8-3基础

1.求函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值.

常规方法：$f_x' = 4-2x$，$f_y' = -4-2y$

$f_{xx}'' = -2$，$f_{yy}'' = -2$，$f_{xy}'' = 0$

求驻点 $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$ ⇒ 驻点为 $(2,-2)$，$AC-B^2=4>0$，极大值点 $(A<0)$

$f(2,-2)=8$

2.求函数 $f(x,y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$ 的极值.

$f_x' = (4y-y^2)(6-2x)$、$f_y' = (6x-x^2)(4-2y)$

$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$ ⇒ 驻点 $(0,0),(0,4),(3,2)(6,0),(6,4)$

$f_{xx}'' = (4y-y^2)(-2)$，$f_{yy}'' = (6x-x^2)(-2)$，$f_{xy}'' = (6-2x)(4-2y)$

每一个都代入 $AC-B^2$，发现只有点 $(3,2)$ 有极值，$A=-8<0$ 为极大值

$f(3,2)=36$

3.求函数 $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值.

$f_x = 2e^{2x}(x+y^2+2y)+e^{2x}$，$f_y = e^{2x}(2y+2)$

$\begin{cases} 2e^{2x}(x+y^2+2y)+e^{2x} \\ e^{2x}(2y+2)=0 \end{cases}$ ⇒ 驻点 $(\frac{1}{2},-1)$，由 $f_{xx}'' = 4e^{2x}(x+y^2+2y)+2e^{2x}+2e^{2x}$

$f_{yy}'' = e^{2x}\cdot 2$，$f_{xy}'' = 2e^{2x}(2y+2)$

代入 $AC-B = 2e\cdot 2e-0>0$，$A>0$ 所以为极小值，$f(\frac{1}{2},-1) = -\frac{e}{2}$

4.求函数 $z=xy$ 在适合附加条件 $x+y=1$ 下的极大值.

将附加条件直接使用

$z = x(1-x)$

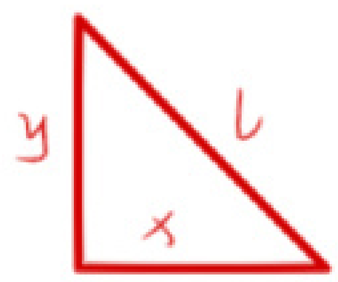
$z' = 1-2x = 0$ ⇒ $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$

$z'' = -2<0$

所以 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 为极大值点

$z_{max} = \frac{1}{4}$

5.从斜边之长为 l 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形.



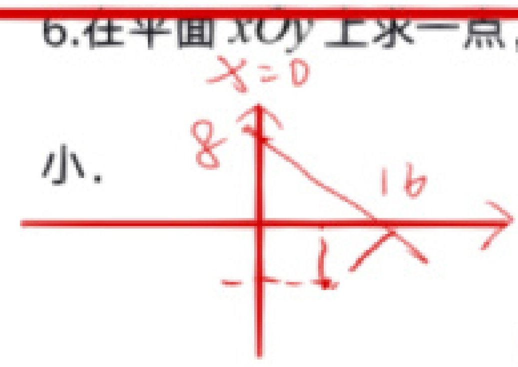
设两直角边分别为x、y.

由已知条件 $F=x+y+l$

附加条件 $\sqrt{x^2+y^2}=l \Rightarrow x^2+y^2=l^2$

$$\begin{cases}1+2\lambda x=0\\ 1+2\lambda y=0\\ x^2+y^2=l^2\end{cases} \Rightarrow x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}l$$

6.在平面 xOy 上求一点，使它到 $x=0, y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三直线的距离平方之和为最小.



设点为 (x,y) 则

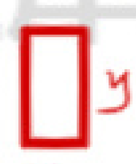
$$F=x^2+y^2+\left(\frac{|x+2y-16|}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$\begin{cases}F_x=2x+\frac{2}{5}(x+2y-16)\\ F_y=2y+\frac{4}{5}(x+2y-16)\end{cases} \Rightarrow \text{驻点}\left(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$$

唯一，所以为所求.

7.将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体，问矩形的边长各为多少时，才可使圆柱体的体积为最大?

$2(x+y)=2p$



$x+y=p$ （附加条件）

$V=\pi x^2y=\pi x^2(p-x)$

$V'=\pi(2px-3x^2)=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}p$ （0舍去）☆

所以体积最大时，分别为 $\frac{2}{3}p$ 和 $\frac{p}{3}$

8.抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求这椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值.

平面 $z=1-x-y$，$z=x^2+y^2$

所以设点为 (x,y)，$r^2=x^2+y^2+z^2$

设 $L=x^2+y^2+z^2+\lambda(z-x^2-y^2)+\mu(x+y+z-1)$

$$\begin{cases}L_x=2x-2\lambda x+\mu=0\\ L_y=2y-2\lambda y+\mu=0\\ L_z=2z+\lambda+\mu=0\end{cases} \Rightarrow (1-\lambda)(x-y)=0$$

所以 $\lambda=1$ 或 $x=y$

但是 $\lambda=1 \Rightarrow \mu=0$，$z=-\frac{1}{2}<0$ 错误. 代入 $x=y \Rightarrow \begin{cases}z=2x^2\\ 2x+z=1\end{cases} \Rightarrow x=y=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

$M_1\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}\right)$ 或 $M_2\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3}\right) \Rightarrow d_{max}=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$，$d_{min}=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$