现代控制理论第四章习题答案

4-1 判断下列二次型函数的符号性质：

（1）$Q(x)=-x_1^2-3x_2^2-11x_3^2+2x_1x_2-x_2x_3-2x_1x_3$

（2）$v(x)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-6x_2x_3-2x_1x_3$

解：（1）由已知得

$$Q(x)=\begin{bmatrix}-x_1+x_2-x_3 & x_1-3x_2-\frac{1}{2}x_3 & -x_1-\frac{1}{2}x_2-11x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -3 & -\frac{1}{2}\\ -1 & -\frac{1}{2} & -11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$\Delta_1=-1<0，\Delta_2=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=2>0，\Delta_3=\begin{vmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -3 & -\frac{1}{2}\\ -1 & -\frac{1}{2} & -11\end{vmatrix}=-\frac{71}{4}<0$$

因此$Q(x)$是负定的

（2）由已知得

$$Q(x)=\begin{bmatrix}x_1-x_2-x_3 & -x_1+4x_2-3x_3 & -x_1-3x_2+x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 4 & -3\\ -1 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$\Delta_1=1>0，\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=3>0，\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 4 & -3\\ -1 & -3 & 1\end{vmatrix}=-16<0$$

因此$Q(x)$不是正定的

4-2 线性系统有唯一的平衡点在坐标原点处，且是大范围渐进稳定的。要求系统矩阵 A 所有特征值具有负实部。

4-3 试用 lyapunov 第二法确定下列系统原点的稳定性。

（1）$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}x$

（2）$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}x$

解：（1）系统唯一的平衡状态是$x_e=0$。

选取 Lyapunov 函数为$V(x)=x_1^2+x_2^2>0$，则

$$\dot{V}(x)=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=2x_1(-x_1+x_2)+2x_2(2x_1-3x_2)$$
$$=-2x_1^2+6x_1x_2-6x_2^2=-2(x_1-1.5x_2)^2-1.5x_2^2$$

$\dot{V}(x)$是负定的。当$\|x\|\to\infty$，有$V(x)\to\infty$，且在整个状态空间始终有$\dot{V}(x)$是负定的。即系统在原点处大范围渐近稳定。

（2）系统唯一的平衡状态是$x_e=0$。

选取 Lyapunov 函数为$V(x)=x_1^2+x_2^2>0$，则

$$\dot{V}(x)=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=2x_1(-x_1+x_2)+2x_2(-x_1-x_2)=-2x_1^2--2x_2^2<0$$

$\dot{V}(x)$是负定的。当$\|x\|\to\infty$，有$V(x)\to\infty$，且在整个状态空间始终有$\dot{V}(x)$是负定的。即系统在原点处大范围渐近稳定。

4-4

解：（1）令$\dot{x}_1=\dot{x}_2=0$可得平衡点为$\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\end{cases}$或$\begin{cases}x_1=-\gamma/\delta\\x_2=-\alpha/\beta\end{cases}$。

（2）系统雅可比矩阵为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{bmatrix}\alpha+\beta x_2 & \beta x_1\\ \delta x_2 & \gamma+\delta x_1\end{bmatrix}$$

在平衡点（0,0）处$A=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \gamma\end{bmatrix}$可知当$\alpha<0,\gamma<0$时系统在（0,0）处渐进稳定。

在平衡点$(-\gamma/\delta,-\alpha/\beta)$处$A=\begin{bmatrix}0 & -\beta\gamma/\delta\\ -\alpha\delta/\beta & 0\end{bmatrix}$。

可知系统的特征方程为$|sI-A|=\begin{vmatrix}s & \beta\gamma/\delta\\ \alpha\delta/\beta & s\end{vmatrix}=0\Rightarrow s^2-\alpha\gamma=0$。若$\alpha\gamma>0$，系统具有正的特征根，不稳定；若$\alpha\gamma<0$，系统在虚轴上具有特征根，系统稳定性不能确定。

4-5 令$\dot{x}_1=\dot{x}_2=0$可得平衡点在$(\mathrm{k\pi},0)$。

雅可比矩阵为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -cosx_1 & -1\end{bmatrix}$$

在平衡点 $(2\mathrm{k\pi},0)$处，

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$|sI-A|=\begin{vmatrix}s & -1\\ 1 & s+1\end{vmatrix}=s^2+s+1\Rightarrow s_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

系统渐进稳定。

在平衡点 $((2\mathrm{k}+1)\pi, 0)$处，

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$|sI-A|=\begin{vmatrix}s & -1\\ -1 & s+1\end{vmatrix}=s^2+s-1 \Rightarrow s_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

系统不稳定。

4-6 令$\dot{x}_1=\dot{x}_2=0$可得平衡点在原点处。

系统雅可比矩阵为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -a(1+4x_2+3x_2^2)\end{bmatrix}$$

在原点处,

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -a\end{bmatrix}$$

因为

$$|sI-A|=\begin{vmatrix}s & -1\\ 1 & s+a\end{vmatrix}=s^2+as+1$$

根据劳斯判据可知，$a>0$时，系统渐进稳定。如果要进一步判断系统是否是大范围渐近稳定的，就得要用 lyapunov 第二法。

选取 lyapunov 函数：$V(x)=x_1^2+x_2^2$，则

$$\dot{V}(x)=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=2x_1x_2+2x_2[-a(1+x_2)^2x_2-x_1]$$

$$=-2a(1+x_2)^2x_2^2\le 0$$

进一步分析，假定$\dot{V}(\boldsymbol{x})=-2a(1+x_2)^2x_2^2\equiv 0$，则必有$x_2\equiv -1$或$x_2\equiv 0$，则$\dot{x}_2\equiv 0$。因为$\dot{x}_2=-a(1+x_2)^2x_2-x_1$，所以肯定有$x_1\equiv 0$。继而由$\dot{x}_1=x_2$，推得$x_2\equiv 0$。即只在原点处$\dot{V}(\boldsymbol{x})\equiv 0$。换句话说，在非原点处$\dot{V}(\boldsymbol{x})$不恒等于零，所以平衡状态还是渐近稳定的。

由于系统只有一个平衡状态，当$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\to+\infty$时，显然有$V(\boldsymbol{x})\to+\infty$，且在整个状态空间始终有$\dot{V}(x)$是负半定的。所以这个平衡状态还是大范围渐近稳定的。

4-7

解:可知线性离散系统的系统矩阵为$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ -3 & -2 & -3\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$,

$$|zI-A|=\begin{bmatrix}z-1 & -3 & 0\\ 3 & z+2 & 3\\ -1 & 0 & z\end{bmatrix}=z(z^2+z-2)+9+9z=z^3+z^2+7z+9$$

G 的特征根为 0.1173 + 2.6974i, 0.1173 - 2.6974i, -1.2346 不全在单位圆内，因此系

统不稳定。

4-8 线性离散系统的特征方程为

$$|zI-A|=\begin{bmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ 0 & -k/2 & z \end{bmatrix}=z^3-\frac{kz}{2}=z(z^2-\frac{k}{2})$$

离散系统的极点在 0，$\pm\sqrt{\frac{k}{2}}$。若$-2<\mathrm{k}<2$，三个极点都位于 Z 单位圆内，则系统大范围渐近稳定。

4-9 设非线性方程：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - x_2 \end{aligned}$$

试用克拉索夫斯基法确定系统原点的稳定性。

解：（1）采用克拉索夫斯基法，依题意有：

$$f(x)=\begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1^3-x_2 \end{bmatrix}$$

$$J(x)=\frac{\partial f(x)}{\partial x^T}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$V(x)=f^T(x)f(x)=[x_2 \quad -x_1^3-x_2]+\begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1^3-x_2 \end{bmatrix}=x_2^2+(-x_1^3-x_2)^2$$

$\|x\|\to\infty$，有$V(x)\to\infty$。

取$P=I$

$$\begin{aligned} -Q(x) &= J^T(x)+J(x) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -3x_1^2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1-3x_1^2 \\ 1-3x_1^2 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

则$Q(x)=\begin{bmatrix} 0 & -1+3x_1^2 \\ -1+3x_1^2 & 2 \end{bmatrix}$，根据希尔维斯特判据，有：

$\varDelta_1=0$，$\varDelta_2=\begin{vmatrix} 0 & 3x_1^2-1 \\ -1+3x_1^2 & 2 \end{vmatrix}=(3x_1^2-1)^2>0$，$Q(x)$的符号无法判断。

（2）李雅普诺夫方法：选取 Lyapunov 函数为$V(x)=\frac{3}{4}x_1^4+\frac{3}{2}x_2^2>0$，则

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= 3x_1^3\dot{x}_1 + 3x_2\dot{x}_2 \\
&= 3x_1^3 x_2 + 3x_2(-x_1^3 - x_2) \\
&= -3x_2^2 < 0
\end{aligned}
$$

$\dot{V}(x)$是负定的，且$\|x\| \to \infty$，有$V(x) \to \infty$。即系统在原点处大范围渐近稳定。

4-10 令$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$可得平衡点在原点处。

系统雅可比矩阵为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(a_1 + 2a_2 x_1 x_2) & -a_2 x_1^2 \end{bmatrix}$$

在原点处,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

因为

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ a_1 & s \end{vmatrix} = s^2 + a_1$$

因为$a_1 > 0$，特征方程具有虚轴上的特征根，不能确定系统的稳定性。

采用李雅普诺夫第二法证明系统稳定性。

选取 Lyapunov 函数为$V(x) = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 > 0$（式中$k_1 > 0, k_2 > 0$），则

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= 2k_1 x_1 \dot{x}_1 + 2k_2 x_2 \dot{x}_2 = 2k_1 x_1 x_2 - 2k_2 x_2 (a_1 x_1 + a_2 x_1^2 x_2) \\
&= (2k_1 - 2k_2 a_1) x_1 x_2 - 2k_2 a_2 x_1^2 x_2^2
\end{aligned}
$$

若令$2k_1 - 2k_2 a_1 = 0$，例如$V(x) = a_1 x_1^2 + x_2^2 > 0$，则$\dot{V}(x) = -2k_2 a_2 x_1^2 x_2^2 < 0$。所以$V(x) = a_1 x_1^2 + x_2^2$是 Lyapunov 函数。当$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to +\infty$，有

$$V(x) = \begin{cases} (a_1 - 1)x_1^2 + (x_1^2 + x_2^2) \to \infty & 当a_1 \geq 1 \\ a_1(x_1^2 + x_2^2) + (1 - a_1)x_2^2 \to \infty & 当a_1 < 1 \end{cases}。$$

且在整个状态空间始终有$\dot{V}(x)$是负定的，则系统在原点处大范围渐近稳定。