7-3真题

1.（88-1;2）设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程

$$y''-3y'+2y=2e^x,$$

1 -3

且其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点的切线重合，求函数 $y=y(x)$.

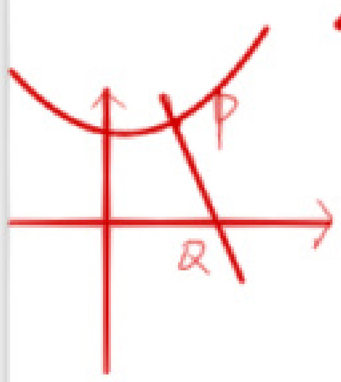
曲线 $y'=2x-1$，所以代入 $x=0$，$y'=-1$ $\Rightarrow$ $y'|_{x=0}=-1$，$y|_{x=0}=1$

解微分方程：$r^2-3r+2=0 \Rightarrow r_1=1$，$r_2=2$，通解 $y_1=c_1e^x+c_2e^{2x}$

设特解为 $y^*=xae^x$，代入原方程 $\Rightarrow$ $y=c_1e^x+c_2e^{2x}-2xe^x$

将条件代入：$y=e^x-2xe^x$

2.（91-1）（数一、二）在上半平面求一条向上凹的曲线，其上任一点 $P(x,y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数（Q 是法线与 x 轴的交点），且曲线在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴平行.



法线段PQ：$y=-\frac{1}{y'}(x-x_0)+y_0$，Q是交点，

令 $y=0$，$x_1=x_0+y_0'y_0$，长度为 $\sqrt{(x_1-x_0)^2+y_0^2}$

由于曲率 $k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{(y'y)^2+y^2}}$（因为任一点，所以用 x,y 代替 x_0,y_0）

$yy''=1+y'^2$ 令 $y'=p$ $\Rightarrow$ $\frac{dp}{dy}yp=1+p^2 \Rightarrow y=\sqrt{1+p^2}+C_1$

由于在 $(1,1)$ 处 $y'=0$，$\Rightarrow C_1=0 \Rightarrow y=\sqrt{1+p^2} \Rightarrow y'=\pm\sqrt{y^2-1} \Rightarrow \ln(y+\sqrt{y^2-1})=\pm(x+C)$，代入 $(1,1)$

$y+\sqrt{y^2-1}=e^{\pm(x-1)}$

3.（93-2）已知曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,-\frac{1}{2})$，且其上任一点 (x,y) 处的切线斜率为 $x\ln(1+x^2)$，则 $f(x)=$ $\frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1]$

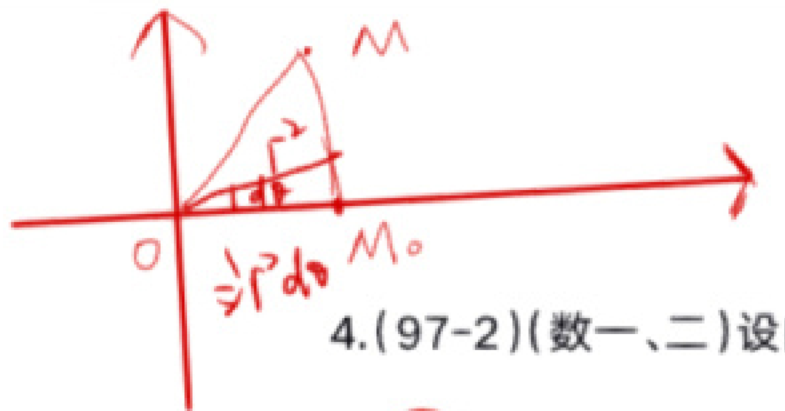
$y'=x\ln(1+x^2)$

直接积分：$y=\int x\ln(1+x^2)\,dx$

$=\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)\,dx^2$

$=\frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1]+C$

代入 $(0,-\frac{1}{2})$ $\Rightarrow$ $C=0$



4.(97-2)(数一、二)设曲线 L 的极坐标方程为 $r=r(\theta)$，$M(r,\theta)$ 为 L 上任一点，$M_0(2,0)$ 为 L 上一定点.若极径 OM_0,OM 与曲线 L 所围成的曲边扇形面积值等于 L 上 M_0,M 两点间弧长值的一半，求曲线 L 的方程.

$S=\frac{1}{2}\int_0^\theta r^2\cdot d\theta=\frac{1}{2}\int_0^\theta\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta$

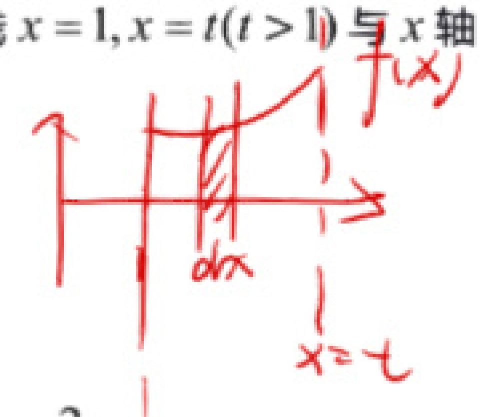
$r^2=\sqrt{r^2+(r')^2}\Rightarrow r'=\pm r\sqrt{r^2-1}$. $r(0)=2$

解方程： $d\theta=\int\pm\frac{1}{r\sqrt{r^2-1}}dr\Rightarrow\theta=\pm\arccos\frac{1}{r}+C$

$r=\sec(C\pm\theta)$ 代入 $\Rightarrow r=\sec(\frac{\pi}{3}\pm\theta)$

5.（98-3）设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续.若由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=1,x=t(t>1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体体积为

$$V(t)=\frac{\pi}{3}\left[t^2f(t)-f(1)\right].$$



试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程，并求该微分方程满足条件 $y|_{x=2}=\frac{2}{9}$ 的解.

列出旋转体公式：

$V(t)=\pi\int_0^t f^2(x)\cdot dx=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)]$

$\pi f^2(t)=\frac{\pi}{3}[2tf(t)+t^2f'(t)]\Rightarrow 3y^2=2xy+x^2y'$

$y'+2\frac{y}{x}=3(\frac{y}{x})^2$ 解得： $1-\frac{x}{y}=Cx^3$. 代入 $y|_{x=2}=\frac{2}{9}$

$C=-1\Rightarrow y=\frac{x}{1+x^3}$

6.（89-1;2）设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$，其中 $f(x)$ 为连续函数，求 $f(x)$.

$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt\Rightarrow f(0)=0$. $f'(0)=1$

$f''(x)=-\sin x-f(x)$

即 $y''=-\sin x-y\Rightarrow y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$

代入后

$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$

B 7.（91-1）若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)dt+\ln 2$，则 $f(x)$ 等于

（A）$e^x\ln 2.$ （B）$e^{2x}\ln 2.$

（C）$e^x+\ln 2.$ （D）$e^{2x}+\ln 2.$

$f'(x)=2f(x)$ （隐含 $\Rightarrow f(0)=\ln 2$）

$\Rightarrow f(x)=Ce^{2x}$ 代入 $C=\ln 2$

$f(x)=e^{2x}\cdot\ln 2$

8.（92-3）求连续函数 $f(x)$，使它满足

$$f(x)+2\int_0^x f(t)dt=x^2.$$

求导：$f'(x)+2f(x)=2x$

$y'+2y=2x$ 解得 $y=e^{-2x}[2(\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x})+C]$

代入 $f(0)=0 \Rightarrow C=\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}+x-\frac{1}{2}$

9.（92-3）求连续函数 $f(x)$，使它满足

$$\int_0^1 f(tx)dt=f(x)+x\sin x.$$

设 $tx=u$

$\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du=f(x)+x\sin x$

求导 $f(x)=f(x)+xf'(x)+2x\sin x+x^2\cos x$

$f'(x)=-2x\sin x-x^2\cos x$

积分可得：$f(x)=\cos x-x\sin x+C$