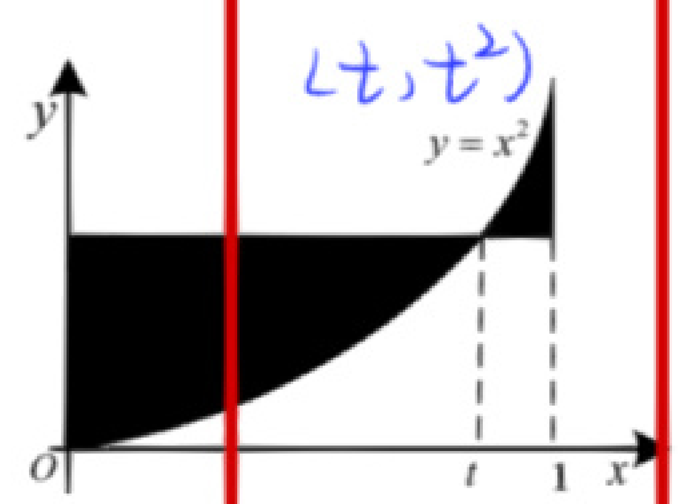
6-1真题

1.（87-3）考查函数 $y=x^2,0\le x\le 1$.问:

（1）t 取何值时，图中阴影部分的面积 S_1 与 S_2 之和 $S=S_1+S_2$ 最小?

（2）t 取何值时，面积 $S=S_1+S_2$ 最大?



(1). $S_1=\int_0^t t^2-x^2\,dx$

$S_2=\int_t^1 x^2-t^2\,dx$

$S=S_1+S_2$

$=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$

$s'=4t^2-2t=2t(2t-1)$

所以 $t=\frac{1}{2}$ 时. S取最小值.

(由于 $t\in[0,1]$)

(2) 由于 $t\in(0,\frac{1}{2})$

S↓. $t\in(\frac{1}{2},1)$. S↑

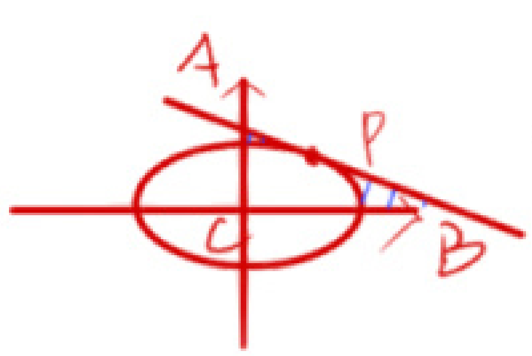
所以看两个点.

当 $t=0$ 时. $S=\frac{1}{3}$

$t=1$ 时. $S=\frac{2}{3}$

所以 $t=1$. S最大

2.（90-2）在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的第一象限部分上求一点 P，使该点处的切线、椭圆及两坐标轴所围图形面积为最小（其中 $a>0,b>0$）.



2、面积为 $S_{\triangle ABC}-\frac{1}{4}S_{椭圆}$.

重要结论(高中): 椭圆切线方程: $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$

$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{y_0}\cdot\frac{a^2}{x_0}-\frac{1}{4}\pi ab$

所以求 $\frac{1}{2}a^2b^2\cdot\frac{1}{y_0x_0}$ 最小值.

$f(x_0)=x_0y_0=x_0\cdot b\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}$ $\Rightarrow f'(x_0)=\frac{b(a^2-2x_0^2)}{a\sqrt{a^2-x_0^2}}$

当 $f'(x_0)=0$. 得 $x_0=\frac{a}{\sqrt{2}}$. 此时 x_0y_0 取最小值. $P(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$

3.（02-2）位于曲线 $y=xe^{-x}(0\le x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界图形的面积是______.

$S=\int_0^{+\infty}xe^{-x}\,dx$

$=-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-x}\,d(-x)$

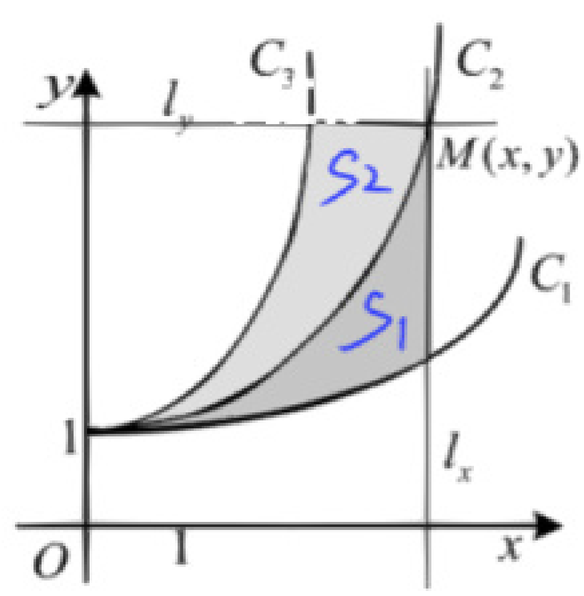
$=1$

4.（03-2）设曲线的极坐标方程为 $\rho = e^{a\theta}(a>0)$，则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为 $\frac{1}{4a}(e^{4a\pi}-1)$.

$$S=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\rho^2 d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}e^{2a\theta}d\theta=\frac{1}{4a}(e^{4a\pi}-1)$$

5.（05-2）如图，C_1 和 C_2 分别是 $y=\frac{1}{2}(1+e^x)$ 和 $y=e^x$ 的图象，过点 $(0,1)$ 的曲线 C_3 是一单调增函数的图象．过 C_2 上任一点 $M(x,y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y．记 C_1,C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$；C_2,C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$．如果总有 $S_1(x)=S_2(y)$，求曲线 C_3 的方程 $x=\varphi(y)$.



5. 求两部分面积：

$$S_1=\int_0^x e^x-\frac{1}{2}(1+e^x)dx$$ （注意x和里面的x不一样）

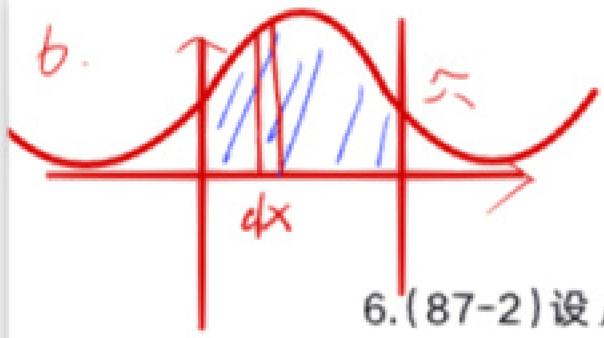
$$S_2=\int_1^y \ln y-\varphi(y)dy$$

由于 $S_1=\frac{1}{2}(e^x-x-1)=\frac{1}{2}(y-\ln y-1)=S_2=y\ln y-y+1-\int_1^y\varphi(y)dy$

$$\int_1^y\varphi(y)dy=y\ln y-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}\ln y+\frac{3}{2}$$

$$\varphi(y)=\ln y+1-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y}$$ （这里是对上下限中的y求导）

$$=\ln y+\frac{1}{2y}-\frac{1}{2}$$



6.(87-2)设 D 是由曲线 $y=\sin x+1$ 与三条直线 $x=0, x=\pi, y=0$ 围成的曲边梯形，求 D 绕 Ox 轴旋转一周所生成的旋转体的体积.

微元法：$V=\int_0^\pi \pi y^2\cdot dx=\int_0^\pi \pi(\sin x+1)^2 dx=\frac{3}{2}\pi^2+4\pi$

B

7.（88-2）由曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}} x(0\le x\le \pi)$ 与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

（A）$\frac{4}{3}$.　（B）$\frac{4}{3}\pi$.　（C）$\frac{2}{3}\pi^2$.　（D）$\frac{2}{3}\pi$.

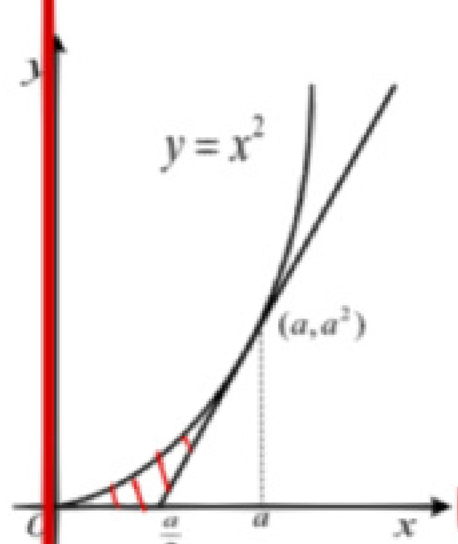
7. $\int_0^\pi \pi \sin^3 x\, dx=-\pi\int_0^\pi (1-\cos^2 x)d\cos x$
$=\frac{4}{3}\pi$

8.（88-3）在曲线 $y=x^2$ $(x\ge 0)$ 上某点 A 处作一切线，使之与曲线以及 x 轴所围图形（如图）的面积为 $\frac{1}{12}$，试求：

（1）切点 A 的坐标；

（2）过切点 A 的切线方程；

（3）由上述所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.



(1) $S=\int_0^a x^2\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a^2$
$=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{4}a^3=\frac{1}{12}a^3=\frac{1}{12}$

$a=1$. $A(1,1)$

(2) 切线方程

$y=2(x-\frac{1}{2})=2x-1$

(3). 大体积－小体积

$V=\int_0^a \pi x^4\cdot dx-\int_{\frac{a}{2}}^a (2x-1)^2\cdot\pi\cdot dx$

$=\frac{\pi}{30}$

9. $V=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\frac{\pi^2}{2}$

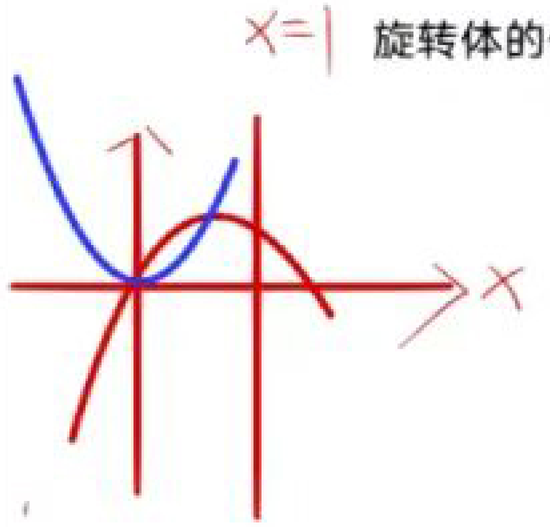
C

9.（89-2）曲线 $y=\cos x\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴所围成的图形，绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为

（A）$\frac{\pi}{2}$.　（B）π.　（C）$\frac{\pi^2}{2}$.　（D）π^2.

10.（89-2）设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，当 $0\le x\le 1$ 时，$y\ge 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$.试确定 a,b,c 的值，使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

x=1



$S=\int_0^1 ax^2+bx+c\,dx$. 由于过 $(0,0)$. $\Rightarrow c=0$

$=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}$

$V=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2\,dx$

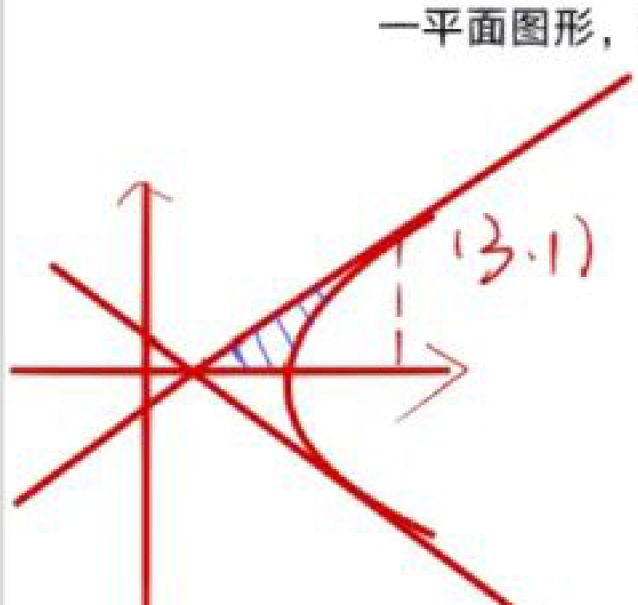
$=\pi\left(\frac{a^2}{5}x^5+\frac{ab}{2}x^4+\frac{b^2}{3}x^3\right)\Big|_0^1$

代入 $b=\frac{2}{3}(1-a)$ $\Rightarrow V=\pi\left(\frac{2}{135}a^2+\frac{1}{27}a+\frac{4}{27}\right)$

$V'=\pi\left(\frac{4}{135}a+\frac{1}{27}\right)$ 此时 $a=-\frac{5}{4}$. V取最小. $b=\frac{3}{2}$. $c=0$

11.（90-1;2）过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形，求此图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

y>0. 所以只有上半部分.



11. 求切线方程：$y'=\frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{1}{2}}$

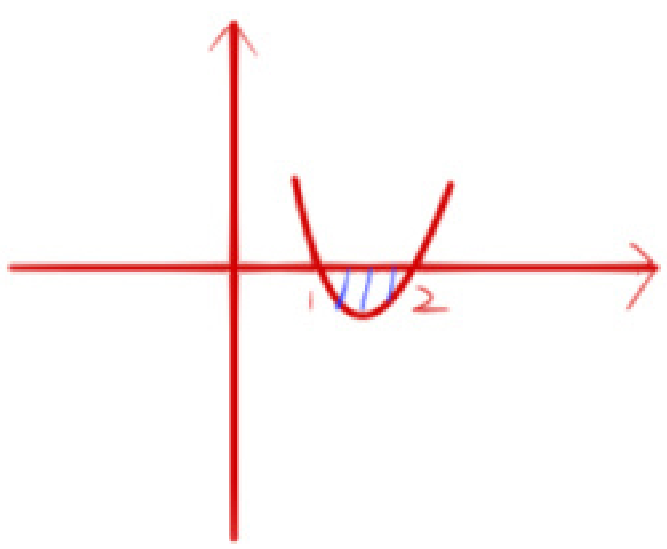
$k=\frac{y}{x-1}=\frac{\sqrt{x-2}}{x-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ $\Rightarrow x=3$

方程为 $y-1=\frac{1}{2}(x-3)$

求体积：$V=\pi\int_1^3\left(\frac{1}{2}(x-3)+1\right)^2dx-\pi\int_2^3 x-2\,dx$

$=\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\pi=\frac{1}{6}\pi$

12.（91-2）曲线 $y=(x-1)(x-2)$ 和 x 轴围成一平面图形，求此平面图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积.



$$\boxed{\begin{aligned} 12.\quad V &= 2\pi\int_1^2 x(1-x)(x-2)\,dx \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}}$$