第二章习题答案

2-1 证明：因为根据定义

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^kt^k+\cdots$$

$$e^{Bt}=I+Bt+\frac{1}{2!}B^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}B^kt^k+\cdots$$

$$e^{(A+B)t}=I+(A+B)t+\frac{1}{2!}(A+B)^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}(A+B)^kt^k+\cdots$$

所以

$$e^{At}e^{Bt}=I+(A+B)t+\left(\frac{1}{2!}A^2+AB+\frac{1}{2!}B^2\right)t^2+\cdots$$

$$+(\frac{1}{k!}A^k+\frac{1}{(k-1)!}A^{k-1}B+\cdots+A\frac{1}{(k-1)!}B^{k-1}+\frac{1}{k!}B^k)t^k+\cdots$$

若 $e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}$

则 $$\frac{1}{k!}(A+B)^k=\frac{1}{k!}A^k+\frac{1}{(k-1)!}A^{k-1}B+\cdots+A\frac{1}{(k-1)!}B^{k-1}+\frac{1}{k!}B^k \quad k\geq 2$$

则必有 $\mathrm{AB}=\mathrm{BA}$。

否则，若 $\mathrm{AB}\neq\mathrm{BA} \quad \Rightarrow \quad e^{(A+B)t}\neq e^{At}e^{Bt}$。

2-2

(1) 证明书中（2.17）式

$$e^{\wedge t}=L^{-1}[(sI-\wedge)^{-1}]=L^{-1}\left[\begin{bmatrix} s-\lambda_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & s-\lambda_n\end{bmatrix}^{-1}\right]=L^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{s-\lambda_1} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \frac{1}{s-\lambda_n}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

(2) 证明书中（2.18）式

因为根据定义

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^kt^k+\cdots$$

若$T^{-1}AT=\wedge$，$A=T\wedge T^{-1}$，则

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^kt^k+\cdots$$
$$=I+T\wedge T^{-1}t+\frac{1}{2!}(T\wedge T^{-1})^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}(T\wedge T^{-1})^kt^k+\cdots$$

$$=I+T\wedge T^{-1}t+\frac{1}{2!}T\wedge^2T^{-1}t^2+\cdots+\frac{1}{k!}T\wedge^kT^{-1}t^k+\cdots=Te^{\wedge t}T^{-1}$$

（3）证明（2.20）

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\sigma & \omega\\ -\omega & \sigma\end{pmatrix}$$

$$e^{At}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=L^{-1}\begin{pmatrix}s-\sigma & -\omega\\ \omega & s-\sigma\end{pmatrix}^{-1}=L^{-1}\left[\frac{\begin{bmatrix}s-\sigma & \omega\\ -\omega & s-\sigma\end{bmatrix}}{(s-\sigma)^2+\omega^2}\right]$$
$$=\begin{bmatrix}e^{\sigma t}cos\omega t & e^{\sigma t}sin\omega t\\ -e^{\sigma t}sin\omega t & e^{\sigma t}cos\omega t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}cos\omega t & sin\omega t\\ -sin\omega t & cos\omega t\end{bmatrix}e^{\sigma t}$$

2−3

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s-1)^2(s-2)}\begin{bmatrix}s^2-4s+5 & s-4 & 1\\ 2 & s(s-4) & s\\ 2s & -5s+2 & s^2\end{bmatrix}$$

$$L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=\begin{bmatrix}-2te^t+e^{2t} & 3te^t+2e^t-2e^{2t} & -te^t-e^t+e^{2t}\\ -2te^t-2e^t+2e^{2t} & 3te^t+5e^t-4e^{2t} & -te^t-2e^t+2e^{2t}\\ -2te^t-4e^t+4e^{2t} & 3te^t+8e^t-8e^{2t} & -te^t-3e^t+4e^{2t}\end{bmatrix}$$

2-5 下列矩阵是否满足状态转移矩阵的条件，如果满足，试求与之对应的 A 阵。

(1) $\phi(\mathrm{t})=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & sint & cost\\ 0 & -cost & sint\end{bmatrix}$

因为$\phi(0)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\neq I$，所以不是状态转移矩阵。

（2）$\Phi(t)=\begin{bmatrix}1 & \frac{1-e^{-2t}}{2}\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$

因为$\Phi(0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=I$，所以该矩阵满足状态转移矩阵的条件

$$A=\dot{\Phi}(t)\big|_{t=0}=\left.\begin{bmatrix}0 & e^{-2t}\\0 & -2e^{-2t}\end{bmatrix}\right|_{t=0}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}$$

（4）因为$\Phi(0)\neq I$，所以该矩阵不满足状态转移矩阵的条件

2-6 求下列状态空间表达式的解：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=(1,0)x$$

初始状态$x(0)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，输入$u(t)$时单位阶跃函数。

解：

（一）从时域的角度求解

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\qquad sI-A=\begin{bmatrix}s & -1\\0 & s\end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix}s & 1\\0 & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s^2}\\0 & \frac{1}{s}\end{bmatrix}\qquad \Phi(t)=e^{At}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=\begin{bmatrix}1 & t\\0 & 1\end{bmatrix}$$

因为 $B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，$u(t)=1(t)$

$$x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}1 & t\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}1 & t-\tau\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}t+1\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}t-\tau\\1\end{bmatrix}d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}t+1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}t^2\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}t^2+t+1\\t+1\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x=\frac{1}{2}t^2+t+1$$

（二）从频域的角度求解

$$\begin{cases} sX(s)-x(0)=AX(s)+BU(s) \\ Y(s)=CX(s)=C(sI-A)^{-1}[x(0)+BU(s)] \end{cases}$$

$$Y(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s\end{bmatrix}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\frac{1}{s}\right\}=\frac{\begin{bmatrix}s & 1\end{bmatrix}}{s^2}\begin{bmatrix}1\\ 1+\frac{1}{s}\end{bmatrix}=\frac{s^2+s+1}{s^3}$$

$$y(t)=\frac{1}{2}t^2+t+1$$

2-9 解：首先建立连续对象的状态空间表达式

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+Ku_1\\ \dot{x}_2=x_1-u_2\\ y=2x_1+x_2\end{cases}\Rightarrow \mathrm{F}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\ G=\begin{bmatrix}K & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\ C=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\ \mathrm{D}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$$

其状态转移矩阵为

$$\Phi(\mathrm{t})=e^{Ft}=L^{-1}[(sI-F)^{-1}]=L^{-1}\left[\begin{pmatrix}s+1 & 0\\ -1 & s\end{pmatrix}^{-1}\right]=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0\\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 1-e^{-t} & 1\end{bmatrix}$$

带零阶保持器的连续对象离散化：

$$\mathrm{A}=e^{FT}=\Phi(T)=\begin{bmatrix}e^{-T} & 0\\ 1-e^{-T} & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B}=\int_0^T e^{Ft}dt\,G=\int_0^T\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 1-e^{-t} & 1\end{bmatrix}dt\begin{bmatrix}K & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-e^{-T} & 0\\ T-1+e^{-T} & T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}K(1-e^{-T}) & 0\\ K(T-1+e^{-T}) & -T\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\qquad \mathrm{D}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$$

当 T=0.1s 时

$$A=\begin{bmatrix}e^{-0.1} & 0\\ 1-e^{-0.1} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9048 & 0\\ 0.0952 & 1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}K(1-e^{-0.1}) & 0\\ K(0.1-1+e^{-0.1}) & -0.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.0952K & 0\\ 0.0048K & -0.1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\qquad \mathrm{D}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$$

当 T=1s 时

$$A=\begin{bmatrix}e^{-1} & 0\\ 1-e^{-1} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.368 & 0\\ 0.732 & 1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}K(1-e^{-1}) & 0\\ K(1-1+e^{-1}) & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.732K & 0\\ 0.368K & -1\end{bmatrix}$$

$C=[2\quad 1]\qquad D=[0\quad 0]$

2-10 解：

$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$

$$\Rightarrow X(z)=(zI-A)^{-1}[zx(0)+BU(z)]=\begin{bmatrix} z-0.5 & -0.125 \\ -0.125 & z-0.5 \end{bmatrix}^{-1}\left(z\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{Tz}{(z-1)^2} \\ \frac{z}{z-e^{-T}} \end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{\begin{bmatrix} z-0.5 & 0.125 \\ 0.125 & z-0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -z+\frac{Tz}{(z-1)^2} \\ 3z+\frac{Tz}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-e^{-T}} \end{bmatrix}}{(z-\frac{3}{8})(z-\frac{5}{8})}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix} (z-0.5)\left(-z+\frac{Tz}{(z-1)^2}\right)+0.125(3z+\frac{Tz}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-e^{-T}}) \\ 0.125\left(-z+\frac{Tz}{(z-1)^2}\right)+(z-0.5)(3z+\frac{Tz}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-e^{-T}}) \end{bmatrix}}{(z-\frac{3}{8})(z-\frac{5}{8})}$$

$x(k)=Z^{-1}[X(z)]$麻烦

2-11

解：（1）第一种方法：

$$G_d(z)=z[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\times\frac{1}{(s+1)(s+2)}]$$

$$=(1-z^{-1})z[\frac{1}{s}\times\frac{1}{(s+1)(s+2)}]=(1-z^{-1})z[\frac{0.5}{s}-\frac{1}{(s+1)}+\frac{0.5}{(s+2)}]$$

$$=(1-z^{-1})\left[\frac{0.5z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-T}}+\frac{0.5z}{z-e^{-2T}}\right]=\frac{(z+e^{-T})(1-e^{-T})^2}{2(z-e^{-T})(z-e^{-2T})}$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G_d(z)}{1+G_d(z)}=\frac{(z+e^{-T})(e^{-T}-1)^2}{2z^2-(4e^{-T}+e^{-2T}-1)z+3e^{-3T}-2e^{-2T}+e^{-T}}$$

可知有能观标准 I 型

$h2=b2=0$

$h1=b1-a1*b2=(e^{-T}-1)^2/2$

$$h0=b0-a0*h2-a1*h1=(6e^{-T}+e^{-2T}-1)(e^{-T}-1)^2/4$$

则离散状态方程为

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ (-3e^{-3T}+2e^{-2T}-e^{-T})/2 & (4e^{-T}+e^{-2T}-1)/2\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}(e^{-T}-1)^2/2\\ (6e^{-T}+e^{-2T}-1)(e^{-T}-1)^2/4\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=(1\quad 0)x(k)$$

还可以写能控标准 1 型更简单

则离散状态方程为

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ (3e^{-3T}-2e^{-2T}+e^{-T})/2 & (4e^{-T}+e^{-2T}-1)/2\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\quad C=[(z+e^{-T})(e^{-T}-1)^2/2\quad 0]$$

第二种方法：

连续对象 $$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

其有状态空间实现

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\quad C=[1\quad 1]$$

状态转移矩阵 $$\emptyset(t)=e^{At}=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$$

连续对象$G_d(z)$离散化：

$$A'=e^{AT}=\begin{bmatrix}e^{-T} & 0\\ 0 & e^{-2T}\end{bmatrix}\quad B'=\int_0^T\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}dt=\begin{bmatrix}1-e^{-T}\\ (e^{-2T}-1)/2\end{bmatrix}$$

$$C=[1\quad 1]$$

$$G_d(z)=C(zI-A')^{-1}B'=[1\quad 1]\begin{bmatrix}\frac{1}{z-e^{-T}} & 0\\ 0 & \frac{1}{z-e^{-2T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-e^{-T}\\ \frac{e^{-2T}-1}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}+\frac{(e^{-2T}-1)/2}{z-e^{-2T}}=\frac{(z+e^{-T})(1-e^{-T})^2}{2(z-e^{-T})(z-e^{-2T})}$$

形成单位负反馈系统（相当于 H=1 的输出反馈）

$$\begin{cases} x(k+1)=A'x(k)+B'[r(k)-y(k)]=(A'-B'C)x(k)+B'r(k) \\ y(k)=Cx(k) \end{cases}$$

$$A''=A'-B'C=\begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1-e^{-T} \\ \frac{e^{-2T}-1}{2} \end{bmatrix}[1 \quad 1]=\begin{bmatrix} 2e^{-T}-1 & e^{-T}-1 \\ (1-e^{-2T})/2 & (1+e^{-2T})/2 \end{bmatrix}$$

$$B''=B'=\begin{bmatrix} 1-e^{-T} \\ \frac{e^{-2T}-1}{2} \end{bmatrix} \qquad C''=C=[1 \quad 1]$$

（2）$T=0.1s$时 第一种方法实现的

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.745 & 1.719 \end{bmatrix} \quad \mathrm{B}=\begin{bmatrix} 0.0045 \\ 0.0119 \end{bmatrix} \quad \mathrm{C}=[1 \quad 0]$$

$$\emptyset(\mathrm{k})=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.74 & 1.72 \end{pmatrix}^k=Z^{-1}[z(zI-A)^{-1}]=Z^{-1}\left[z\begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.745 & z-1.719 \end{bmatrix}^{-1}\right]$$

$$=Z^{-1}\left[\frac{\begin{bmatrix} z-1.719 & 1 \\ -0.745 & z \end{bmatrix}z}{z^2-1.719z+0.745}\right]$$ 麻烦

查表

$$Z[e^{-akT}sink\omega T]=\frac{ze^{-aT}sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}cos\omega T+e^{-2aT}}$$

$$Z[e^{-akT}cosk\omega T]=\frac{z^2-ze^{-aT}cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}cos\omega T+e^{-2aT}}$$

$$\begin{cases} 0.745=e^{-2aT} \\ 1.719=2e^{-aT}cos\omega T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-aT}=\sqrt{0.745} \\ cos\omega T=\frac{1.719}{2\sqrt{0.745}}=\frac{0.8595}{\sqrt{0.745}} \\ sin\omega T=\sqrt{1-(\frac{1.719}{2\sqrt{0.745}})^2}=\frac{0.0791}{\sqrt{0.745}} \\ \omega T=0.0918 \end{cases}$$

$$Z\left[0.745^{\frac{k}{2}}\cos(0.0918k)\right]=\frac{z^2-0.8595z}{z^2-1.719z+0.745}$$

$$Z\left[0.745^{\frac{k}{2}}\sin(0.0918k)\right]=\frac{0.0791z}{z^2-1.719z+0.745}$$

$$Z^{-1}\left[\frac{\begin{bmatrix}z-1.719 & 1\\ -0.745 & z\end{bmatrix}z}{z^2-1.719z+0.745}\right]=Z^{-1}\begin{bmatrix}\frac{z^2-1.719z}{z^2-1.719z+0.745} & \frac{z}{z^2-1.719z+0.745}\\ \frac{-0.745z}{z^2-1.719z+0.745} & \frac{z^2}{z^2-1.719z+0.745}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.745^{\frac{k}{2}}\cos(0.0918k)-\frac{0.8595}{0.0791}0.745^{\frac{k}{2}}\sin(0.0918k) & \frac{1}{0.0791}0.745^{\frac{k}{2}}\sin(0.0918k)\\ \frac{-0.745}{0.0791}0.745^{\frac{k}{2}}\sin(0.0918k) & 0.745^{\frac{k}{2}}\cos(0.0918k)+\frac{0.8595}{0.0791}0.745^{\frac{k}{2}}\sin(0.0918k)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.863^k\cos(0.0918k)-10.866*0.863^k\sin(0.0918k) & 12.64*0.863^k\sin(0.0918k)\\ -9.42*0.863^k\sin(0.0918k) & 0.863^k\cos(0.0918k)+10.866*0.863^k\sin(0.0918k)\end{bmatrix}$$

（3）单位阶跃输入，初始条件为 0 的离散输出 y

$$\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G_d(z)}{1+G_d(z)}=\frac{(z+e^{-T})(e^{-T}-1)^2}{2z^2-(4e^{-T}+e^{-2T}-1)z+3e^{-3T}-2e^{-2T}+e^{-T}}$$
$$=\frac{0.0045(z+0.9048)}{z^2-1.719z+0.745}$$

$$Y(z)=\frac{0.0045(z+0.9048)}{z^2-1.719z+0.745}\times\frac{z}{z-1}=\frac{z(-0.33z+0.2418)}{z^2-1.719z+0.745}+\frac{0.33z}{z-1}$$
$$=\frac{0.33z}{z-1}-\frac{0.33(z^2-0.7327z)}{z^2-1.719z+0.745}$$

$$y(k)=0.33-0.33\left[0.863^k\cos(0.0918k)-\frac{0.1268}{0.0791}0.863^k\sin(0.0918k)\right]$$
$$=0.33-0.33\left[0.863^k\cos(0.0918k)-1.603*0.863^k\sin(0.0918k)\right]$$

（4）求 t=0.25 时刻的输出值

第一种方法：

应用改进 Z 变换

$$Y(z,\Delta)=G_d(z,\Delta)U(z)$$

$$G_d(z,\Delta)=(1-z^{-1})Z[\frac{e^{\Delta s}}{s(s+1)(s+2)}]=(1-z^{-1})z[\frac{0.5e^{\Delta s}}{s}-\frac{e^{\Delta s}}{(s+1)}+\frac{0.5e^{\Delta s}}{(s+2)}]$$

$$=(1-z^{-1})\left[\frac{0.5z}{z-1}-\frac{e^{-\Delta}z}{z-e^{-T}}+\frac{0.5e^{-2\Delta}z}{z-e^{-2T}}\right]$$

$$U(z)=R(z)\frac{1}{1+G_d(z)}D(z)=\frac{z}{z-1}\left[1-\frac{0.0045(z+0.9048)}{z^2-1.719z+0.745}\right]$$

选取$\Delta=0.05s$

$$\begin{aligned}Y(z,\Delta)&=G_d(z,\Delta)U(z)\\&=(1-z^{-1})\left[\frac{0.5z}{z-1}-\frac{e^{-0.05}z}{z-e^{-T}}+\frac{0.5e^{-0.1}z}{z-e^{-2T}}\right]\frac{z}{z-1}\left[1-\frac{0.0045(z+0.9048)}{z^2-1.719z+0.745}\right]\\&=\left[\frac{0.5z}{z-1}-\frac{e^{-0.05}z}{z-e^{-T}}+\frac{0.5e^{-0.1}z}{z-e^{-2T}}\right]\left[1-\frac{0.0045(z+0.9048)}{z^2-1.719z+0.745}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&[0.5(1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots)-e^{-0.05}(1+e^{-T}z^{-1}+e^{-2T}z^{-2}+\cdots)\\&+0.5e^{-0.1}(1+e^{-2T}z^{-1}+e^{-4T}z^{-2}+\cdots)]\times[1-0.0045z^{-1}-2.6238z^{-2}+\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&[0.0012+0.0097z^{-1}+0.0245z^{-2}+\cdots]\times[1-0.0045z^{-1}-2.6238z^{-2}+\cdots]\\&=0.0012+0.0097z^{-1}+0.0213z^{-2}+\cdots\end{aligned}$$

$$y(kT+\Delta)=Z^{-1}[Y(z,\Delta)]$$

T=0.25s 时刻的输出值为 0.0213

```
0.001189 s^5 + 0.004412 s^4 - 0.009282 s^3 + 0.00311 s^2 + 0.0007214 s
----------------------------------------------------------------------
        s^5 - 4.443 s^4 + 7.891 s^3 - 7.006 s^2 + 3.109 s - 0.5519
```

$y(kT+\Delta)=$

$$=0.0012+0.0097z^{-1}+0.0244z^{-2}+\cdots$$

若直接通过$y(kT+\Delta)$进行长除法，T=0.25s 时刻的输出值为 0.0244

第二种方法，带零阶保持器的连续对象状态变量求解

单位负反馈闭环系统

$$\begin{cases}x(k+1)=A'x(k)+B'[u(k)-y(k)]=(A'-B'C)x(k)+B'u(k)\\ y(k)=Cx(k)\end{cases}$$

$$A''=A'-B'C=\begin{bmatrix}2e^{-T}-1 & e^{-T}-1\\ \frac{1-e^{-2T}}{2} & \frac{1+e^{-2T}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8097 & -0.0952\\ 0.0906 & 0.9094\end{bmatrix}$$

$$B''=B'=\begin{bmatrix}1-e^{-T}\\ \frac{e^{-2T}-1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.0952\\ -0.0906\end{bmatrix}\qquad C''=C=[1\quad 1]$$

展开

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0.8097x_1(k) - 0.0952x_2(k) + 0.0952u \\ x_2(k+1) = 0.0906x_1(k) + 0.9094x_2(k) - 0.0906u \\ \qquad\qquad y(k) = x_1(k) + x_2(k) \end{cases}$$

递推求解

$$k = 0, \quad x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, y(0) = 0, \ \ u(0) = 1$$
$$k = 1, \quad x_1(1) = 0.0952, x_2(0) = -0.0906, y(0) = 0.0046, \ \ u(0) = 1$$
$$k = 2, \quad x_2(2) = 0.1809, x_2(2) = -0.1644, y(2) = 0.0165, \ \ u(0) = 1$$

以 t=0.2s 为初始时刻，带零阶保持器的连续对象输入始终是 r(2T)-y(2T)=0.9836。

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(2T) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-t_0)}Bu(2T)dt$$

$$x(0.25) = \begin{bmatrix} e^{-0.05} & 0 \\ 0 & e^{-2*0.05} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.1809 \\ -0.1644 \end{bmatrix} + 0.9836\begin{bmatrix} 1-e^{-0.05} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-e^{-2*0.05}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2201 \\ -0.1956 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{y}(2.5) = [1 \quad 1]x(0.25) = 0.0245$$