t)dt$ （平方误差积分）

ITSE $J=\int_0^{\infty} te^2(t)dt$ （时间乘平方误差的积分）

IAE $J=\int_0^{\infty} |e(t)|\,dt$ （绝对误差积分）

ITAE $J=\int_0^{\infty} t\,|e(t)|\,dt$ （时间乘绝对误差的积分）

1.1.2 误差系数

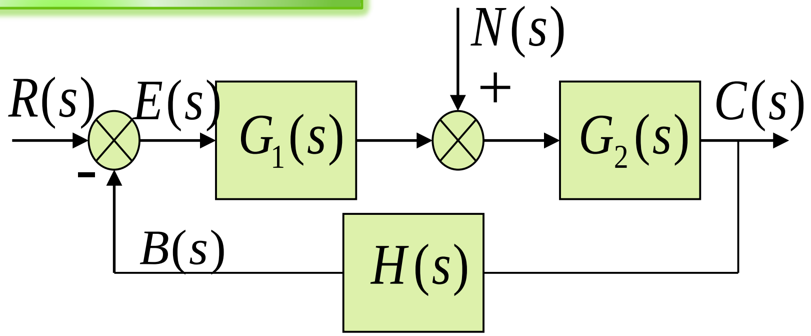
引　言

说　明

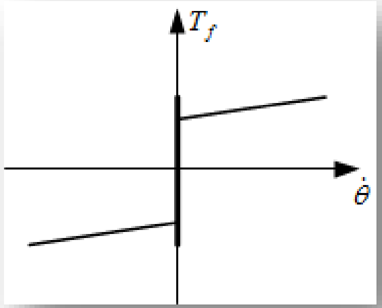
除特殊说明，本节课中所讨论的**静态误差**和**动态误差**均指**稳态误差**。

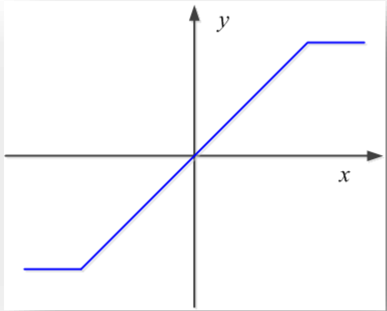
1.1.2 误差系数

稳态误差分类

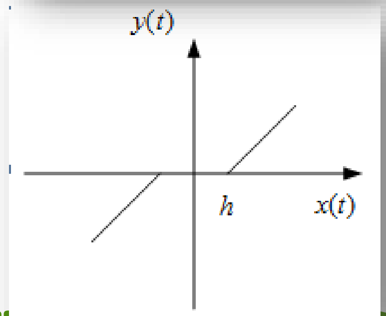


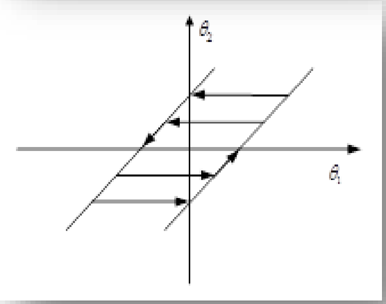
由于系统结构、输入作用形式和类型所产生的稳态误差称为**原理性稳态误差**。





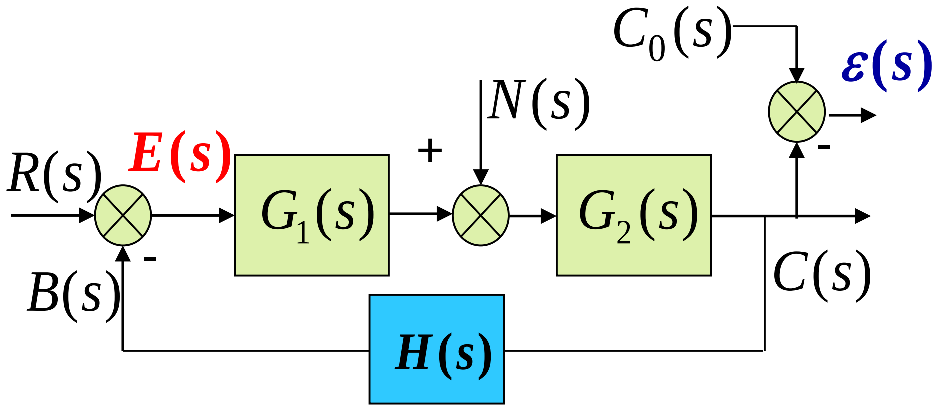
由于非线性因素（摩擦、间隙、死区等）所引起的系统稳态误差称为**附加稳态误差**或**结构性稳态误差**。





1.1.2 误差系数

一、误差及稳态误差的定义



误差：输出量的希望值 $c_0(t)$ 和实际值 $c(t)$ 之差。

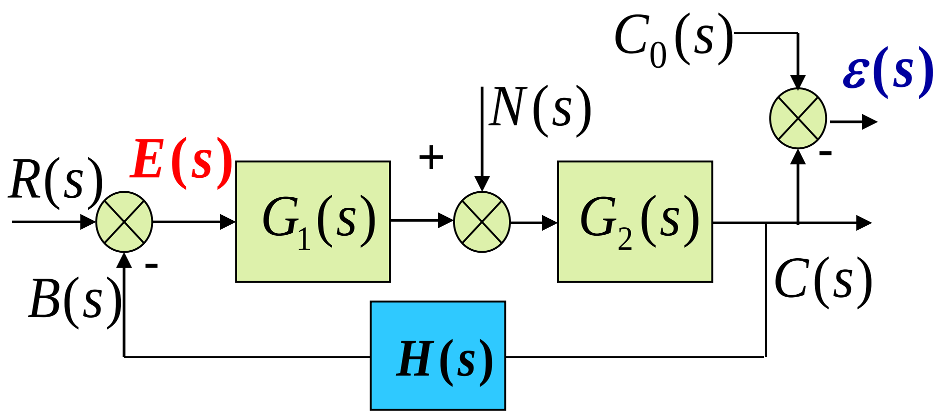
$$\varepsilon(t) = c_0(t) - c(t)$$

偏差：系统的输入 $r(t)$ 和主反馈信号 $b(t)$ 之差。即

$$e(t) = r(t) - b(t)$$

1.1.2 误差系数

一、误差及稳态误差的定义



稳态误差：当$t\to\infty$时的系统误差，用ε_{ss}表示。即

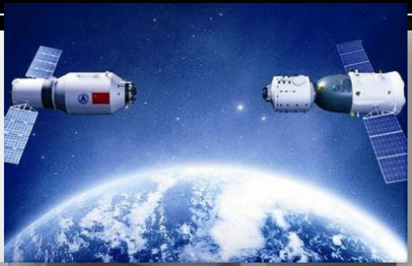
$$\varepsilon_{ss}=\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)$$

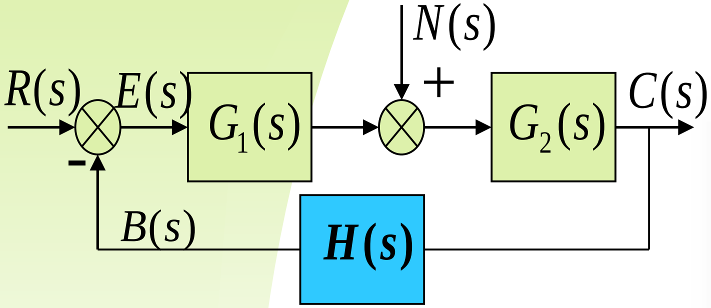
稳态偏差：当t→∞时的系统偏差，用e_{ss}表示。即

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)$$

1.1.2 误差系数

一、误差及稳态误差的定义





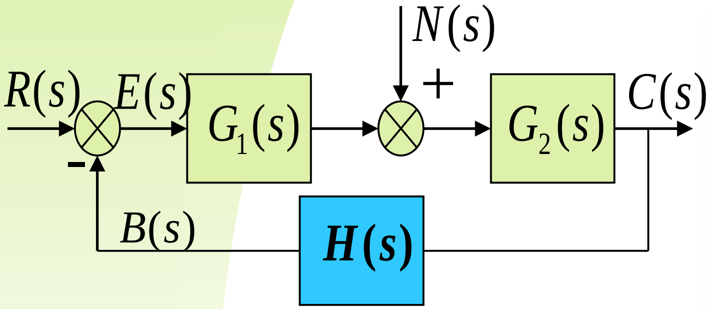
传感器测得的是**角位置**
期望被控量为**线位移**

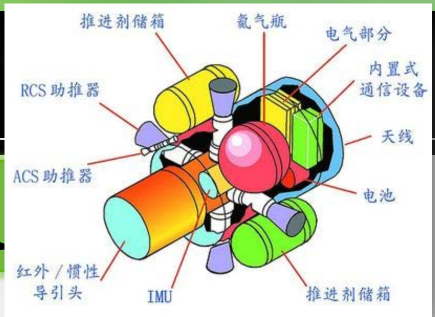
H(s)?

$$H(s)=k\quad(\mathrm{mm}/°)$$

1.1.2 误差系数

一、误差及稳态误差的定义

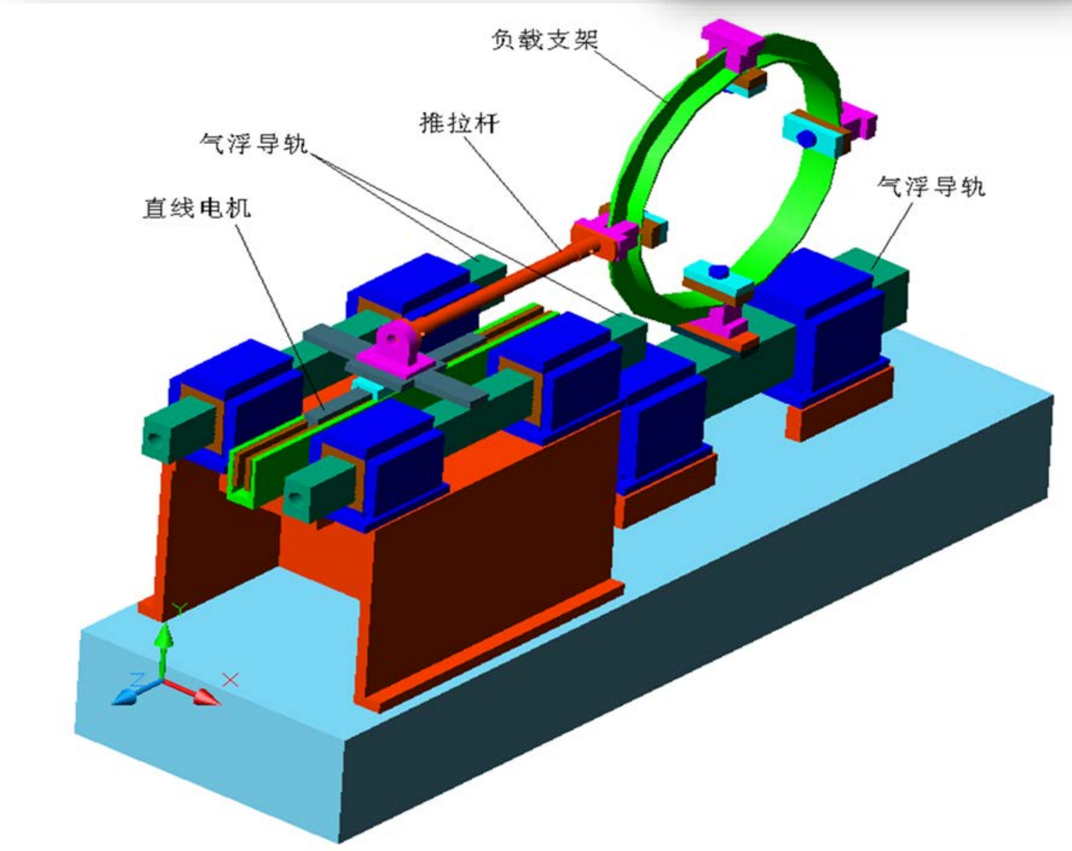




传感器得到的是位移
期望被控量为加速度

***H*(*s*)?**

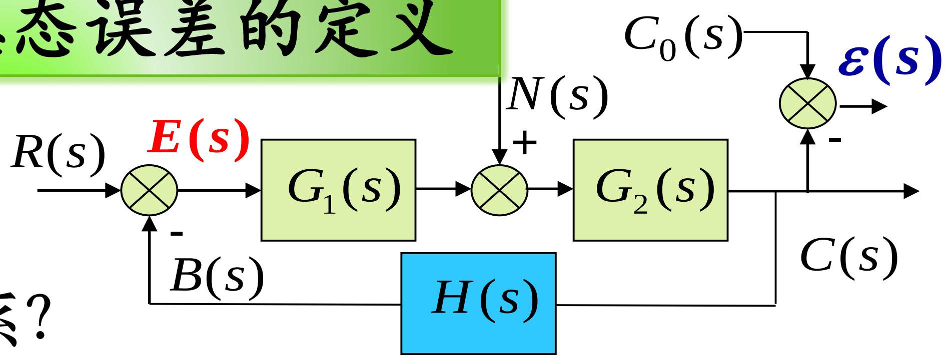
$$H(s)=\frac{1}{s^2}$$



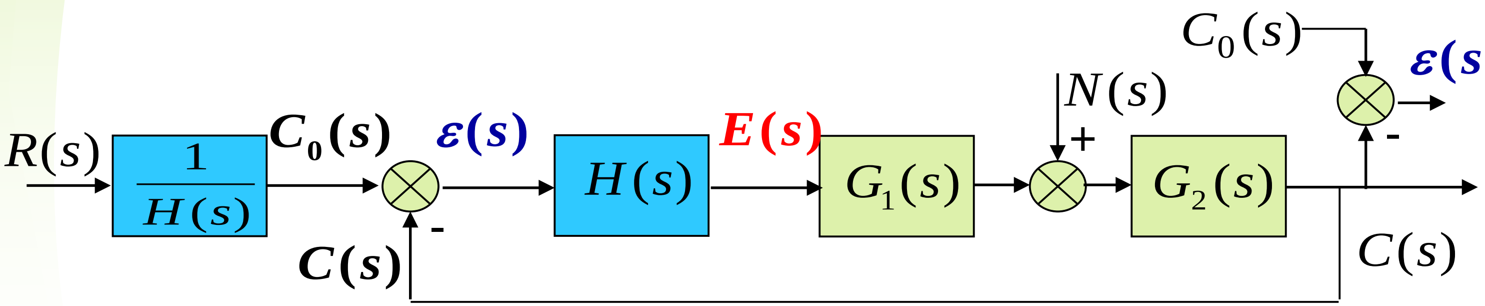
一、误差及稳态误差的定义

对非单位反馈系统

$r(t) \neq c_0(t) \quad \varepsilon(t) \neq e(t)$



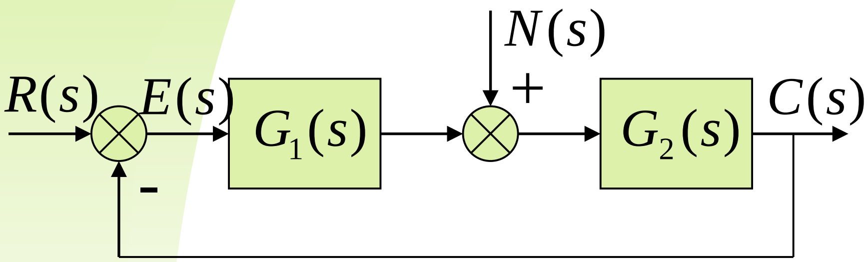
偏差和误差之间存在一定的关系?



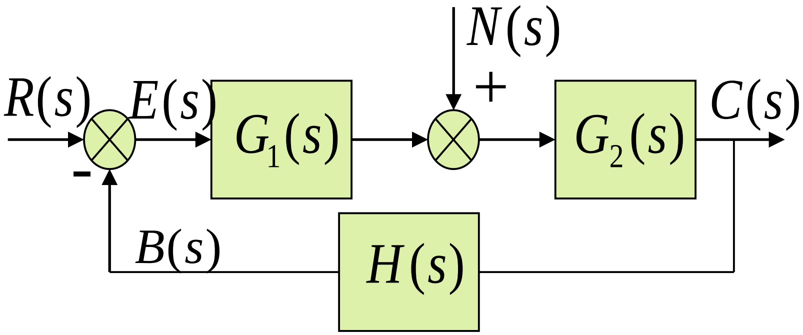
$$E(s) = R(s) - B(s) = H(s)C_0(s) - H(s)C(s) = H(s)\varepsilon(s)$$

1.1.2 误差系数

一、误差及稳态误差的定义



(a)



(b)

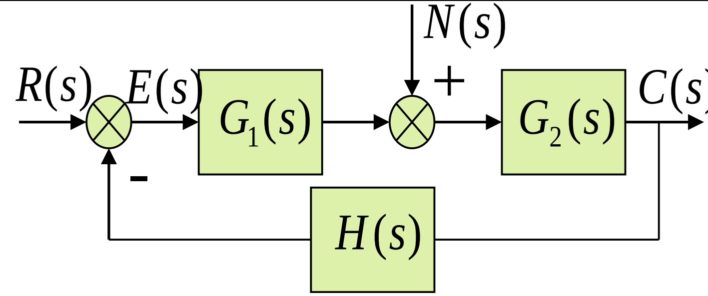
我们用偏差$E(s)$代替误差进行研究。除非特别说明，后文所指的误差就是指偏差；稳态误差就是指稳态偏差。

注意：只有稳定的系统，才可计算稳态误差。

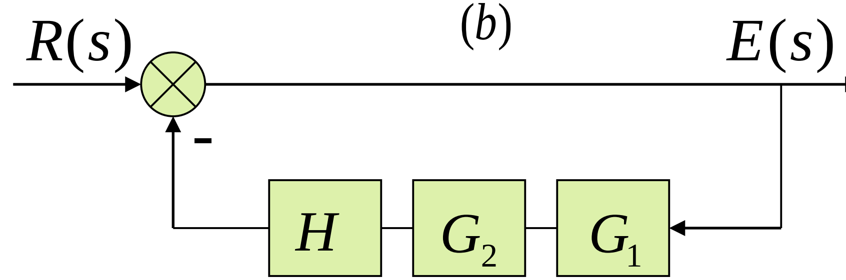
1.1.2 误差系数

一、误差及稳态误差的定义

不考虑扰动的影响。由图(b)，随动系统的误差$E(s)$为（见右图）：



(b)



$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)},$$

$$E(s)=\frac{R(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

当$t\to\infty$ 的误差称为稳态误差 e_{ss}。根据终值定理有：

$$e_{ssr}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to0}sE(s)=\lim_{s\to0}\frac{sR(s)}{1+G_1G_2H}=\lim_{s\to0}\frac{sR(s)}{1+G_k(s)}$$

式中，$G_k(s)=G_1G_2H$ 为开环传递函数。

显然，e_{ssr}与输入和开环传递函数有关。

1.1.2 误差系数

二、静态误差系数

假设开环传递函数$G_k(s)$的形式如下：

$$G_k(s)=\frac{k}{s^\nu}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m_1}(\tau_i s+1)\prod_{k=1}^{m_2}(\tau_k s^2+2\zeta_k\tau_k s+1)}{\prod_{j=1}^{n_1}(T_j s+1)\prod_{l=1}^{n_2}(T_l s^2+2\zeta_l T_l s+1)}=\frac{k}{s^\nu}\cdot G_0(s)$$

式中：k − 开环放大系数，　ν − 积分环节的个数；

$G_0(s)$ − 开环传递函数去掉积分和比例环节剩余部分。

$$G_0(0)=1, m_1+2m_2=m, \nu+n_1+2n_2=n$$

$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+G_k(s)}=\lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+\frac{k}{s^\nu}G_0(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{s^{\nu+1}R(s)}{s^\nu+k}$$

给定作用下的稳态误差与外作用有关；与时间常数形式的开环增益 k 有关；与积分环节的个数有关。

二、静态误差系数--- 单位阶跃信号输入时

❑当输入为 $R(s)=\dfrac{1}{s}$ 时（ $r(t)=1(t)$ ）

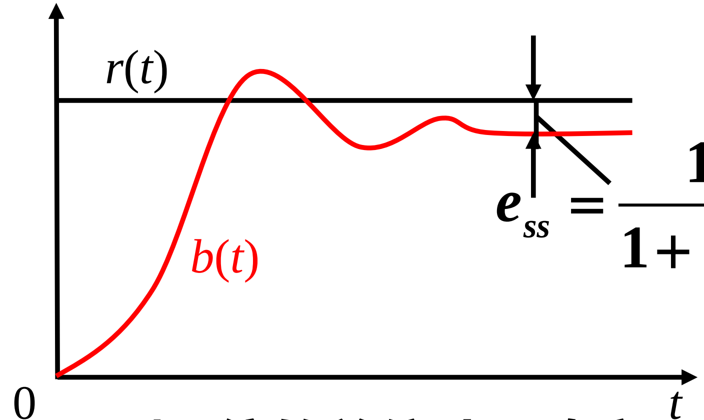
$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G_k(s)}=\frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0}G_k(s)}=\frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{k}{s^{\nu}}\cdot G_0(s)}=\frac{1}{1+K_p}$$

式中：$K_p=\lim\limits_{s\to 0}G_k(s)$ 称为静态位置误差系数；

当 $\nu=0$ 时

$$K_p=\lim_{s\to 0}kG_0(s)=k$$

$$\Rightarrow e_{ssr}=\frac{1}{1+k}$$



0型系统的单位阶跃响应

1.1.2 误差系数

二、静态误差系数--- 单位阶跃信号输入时

□当输入为$R(s)=\dfrac{1}{s}$时（ $\boxed{r(t)=1(t)}$ ）

$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G_k(s)}=\frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0}G_k(s)}=\frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{k}{s^{\nu}}\cdot G_0(s)}=\frac{1}{1+K_p}$$

式中：$K_p=\lim\limits_{s\to 0}G_k(s)$称为静态位置误差系数；

当$\nu\geq 1$时，$K_p=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{k}{s^{\nu}}G_0(s)=\infty$， $\Rightarrow e_{ssr}=0$

K_p的大小反映了系统在阶跃输入下的稳态精度。 K_p 越大，e_{ssr} 越小， K_p反映了系统跟踪阶跃信号输入的能力。

1.1.2 误差系数

二、静态误差系数—— 单位斜坡信号输入时

- 当输入为$R(s)=\dfrac{1}{s^2}$时（$r(t)=t\cdot 1(t)$）

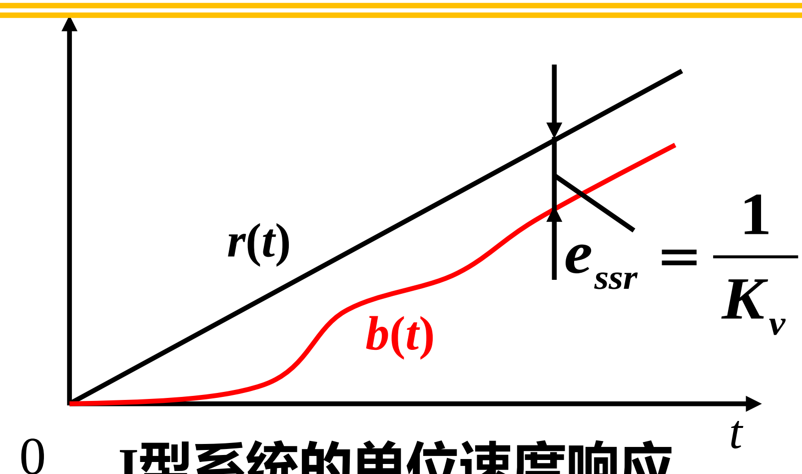
$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G_k(s)}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}s\cdot G_k(s)}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{k}{s^{\nu-1}}\cdot G_0(s)}=\frac{1}{K_v}$$

式中:$K_v=\lim\limits_{s\to 0}s\cdot G_k(s)$称为静态速度误差系数;

当$\nu=1$时，

$$K_v=\lim_{s\to 0}kG_0(s)=k,$$

$$\Rightarrow e_{ssr}=\frac{1}{k}$$



I型系统的单位速度响应

二、静态误差系数--- 单位斜坡信号输入时

- 当输入为$R(s)=\dfrac{1}{s^2}$时（$r(t)=t\cdot 1(t)$）

$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G_k(s)}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}s\cdot G_k(s)}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{k}{s^{\nu-1}}\cdot G_0(s)}=\frac{1}{K_v}$$

式中$:K_v=\lim\limits_{s\to 0}s\cdot G_k(s)$称为静态速度误差系数;

当$\nu=0$时，$K_v=\lim\limits_{s\to 0}skG_0(s)=0,\quad\Rightarrow e_{ssr}=\infty$

当$\nu\ge 2$时，$K_v=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{k}{s^{\nu-1}}G_0(s)=\infty,\quad\Rightarrow e_{ssr}=0$

K_v的大小反映了系统在斜坡输入下的稳态精度。K_v越大，e_{ssr}越小。所以说K_v反映了系统跟踪斜坡信号输入的能力。

1.1.2 误差系数

二、静态误差系数--- 单位加速度信号输入时

- 当输入为$R(s)=\dfrac{1}{s^3}$时（$r(t)=\dfrac{1}{2}t^2\cdot 1(t)$）

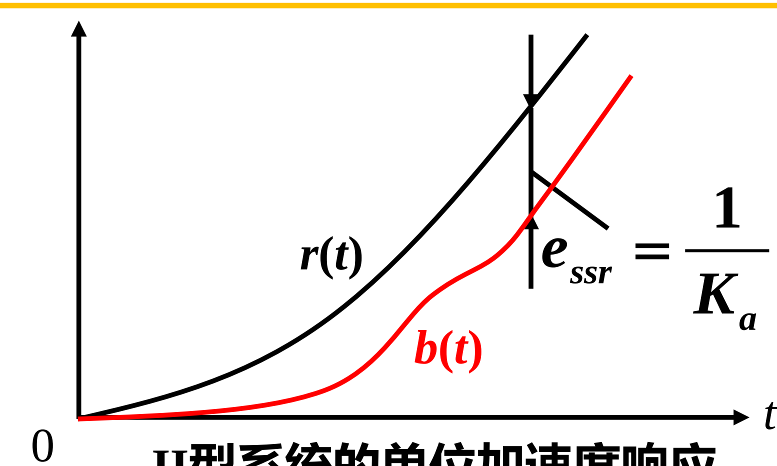
$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G_k(s)}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}s^2\cdot G_k(s)}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{k}{s^{\nu-2}}\cdot G_0(s)}=\frac{1}{K_a}$$

式中：$K_a=\lim\limits_{s\to 0}s^2G_k(s)$ 称为静态加速度误差系数；

当$\nu=2$时，

$K_a=\lim\limits_{s\to 0}kG_0(s)=k,$

$\Rightarrow e_{ssr}=\dfrac{1}{k}$



II型系统的单位加速度响应

二、静态误差系数—— 单位加速度信号输入时

- 当输入为$R(s)=\dfrac{1}{s^3}$时（$r(t)=\dfrac{1}{2}t^2\cdot 1(t)$）

$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G_k(s)}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}s^2\cdot G_k(s)}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{k}{s^{\nu-2}}\cdot G_0(s)}=\frac{1}{K_a}$$

式中：$K_a=\lim\limits_{s\to 0}s^2G_k(s)$ 称为静态加速度误差系数；

$$\text{当}\ \nu=0,1\text{时},\ K_a=\lim_{s\to 0}s^{(2,1)}kG_0(s)=0,\quad \Rightarrow e_{ssr}=\infty$$

$$\text{当}\ \nu\geq 3\text{时},\ K_a=\lim_{s\to 0}\frac{k}{s^{\nu-2}}G_0(s)=\infty,\quad \Rightarrow e_{ssr}=0$$

K_a 的大小反映了系统在加速度输入下的稳态精度。K_a 越大，e_{ssr} 越小。所以说 K_a 反映了系统跟踪加速度信号输入的能力。

1.1.2 误差系数

典型输入作用下的稳态误差

系统类型	稳态误差系数			稳态偏差		
	K_p	K_v	K_a	单位阶跃输入$1(t)$	单位速度输入t	单位加速度输入t^2
0型	k	0	0	$\frac{1}{1+k}$	∞	∞
I型	∞	k	0	0	$\frac{1}{k}$	∞
II型	∞	∞	k	0	0	$\frac{1}{k}$

上表中，k为开环放大系数（开环传递函数写成**时间常数形式**时的开环增益）

$$G_k(s)=\frac{k}{s^\nu}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m_1}(\tau_i s+1)\prod_{k=1}^{m_2}(\tau_k s^2+2\zeta_k\tau_k s+1)}{\prod_{j=1}^{n_1}(T_j s+1)\prod_{l=1}^{n_2}(T_l s^2+2\zeta_l T_l s+1)}=\frac{k}{s^\nu}\cdot G_0(s)$$

二、静态误差系数--- 组合信号输入时

- 当系统的输入信号由位置，速度和加速度分量组成时，即

$$r(t) = A + Bt + \frac{Ct^2}{2}$$

有：

$$\xcancel{e_{ssr} = \frac{A}{1+k} + \frac{B}{k} + \frac{C}{k}} \qquad e_{ssr} = \frac{A}{1+K_p} + \frac{B}{K_v} + \frac{C}{K_a}$$

是否正确?

实际系统中有这样的组合信号吗?

1.1.2 误差系数

几点说明

静态误差系数适用条件：

- 系统是稳定的
- 输入必须是3种典型信号之一或者是它们的线性组合

与静态误差相关的因素

- 系统的增益
- 信号的形式和幅值
- 系统的型别

减小静态误差的方法：

- 提高增益
- 提高型别

1.1.2 误差系数

几点结论

- 给定作用下的稳态误差与外作用有关。对同一系统加入**不同的输入，稳态误差可能不同。**

- 与时间常数形式的开环增益 k 有关；对有差系统，k 越大，稳态误差越小，但同时系统的**稳定性会变差**。

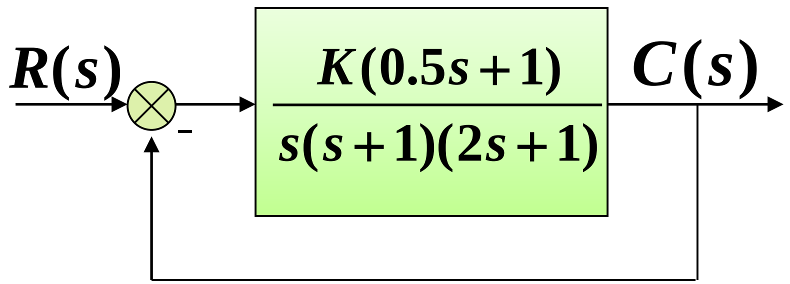
- 与积分环节的个数有关。积分环节的个数越多，稳态误差越小，但同时系统的**稳定性和动态特性会变差**。所以Ⅲ型及Ⅲ型以上的系统几乎不用。

由此可见对稳态误差的要求往往与系统的**稳定性和动态特性**的要求是矛盾的。

1.1.2 误差系数

静态误差与稳定性之间的矛盾

例1：系统结构如右图所示，当输入信号为单位斜坡函数时，调整K值能使稳态误差小于0.1。



解：系统特征方程为 $2s^3+3s^2+(1+0.5K)s+K=0$

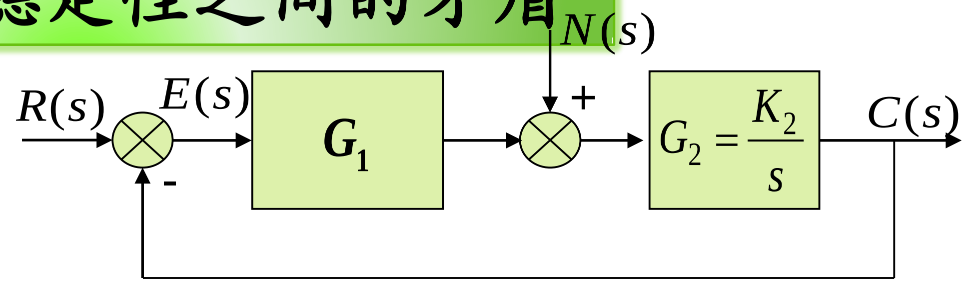
由劳斯判据知稳定的条件为： $0<K<6$

$$\Phi_E(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}=\frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1)+K(0.5s+1)}$$

$$R(s)=\frac{1}{s^2}\qquad e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1)+K(0.5s+1)}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{1}{K}$$

由稳定的条件知： $e_{ss}>\dfrac{1}{6}$ 不能满足 $e_{ss}<0.1$ 的要求

静态误差与稳定性之间的矛盾

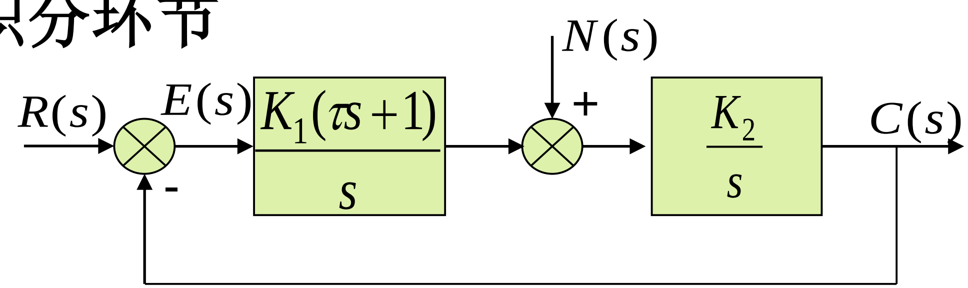


例2：若要斜坡信号输入时稳态误差为零，如何设计G_1?

$$G_1=\frac{K_1}{s}\qquad e_{ssr}=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+K_1K_2/s^2}\frac{1}{s^2}=\lim_{s\to 0}\frac{s}{s^2+K_1K_2}=0$$

对不对?

由于此时系统的稳定性遭到破坏，成为结构不稳定系统，直接加一个积分环节是不可行的。若要满足误差为零，并保证系统稳定，可以将G_1设计为比例加积分环节



$$G_1=\frac{K_1(\tau s+1)}{s}$$

$$\Phi_E=\frac{s^2}{s^2+K_1K_2\tau s+K_1K_2}$$

当K_1>0，K_2>0，τ >0时系统稳定

Thank You !

哈尔滨工业大学控制与仿真中心