7-1真题

$y^4=C\frac{x}{4-x}$

1.（94-2）微分方程 $ydx+(x^2-4x)dy=0$ 的通解为________.

$\int \frac{1}{y}dy=\int\frac{1}{4x-x^2}dx$

$4\ln|y|=[\ln|x|-\ln|4-x|]+\ln C$

所以通解为：$y^4=C\frac{x}{4-x}$

2.（98-1;2）已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，且当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是 Δx 的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，则 $y(1)$ 等于

D

（A）2π．（B）π．（C）$e^{\frac{\pi}{4}}$．（D）$\pi e^{\frac{\pi}{4}}$．

$dy=\frac{y\,dx}{1+x^2}$

$\ln|y|=\arctan x+C \Rightarrow y=Ce^{\arctan x}$

$y(0)=\pi \Rightarrow C=\pi$

$y(1)=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

3.（97-2）求微分方程

$$(3x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy)dy=0$$

的通解.

$(3+2\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2)dx+(1-2\frac{y}{x})=0$

令 $u=\frac{y}{x}$ $\Rightarrow$ $x\frac{du}{dx}=\frac{3(u+1-u^2)}{2u-1}$

$u^2-u-1=\frac{1}{x^3}C$

代入u $\Rightarrow$ $xy^2-x^2y-x^3=C$

4.（99-2）求初值问题

$$\begin{cases}(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-xdy=0(x>0)\\ y|_{x=1}=0\end{cases}$$

的解.

$\frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}\,dx-dy=0$

令 $\frac{y}{x}=u$ $\Rightarrow$ $(u+\sqrt{1+u^2})dx=dy$

$\Rightarrow Cx^2=y+\sqrt{y^2+x^2}$

$y|_{x=1}=0 \Rightarrow C=1$

$\Rightarrow y=\frac{1}{2}(x^2-1)$

5.（90-3）求微分方程 $y'+y\cos x=(\ln x)e^{-\sin x}$ 的通解.

非齐次的直接用公式：

$y=e^{-\int\cos x\,dx}\left[\int(\ln x)e^{-\sin x}\cdot e^{\int\cos x\,dx}+C\right]$

$=e^{-\sin x}(x\ln x-x+C)$

6.（91-2）求微分方程 $xy'+y=xe^x$ 满足 $y(1)=1$ 的特解.

$y'+\frac{1}{x}y=e^x$. 用非齐次公式

$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int e^x\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]$

$=\frac{1}{x}\left[xe^x-e^x+C\right]$ 代入 $y(1)=1\Rightarrow C=1$

7.（95-2）设 $y=e^x$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的一个解，求此微分方程满足条件 $y|_{x=\ln 2}=0$ 的特解.

$y=e^x$ 代入

$xe^x+p(x)e^x=x \Rightarrow p(x)=\frac{x(1-e^x)}{e^x}$

$y=e^{-\int(e^{-x}-1)dx}\left[\int e^{\int(e^{-x}-1)dx}dx+C\right]$

$=e^x+Ce^{x+e^{-x}}$

代入 $y|_{x=\ln 2}=0$，得 $C=-e^{-\frac{1}{2}}$，$y=e^x-e^{x+e^{-x}-\frac{1}{2}}$

8.（04-2）微分方程 $(y+x^3)dx-2xdy=0$ 满足 $y|_{x=1}=\frac{6}{5}$ 的特解为________.

$2xy'-y=x^3$

$y=e^{\int\frac{1}{2x}dx}\left[\int\frac{1}{2}x^2e^{-\int\frac{1}{2x}dx}dx+C\right]=\sqrt{x}\left[\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+C\right]$

代入 $y(1)=\frac{6}{5}\Rightarrow y=\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^3$

9.（05-1;2）微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 的解为________.

$y'+\frac{2}{x}y=\ln x$

$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left[\int\ln x\,e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right]$

$=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x+\frac{1}{x^2}C$ 代入 $y(1)=-\frac{1}{9}$

$\Rightarrow y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$

10.（92-2）求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^x$ 的通解.

$r^2-3r+2=0\Rightarrow r_1=1,\ r_2=2\Rightarrow y'=C_1e^x+C_2e^{2x}$

设 $y^*=x(ax+b)e^x$ 代入 $\Rightarrow a=-\frac{1}{2},\ b=-1$

$y=C_1e^x+C_2e^{2x}-(\frac{1}{2}x^2+x)e^x$

11.（94-2）求微分方程 $y''+a^2y=\sin x$ 的通解，其中常数 $a>0$.

$r^2+a^2r=0 \Rightarrow r_1=ai, r_2=-ai$

$y_1=C_1\cos ax+C_2\sin ax$. ① $a\neq1$ 时. $y^*=A\cos x+B\sin x \Rightarrow y^*=\frac{\sin x}{a^2-1}$

$y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{\sin x}{a^2-1}$ ② $a=1$. 设 $y^*=x(A\cos x+B\sin x) \Rightarrow y=C_1\cos ax+\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$

12.（96-1）微分方程 $y''-2y'+2y=e^x$ 的通解为____.

$r^2-2r+2=0 \Rightarrow r_1=1+i, r_2=1-i$

$y: C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x$, 设 $y^*=Ae^x \Rightarrow A=1$

$y=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x+e^x$

13.（96-2）求微分方程 $y''+y'=x^2$ 的通解.

$r^2+r=0 \Rightarrow r_1=0, r_2=-1$

设 $y^*=x(Ax^2+Bx+C)$

代入得 $\begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-1 \\ C=2 \end{cases}$

$\Rightarrow y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{3}x^3-x^2+2x$