真题测试

A (90-3) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$______.

(A) 2　　(B) 0　　(C) 不会做

解析：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3\sqrt{n})-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}$ 抓大头

$=2$

A (94-2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)$.

(A) e^4　　(B) 1　　(C) 不会做

法一：

解析：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}e^{n\ln\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\ln\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})}{\frac{1}{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\sec^2(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})\cdot(\frac{-2}{n^2})}{-\frac{1}{n^2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{2}{\cos^2(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})}}$

$=e^4$

法二：

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^n$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^n$

$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}}$

$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}2n\cdot\frac{2}{n}}$

$=e^4$

A (02-3) 设常数 $a\neq\frac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$___.

(A) $\frac{1}{1-2a}$　　(B) $e^{\frac{1}{1-2a}}$　　(C) 不会做

解析：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n$

$=\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n(1-2a)}$

$=\frac{1}{1-2a}$

(96-1) 设 $x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\ (n=1,2,\cdots)$，

试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限.

证：① 令 $f(x)=\sqrt{6+x}$，则

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{6+x}}>0$ ∴ $f(x)\uparrow$

又 $x_1=10$. $x_2=\sqrt{6+x_1}=4$

∴ $x_1>x_2$

∴ $x_n>x_{n+1}$

$\{x_n\}\downarrow$

② $x_{n+1}>0$ 即 $\{x_n\}$ 下有界

则数列 $\{x_n\}$ 单调减且下有界，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

等式 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两端取极限得

$a=\sqrt{6+a}$

∴ $a=3$，$a=-2$ (舍)

综上 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$

(06-1;2) 设数列$\{x_n\}$满足

$$0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n (n=1,2,\ldots).$$

(I) 证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求该极限;

(II) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(1) $\because x_1\in(0,\pi)$ $\therefore x_2=\sin x_1\in(0,1]$

证: 假设: $x_1\in(0,1]$ 则 $x_{k+1}=\sin x_k\in(0,1]$

$\therefore x_n\in(0,1)$.

$\therefore \{x_n\}$有界

$\because x_{n+1}=\sin x_n<x_n$

$\therefore \{x_n\}\downarrow$

则数列$\{x_n\}$单调减且下有界，极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

$a=\sin a$

$\therefore a=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(2) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$

$=\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}$

$=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)}$

$=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\frac{t}{\sin t}\cdot\frac{\cos t\cdot t-\sin t}{t^2}}{2t}}$

$=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{t\cdot\cos t-\sin t}{2t^3}}$

$=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{t\cdot\left[1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right]-\left[t-\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right]}{2t^3}}$

$=e^{\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}{2}}$

$=e^{-\frac{1}{6}}$