基础：$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}, & q\neq 1,\\ an, & q=1.\end{cases}$

基础过关 1-4

B 1. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})=$______.

(A) $\frac{3}{2}$. (B) 2. (C) 4. (D) ∞.

1. 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=2(1-\frac{1}{2^n})=2$

A 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}=$______.

(A) $\frac{1}{2}$. (B) 1. (C) 0. (D) ∞.

2. 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2}=\dfrac{n^2-n}{2n^2}=\dfrac{1-\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$

A 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=$______.

(A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{2}{5}$. (C) $\frac{3}{5}$. (D) 0.

3. $\dfrac{(n+1)^3}{5n^3}\le$ 原式 $\le\dfrac{(n+3)^3}{5n^3}$

$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$

B 4. $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$，$x$ 为不等于零的常数.

(A) $\frac{x}{2}$. (B) x. (C) $\sin x$. (D) $\sin\frac{x}{2}$.

4. 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=\dfrac{\frac{x}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=x$

C 5. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-2\sqrt{n}})=$______.

(A) 1. (B) 0. (C) $\frac{5}{2}$. (D) 3

5. 原式 $=\dfrac{n+3\sqrt{n}-n+2\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-2\sqrt{n}}}=\dfrac{5\sqrt{n}}{\cdots}$

$=\dfrac{5}{\sqrt{1+\frac{3\sqrt{n}}{n}}+\sqrt{1-\frac{2\sqrt{n}}{n}}}=\frac{5}{2}$

D 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx^2}{2}\tan\dfrac{2\pi}{n}=$______.

(A) ∞. (B) x^2. (C) $\frac{x^2}{2}$. (D) $x^2\pi$.

6. 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\frac{2\pi}{n}}{\frac{2}{nx^2}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{2\pi}{n}}{\frac{2}{nx^2}}=\pi x^2$

C 7. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$.

7. 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=1$

(A) ∞.　　(B) 0.　　(C) 1.　　(D) $\sqrt{2}$.

$8.\ \frac{n^2}{n^2+n\pi} \le 原式 \le \frac{n^2}{n^2+\pi}$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$1 \qquad 1 \qquad 1$

C 8. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)$.

(A) ∞.　　(B) 0.　　(C) 1.　　(D) $\frac{1}{\pi}$.

$9.\ (1-\frac{1}{n^2})=\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}$

$\Rightarrow 原式=(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2})(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3})\cdots(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n})$

$\Rightarrow 原式=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$

A 9. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

(A) $\frac{1}{2}$.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 0.

A 10. (02-2) 设 $0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限.

$\frac{1}{x_1}>\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3}{x_1}>1$

10. ① 有界性：(基本不等式)

$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\le\frac{3}{2}$

② 单调性：

$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\sqrt{\frac{3}{x_n}-1}>1$

(A) 会证明，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}$　　(B) 不会证明单调性.

(C) 不会证明有界性.　　(D) 单调性和有界性都不会证明.

③ 设极限为a $\Rightarrow a=\sqrt{a(3-a)} \Rightarrow a=\frac{3}{2}$

D 11. (00-3) 设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

(A) 存在且等于零.　　(B) 存在但不一定等于零.

(C) 一定不存在.　　(D) 不一定存在.

11. 反例：

$\begin{cases} g(x)=x, & f(x)=x+\frac{1}{x} \\ \varphi(x)=x+\frac{2}{x} \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$

但 $x+\frac{1}{x}$ 不存在.

A 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+n+1}+\frac{n+2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n+n}\right)=$________.

(A) $\frac{3}{2}$.　　(B) $\frac{1}{2}$.　　(C) ∞.　　(D) 0.

$1.\ \frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+n} \le 原式 \le \frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+1}$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$\frac{3}{2} \qquad \frac{3}{2} \qquad \frac{3}{2}$

2. 有一个结论：$\Rightarrow$ D

【例 39】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$，其中 $a_i>0(i=1,2,\cdots,m)$.

引申出一个定理：结果为 $\sqrt{\ }$ 里最大的一项

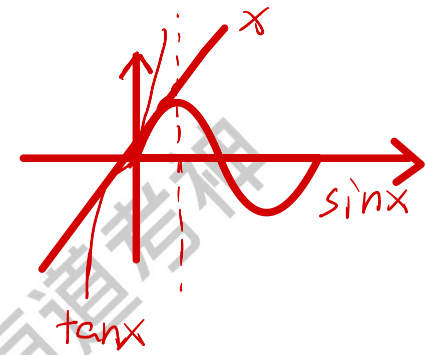
D 2.设 $x>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+x^n}=$______.

(A) 2. (B) x. (C) $\begin{cases}1,0<x<1\\2,1\le x<2\\x,x\ge 2\end{cases}$. (D) $\begin{cases}2,0<x<2\\x,x\ge 2\end{cases}$.

C 3.设 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+\sin^n x+\tan^n x}=$______.

(A) x. (B) $\sin x$. (C) $\tan x$. (D) ∞.

3.



D 4.设 $0<a<b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(-a)^n+(-b)^n\right]^{\frac{2}{n}}=$______.

(A) a^2. (B) $-a^2$. (C) $-b^2$. (D) b^2.

4. 原式 $=\sqrt[n]{(-a)^{2n}+(-b)^{2n}+2(ab)^n}$

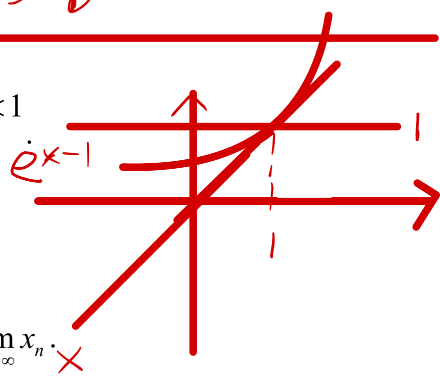
$=\sqrt[n]{a^{2n}+b^{2n}+2(ab)^n}$

$\Rightarrow b^2$

D 5.设 $x>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(e^{x-1}\right)^n}=$______.

(A) x. (B) e^{x-1}. (C) $\begin{cases}1,0<x<1\\x,x\ge 1\end{cases}$. (D) $\begin{cases}1,\ 0<x<1\\e^{x-1},x\ge 1\end{cases}$

5.



6.设 $x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{1}{3}(2x_n+\dfrac{1}{x_n^2}), n=1,2,\ldots$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(A) 会证明，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ (B) 不会证明单调性.

(C) 不会证明有界性. (D) 单调性和有界性都不会证明.

6. ① 有界性： $x_{n+1}=\frac{1}{3}(x_n+x_n+\frac{1}{x_n^2})\geq\sqrt[3]{1}=1$

$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$

② 单调性： $x_{n+1}-x_n=\frac{2}{3}x_n+\frac{1}{3x_n^2}-x_n=-\frac{1}{3}x_n+\frac{1}{3x_n^2}$

$=\frac{1-x_n^2}{3x_n^2}\leq 0$

③ 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ $\therefore$ $a=\frac{1}{3}(2a+\frac{1}{a^2})\Rightarrow a=1$