1-3基础真题

1.（93-3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]=$____. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解：$\sqrt{\frac{(n+1)n}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{\frac{n^2+n}{2}-\frac{n^2-n}{2}}{\sqrt{\frac{n^2+n}{2}}+\sqrt{\frac{n^2-n}{2}}}$

$=\frac{n}{\sqrt{\cdots}+\sqrt{\cdots}}\overset{除n}{=}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

1

2.（97-2）求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$. 提 $-x$，因为 $x\to-\infty$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=\frac{2-1}{1}=1$

3.（06-1）$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$____. 2

解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{\frac{1}{2}x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{2}x}=2$

$\frac{1}{6}$

4.（08-1;2）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}\sin^3 x}{x^3}=\frac{1}{6}$

等价无穷小：$\lim\limits_{\triangle\to0}\triangle-\sin\triangle\sim\frac{1}{6}\triangle^3$

$-\frac{1}{6}$

5.（08-3）计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}\overset{洛}{=}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}=\frac{\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}}{2x}$

$=\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}=\frac{x(\cos x-1)+(x-\sin x)}{2x^3}=\frac{-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^3}{2x^3}=-\frac{1}{6}$

6.（98-1;2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ $-\frac{1}{4}$.

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1+(1-x)^{\frac{1}{2}}-1}{x^2}$ （典型的错误，打住的0/0）

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}}-(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{x}$

$=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{[(1+x)^{-\frac{1}{2}}-1]-[(1-x)^{-\frac{1}{2}}-1]}{x}$

$=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x}{x}=-\frac{1}{4}$

7.（07-2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$ $-\frac{1}{6}$.

原式 $=\frac{(\arctan x-x)-(\sin x-x)}{x^3}$

$=\frac{-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^3}{x^3}=-\frac{1}{6}$

1　8.（00-1）求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$.　看到 $e^{\frac{1}{x}}$，考虑左右.

原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2+\infty}{1+\infty^4}+\frac{\sin x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(2+\frac{\sin x}{-x}\right)=(2-1)=1$

$\frac{4}{3}$　9.（04-3）求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\cos^2 x\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot x^2}=\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}=\frac{2x-\frac{1}{2}\sin 4x}{4x^3}$

$=\frac{2-2\cos 4x}{12x^2}=\frac{8\sin 4x}{24x}=\frac{4}{3}$

$\frac{3}{2}$　10.（05-3）求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)$.

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}=\frac{1+2x-e^{-x}}{2x}=\frac{2+e^{-x}}{2}=\frac{3}{2}$

11.（90-1）设 a 为非零常数，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=$ e^{2a}.

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+a-x+a}{x-a}\right)^x$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax}{x-a}}$ $=2a$ $=e^{2a}$

$e^{-\frac{\pi}{2}}$

12.（91-1）求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.　　1^∞ 型

原式 $= \lim\limits_{x\to0^+}[1+(\cos\sqrt{x}-1)]^{\frac{\pi}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x}-1)\frac{\pi}{x}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}x\cdot\pi}{x}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$

C

13.（90-2）已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，其中 a,b 是常数，则

（A）$a=1,b=1$.　　　（B）$a=-1,b=1$.

（C）$a=1,b=-1$.　　　（D）$a=-1,b=-1$.

13. 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-ax(x+1)}{x+1}-b$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-ax}{x+1}-b$

结论极限存在为 0．所以

$a=1$ ✓

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}-b \Rightarrow b=-1$

或者 $a=0$ 且 $b=0$ （混退