1.（90-3）证明不等式

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geq\sqrt{1+x^2},-\infty<x<+\infty.$$

设 $F(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$

$F'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

由 $F(x)=F(-x)$. 若 $x>0$、$F'(x)>0$ $\Rightarrow F(x)\nearrow$ $F(0)=0$. $\Rightarrow x\geq0$. $F(x)\geq0$

$x<0$、$F(x)>0$. 证毕

2.（91-3）证明不等式 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{1+x}(0<x<+\infty)$

2. $f(x)=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}$. $f'(x)=-\frac{1}{x(1+x)^2}<0$ [$x>0$]

而 $f(x)\downarrow$ 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}=0$

$\Rightarrow\ln(1+\frac{1}{x})>\frac{1}{1+x}$

3.（93-1）设 $b>a>e$，证明 $a^b>b^a$.

取对数：$b\ln a>a\ln b$

设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ 若 $x>e$. $f'(x)<0\Rightarrow f(x)\downarrow$

$\Rightarrow\frac{\ln b}{b}<\frac{\ln a}{a}$ ✓

4.（04-1;2）设 $e<a<b<e^2$， 证明

$$\ln^2b-\ln^2a>\frac{4}{e^2}(b-a).$$

观察到 $b-a$

设 $f(x)=(\ln x)^2$. 在 $(a、b)$ 中存在 ξ

$\frac{\ln^2b-\ln^2a}{b-a}=f'(\xi)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ln\xi}{\xi}$

设 $g(x)=2\cdot\frac{\ln x}{x}$. 由于 $g'(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2}$ 当 $x>e$. $g'(x)<0$

$g(x)\downarrow$ $\frac{2\ln\xi}{\xi}>2\frac{\ln e^2}{e^2}=\frac{4}{e^2}$.

$\Rightarrow$ 证毕

5.（87-1）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可微，对于 $[0,1]$ 上的每一个 x，函数 $f(x)$ 的值都在开区间 $(0,1)$ 内，且 $f'(x)\neq 1$.证明：在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x，使 $f(x)=x$.

构造

存在性：设 $F(x)=f(x)-x$. 由于 $f(x)$ 值在 $(0,1)$　$F(0)=f(0)>0$

$F(1)=f(1)-1<0$ ⇒ 存在 x 使 $F(x)=0$

唯一性：若有两个 x_1, x_2 满足条件. 在 (x_1,x_2) 中有 ξ 使 $F'(\xi)=0$

$F'(x)=f'(x)-1=0$

$f'(\xi)=1$ (不成立)

B

6.（89-2）若 $3a^2-5b<0$，则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$

（A）无实根.　　　　　（B）有唯一实根.

（C）有三个不同实根.　（D）有五个不同实根.

6. 求导：$5x^4+6ax^2+3b$

$f'(x)=5[x^2]^2+6a[x^2]+3b$

$\Delta=36a^2-4\times5\times3b=36a^2-60b=12(3a^2-5b)<0$

$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)\nearrow$. 由 $\lim_{x\to+\infty}f(x)>0$. $\lim_{x\to-\infty}f(x)<0$ ⇒ 唯一实根

7.（94-2）设当 $x>0$ 时，方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解，求 k 的取值范围.

7. $k=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}$. 设 $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}$. $f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{3}{x^4}=\frac{1}{x^2}(\frac{3}{x^2}-1)$

$0<x<\sqrt3$. $F'(x)>0$. $x>\sqrt3$. $F'(x)<0$

$\lim_{x\to0^+}F(x)=-\infty$. $\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$. $F(\sqrt3)=\frac{2\sqrt3}{9}$. 在 $(0,\sqrt3)$ 中. 值域为 $(-\infty,\frac{2}{9}\sqrt3)$. 在 $(\sqrt3,+\infty)$ 值域为 $(0,\frac{2}{9}\sqrt3)$

$k=\frac{2}{9}\sqrt3$ 或 $k\le0$

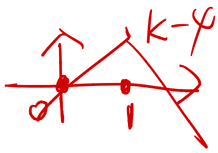
8.（03-2）讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点个数.

8. $y=4\ln x+k-4x-\ln^4 x$

$y'=\frac{4}{x}-4-4\ln^3 x\cdot\frac{1}{x}$

$y'=0$ 时. $x=1$. 当 $x>1$. $f'(x)<0$. 当 $(0,1)$. $f'(x)>0$

⇒ $x>1$. $f(x)\downarrow$.　$x\in(0,1)$ $f(x)\nearrow$



$y|_{x=1}=k-4$. 若 $k>4$. 有 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to0^+}=-\infty$

有两个交点.

$k=4$. 则有1个交点.　$k<4$. 无交点.

D

9.（08-2）设函数 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$，则 $f'(x)$ 的零点个数为

（A）0．　（B）1．　（C）2．　（D）3．

9. $f(0)=0$、$f(1)=0$、$f(2)=0$

由罗尔定理：

在 $(0,1)$，$f'(\xi_1)=0$

在 $(1,2)$，$f'(\xi_2)=0$

$f'(x)=2x(x-1)(x-2)+x^2[(x-2)+(x-1)]$

$f'(0)=0$ $\Rightarrow$ 3个点