1.试求函数 $y=\int_0^x \sin t dt$ 当 $x=0$ 及 $x=\frac{\pi}{4}$ 时的导数.

$y'=\sin x$ 代入 $x=0$ 和 $x=\frac{\pi}{4}$，分别为 0 和 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2.求由参数表达式 $x=\int_0^t \sin u du, y=\int_0^t \cos u du$ 所确定的函数对 x 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\cos t}{\sin t}=\cot t$

3.求由 $\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t dt=0$ 所决定的隐函数对 x 的导数 $\frac{dy}{dx}$

对 x 求导： $e^y\cdot y'+\cos x=0$

$\Rightarrow y'=\frac{-\cos x}{e^y}$

4.当 x 为何值时，函数 $I(x)=\int_0^x te^{-t^2}dt$ 有极值？

$I'(x)=xe^{-x^2}$，当 $I'(x)=0$ 时，$x=0$

在 $x=0$ 处有极值。

5.证明 $f(x)=\int_1^x \sqrt{1+t^3}dt$ 在 $[-1,+\infty)$ 上是单调增加函数，并求 $\left(f^{-1}\right)'(0)$

$f'(x)=\sqrt{1+x^3}$ $(x>-1)$，当 $x=1$ 时，$f(1)=0$

$\therefore (f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

6.求下列极限：

① $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$； ② $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1}=1$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot e^{x^2}}{xe^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}}{e^{x^2}+x\cdot e^{x^2}\cdot 2x}$

$=2$

7.设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0,1),\\ x, & x\in[1,2].\end{cases}$ 求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $[0,2]$ 上的表达式，并讨论 $\Phi(x)$ 在 $(0,2)$ 内的连续性.

$\Phi(x)=\begin{cases}\int_0^x t^2 dt=\frac{1}{3}x^3\\ \int_0^1 t^2 dt+\int_1^x t\cdot dt=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}(x^2-1)\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\Phi(x)=\frac{1}{3}=\lim\limits_{x\to 1^+}\Phi(x)=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \Phi(x)$ 在 $(0,2)$ 连续

8.设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin x, 0\le x\le \pi,\\ 0, x<0\text{或}x>\pi.\end{cases}$ 求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式.

$$\phi(x)=\begin{cases}\int_0^x \frac{1}{2}\sin t\cdot dt=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2} & x\in[0,\pi]\\ \int_0^\pi \frac{1}{2}\sin t\cdot dt+\int_\pi^x 0\cdot dt=1 & x>\pi\\ \int_0^x 0\, dt=0\end{cases}$$

9.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $f'(x)\le 0$，$F(x)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$.证明在 (a,b) 内有 $F'(x)\le 0$.

$$F'(x)=\frac{-1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)\cdot dt+\frac{1}{x-a}f(x)$$

$$=\frac{1}{x-a}\left(f(x)-f(\xi)\right),\quad \xi\in(a,x)$$

由于 $f'(x)\le 0$，$f(x)\downarrow$，所以存在 $f(x)-f(\xi)\le 0$

证毕

10.设 $F(x)=\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}dt$，求 $F'(0)$.

$F(0)=0$. $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

11.设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ 证明函数 $y=e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt$ 满足方程 $\dfrac{dy}{dx}+y=f(x)$，并求 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$.

$$\frac{dy}{dx}=-e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt+e^{-x}\cdot e^x f(x)$$

$$\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}\cdot e^x f(x)=f(x).\ \text{证毕}$$

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\frac{\int_0^x e^t f(t)dt}{e^x}$$

$$=\frac{e^x f(x)}{e^x}=f(x)=1$$