1-2 基础过关

收敛 $\underset{\text{必要}}{\overset{\text{充分}}{\rightleftarrows}}$ 有界　反过来

B 1.数列 $\{x_n\}$ 有界是数列 $\{x_n\}$ 收敛的________条件.

（A）充分非必要　　（B）必要非充分

一样

（C）充分必要　　（D）既非充分又非必要

有极限 → 收敛

B 2. $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的______条件.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 → 有界

（A）充分非必要　　（B）必要非充分

（C）充分必要　　（D）既非充分又非必要

A 3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界的_______条件.

（A）充分非必要　　（B）必要非充分

无穷大 $\rightleftarrows$ 无界

（C）充分必要　　（D）既非充分又非必要

C 4. $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时右极限 $f(x_0^+)$ 及左极限 $f(x_0^-)$ 存在且相等是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的_____条件.

$f(x_0^+)=f(x_0^-) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

（A）充分非必要　　（B）必要非充分

（C）充分必要　　（D）既非充分又非必要

D 5.下列命题中正确的是

极大出大　出大等极大等

保号性

（A）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ge \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$，则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)\ge g(x)$.

（B）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$ 且存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)\ge g(x)$，则 $A\ge B$.

（C）若存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ge \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

（D）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>g(x)$.

D

6.下列命题中**不正确**的是

(A) 若数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+k} = a$，其中 k 为正整数.

(B) 数列 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a$.

(C) 数列 x_n 收敛（即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在），则 x_n 有界.

(D) 若 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，则 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内有界.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0.$

C A

7.设 $x_n \le z_n \le y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$

(A) 存在且等于零.　　(B) 存在但不一定等于零.

(C) 不一定存在.　　(D) 一定不存在.

D B

8.设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$，则下列命题中**不正确**的是

$+\infty+(-\infty)=+\infty$

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)] = +\infty$

$+\infty\cdot-\infty$

(B) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)] = \infty$ 有限个无穷大的积为无穷大

$+\infty - A$

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-h(x)] = +\infty$

$+\infty\cdot A$

(D) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)h(x)] = \infty$ 反：$A=0$　　$0\cdot\infty \to 0$

B

9.下列叙述**正确**的是

(A) 如果 $f(x)$ 在 x_0 某邻域内无界，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$. 无穷大 ≠ 无界

(B) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$，则 $f(x)$ 在 x_0 某邻域内无界.

(C) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

(D) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.

取到 ≠ 0.

6

D

10.设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to a} h(x)$ 不存在，则下列结论中正确的是

(A) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ 不存在.

(B) $\lim\limits_{x\to a}[g(x)+h(x)]$ 不存在. 需加记：存在 ± 不存在 = 不存在

(C) $\lim\limits_{x\to a} h(x)g(x)$ 不存在. 可能=0.　　存在 ×÷ 不存在 = 不一定

∞·有界　　不存在 ±×÷ 不存在 = 不一定

(D) $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{1}{x-a}\sin\frac{1}{x-a}+f(x)\right]$ 不存在.

有界

不存在

D

11. $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}e^{\frac{1}{x-2}}$，则当 $x\to 2$ 时有　e^{∞}型

(A) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$.　(B) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$

(C) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$　(D) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\neq\infty$ 但不存在

$\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x-2}e^{\frac{1}{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2^+}(x+2)\cdot+\infty=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-}(x+2)\cdot e^{-\infty}=0$.

无穷项

B

12.设 $x_n=\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^2}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=$_____.

(A) $\frac{3}{4}$　(B) $\frac{4}{3}$　(C) 1　(D) ∞

$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)x_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^2}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$

$\frac{3}{4}x_n=\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^2}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2n}}\right)$

$\frac{3}{4}x_n=\left(1-\frac{1}{2^8}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^3}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{n}}\right)$

$\frac{3}{4}x_n=\left(1-\frac{1}{2^{16}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2n}}\right)$

$\frac{3}{4}x_n=\left(1-\frac{1}{2^{4n}}\right)$

$x_n=\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{2^{4n}}\right)$

$n\to\infty$时，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{2^{4n}}\right)=\frac{4}{3}$

A

13.设 $\alpha>0,\beta>0$ 为常数，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}e^{-\beta x}=$ A .

(A) 0　(B) $\frac{\alpha}{\beta}$　(C) $\alpha-\beta$　(D) ∞

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{\beta x}}=0$　$x\to\infty$时，$\ln^{\alpha}x<<x^{\beta}<<a^{x}$

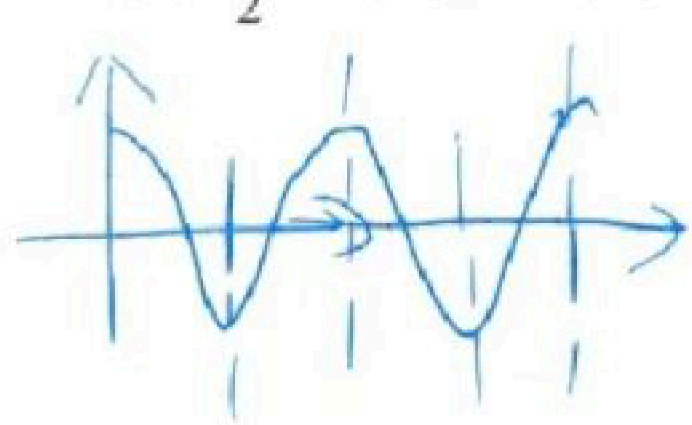
C

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sin n}{n}\right)^{\cos n\pi}=$ C .

∞　$\frac{1}{n}\cdot\sin n$

0·有界

(A) 2　(B) $\frac{1}{2}$　(C) 1　(D) 不存在



7

D

15. 当 $x \to 1$ 时，函数 $\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1} e^{\frac{1}{\ln x}}$ 的极限

e^{∞}

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} e^{\frac{1}{\ln x}}$

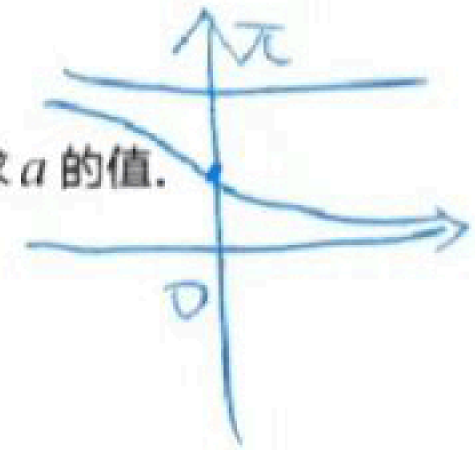
（A）等于 2.　　（B）等于 0.

（C）为 ∞.　　（D）不存在但不为 ∞.

B

16. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\left[a\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，求 a 的值.

$\frac{1}{x}\to\infty$



$\because x\to0 \quad \therefore \frac{1}{x}\to\infty$

当 $\frac{1}{x}\to+\infty$ 时，$\operatorname{arccot}\frac{1}{x}\to0$

$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

当 $\frac{1}{x}\to-\infty$ 时，$\operatorname{arccot}\frac{1}{x}\to\pi$

$\lim\limits_{x\to0}\left[\pi a+(1-x)^{\frac{1}{x}}\right]$

$=\pi a+e^{-1}$

$\therefore e=\pi a+e^{-1}$

$a=\dfrac{e^2-1}{\pi e}$

（A）$\dfrac{1-e^2}{\pi e}$　　（B）$\dfrac{e^2-1}{\pi e}$

（C）$\dfrac{2e}{\pi}$　　（D）$-\dfrac{2e}{\pi}$

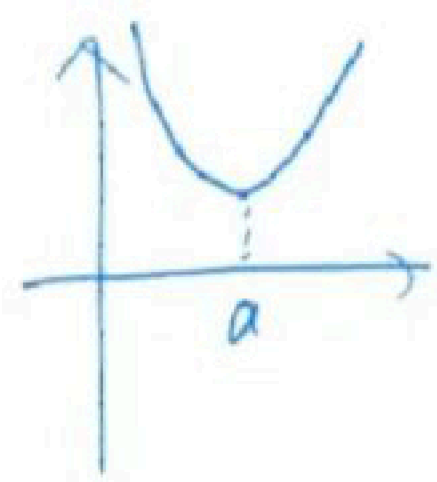
极大函大.

D

17. 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{|x-a|}=1$，则在 $x=a$ 处

$\because \dfrac{f(x)-f(a)}{|x-a|}>0$

$\therefore f(x)>f(a)$



（A）$f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq0$.

（B）$f(x)$ 取得极大值.

（C）$f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)=0$.

（D）$f(x)$ 取得极小值.

~~B~~ A

18. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

夹逼准则

分母放大　　分母缩小

$\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n}\le\cdots\cdots\le\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+1}$

$\dfrac{1}{2}\le\cdots\cdots\le\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n^2+n}{n^2+1}$

$\le\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}\to1$

（A）0　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）1　　（D）∞

B

19. 已知 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]}{x}=$ ________.

（A）0　　（B）1

（C）不存在但不是 ∞　　（D）∞

$x-1<[x]\le x$

$\therefore \dfrac{x-1}{x}<\dfrac{[x]}{x}\le1$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$1 \qquad 1$

A

20. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(-n)^n}$.

（A）0　　（B）1

（C）不存在但不是 ∞　　（D）∞

8

C

21. “对任意给定的$\varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数N，当$n \geq N$时，恒有$(x_n-a)^2 \leq \varepsilon$”是数列$\{x_n\}$收敛于$a$的

极限定义 ⟺ 收敛

（A）充分条件但非必要条件.

$\forall \varepsilon>0, \exists N>0$，当$n>N$时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon$.

（B）必要条件但非充分条件.

（C）充分必要条件.

（D）既非充分条件又非必要条件.

BA

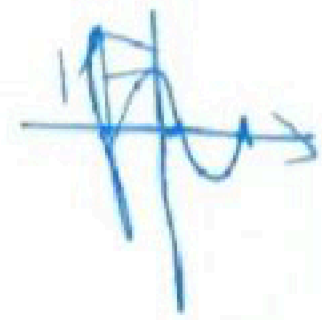
22. 设$\{x_n\}$是数列，下列命题中正确的个数是

①若$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a, \lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=-a$. 个例

②若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a, \lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=-a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=a$. $-a \quad a \quad -a \quad a \quad -a$

③若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

$x_n = n\pi$ $\quad \infty$



④若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$.

（A）1 $\frac{1}{n}$ （B）2 （C）3 （D）4

$\lim\limits_{n\to 0}\sin\frac{1}{n}=0$

DA

23. 设$\cos x-\cos^3 x = x\cdot \sin\alpha(x)$，其中$|\alpha(x)|<\frac{\pi}{2}$，则当$x\to 0$时，$\alpha(x)$是

（A）比x高阶的无穷小量.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\sin^2 x}{x\sin\alpha(x)}$

（B）比x低阶的无穷小量.

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\alpha(x)} = 1$

（C）与x同阶但不等价的无穷小量.

$x \sim \alpha(x)$

$\because x\to 0, \ \alpha(x)\to 0$

（D）与x等价的无穷小量.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x} = 1$

DC

指

24. 设$f(x)=\ln(1+e^x), g(x)=\ln^2 x, h(x)=e^{\sqrt{x}}$，则当$x$充分大时有

$x \quad \infty$

（A）$g(x)<h(x)<f(x)$. （C）$f(x)<g(x)<h(x)$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+e^x)$

（B）$h(x)<g(x)<f(x)$. （D）$g(x)<f(x)<h(x)$.

$\to \ln e^x = x$

“对幂指”

9

B

25.设数列的通项为 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n!}}{2^n}, & n\text{为奇数},\\ \dfrac{n^n}{n!}, & n\text{为偶数},\end{cases}$ 则当 $n\to\infty$ 时，x_n 是

(A) 无穷小量.

(B) 无穷大量.

(C) 有界变量但不是无穷小量.

(D) 无界变量但不是无穷大量.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\sqrt{n!}}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2^n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n!}}{2^n}$

由 $\ln^\alpha n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{2^n}=0+\infty=\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{n!}=\infty$

10