1.判定下列各反常积分的收敛性，如果收敛，计算反常积分的值：

① $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$; (P函数. p>1. 收敛)

$=-\frac{1}{3x^3}\Big|_1^{\infty}$

$=\frac{1}{3}$

② $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; (P函数. p<1. 发散)

③ $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx(a>0)$; (先求后验)

$=-\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}$

$=\frac{1}{a}$

④ $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}$;

$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)}+\int_0^{+\infty}\frac{1-x}{1+x^2}\right)$ (收)

$=\frac{1}{2}\left[\ln(1+x)\Big|_0^{+\infty}+\arctan x\Big|_0^{+\infty}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty}\right]=\frac{\pi}{4}$

⑤ $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;

$=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(1-x^2)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=-\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1$

$=1$

⑥ $\int_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}$; 瑕点断开

$=\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^2}+\int_1^2\frac{dx}{(1-x)^2}$

$=$ 发散

⑦ $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

$\int_1^e\frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}=\arcsin(\ln x)\Big|_1^e$

$=\frac{\pi}{2}$ (收)

⑧ $\int_0^1\ln xdx$.

$=x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1dx$

$=-\lim_{x\to0^+}x\ln x-1$

$=-1$

2.当 k 为何值时，反常积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛？当 k 为何值时，反常积分发散？又当 k 为何值时，这反常积分取得最小值？

$\Phi\int_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{(\ln x)^k}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dt}{t^k}$

若 $k\le1$. 发散. $k>1$. 收敛.

② $\int_{\ln2}^{+\infty}\frac{1}{t^k}dt=\frac{1}{-k+1}t^{-(k-1)}\Big|_{\ln2}^{+\infty}=\frac{1}{k-1}(\ln2)^{-k+1}=\frac{1}{(k-1)(\ln2)^{k-1}}$

设 $f(k)=\frac{1}{(k-1)(\ln2)^{k-1}}$

$f'(k)=-\frac{1+(k-1)\ln\ln2}{(k-1)^2(\ln2)^{k-1}}$

若 $f'(k)=0$, $k=1-\frac{1}{\ln\ln2}$

而 $k>1-\frac{1}{\ln\ln2}$. $f'(k)>0$

$1<k<1-\frac{1}{\ln\ln2}$. $f'(k)<0$

$\Rightarrow k=1-\frac{1}{\ln\ln2}$. 取最小值.

3.判定下列反常积分的收敛性：

① $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$;

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}}{\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}=1$. 时 $\frac{1}{x^4}$ 收敛

$\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$ 收敛

② $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}dx$;

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=1$. 收敛

③ $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$;

时 $\frac{1}{1+x|\sin x|}\ge\frac{1}{1+x}$

而 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x}dx$. 发散 $\ln(1+x)\Big|_0^{+\infty}$ 发散

$\Rightarrow$ 原门发散

④ $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}dx$;

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x\arctan x}{1+x^3}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{\frac{1}{x^3}+1}$

$=\frac{\frac{\pi}{2}}{1}=\frac{\pi}{2}$

而 $\frac{1}{x^2}$ 收. 则原门收敛

⑤ $\int_1^2 \frac{dx}{(\ln x)^3}$; 令 $\ln x = t$

$\int_0^{\ln 2} \frac{e^t}{t^3} dt = \ln(\ln 2) + \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{(\ln 2)^2}$

$-\lim_{t \to 0^+} \left[\frac{e^t(t^2 \ln t + 2t + 2}{4t^2} \right] = -\infty$. 发散

⑥ $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}} dx$.

$\lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{x^4}{(1-x^4)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+x}}$

$= \frac{1}{2}$

由于 $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ 收 $\Rightarrow$ 原试收敛

4.设反常积分 $\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛．证明反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 绝对收敛．

由于 $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{ab}$

$\frac{f^2(x) + \frac{1}{x^2}}{2} \geq \left| \frac{f(x)}{x} \right|$

而 $\int_1^{+\infty} f(x)$ 和 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ 收敛.

$\Rightarrow$ 左边收敛 $\Rightarrow$ 右边收敛

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 绝对收敛.