基础过关 1-5

1. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{ax}=\frac{2}{a}=3 \Rightarrow a=\frac{2}{3}$

A

1．设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{ax}=3$，则 $a=$

(A) $\dfrac{2}{3}$.　　(B) $\dfrac{3}{2}$.　　(C) 2.　　(D) 不确定.

2. (A). ∞　　(C) ✓
(B). 1　　(D) 1

C

2．当 $x\to0$ 时，下列变量是无穷小量的为

(A) $\dfrac{1}{x^2}$.　　(B) 2^x.　　(C) $\sin x$.　　(D) $\ln(x+\mathrm{e})$.

3. (A) $-\infty+\infty=0$
(B) 反例：$\lim\limits_{x\to0} x^2-x=\infty$
(C). $\dfrac{1}{-\infty+\infty}$
(D) ✓

D

3．若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to x_0$ 时都是无穷大，则下列极限正确的是

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=\infty$.　　(B) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=0$.

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)+g(x)}=0$.　　(D) $\lim\limits_{x\to x_0}bf(x)=\infty$（$b$ 为非零常数）.

4. $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ = 不存在

C

4．设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, x\neq0\\ 1, x=0\end{cases}$，则当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 是

(A) 无穷小.　　(B) 无穷大.

(C) 既不是无穷大，也不是无穷小.　　(D) 极限存在但不是 0.

D

5．当 $x\to0$ 时，下列四个无穷小中，比其他三个更高阶的无穷小是

(A) x^2.　　(B) $1-\cos x$.

(C) $\sqrt{1-x^2}-1$.　　(D) $x-\tan x$.

5. (A) 二阶
(B) $\frac{1}{2}x^2$　二阶
(C) $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-1$
$\sim\frac{1}{2}(-x^2)$　二阶
(D) $x-\tan x$
$\sim-\frac{1}{3}x^3$　三阶

B 6．当 $x\to0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小是

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$．　　(B) $\arcsin\sqrt{x}$．

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$．　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$．

6. (A) $-\sqrt{x}$ （同阶不等价）
(B) $\sqrt{x}$
(C) $(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x}$
(D) $\frac{1}{2}x$

A 7．当 $x\to0^+$ 时，下列无穷小按阶从低到高的正确排列是

(A) $e^{\sqrt{x}}-1$，$\tan(\sin x)$，$\ln(1+x^2)$，$1-\cos x^2$．

(B) $\tan(\sin x)$，$e^{\sqrt{x}}-1$，$\ln(1+x^2)$，$1-\cos x^2$．

(C) $\ln(1+x^2)$，$\tan(\sin x)$，$1-\cos x^2$，$e^{\sqrt{x}}-1$．

(D) $\ln(1+x^2)$，$1-\cos x^2$，$e^{\sqrt{x}}-1$，$\tan(\sin x)$．

7.
$e^{\sqrt{x}}-1\sim\sqrt{x}$
$\tan(\sin x)\sim\sin x\sim x$
$\ln(1+x^2)\sim x^2$
$1-\cos x^2\sim\frac{1}{2}(x^2)^2=\frac{1}{2}x^4$

A 8．当 $x\to0$ 时，$\tan(3x)\ln(1+2x)$ 与 $\sin x^2$ 比较是_____的无穷小量．

(A) 同阶但不等价．　(B) 较高阶．　(C) 较低阶．　(D) 等价．

8. $\tan3x\ln(1+2x)$
$\sim3x\cdot2x$
$\sim6x^2$
$\sin x^2\sim x^2$

C 9．当 $x\to0$ 时，函数 e^x-x-1 是函数 x^2 的

(A) 高阶无穷小．　　(B) 低阶无穷小．

(C) 同阶非等价无穷小．　　(D) 等价无穷小．

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}$
洛 $\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$

B 10．已知当 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+ax^2}-1$ 与 $\sin^2x$ 是等价无穷小，则常数 a 的值是_____．

(A) 1．　(B) 2．　(C) 3．　(D) 4．

10. $\left.\begin{array}{l}\sin^2x\sim x^2\\ \sqrt{1+ax^2}-1\sim\frac{1}{2}ax^2\end{array}\right\}a=2$

D 1.当 $x\to0$ 时，$\alpha(x)=cx^k$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1-2x\arcsin x}-\sqrt{\cos2x}$ 是等价无穷小量，则 c,k 的取值分别为

1、由条件可知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-2x\arcsin x}-\sqrt{\cos2x}}{cx^k}=1$

一、有理化：$\dfrac{1-2x\arcsin x-\cos2x}{cx^k\cdot(\sqrt{1-2x\arcsin x}+\sqrt{\cos2x})}=\dfrac{1-\cos2x-2x\arcsin x}{cx^k\cdot2}$

下一页（续）

原式 $= \dfrac{1-[1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)]-2x(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3))}{2cx^k}$

$=1 \Rightarrow k=4,\ c=-\frac{1}{2}$

(A) $c=-1,k=2$.　　　　(B) $c=-\dfrac{1}{2},k=2$.

(C) $c=-1,k=4$.　　　　(D) $c=-\dfrac{1}{2},k=4$.

$-\frac{2}{3}x^4-\frac{1}{3}x^4$

$-x^4$

B

2. 设当 $x\to 0$ 时，$2\sin x-\sin 2x$ 是比 $x^n\cos x$ 高阶的无穷小，而 $x^n\cos x$ 是比 $\left((1+\sqrt{x})^x-1\right)$ 高阶的无穷小，则整数 n 的取值为

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

2. ① $2\sin x-\sin 2x$
$\sim 2\sin x-2\sin x\cos x$
$\sim 2\sin x(1-\cos x)=-x^3$

② $x^n\cos x=x^n$　③ $(1+\sqrt{x})^x-1=x\cdot\sqrt{x}$
$=x^{\frac{3}{2}}$

B

3. 当 $x\to 0$ 时，若 $\ln^\alpha\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$，$(\cos x-\cos 2x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小量，则 α 的取值范围是

3. ① $\ln^a(x+\sqrt{1+x^2}+1-1)=(x+\sqrt{1+x^2}-1)^a$

(A) $(2,+\infty)$.　　(B) $(1,2)$.　　(C) $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.　　(D) $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$.

② $(\cos x-2\cos^2x+1)=\cos x-\cos^2x+1-\cos^2x$
$=\cos x(1-\cos x)+(1-\cos^2x)=\frac{1}{2}x^2+x^2=\frac{3}{2}x^2$

B

4. 设 $\alpha_1=\sqrt{x}\left(e^{\sqrt[3]{x}}-1\right),\alpha_2=\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x},\alpha_3=\csc x-\cot x$. 当 $x\to 0^+$ 时，以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是

4. $a_1=\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{6}}$

$a_2=$ 泰勒展开 $=\frac{1}{72}x^2$

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　　(B) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2$.　　(C) $\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2$.　　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$.

$a_3=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}=\frac{\tan x-\sin x}{\sin x\tan x}=\frac{1}{2}x$

C

5. 设 a,b 为正常数，且当 $n\to\infty$ 时，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}$ 与 ae^{-bn} 为等价无穷小，求 a,b 的值.

(A) $a=1,b=1$　　　　(B) $a=1,b=2$

(C) $a=e^{\frac{1}{2}},b=1$　　　　(D) $a=e^{-\frac{1}{2}},b=1$

5. 原式 $=\dfrac{(1+\frac{1}{n})^{-n^2}}{ae^{-bn}}=\dfrac{e^{-n^2\ln(1+\frac{1}{n})}}{ae^{-bn}}=\frac{1}{a}\lim\limits_{n\to\infty}e^{bn-n^2\ln(1+\frac{1}{n})}$

$=$ 泰勒展开 $=\frac{1}{a}\lim\limits_{n\to\infty}e^{bn-n^2\left(\frac{2n-1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)}$

$=\frac{1}{a}\lim\limits_{n\to\infty}e^{bn-n+\frac{1}{2}}=1$　$\Rightarrow a=e^{\frac{1}{2}}$, $b=1$

(A) $c=-1,k=2$.

(B) $c=-\frac{1}{2},k=2$.

(C) $c=-1,k=4$.

(D) $c=-\frac{1}{2},k=4$.

2. 设当 $x\to 0$ 时，$2\sin x-\sin 2x$ 是比 $x^n\cos x$ 高阶的无穷小，而 $x^n\cos x$ 是比 $\left((1+\sqrt{x})^x-1\right)$ 高阶的无穷小，则整数 n 的取值为

(A) 1.　(B) 2.　(C) 3.　(D) 4.

3.当 $x\to 0$ 时，若 $\ln^{\alpha}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$，$(\cos x-\cos 2x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小量，则 α 的取值范围是

(A) $(2,+\infty)$.　(B) $(1,2)$.　(C) $\left(\frac{1}{2},1\right)$.　(D) $\left(\frac{1}{2},2\right)$.

4.设 $\alpha_1=\sqrt{x}\left(e^{\sqrt[3]{x}}-1\right),\alpha_2=\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x},\alpha_3=\csc x-\cot x$.当 $x\to 0^+$ 时，以上3个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　(B) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2$.　(C) $\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2$.　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$.

5.设 a,b 为正常数，且当 $n\to\infty$ 时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$ 与 ae^{-bn} 为等价无穷小，求 a,b 的值.

(A) $a=1,b=1$

(B) $a=1,b=2$

(C) $a=e^{\frac{1}{2}},b=1$

(D) $a=e^{-\frac{1}{2}},b=1$