8-1基础

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}$；

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy(\sqrt{2-e^{xy}}+1)}{1-e^{xy}}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy\cdot 2}{-xy}$

$=-2$

（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$；

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$=0$

（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$；设由kx趋于0

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+kx}{x-kx}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+k}{1-k}$（不同k不一样）

不存在

（4）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$；

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2\cdot x^2}{x^2x^2+(x-x)^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4}{x^4}=1$

沿y=x

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4}{x^4+4x^2}=0\neq1$

沿y=-x

（5）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$．（由夹逼）

$0\leq\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\left|\dfrac{xy}{\sqrt{2xy}}\right|=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{xy}\right|=0$

2.计算下列偏导数

（1）$z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\tan\frac{x}{y}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{\tan\frac{x}{y}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{y}\cdot\left(\dfrac{-x}{y^2}\right)=\dfrac{-2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}$

（2）$z=(1+xy)^y$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y(1+xy)^{y-1}\cdot y$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\cdot\left[\ln(1+xy)+\dfrac{xy}{1+xy}\right]$

（3）$u=x^{\frac{y}{z}}$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln(x^{\frac{1}{z}})$

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln(x^y)\cdot-\dfrac{1}{z^2}$

（4）设$T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，则$l\dfrac{\partial T}{\partial l}+g\dfrac{\partial T}{\partial g}=$ ______．

$\dfrac{\partial T}{\partial l}=2\pi\left(\dfrac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}=\pi\left(\dfrac{l}{g}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{1}{g}\right)=\dfrac{\pi}{\sqrt{gl}}$

$\dfrac{\partial T}{\partial g}=2\pi\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}}\left(-\dfrac{l}{g^2}\right)=-\dfrac{\pi}{g}\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

$l\dfrac{\partial T}{\partial l}+g\dfrac{\partial T}{\partial g}=0$

3.计算下列各题

（1）设$z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，则$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ $2z$．

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\left[-\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=\dfrac{1}{x^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{y^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$

所以$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$

（2）设$f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，则

$f_x(x,1)=$ 1．

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=1+(y-1)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{y}}\cdot\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=1+\dfrac{y-1}{2\sqrt{x}\sqrt{y-x}}$

代入y=1．⇒ $f_x(x,1)=1$

4.设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xx}(0,0,1)$, $f_{xz}(1,0,2)$, $f_{yz}(0,-1,0)$ 及 $f_{zzx}(2,0,1)$.

$f_x=y^2+2zx$. $f_{xx}=2z=2$. $f_y=2xy+z^2$. $f_{yz}=2z=0$

$f_{xz}=2x=2$; $f_z=2yz+x^2$. $f_{zz}=2y$ $f_{zzx}=0$

5.设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=$ ________.

$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}$. $\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3}$. $\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3}$

结论 $=\frac{2}{r}$

6.求下列函数的全微分

（1） $z=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$dz=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(y\,dx-x\,dy)$

（2） $u=x^{yz}$

$du=yz\cdot x^{yz-1}dx+x^{yz}\cdot\ln x\cdot z\,dy+x^{yz}\cdot\ln x\cdot y\,dz$.

（3）设 $z=\ln(1+x^2+y^2)$，则 $dz|_{(1,2)}=$ ________ $\frac{1}{3}dx+\frac{2}{3}dy$

7.求函数 $z=\frac{y}{x}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

全增量: $\Delta z=\frac{y+\Delta y}{x+\Delta x}-\frac{y}{x}=\frac{1-0.2}{2+0.1}-\frac{1}{2}\approx 0.119$

全微分: $dz=-\frac{y}{x^2}\Delta x+\frac{1}{x}\Delta y$

$=-0.125$

8.（02-1）考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质

A

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续;

② $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续; 连续 ⇒ 可微 ⇒ 连续

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微分;

④ $f(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$ 存在.

若用 $P\Rightarrow Q$, 表示可由性质 P 推出性质 Q，则下列四个选项中正确的是（ ）.

（A）②⇒③⇒①　　（B）③⇒②⇒①

（C）③⇒④⇒①　　（D）③⇒①⇒④

B

9.（08-3）已知 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则

（A）$f_x'(0,0), f_y'(0,0)$ 都存在.

（B）$f_x'(0,0)$ 不存在，$f_y'(0,0)$ 存在.

（C）$f_x'(0,0)$ 存在，$f_y'(0,0)$ 不存在.

（D）$f_x'(0,0), f_y'(0,0)$ 都不存在.

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{|x|}-1}{x}\ (\text{不存在})$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y^2}-1}{y}=0$$

C

10.（07-2）二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是

（A）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$. $\Rightarrow$ 连续

（B）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[f(x,0)-f(0,0)]}{x}=0$，

且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{[f(0,y)-f(0,0)]}{y}=0$.

偏导数存在 $\not\Rightarrow$ 可微

（C）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$. C.原式 $\Rightarrow f_x'(0,0)=0$ 和 $f_y'(0,0)=0$

（D）$\lim\limits_{x\to 0}[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)]=0$，

且 $\lim\limits_{y\to 0}[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)]=0$.

只能推出 $f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$ 存在