

1-2 真题测试

C 1. (87-2) 函数 $f(x) = x \sin x$

(A) 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷大.

(B) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

(C) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

(D) 当 $x \rightarrow \infty$ 时有有限极限.

$\exists M > 0$.

$$f(6n\pi + \frac{\pi}{2}) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} > M.$$

\therefore 无界

D 2. (91-3) 设数列的通项为 $x_n = \begin{cases} \frac{n^2 + \sqrt{n}}{n}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, x_n 是

(A) 无穷大量.

(B) 无穷小量.

(C) 有界变量.

(D) 无界变量.

B 3. (88-3) 若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ 都存在, 则极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必存在.

(A) 上述论断是正确的.

(B) 上述论断是错误的.

(C) 上述论断无法确定对错.

(D) 我不会做.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x)}{f(x)}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$$

但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 要满足 $\neq 0$.

D B 4. (93-2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是

(A) 无穷小.

(B) 无穷大.

(C) 有界的, 但不是无穷小.

(D) 无界的, 但不是无穷大.

$\forall M > 0$

$$\text{当 } \frac{1}{x} = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 时, } f(x) = (2n\pi + \frac{\pi}{2})^2 > M$$

$$\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \frac{1}{x} \rightarrow \infty \therefore f(x) \rightarrow \infty$$

$$\text{当 } \frac{1}{x} = n\pi \text{ 时, } f(x) = 0$$

$$\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \frac{1}{x} \rightarrow \infty \therefore f(x) \rightarrow 0$$

5. (98-2) 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列断言正确的是

- (A) 若 $\{x_n\}$ 发散, 则 $\{y_n\}$ 必发散.
 (B) 若 $\{x_n\}$ 无界, 则 $\{y_n\}$ 必有界.
 (C) 若 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{y_n\}$ 必为无穷小.
 (D) 若 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小, 则 $\{y_n\}$ 必为无穷小.

也可收敛

令 $x_n = n, y_n = \frac{1}{n^2}$

也可无界

例: $x_n = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n=2 \\ 3 & n=3 \\ 0 & n=4 \\ 5 & n=5 \\ 0 & n=6 \\ 7 & n=7 \\ \dots \end{cases}$

也可无穷大

$y_n = \begin{cases} 0 & n=1 \\ 2 & n=2 \\ 0 & n=3 \\ 4 & n=4 \\ 0 & n=5 \\ 6 & n=6 \\ 0 & n=7 \\ \dots \end{cases}$

令 $x_n = \frac{1}{n^2}, y_n = n$

$\{x_n\}$ 无穷大

$\infty \cdot 0 = 0$

$\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, n$

6. (03-1;2) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$,

则必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.

(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在.

(D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

$a_n \neq 0, a_n > 0$

$b_n > 0$

$c_n > 0$

数列极限与前有限项无关

令 $a_n = \frac{1}{n}, c_n = n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot n = 1$