7-3基础

1.设有连结点 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$，对于 $\overset{\frown}{OA}$ 上任一点 $P(x,y)$，曲线弧 $\overset{\frown}{OP}$ 与直线段 $\overline{OP}$ 所围图形的面积为 x^2，求曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$ 的方程.

设 $\overset{\frown}{OP}$ 为 $f(x)$. $S=\int_0^x f(x)-\frac{1}{2}xf(x)=x^2$. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-4$

$y=-4[x\ln x-x+c_1]+c_2x$. 代入 $(0,0)$, $(1,1)$ $\Rightarrow y=-4x|\ln x|+x$

2.求一曲线的方程，这曲线通过原点，并且它在点 (x,y) 处的切线斜率等于 $2x+y$.

设曲线为 $y=y(x)$. $y'=2x+y \Rightarrow y'-y=2x$

$y=e^{\int dx}[\int 2xe^{-\int dx}+c]=e^x(\int 2xe^{-x}dx+c)=-2x-2+ce^x$

代入 $y|_{x=0}=-2+c$ 得 $c=2$ $\Rightarrow y=2(e^x-x-1)$

3.试求 $y''=x$ 的经过点 $M(0,1)$ 且在此点与直线 $y=\frac{x}{2}+1$ 相切的曲线方程.

$y'=\frac{1}{2}x^2+c_1$.

$y=\frac{1}{6}x^3+c_1x+c_2$

$\Rightarrow y|_{x=0}=1$. $y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$. 代入 $\Rightarrow c_1=\frac{1}{2}$, $c_2=1$

$\therefore y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x+1$

4.设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $f(x)=e^x+\int_0^x tf(t)dt-x\int_0^x f(t)dt$, 求 $f(x)$.

$f'(x)=e^x+xf(x)-\int_0^x f(t)dt-xf(x)$

$f''(x)=e^x-f(x)$

$y''-y=e^x$ 解得 $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{2}e^x$

代入 $y|_{x=0}=1$. $y'|_{x=0}=1$

$\Rightarrow y=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x)$