课后思考与练习答案

第 1 章

1-1. 单输入单输出单位反馈数字控制系统：

（1） 画硬件框图, 并在框图中，标出各环节的名称，说明图中各部分的功能；

数字控制系统的硬件由五部分组成，以单输入单输出（SISO）单位反馈控制系统为例，见图 1-1-1：

（1） 连续被控对象（或过程）：工作于连续状态，输入输出是连续量。

（2） 数字控制器：工作于离散状态，输入输出是数字量，由数字计算机实现。

（3） 模拟输入通道：由采样开关、A/D 转换器两个环节组成，完成由连续量到数字量的转换。

（4） 模拟输出通道：由 D/A 转换器、 保持器两个环节组成，完成由数字量到连续量的转换。

（5） 实时时钟：产生脉冲序列，定时控制采样开关的闭合，控制 D/A 转换器的输出。

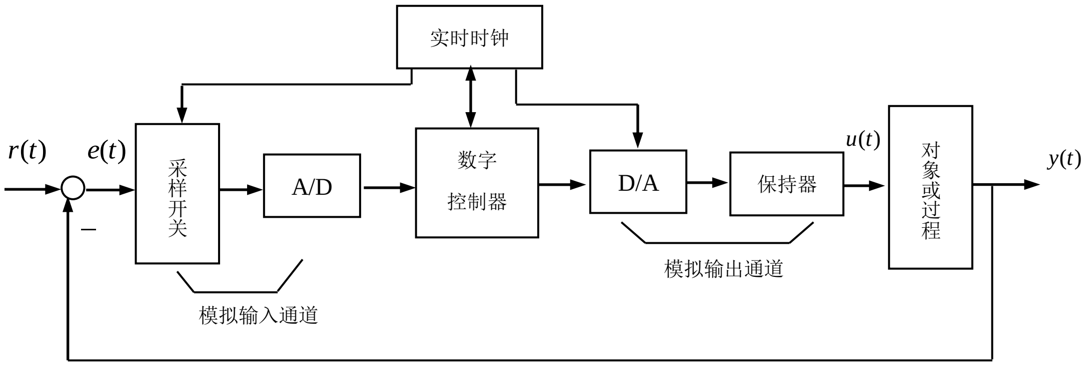


图 1-1-1 单输入单输出单位反馈数字控制系统硬件框图

（2） 说明控制软件的组成，并画软件流程图；

软件流程见图 1-1-2，数字控制器（数字机）通过软件实现所设计的控制规律（控制算法），控制软件主要由主程序和控制子程序组成：

（1） 主程序之功能是进行系统初始化设置。

（2） 控制子程序主要为数据采集、控制算法、控制量的输出和存储三部分，每部分执行程序需要的时间各为Δt_1、Δt_2、Δt_3。

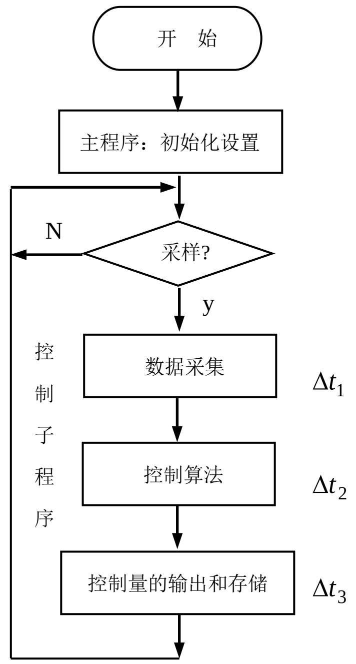


图 1-1-2　数字控制系统软件流程

（3）　数字控制与连续控制不同的基本特征是什么？

是采样。

（4）　数字控制与连续控制比，其优点是什么?

程序控制、精度高、稳定性好、软件复用、分时控制

1-2．若用一台数字计算机实现多变量控制，与单变量控制在硬件结构上有什么不同?

需要多输入/输出模拟通道。

1-3．阐述数字控制实现实时控制，应满足的基本条件。

数字控制必须实现实时控制，也就是数字控制器要在一个采样周期T时间内完成一个控制步的所有操作。**（这一句话作简答也可）**

一、 单输入单输出（SISO）数控系统，完成一个控制步的操作：

（1） 数据采集：采集一个输入通道的数据，需经信号采样，A/D 转换后，数字量输入至计算机中，设需要时间Δt_1。

（2）按照所设计的控制规律，由程序求得控制量，设需要时间Δt_2。

（3）控制量的输出和存储，设需要时间Δt_3。

实现实时控制的基本条件：

$$T \ge \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 \tag{1-2-1}$$

二、 多输入多输出（MIMO）系统，实现实时控制的基本条件：

$$T \ge \sum_{i=1}^{n} (\Delta t_{i1} + \Delta t_{i2} + \Delta t_{i3}) \qquad (1\text{-}2\text{-}2)$$

式中，n： n输入n输出系统。

第 2 章

2-1．写出数字控制系统理想采样应满足的条件？标明所写符号的意义。

当采样开关闭合时间$\tau << T$，T 为采样周期，且τ远远小于系统连续部分惯性时间常数，可将采样看成理想采样。

2-2．阐述采样定理。

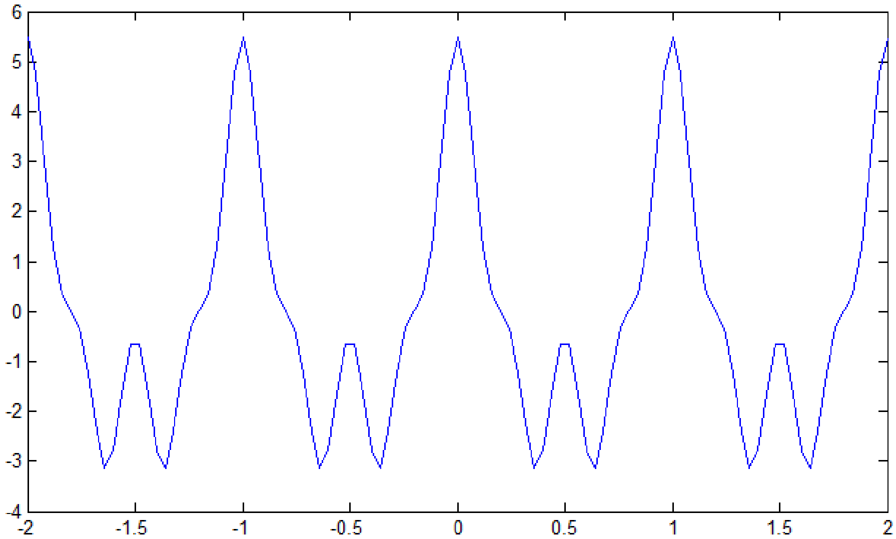
香农（Shanon）定理：若ω_m是连续信号上限频率，ω_s为采样角频率，则当$\omega_s > 2\omega_m$时，经采样得到的信号便能无失真地再现原信号。

2-3．已知连续信号$p(t) = 3\cos 2\pi t + 1.5\cos 4\pi t + \cos 8\pi t$

（1）$p(t)$的最高角频率$\omega_m = 8\pi$ ； 最高频率= 4（Hz)；

（2）依据采样定理，确定采样周期$T < 0.125$s, 例如选 T=0.1s

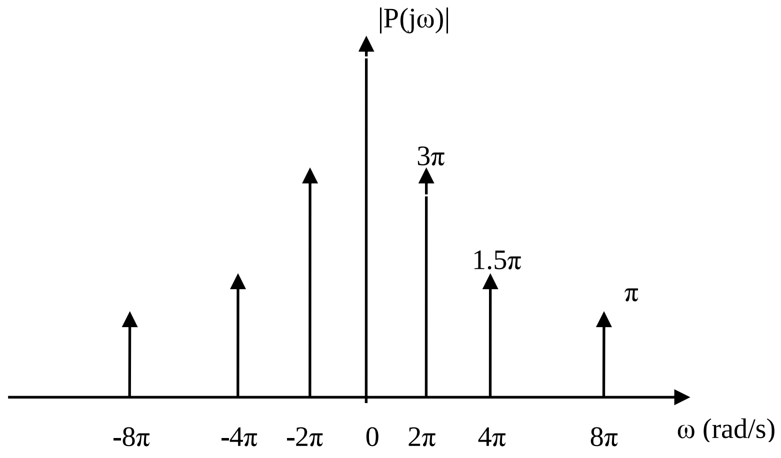
（3）画图：$p(t)$、理想采样后的$p^*(t)$；

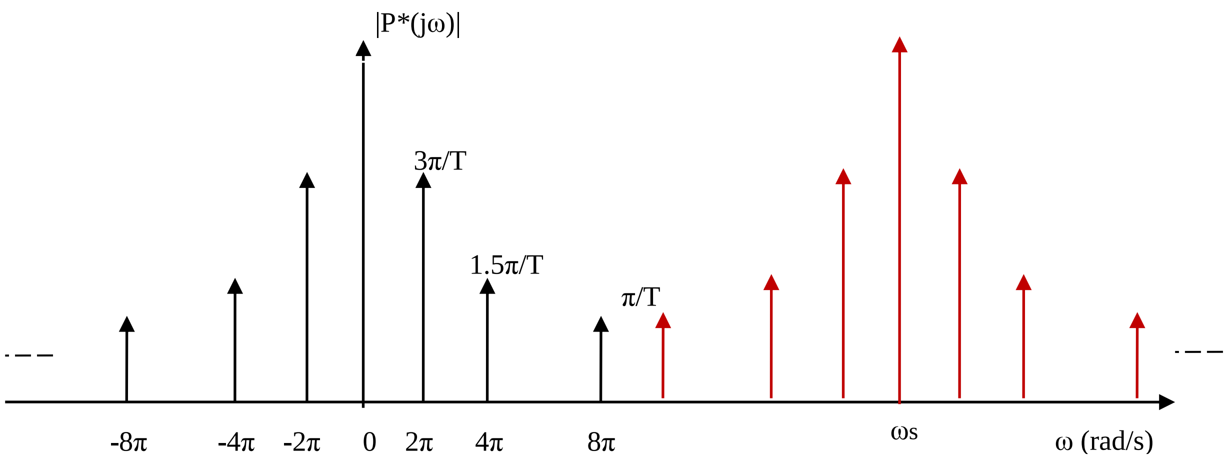


$p(t)$信号

根据具体选择的采样周期 T<0.125，画$p^*(t)$，略

（5） 画图：$p(t)$、$p^*(t)$的幅频特性。

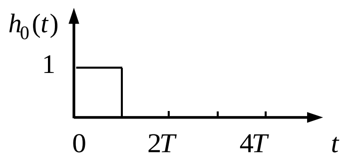




2-4．零阶保持器：

（1） 写出脉冲响应$h_0(t)$表达式、画出$h_0(t)$图；

$$h_0(t) = 1(t) - 1(t-T)$$



（2） 已知输入$u^*(t)$，写出其输出$u(t)$表达式，画出$u^*(t)$、$u(t)$图；

$$u(t)=u(kT+\Delta t)=u(kT),\quad 0\le \Delta t<T$$

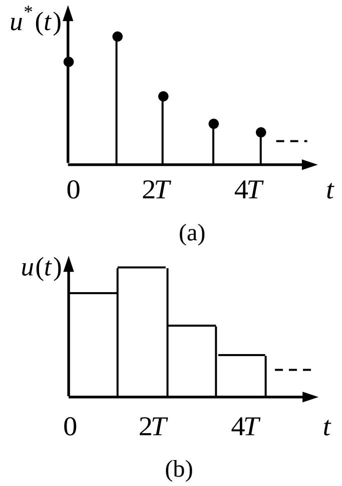
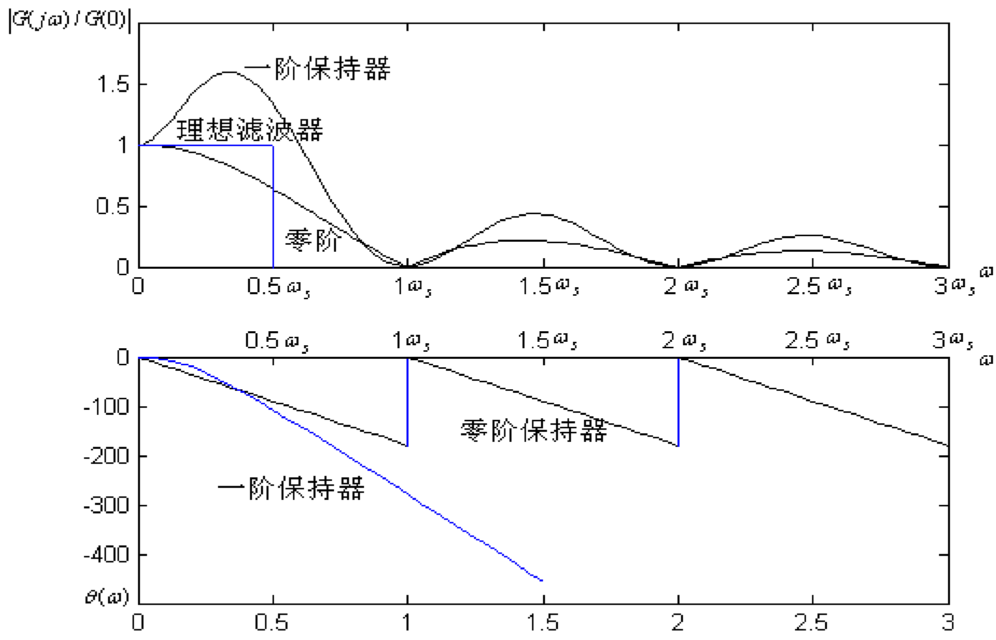


图 2-4-1　零阶保持器输入/输出特性

(a) 输入　(b) 输出

（3）画出零阶保持器的幅频特性，是哪种滤波器（低通）？画出理想滤波器的幅频特性，比较二者的异同点。



零阶保持器幅频特性为一低通滤波器，与理想的低通滤波器相比，其不足是具有多个截止频率，能通过高频分量，其相频特性具有相位迟后。

第 3 章

3-1．已知连续信号 $u(t)$，写出连续积分表达式、数值积分差分方程（前向矩形、后向矩形、梯形积分）；求 4 个积分值（积分时间 $0 \sim t1$）；画出 $u(t)$ 及对应的 4 个积分面积：

（1） $u(t)=1+\cos\omega t$，频率 $f=1Hz$，采样周期 $T=0.125s$， $t1=1s$；

（2） $u(t)=1+\cos\omega t$，频率 $f=0.5Hz$，采样周期 $T=0.125s$， $t1=2s$；

（3） $u(t)=3+t$，采样周期 $T=0.5s$， $t1=1s$。

连续积分： $y(t)=\int_0^t u(t)dt$

数值积分 $y(k)=y(k-1)+\Delta$，其中 $\Delta=y(k)-y(k-1)$

1、前向矩形积分 $\Delta_1=u(k-1)T \Rightarrow y(k)=y(k-1)+u(k-1)T$， 所以

$\cdots=y(-2)=y(-1)=0;$

$y(0)=y(-1)+u(-1)T=0;$

$y(1)=y(0)+u(0)T=u(0)T;$

$y(2)=y(1)+u(1)T=u(0)T+u(1)T;$

$\vdots$

$y(k)=T[u(0)+u(1)+\cdots+u(k-1)]$

2、后向矩形积分

$\Delta_2=u(k)T \Rightarrow y(k)=y(k-1)+u(k)T$

所以可推出

$\cdots=y(-2)=y(-1)=0;$

$y(0)=y(-1)+u(0)T=u(0)T;$

$y(1)=y(0)+u(1)T=u(0)T+u(1)T;$

$\vdots$

$y(k)=T[u(0)+u(1)+\cdots+u(k-1)+u(k)]$

3、梯形积分

$\Delta_3=[u(k-1)+u(k)]T/2 \Rightarrow y(k)=y(k-1)+[u(k-1)+u(k)]T/2$

所以

$\cdots = y(-2) = y(-1) = 0;$

$y(0) = y(-1) + [u(-1) + u(0)]T/2 = u(0)T/2;$

$y(1) = y(0) + [u(0) + u(1)]T/2 = u(0)T + u(1)T/2;$

$\vdots$

$$y(k) = T[u(0) + u(1) + \cdots + u(k-1) + \frac{u(k)}{2}]$$

图略

4 个积分值(连续积分，前向矩形积分，后向矩形积分，梯形积分)为
（1）1，1，1.25，1.125
（2）2，2，2.25，2.125
（3）3.5，3.25，5.25，4.25

3-2．已知系统输入信号 $u(k)$ 、脉冲响应，写出用卷积和求系统输出 $y(k)$ 的表达式。

$$y(k) = \sum_{j=0}^{k} u(j)h(k-j) = \sum_{m=0}^{k} h(m)u(k-m) = u(k) * h(k) \text{——卷积和}$$

3-3．已知差分方程： $y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 0, \quad y(0) = 0, y(1) = 1$

，

用递推法求 $y(k)$；指出是通解？还是特解？

齐次方程只有通解　$y(k) = (-1)^k - (-2)^k$

3-4．已知差分方程：
$$\begin{aligned} &y(k+3) - 2y(k+2) + 0.5y(k+1) - 0.2y(k) \\ &= 0.5r(k+3) - 0.4r(k+2) + 0.1r(k+1) \end{aligned}$$

$$r(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad , \quad y(k) = 0, \quad k < 0$$

用递推法求 $y(k)$；指出是通解？还是特解？求 $G(z)$。

答： $y(k) = 0, \quad k < 0$ 意味着系统具有零初始条件，即零时刻前静止。所以系统通解为零，只有特解。递推法求 $y(k)$ 略

系统 Z 传递函数为 $G(z)=\dfrac{0.5z^3-0.4z^2+0.1z}{z^3-2z^2+0.5z-0.2}$

在脉冲函数输入下，输出为系统脉冲响应

$$y(k)=Z^{-1}[R(z)G(z)]=Z^{-1}[G(z)]=h(k)$$

此题极点计算麻烦，Z 反变换略。

3-5．已知系统 $G(z)=\dfrac{z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}$，输入 $r(k)=1(k)$，零初始条件：

（1） 求脉冲响应 $h(k)$；（2） 求差分方程及系统输出 $y(k)$；

（1）$h(k)=Z^{-1}[G(z)]=(-1)^k-(-2)^k$

（2）差分方程 $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=r(k-1)$

阶跃输出为

$$Y(z)=R(z)G(z)=\frac{z}{z-1}\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{1}{6}\frac{z}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{z}{z+1}-\frac{2}{3}\frac{z}{z+2}$$

$$y(k)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}(-1)^k-\frac{2}{3}(-2)^k$$

3-6．由 Z 变换定义，写出以下信号的 Z 变换展开式、归纳为 Z 变换表达式：

（1）$Z[1(t-0.3T)]=\dfrac{1}{z-1}$；

$Z[1(t+0.3T)]=\dfrac{z}{z-1}$；

$Z[1(t-1.3T)]=\dfrac{z^{-1}}{z-1}$ ；

（2）$Z[e^{-a(t-0.3T)}]=\dfrac{e^{-0.7aT}z^{-1}}{1-e^{-aT}z^{-1}}$；

$Z[e^{-a(t+0.7T)}]=\dfrac{e^{-0.7aT}}{1-e^{-aT}z^{-1}}$；

$Z[e^{-a(t-1.3T)}]=\dfrac{e^{-0.7aT}z^{-2}}{1-e^{-aT}z^{-1}}$ 。

3-7. 已知 $f(t)=e^{-2t}\ [t<0,\ f(t)=0]$：

(1) 写出 $f^*(t)$ 的 Z 变换表达式；

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2kT}z^{-k}=\frac{z}{z-e^{-2T}}$$

(2) 分别写出 T=1(s)、T=2(s)， $f^*(t)$ 的 z 变换展开式（k=0,1,2,3,---）。

T=1s， $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2kT}z^{-k}=\frac{z}{z-e^{-2}}$

T=2s， $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2kT}z^{-k}=\frac{z}{z-e^{-4}}$

3-8．已知系统离散状态空间表达式：

$$\mathbf{x}(k+1)=\begin{bmatrix}0.5 & -0.2\\ 0.2 & -0.4\end{bmatrix}\mathbf{x}(k)+\begin{bmatrix}0.4\\ 0\end{bmatrix}\mathbf{r}(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}-1 & 2\end{bmatrix}\mathbf{x}(k)$$

写出 Z 传递函数，求脉冲响应、单位阶跃响应。

Z 传递函数 $G(z)=C(zI-A)^{-1}B+D=\frac{-0.4z}{z^2-0.1z-0.16}$

脉冲响应

$$h(k)=Z^{-1}[G(z)]=\frac{0.4}{-\sqrt{0.65}}[(\frac{0.1+\sqrt{0.65}}{2})^k-(\frac{0.1-\sqrt{0.65}}{2})^k]$$

$$\approx 0.4962(-0.3531)^k-0.4962*0.4531^k$$

单位阶跃响应

$$y(k)=Z^{-1}[G(z)*\frac{z}{z-1}]=0.1295(-0.353)^k+0.411(0.453)^k-0.54$$

第 4 章

4-1．写出改进 Z 变换的定义 ，阐述其用处，举例说明。

一、定义超前改进 Z 变换 ：

$$F(z,\Delta)=Z[F(s)e^{\Delta Ts}]=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT+\Delta T)z^{-k}\text{，}\quad 0\le\Delta<1 \qquad (4\text{-}2\text{-}2)$$

因 $$F_1(s)=F(s)e^{\Delta Ts}$$

二、定义迟后改进 Z 变换 ：

$$F(z,m)=z^{-1}Z[F(s)e^{mTs}]=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT-lT)z^{-k}\text{，}\quad 0<m\le 1 \qquad (4\text{-}2\text{-}3)$$

因 $$F_2(s)=F(s)e^{-lTs}=F(s)e^{-(1-m)Ts}=F(s)e^{-Ts}e^{mTs}$$

可见，改进 Z 变换与普通 Z 变换无本质区别，它们都是信号在采样点上的 Z 变换，见图 4-2-1。

超前改进 Z 变换可用于求连续信号采样时刻间任意点的值，迟后改进 Z 变换用于求具有纯迟后特性的连续对象的 Z 传递函数。

4-2．已知系统传递函数 $G(s)$，求 $G(z)$：

（1）$G(s)=\dfrac{3}{(s+1)(s+2)}$； $G(z)=3(\dfrac{z}{z-e^{-T}}-\dfrac{z}{z-e^{-2T}})$

（2） $G(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$； $G(z)=\dfrac{2z}{z-e^{-T}}-\dfrac{z}{z-e^{-2T}}$

（3） $G(s)=\dfrac{s+2}{s(s+1)}$； $G(z)=\dfrac{2z}{z-1}-\dfrac{z}{z-e^{-T}}$

（4） $G(s)=\dfrac{10}{s^2+s+1}$ $G(z)=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}\dfrac{ze^{-\frac{T}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}T}{z^2-2e^{-\frac{T}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}T+e^{-T}}$

4-3．用解析法求带零阶保持器的连续对象 $G(s)$ 的 Z 传递函数 $G_d(z)$：

（1）$G(s)=\dfrac{4}{s+1}$， $T=0.2s$ ； $G_d(z)=4-\dfrac{4(z-1)}{z-e^{-0.2}}=\dfrac{4(1-e^{-0.2})}{z-e^{-0.2}}$

（2）$G(s)=\dfrac{3}{s(s+1)}$， $T=0.2s$； $G_d(z)=-3+\dfrac{0.6}{z-1}+\dfrac{3(z-1)}{z-e^{-0.2}}$

（3）$G(s)=\dfrac{s+1}{s(s+5)}$， $T=0.1s$ ； $G_d(z)=\dfrac{4}{25}+\dfrac{1}{50}\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{4}{25}\dfrac{z-1}{z-e^{-0.5}}$

（4）$G(s)=\dfrac{1}{s^2}$， $T=1s$； $G_d(z)=\dfrac{z+1}{2(z-1)^2}$

（5）$G(s)=\dfrac{e^{-0.2s}}{(2s+1)(0.5s+1)}$， $T=0.4s$。

$$G_d(z) = (1-z^{-1})Z\left[\frac{e^{-0.2s}}{s(s+0.5)(s+2)}\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{e^{-0.2s}}{s} + \frac{-4e^{-0.2s}}{3(s+0.5)} + \frac{e^{-0.2s}}{3(s+2)}\right]$$
$$= (1-z^{-1})\left[\frac{z}{z-1} - \frac{4}{3}\frac{e^{-0.5(T-0.2)}}{z-e^{-0.5T}} + \frac{1}{3}\frac{e^{-2(T-0.2)}}{z-e^{-2T}}\right]$$
$$= (1-z^{-1})\left[\frac{z}{z-1} - \frac{4}{3}\frac{e^{-0.1}}{z-e^{-0.2}} + \frac{1}{3}\frac{e^{-0.4}}{z-e^{-0.8}}\right]$$

4-4．已知系统闭环 Z 传递函数，写出特征方程；求特征方程根；判别系统的稳定性：

(1) $H(z) = \dfrac{z-0.5}{z^2+4z+4}$ ；

特征方程$z^2+4z+4=0$；特征根-2，-2；不稳定。

(2) $H(z) = \dfrac{5}{z^2-1.1z+0.3}$ 。

特征方程$z^2-1.1z+0.3=0$；特征根 0.5，0.6；稳定。

4-5．由$z=e^{sT}$得到的S平面到Z平面的映射，S平面上的点、线、面映射到Z平面上相应的位置是什么？反之是什么？写出表达式，并画图：

（1）S平面：

实轴： 对应 Z 平面正实轴

虚轴： 对应 Z 平面单位圆

原点： 对应 Z 平面（1，0）点

主频带：与整个 Z 平面一一对应

S平面左半部：对应 Z 平面单位圆内的点

S平面右半部：对应 Z 平面单位圆外的点

$s1=0+j0.5\pi$，（采样周期=1s）对应 Z 平面$e^{j0.5\pi}=1\angle 0.5\pi$，也即（0，1）点

$s2=0-j\pi$， （采样周期=1s）对应 Z 平面（-1，0）点

（2）Z平面：

实轴：对应 S 平面平行于实轴，虚部为$\frac{1}{2}k\omega_s$的直线（式中 k 为任意整数，ω_s为采样角频率）。正实轴：对应 S 平面平行于实轴，虚部为$k\omega_s$的直线；负实轴：对应 S 平面平行于实轴，虚部为$(k+0.5)\omega_s$的直线。

单位圆上；对应 S 平面虚轴

单位圆内；对应 S 左半平面

单位圆外；对应 S 右半平面

z1：$r=1,\theta=90^0$；对应 S 平面（0，$j(k+\frac{1}{4})\omega_s$）

z2：$r=0.8,\theta=60^0$；对应 S 平面（$\frac{\ln 0.8}{T}$，$j(k+\frac{1}{6})\omega_s$）

z3：$r=0.8,\theta=-60^0$ 对应 S 平面（$\frac{\ln 0.8}{T}$，$j(k-\frac{1}{6})\omega_s$）

4-6．一阶线性离散系统极点可能分布在 Z 平面哪些位置？不同位置，脉冲响有何特点？画图说明。

一阶系统（$first-order\ \ system$）

$$\frac{1}{s+a}\Leftrightarrow e^{-at}\Leftrightarrow\frac{z}{z-e^{-aT}}\qquad a\text{为实数}$$

$$H_1(z)=\frac{z}{z-r}\quad H_2(z)=\frac{1}{z-r}\quad \text{极点为}r,\ h_1(k)=cr^k\quad h_2(k)=cr^{k-1}(\text{迟后一步})$$

⑴ $r>1,h(k)$是发散序列；

（2）$r<-1,h(k)$是交替变号的发散序列;

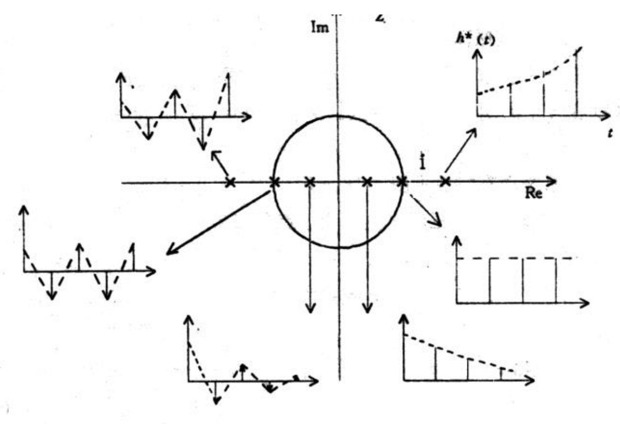
（2）$r=1,h(k)$是等幅序列；

（3）$r=-1,h(k)$是交替变号的等幅序列;

⑷$1>r>0,h(k)$是单调衰减的收敛序列;

⑸$-1<r<0$,h(k)是交替变号衰减的收敛序列。

r越小，收敛越快。



4-7．共轭复数极点对二阶系统动态特性的影响：动态特性与极点半径、幅角的关系？

$$H(s)=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}=\frac{s+\xi\omega_n}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$
极点$s=-a\pm j\omega_0$
$$h(t)=e^{-at}\cos\omega_0 t$$
$$H(z)=\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega_0 T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$$
极点$z=e^{sT}=e^{(-a\pm j\omega_0)T}=r\angle\theta$
$$H(z)=\frac{z^2-zr\cos\theta}{z^2-2zr\cos\theta+r^2},$$
$$h(k)=r^k\cos k\theta$$

$H(s)$与$H(z)$极点由$z=e^{sT}$对应，当$T\to 0$离散系统接近连续系统

系统的动态特性由极点的幅值r和相角θ决定

(1) $r>1$，$h(k)$为发散振荡序列；

(2) $r=1$，$h(k)$为等幅振荡序列；

(3) $r<1$，$h(k)$为衰减振荡序列。r越小，衰减越快。

$\theta=\omega_0 T$决定了$h(k)$在一个周期内的采样点数$N=\dfrac{2\pi}{\theta}$。

4-8．例 4-4-1 闭环系统，求闭环极点：$K=1,T=1s,2s,4s$；分析闭环系统的稳定性。

$$H(z)=\frac{K(T-1+e^{-T})z+K(1-e^{-T}-Te^{-T})}{z^2+[K(T-1+e^{-T})-(1+e^{-T})]z+[K(1-e^{-T}-Te^{-T})+e^{-T}]}$$

$K=1,T=1s,2s,4s$ 时闭环传函分别为

$H(z)\overset{T=1}{=}\dfrac{0.368z+0.264}{z^2-z+0.632}$ 闭环极点为$0.5\pm j0.6181$，稳定

$H(z)\overset{T=2}{=}\dfrac{1.1353z+0.5940}{z^2+0.7293}$ 闭环极点为$\pm j0.854$，稳定

$H(z)\overset{T=4}{=}\dfrac{3.0183z+0.9084}{z^2-2z+0.9267}$ 闭环极点为 1.2707 和 0.7293，不稳定

4-9．何谓 0 型、Ⅰ型、Ⅱ型系统？写出在$1(t)$、t、$t^2/2$作用下的稳态误差。

系统开环传递函数中含有几个积分环节就是几型系统，无积分环节为 0 型，1 个积分环节为Ⅰ型，2 个积分环节为Ⅱ型系统。

给定输入	阶跃输入 $1(t)$		速度输入 t		加速度 $\frac{1}{2}t^2$	
R(s)	$\frac{1}{s}$		$\frac{1}{s^2}$		$\frac{1}{s^3}$	
R(z)	$\frac{z}{z-1}$		$\frac{Tz}{(z-1)^2}$		$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$	
稳态误差	连续系统	离散系统	连续系统	离散系统	连续系统	离散系统
0型	$\frac{1}{1+K_p}=\frac{1}{1+K_s}$		∞		∞	
Ⅰ型	0		$\frac{1}{K_v}=\frac{1}{K_s}$	$\frac{1}{K_v}=\frac{T}{K_s}$	∞	
Ⅱ型	0		0		$\frac{1}{K_a}=\frac{1}{K_s}$	$\frac{1}{K_a}=\frac{T^2}{K_s}$

4-10．已知系统 Z 传递函数 $H(z)$、脉冲响应 $h(k)$，如何求频率特性? 写出频率特性的归一化形式；阐述频率特性的性质。

已知系统 Z 传递函数 $H(z)$，

$$\text{则} H(e^{j\omega T})\text{为系统频率特性}$$
$$A=\left|H(e^{j\omega T})\right|\text{为幅频特性}$$
$$\theta=\angle H(e^{j\omega T})\text{为相频特性}$$

归一化处理 $\text{取} t\to\frac{t}{T}\text{相对时间坐标，则} h(kT)\to h(k), e^{j\omega T}\to e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega T})\to H(e^{j\omega})$$

频率特性的性质为：

1、$H(e^{j\omega T})$是周期函数，周期为$\frac{2\pi}{T}$;

归一化形式$H(e^{j\omega})$周期为2π

2、幅频特性$\left|H(e^{j\omega T})\right|$是$\omega$的偶函数，

$$\left|H(e^{j\omega T})\right|=\left|H(e^{-j\omega T})\right|$$

3、相频特性是ω的奇函数，$\theta(\omega)=-\theta(-\omega)$

4、由采样定理可知，若$\omega_s>2\omega$,

只需取$0\le\omega<\frac{\pi}{T}$范围内的频率即可

4-11．作用于系统的扰动有哪几种？线性控制系统，如何分析作用于被控对象上的外干扰对它的影响？

作用于系统的扰动可分为负载扰动、参数变化和量测误差。

闭环反馈控制是抑制扰动的主要且有效的手段，此外前馈、局部反馈、预报等方法也可以减少扰动对系统的影响。

第 5 章

5-1．连续——离散化设计为甚么是一类近似设计法？采样周期T对系统设计的影响。

此类方法是一类近似设计法，其一，由$D(s)$转换为$D(z)$，是近似过程。其二，没有考虑保持器的影响。在数字控制系统中广泛采用的零阶保持器所输出的控制信号$u(t)$，平均迟后了半个采样周期，使闭环控制系统性能变坏。可见，这类设计，如何选择采样周期T，是一个重要的问题。为减小零阶保持器的影响，T需采用较小的值。

5-2．已知连续校正环节$D(s)=\dfrac{5}{s+5}$，分别用脉冲不变、保持器等效、后向矩形积分、梯形积分，设计数字控制器$D(z)$，采样周期$T=1s$。

用脉冲不变$D(z)=\dfrac{5z}{z-e^{-5}}$

保持器等效$D(z)=(1-z^{-1})Z[\dfrac{5}{s(s+5)}]=\dfrac{1-e^{-5}}{z-e^{-5}}$

后向矩形积分$D(z)=\dfrac{5}{\dfrac{z-1}{Tz}+5}=\dfrac{5z}{6z-1}$

梯形积分$D(z)=\dfrac{5}{\dfrac{2}{T}\dfrac{z-1}{z+1}+5}=\dfrac{5(z+1)}{7z+3}$

5-3．已知$D(s)=\dfrac{1}{T_0^2s^2+2\varsigma T_0s+1}$：

（1）$T_0=1s$，$\varsigma=0.5$，$T=0.1s$；　（2）$T_0=1s$，$\varsigma=1$，$T=0.1s$。

分别用脉冲不变、保持器等效法，设计$D(z)$。

$$(1)\ \text{脉冲不变}\quad D(z)=Z[\frac{1}{s^2+s+1}]=\frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}ze^{-0.05}\sin\frac{\sqrt{3}}{20}}{z^2-2ze^{-0.05}\cos\frac{\sqrt{3}}{20}+e^{-0.1}}$$

保持器等效法

$$D(z)=(1-z^{-1})Z[\frac{1}{s(s^2+s+1)}]=(1-z^{-1})Z[\frac{1}{s}-\frac{s+1}{s^2+s+1}]$$

$$=(1-z^{-1})[\frac{z}{z-1}-\frac{z^2-ze^{-0.05}\cos\frac{\sqrt{3}}{20}}{z^2-2ze^{-0.05}\cos\frac{\sqrt{3}}{20}+e^{-0.1}}+\frac{(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1)ze^{-0.05}\sin\frac{\sqrt{3}}{20}}{z^2-2ze^{-0.05}\cos\frac{\sqrt{3}}{20}+e^{-0.1}}]$$

(2) $D(s)=\frac{1}{s^2+2s+1}=\frac{1}{(s+1)^2}$

脉冲不变 $D(z)=\frac{0.1ze^{-0.1}}{(z-e^{-0.1})^2}$

保持器等效法

$$D(z)=(1-z^{-1})Z[\frac{1}{s(s+1)^2}]=(1-z^{-1})Z[\frac{1}{s}-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{s+1}]$$

$$=(1-z^{-1})[\frac{z}{z-1}-\frac{0.1ze^{-0.1}}{(z-e^{-0.1})^2}-\frac{z}{z-e^{-0.1}}]$$

5-4. PID控制的特点？如何由连续PID控制器设计数字PID控制器?其中的I、D算法部分，用哪种数值积分、数值差分？为什么?

PID控制的特点:

1、比例环节K_p — K_p增大可减小系统稳态误差，提高控制精度。但K_p增大使系统相对稳定性降低，甚至造成系统不稳定。

2、微分环节$K_{da}s$ — 可有效抑制过大的超调和较强烈的振荡。其只在瞬态过程有效，因此不能独立使用。

$K_P+K_{da}s$可增加控制系统的阻尼比ξ，加快反应速度。在保证系统具有一定相对稳定性要求下，容许采用较大的增益，减小稳态误差，提高系统稳定性。

微分环节不足之处是放大了噪声信号。

3、积分环节K_{ia}/s — 提高系统的无差度，从而使系统的稳态性能得到提高。但积分作用使系统的稳定性变差。不能单独使用，必须加比例环节。

PID控制器分别使用后向矩形积分、后向矩形差分实现数值积分和数值差分。

5-5．写出 PID 全量控制与 PID 增量控制算法，两者控制器输出有何不同？增量算法的优点与不足？

1、位置算式（也称全量算式）

采用后向矩形积分与后向差分

$$u(k)=K_p e(k)+K_{ia}\sum_{j=0}^{k}e(j)T+K_{da}\frac{e(k)-e(k-1)}{T}$$

$$=K_p e(k)+K_i\sum_{j=0}^{k}e(j)+K_d[e(k)-e(k-1)],$$

式中 $K_i=K_{ia}T,\qquad K_d=\dfrac{K_{da}}{T}$

2、速率算式（增量算式）

— PID 调节器输出 $\Delta u(k)$

$$\Delta u(k)=u(k)-u(k-1)$$
$$=K_p[e(k)-e(k-1)]+K_i e(k)+K_d[\Delta e(k)-\Delta e(k-1)]$$
$$=K_p[e(k)-e(k-1)]+K_i e(k)+K_d[e(k)-2e(k-1)+e(k-2)]$$

$$u(k)=u(k-1)+\Delta u(k)$$

说明：就整个系统而言，这两种算法无本质差别。但在计算机中用全量算法实现比增量算法时效性差，增量算法计算简单，只需保存 u(k-1)，e(k)，e(k-1)，e(k-2)四个值就可递推求取当前时刻控制量 u(k)。在增量算法基础上很容易增加防积分饱和等措施。

5-6．图 5-1 控制系统，设 $T=1s$，PID 全量控制，$K_p=1, K_i=0.2, K_d=0.2$，求闭环 Z 传递函数 $H(z)$、误差 Z 传递函数 $E(z)$；是几型系统？求在作用下的稳态误差？

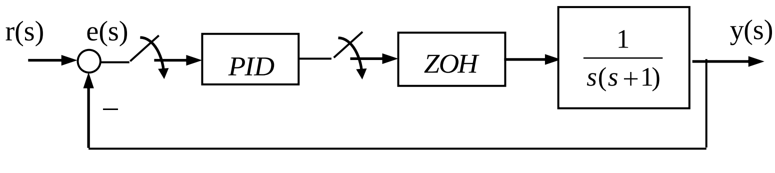


图 5-1　题 5-6

$$G_d(z)=(1-z^{-1})Z[\frac{1}{s^2(s+1)}]=(1-z^{-1})(\frac{Tz}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-e^{-T}}-\frac{z}{z-1})=\frac{0.368z+0.264}{(z-1)(z-0.368)}$$

$$D(z)=K_p+K_i\frac{z}{z-1}+K_d\frac{z-1}{z}=1+\frac{0.2z}{z-1}+0.2\frac{z-1}{z}$$

$$D(z)=\frac{1.4z^2-1.4z+0.2}{z(z-1)}$$

闭环 Z 传递函数 $H(z)=\dfrac{G_d(z)D(z)}{1+G_d(z)D(z)}$

$$\begin{aligned}H(z)&=\frac{(0.368z+0.264)(1.4z^2-1.4z+0.2)}{z(z-1)^2(z-0.368)+(0.368z+0.264)(1.4z^2-1.4z+0.2)}\\&=\frac{(0.368z+0.264)(1.4z^2-1.4z+0.2)}{z^4-1.853z^3+1.59z^2-0.664z+0.0528}\\&=\frac{(0.368z+0.264)(1.4z^2-1.4z+0.2)}{(z-0.8)(z-0.1014)(z^2-0.9525z+0.6519)}\end{aligned}$$

闭环系统稳定。

误差 Z 传递函数 $H_e(z)=1-H(z)$

ＰＩＤ控制器的静态增益为$k_i=0.2$

$G_d(z)$的静态增益为$\lim_{z\to 1}\frac{0.368z+0.264}{z-0.368}=1$

所以系统开环增益为$K_s=K_i\times 1=0.2$

系统为 II 型系统，在 $r(t)=1(t),t,t^2/2$ 作用下的稳态误差为 0、0、$\dfrac{T^2}{Ks}=\dfrac{1}{K_i}=5$

第 6 章

6-1．阐述离散化（Z 域法）设计数字控制系统的步骤。对构造闭环 Z 传递函数 $H(z)$ 与误差 Z 传递函数 $H_e(z)$ 的约束是什么？采样周期 T 对系统设计有无影响？

Z 域设计是数控系统离散化设计的一类方法。

已知：对象特性、对控制系统的性能指标，设计数字控制器。

1． 设计步骤

（1）求带零阶保持器的连续对象的 Z 传递函数 $G_d(z)$ 。

（2）按照对控制系统的性能指标要求，构造闭环 Z 传递函数 $H(z)$ 和（或）误差 Z 传递函数 $H_e(z)$ 。

（3）由 $H(z)$ 和（或）$H_e(z)$ 、$G_d(z)$ ，用式（6-1-1）求数字控制器的 Z 传递函数 $D(z)$：

$$D(z)=\frac{H(z)}{G_d(z)[1-H(z)]}=\frac{1-H_e(z)}{G_d(z)H_e(z)}=\frac{H(z)}{G_d(z)H_e(z)} \qquad （6\text{-}1\text{-}2）$$

可见，设计是为了由$D(z)$改造$G_d(z)$的特性，使控制系统达到要求的性能$H(z)$、$H_e(z)$。

（4）系统检验：若没达到系统性能要求，需进行再设计。

在 Z 域设计系统，采样周期 T 仍是需要认真考虑与确定的重要参数，如第一步求$G_d(z)$就要先设置采样周期 T。

2．对$H(z)$、$H_e(z)$的约束

设对象离散化特性用增益、极点及零点表示：

$$G_d(z)=\frac{K_d B_d(z)}{A_d(z)}=\frac{K_d\prod(z-z_i)}{\prod(z-p_j)} \qquad （6\text{-}1\text{-}3）$$

构造$H(z)$可归结为确定其增益、极点及零点的过程。

（1）$H(z)$应是稳定的，因此，若$G_d(z)$有在单位园上与园外的极点，不应包含在$H(z)$的极点中。$H_e(z)$应把$G_d(z)$在单位园上与园外的极点作为其零点。

（2）$D(z)$ 应是稳定的，因此，若$G_d(z)$具有在单位园上与园外的零点，不应包含在$D(z)$的极点中，而应作为$H(z)$的零点。

（3）$H(z)$分子与分母的阶次差，应与$G_d(z)$的阶次差相同，这样设计的$D(z)$是物理可实现的，且$D(z)$的分子与分母是同阶的，即，$D(z)$在kT时刻的输出与该时刻及以前时刻的输入有关。

采样周期T对系统设计有影响。

6-2．已知对象特性$G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$，设计有限拍无振荡系统：$T=0.5s$，单位阶跃输入。求控制系统在采样点的响应$y(kT)$。

$$G_d(z)=(1-z^{-1})Z[\frac{1}{s^2(s+1)}]=\frac{0.1065(z+0.8467)}{(z-1)(z-0.6065)}$$

设计有限拍无振荡系统

$$\begin{cases} H(z) = 0.541z^{-1}(1+0.8467z^{-1}) \\ H_e(z) = (1-z^{-1})(1+0.459z^{-1}) \end{cases}$$

所以设计控制器为

$$D(z) = \frac{H(z)}{G_d(z)H_e(z)}$$

$$= \frac{0.541z^{-1}(1+0.8467z^{-1})}{\frac{0.1065(z+0.8467)}{(z-1)(z-0.6065)}(1-z^{-1})(1+0.459z^{-1})} = \frac{5.08(z-0.6065)}{z+0.459}$$

$$Y(z) = R(z)H(z) = \frac{z}{z-1}0.541z^{-1}(1+0.8467z^{-1}) = \frac{0.541(z+0.8467)}{z(z-1)}$$

$$E(z) = R(z)H_e(z) = 1 + 0.459z^{-1} = e(0) + e(1)z^{-1}$$

控制系统在采样点的响应

$$\begin{aligned} y(k) = r(k) - e(k) &= (1-1) + (1-0.459)z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots \\ &= 0.541\delta(k-1) + 1(k-2) \end{aligned}$$

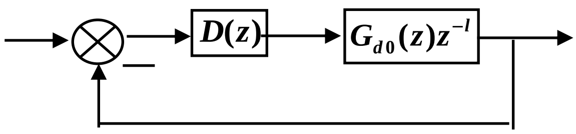
6-3．引入加权因子设计有限拍系统，有何优点？

有限拍无振荡与有振荡设计不足之一：只适用于一种典型输入。改进方法：引入加权因子（weighting factor）改变闭环 Z 传递函数，使其对不同的典型输入具有满意的动态响应。但改进后的系统已不再是有限拍控制。

6-4．已知对象特性 $G(s) = \frac{1}{s^2}$，用根轨迹法设计系统。（不要求）

6-5．史密斯预报器、大林算法是针对甚么样的对象的设计方法？设计准则是甚么?

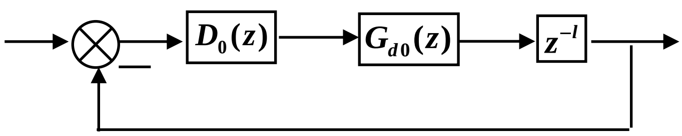
史密斯预报器和大林算法是针对具有时延的连续对象，设计 $D(z)$。



史密斯预报器设计准则:

1、按系统要求，先构造一个无时延的闭环系统$H_0(z)$,

对应$D_0(z) = \frac{H_0(z)}{G_{d0}(z)[1-H_0(z)]}$，考虑对象的时延，则设计系统特性为$H_1(z) = z^{-l}H_0(z)$。



2、针对$G_d(z)=z^{-l}G_{d0}(z)$设计$D(z)$,希望$H_2(z)=H_1(z)$,

则有$\dfrac{D(z)G_{d0}(z)z^{-l}}{1+D(z)G_{d0}(z)z^{-l}}=\dfrac{D_0(z)G_{d0}(z)}{1+D_0(z)G_{d0}(z)}z^{-l}$

$\Rightarrow D(z)=\dfrac{D_0(z)}{1+(1-z^{-l})D_0(z)G_{d0}(z)}$

即为史密斯预报器的Z传函

大林算法设计准则：以大林算法为模型的数字控制器，使闭环系统的特性是具有时延的一阶惯性环节，且时延与对象的时延相同。

6-6．例 6-6-1，采样周期$T=0.5s$，用直接法设计。求控制系统阶跃响应、在$0.01t$ 输入下的响应。

$T=0.5s$时，离散系统两个极点对应在$e^{sT}=e^{\frac{-1\pm j\sqrt{3}}{4}}$

$$G_d(z)=(1-z^{-1})Z[\frac{1}{s^2(10s+1)}]=\frac{0.0123(z+0.9835)}{(z-1)(z-0.9512)}$$

所以对应闭环系统 Z 传函为

$$H(z)=\frac{(z+0.9835)(a_0+a_1z^{-1})}{(z-e^{\frac{-1+j\sqrt{3}}{4}})(z-e^{\frac{-1-j\sqrt{3}}{4}})}=\frac{(z+0.9835)(a_0+a_1z^{-1})}{z^2-1.4138z+0.6065}$$

或者
$$H(z)=\frac{(z+0.9835)}{z^2-1.4138z+0.6065}\frac{k(z+b)}{z}$$

在满足稳态误差的要求下

$$e_{ss}=1=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{Tz}{(z-1)^2}[1-H(z)]=\lim_{z\to1}\frac{0.5}{z-1}\frac{(z^3-1.4138z^2+0.6065z)-k(z+0.9835)(z+b)}{z^3-1.4138z^2+0.6065z}$$

$$1=\frac{0.5}{0.1927}\lim_{z\to1}\frac{(z^3-1.4138z^2+0.6065z)-k(z+0.9835)(z+b)}{z-1}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{z\to1}(z^3-1.4138z^2+0.6065z)-k(z+0.9835)(z+b)=0\\0.3854=\lim\limits_{z\to1}\left(3z^2-2.8276z+0.6065\right)-k(2z+0.9835+b)\end{cases}$$

求得
$$\begin{cases}0.1927-1.9835k(1+b)=0\\0.3935=k(2.9835+b)\end{cases}\quad\begin{cases}k=0.1494\\b=-0.3496\end{cases}$$

所以
$$H(z)=\frac{(z+0.9835)}{z^2-1.4138z+0.6065}\frac{0.15(z-0.35)}{z}$$

$$D(z)G_d(z)=\frac{H(z)}{1-H(z)}=\frac{0.15(z+0.9835)(z-0.35)}{z(z-1)(z-0.6423)}$$

$$D(z)=\frac{H(z)}{H_e(z)G_d(z)}=\frac{12.2(z-0.35)(z-0.9512)}{z(z-0.6423)}$$

系统阶跃响应为

$$Y(z)=\frac{z}{z-1}H(z)=\frac{(z+0.9835)}{z^2-1.4138z+0.6065}\frac{0.15(z-0.35)}{(z-1)}$$
$$=0.085\frac{z}{z}-\frac{1.85(z^2-0.9531z+0.2504)}{z^2-1.4138z+0.6065}+\frac{z}{z-1}$$

$$=0.085-1.85\left(0.4128+\frac{0.2936z}{z-e^{\frac{-1+j\sqrt{3}}{4}}}+\frac{0.2936z}{z-e^{\frac{-1-j\sqrt{3}}{4}}}\right)+\frac{z}{z-1}$$

$$=-0.6787+\frac{z}{z-1}-0.5432\left(\frac{z}{z-e^{\frac{-1+j\sqrt{3}}{4}}}+\frac{z}{z-e^{\frac{-1-j\sqrt{3}}{4}}}\right)$$

$$y(k)=-0.6787\delta(k)+1(k)-0.5432e^{-0.25k}2cos\frac{\sqrt{3}}{4}k$$

$$=-0.6787\delta(k)+1(k)-1.0864*0.7788^{k}cos\frac{\sqrt{3}}{4}k$$