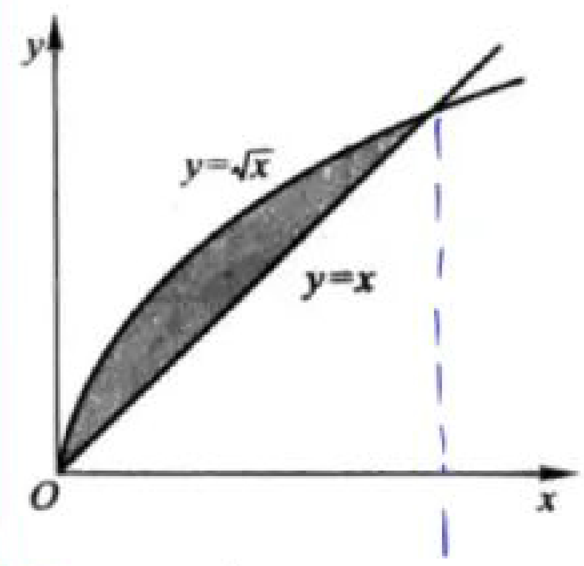
6-1基础

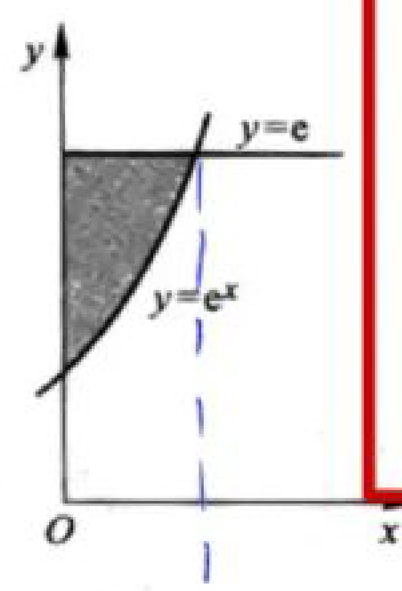
1.求下列图形中阴影部分的面积.

① $\int_0^1 \sqrt{x}-x\,dx$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1$

$=\frac{1}{6}$





② $\int_0^1 e-e^x\,dx$

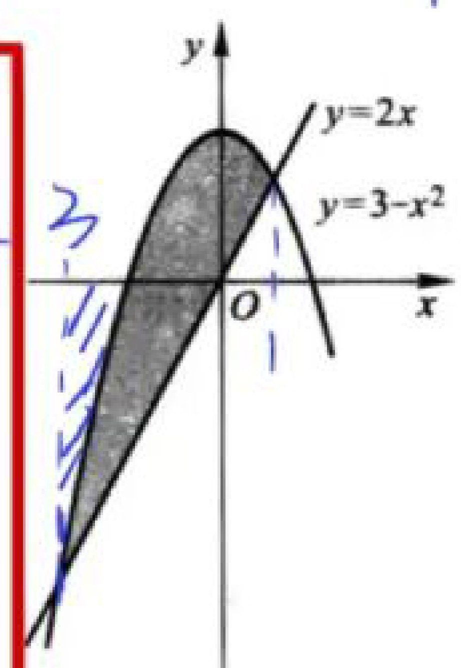
$=ex-e^x\Big|_0^1$

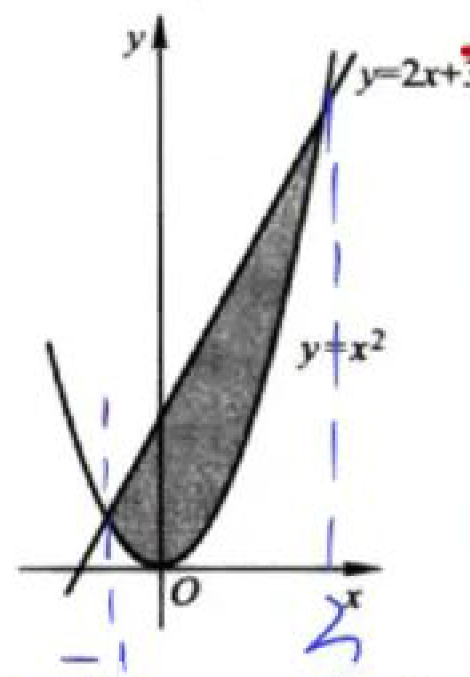
$=1$

③ $\int_{-3}^{1}(3-x^2)-2x\,dx$

$=3x-\frac{1}{3}x^3-x^2\Big|_{-3}^{1}$

$=\frac{32}{3}$



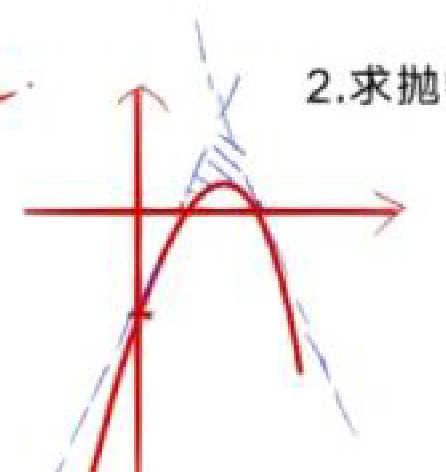


④ $\int_{-1}^{3} 2x+3-x^2\,dx$

$=x^2+3x-\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{3}$

$=\frac{32}{3}$

2.



2.求抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其在点 $(0,-3)$ 和 $(3,0)$ 处的切线所围成的图形的面积.

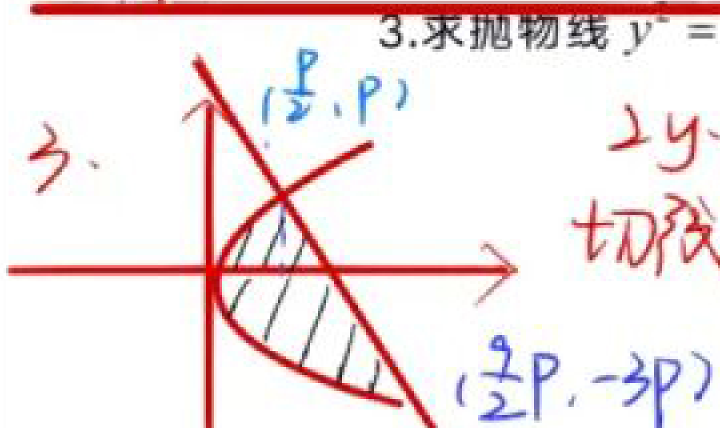
$y'=-2x+4$. 代入 $x=0$ 和 $x=3$. 求出切线 $y=4x-3$, $y=-2x+6$

交点 $(\frac{3}{2},3)$. $S=\int_0^{\frac{3}{2}}4x-3\,dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}-2x+6-\int_0^3-x^2+4x-3\,dx$

$=\frac{9}{4}$

3.求抛物线 $y^2=2px$ 及其在点 $\left(\frac{p}{2},p\right)$ 处的法线所围成的图形的面积.

3.



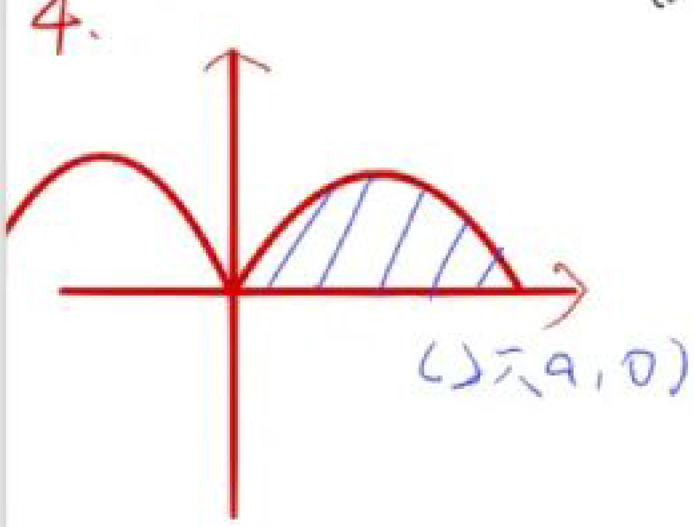
$2y\cdot y'=2p \Rightarrow$ 在点 $(\frac{p}{2},p)$ 处, $y'=1$, $k=-1$

切线方程为 $y-p=-(x-\frac{p}{2})$

$\Rightarrow S=\int_{-3p}^{p}(\frac{3}{2}p-y)-(\frac{y^2}{2p})\,dy=\frac{16}{3}p^2$

4.求由摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 的一拱 $(0\le t\le 2\pi)$ 与横轴所围成的图形的面积.

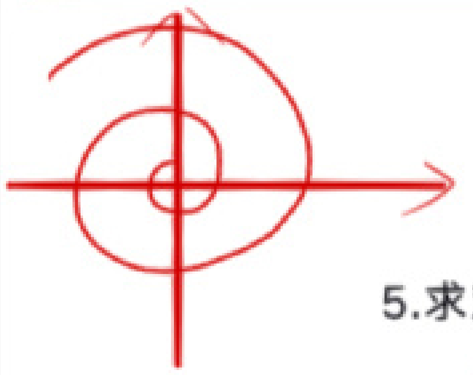
4.



$\int_0^{2\pi a} y\,dx=\int_0^{2\pi a}a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt$

$=$ 由于 $x=a(t-\sin t)$, 积分上下限变

$=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2=3\pi a^2$

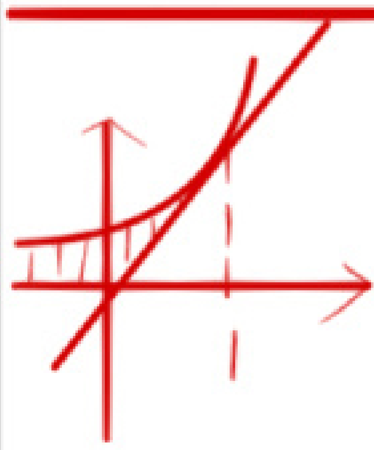


起点是π．终点是π

5.求对数螺线 $r=ae^{\theta}(-\pi\le\theta\le\pi)$ 及射线 $\theta=\pi$ 所围成的图形的面积.

5. $S=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(ae^{\theta})^2\cdot d\theta=\frac{1}{4}a^2(e^{2\theta})\Big|_{-\pi}^{\pi}$

$=\frac{1}{4}a^2[e^{2\pi}-e^{-2\pi}]$



6.求位于曲线 $y=e^x$ 下方、该曲线过原点的切线的左方以及 x 轴上方之间的图形的面积.

6. ①求切线方程：切点为 (x_0,y_0). $y_0=e^{x_0}$. 斜率 $y'=e^{x_0}$

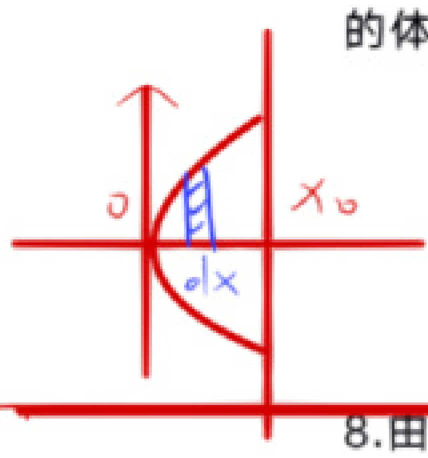
由于过 $(0,0)$. 所以 $y=ex$

② $S=\int_{-\infty}^{0}e^x\,dx+\int_0^1 e^x-ex\,dx=\frac{e}{2}$

7.把抛物线 $y^2=4ax$ 及直线 $x=x_0,(x_0>0)$ 所围成的图形绕 x 轴旋转，计算所得旋转体的体积.

7. $V=\int_0^{x_0}\pi y^2\cdot dx=\int_0^{x_0}4ax\cdot\pi\cdot dx$

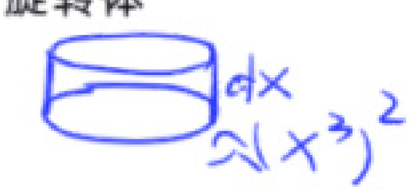
$=2ax^2\pi\Big|_0^{x_0}=2\pi a x_0^2$

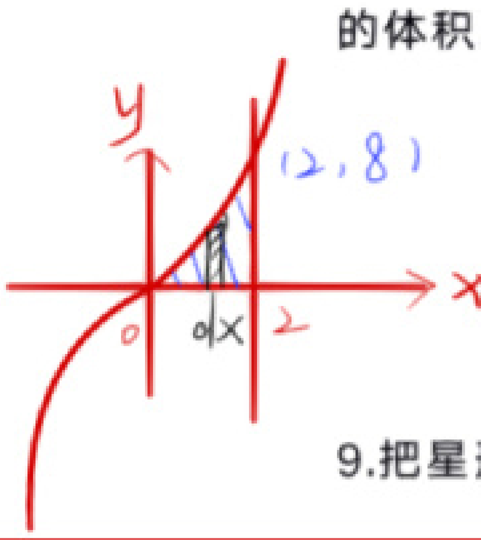


8.由 $y=x^3,x=2,y=0$ 所围成的图形，分别绕 x 轴及 y 轴旋转，计算所得两个旋转体的体积.

①绕x轴：$V=\int_0^2\pi x^6\cdot dx=\frac{128}{7}\pi$

②绕y轴：$V=\int_0^2 2\pi\cdot x\cdot x^3\cdot dx=\frac{64}{5}\pi$





9.把星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ 所围成的图形绕 x 轴旋转，计算所得旋转体的体积.

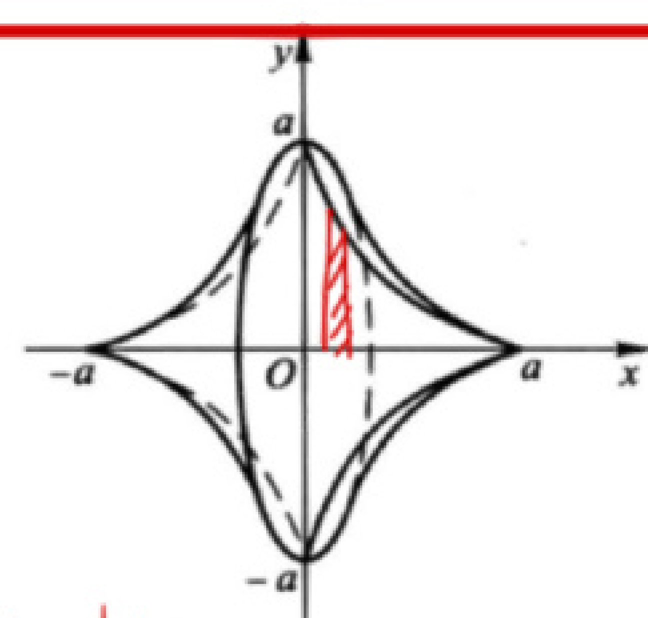
9. 依旧是微元法

$V=2\int_0^a\pi y^2\cdot dx$

$=2\int_0^a\pi a^2\sin^6 t\,d\,a\cos^3 t$

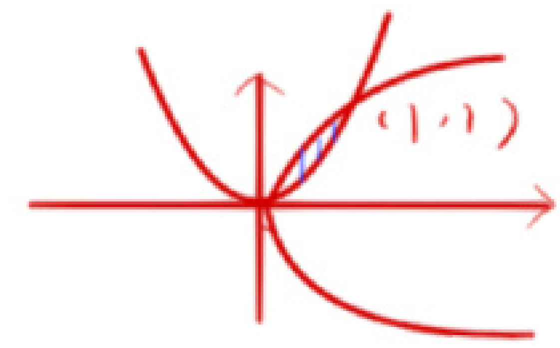
$=6a\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}-\pi a^2\sin^6 t\cdot\cos^2 t\cdot\sin t\,dt$

$=\frac{32}{105}\pi a^3$



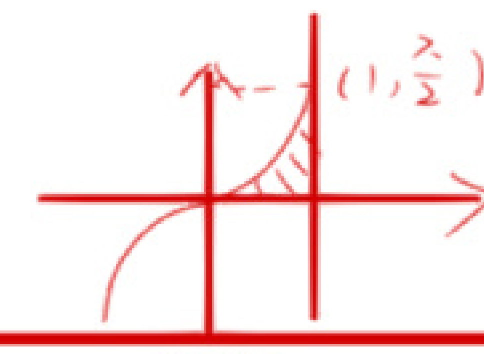
10.求下列已知曲线所围成的图形，按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积：

① $y=x^2, x=y^2$（$y=\sqrt{x}$），绕 y 轴；



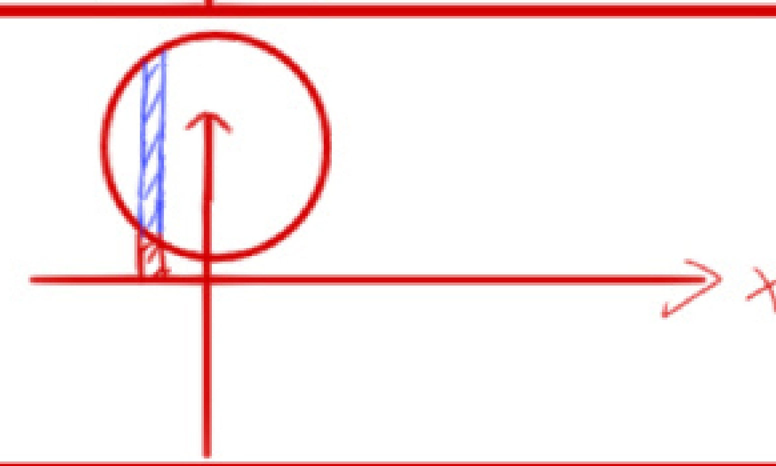
$$V=\int_0^1 2\pi x\cdot(\sqrt{x}-x^2)\,dx$$
$$=\frac{3}{10}\pi$$

② $y=\arcsin x, x=1, y=0$，绕 x 轴；



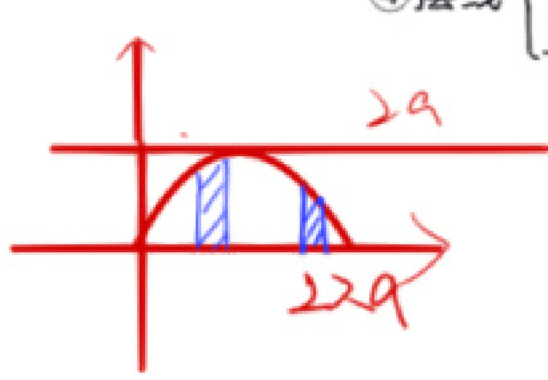
$$V=\int_0^1 \pi \arcsin^2 x\cdot dx$$
$=$ 分部积分法 $=\frac{\pi^3}{4}-2\pi$

③ $x^2+(y-5)^2=16$，绕 x 轴；



$$V=\int_{-4}^{4}\pi\left[(5+\sqrt{16-x^2})^2-(5-\sqrt{16-x^2})^2\right]dx$$

④摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 的一拱 $(0\le t\le 2\pi)$，$y=0$，绕直线 $y=2a$.

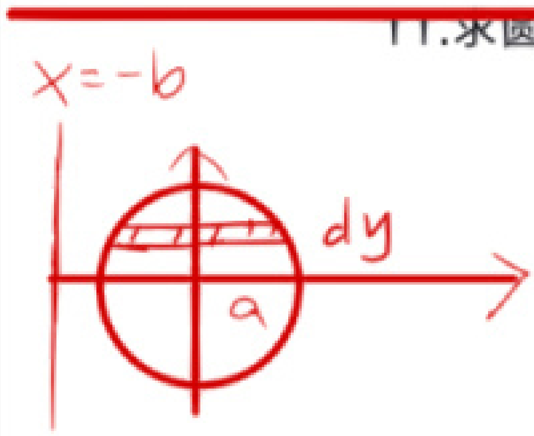


$V=\int_0^{2\pi a}\pi\left[(2a)^2-(2a-y)^2\right]dx$ 代入换上下限

$t-\sin t=2\pi \Rightarrow t=2\pi$ / $t-\sin t=0\Rightarrow t=0$

$V=7\pi^2a^3$

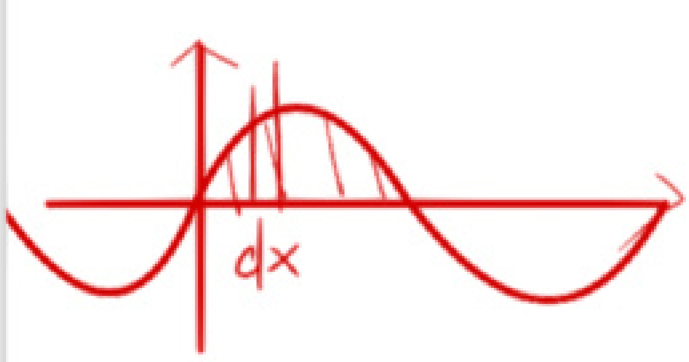
11.求圆盘 $x^2+y^2\le a^2$ 绕 $x=-b(0<a<b)$ 旋转所成旋转体的体积.



$$V=\int_{-a}^{a}\pi\left[(b+\sqrt{a^2-y^2})^2-(b-\sqrt{a^2-y^2})^2\right]dy$$
$$=2\pi^2a^2b$$

依旧是大圆减小圆.

12.计算曲线 $y=\sin x(0\le x\le\pi)$ 和 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.



$$V=\int_0^{\pi}2\pi x\cdot\sin x\cdot dx$$
$$=2\pi\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin x\cdot dx$$
$$=2\pi^2$$