6-2真题（数一/二）

1.

$$L=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-1\,dx$$

$$=\ln 3-\frac{1}{2}$$

2.（95-2）求摆线 $\begin{cases}x=1-\cos t\\ y=t-\sin t\end{cases}$ 一拱 $(0\le t\le 2\pi)$ 的弧长 S.

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2 t+(1-\cos t)^2}=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=\int_0^{2\pi}4\cdot\sin\frac{t}{2}\,d\frac{t}{2}$$

$$=8$$

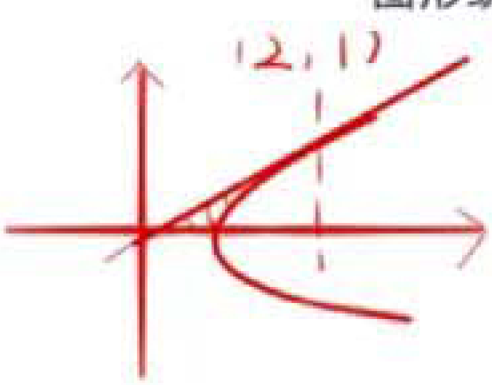
3.（96-1）求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长，其中 $a>0$ 是常数.

$$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+(-a\sin\theta)^2}\,d\theta=2\int_0^{\pi}\sqrt{2a^2(1+\cos\theta)}=8a\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,d\frac{\theta}{2}$$

$$=8a$$

4.（98-2）设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积.

切点：$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x-1}}{x}\Rightarrow x=2$



$$S_1=\pi r l=\pi\cdot 1\cdot\sqrt{5}$$

$$S_2=2\pi\int_1^2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)^2}\,dx=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)\Rightarrow S=\frac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1)$$

5.（04-2）曲线 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 与直线 $x=0,x=t(t>0)$ 及 $y=0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体，其体积为 $V(t)$，侧面积为 $S(t)$，在 $x=t$ 处的底面积为 $F(t)$.

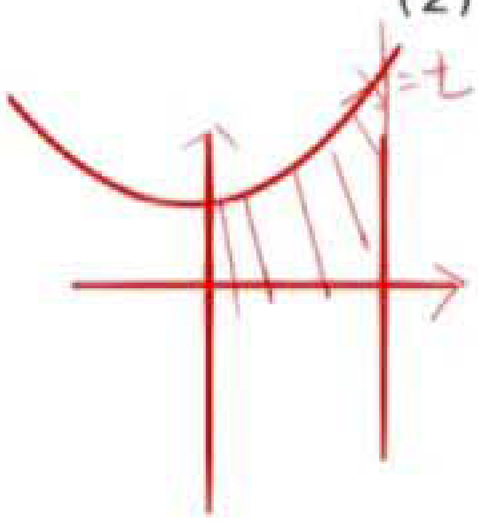
（1）求 $\dfrac{S(t)}{V(t)}$ 的值；

（2）计算极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{S(t)}{F(t)}$.

(1) $S(t)=2\pi\int_0^t\frac{e^x+e^{-x}}{2}\sqrt{1+\left[\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right]^2}\,dx$

$=2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx$

$V(t)=\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx$



$\Rightarrow\frac{S(t)}{V(t)}=2$

(2) 底面积：$F(t)=\pi\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow\lim_{t\to\infty}\frac{2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx}{\pi\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}=\frac{2\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}{2\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)\cdot\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)}=\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}$$

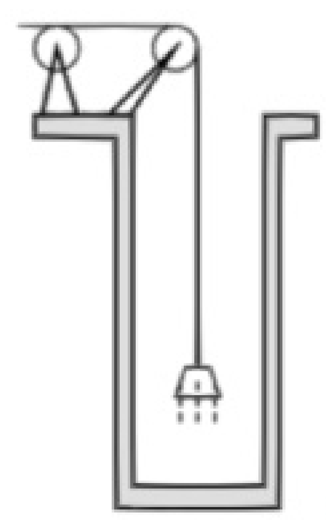
$=1$

6.（99-1;2）为清除井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口（如图）．已知井深 $30m$，抓斗自重 $400N$，缆绳每米重 $50N$，抓斗抓起的污泥重 $2000N$，提升速度为 $3m/s$，在提升过程中，污泥以 $20N/s$ 的速度从抓斗缝隙中漏掉.现将抓起污泥的抓斗提升至井口，问克服重力

需作多少焦耳的功？

(说明：① $1N\times 1m = 1J$; m, N, s, J 分别表示米、牛顿、秒、焦耳.

②抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)



$\}x$

① 抓斗： $W_1 = 400\times 30$

② 绳子： $dW_2 = 50\times(30-x)\cdot dx$

③ 污泥： $\frac{dx}{dt} = 3$

$dW_3 = (2000-20t)dx$

$W = 12000 + \int_0^{30} 50\times(30-x)\cdot dx + \int_0^{10}(2000-20t)\times 3\cdot dt$

$= 91500J$

7.（03-1）某建筑工程打地基时，需用汽锤将桩打进土层. 汽锤每次击打，都将克服土层对桩的阻力而做功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比(比例系数为 $k, k>0$).汽锤第一次击打将桩打进地下 a m.根据设计方案，要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 $r(0<r<1)$. 问

（1）汽锤击打桩 3 次后，可将桩打进地下多深？

（2）若击打次数不限，汽锤至多能将桩打进地下多深？

(注：m 表示长度单位米.)

(1)
$$W_1=\int_0^a kx\cdot dx=\frac{k}{2}a^2$$
$$W_2=\int_a^b kx\cdot dx=\frac{k}{2}(b^2-a^2)$$
$$W_3=\int_b^c kx\cdot dx=\frac{k}{2}(c^2-a^2)$$
由 $W_3=rW_2=r^2W_1$
$$\Rightarrow c=a\sqrt{r^2+r+1}$$

(2) 由上题可以归纳出
$$x_n=a\sqrt{1+r+\cdots r^{n-1}}$$
$$W_{n+1}=\int_{x_n}^{x_{n+1}} kx\cdot dx$$
$$=\frac{k}{2}[x_{n+1}^2-(1+r+\cdots r^{n-1})a^2]$$
$$\Rightarrow W_{n+1}=r^nW_1$$
$$\Rightarrow a^2r^n=x_{n+1}^2-(1+r+\cdots r^{n-1})a^2$$
$$\Rightarrow x_{n+1}=a\sqrt{1+r+\cdots r^n}$$
$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\frac{a}{\sqrt{1-r}}(m)$$

8.（02-2）某闸门的性状与大小如图所示，其中直线 l 为对称轴，闸门的上部为矩形 $ABCD$，下部由二次抛物线与线段 AB 所围成.当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5：4.闸门矩形部分的高 h 应为多少米？

【例 7】（2002，数二）某闸门的形状与大小如图 2 所示，其中 y 轴为对称轴，闸门的上部为矩形 $ABCD$，其中 $DC=2\text{m}$，下部由二次抛物线与线段 AB 所围成，当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5∶4，闸门矩形部分的高 h 应为多少 m(米)?

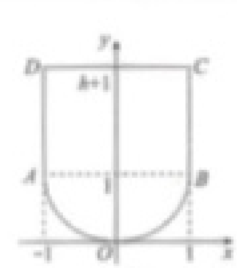


图 2

书上例题

解

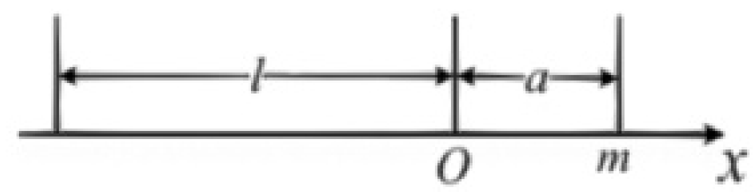
如图 2 建立坐标系，则抛物线的方程为 $y=x^2$.

闸门矩形部分承受的水压力
$$P_1=2\int_1^{h+1}\rho g(h+1-y)\mathrm{d}y=2\rho g\left[(h+1)y-\frac{y^2}{2}\right]\Big|_1^{h+1}$$
$$=\rho g h^2,$$
其中 ρ 为水的密度，g 为重力加速度.

闸门下部承受的水压力
$$P_2=2\int_0^1\rho g(h+1-y)\sqrt{y}\mathrm{d}y$$
$$=2\rho g\left[\frac{2}{3}(h+1)y^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]\Big|_0^1$$
$$=4\rho g\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right).$$
由题意知 $\frac{P_1}{P_2}=\frac{5}{4}$，即
$$\frac{h^2}{4\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right)}=\frac{5}{4}.$$
解之得 $h=2$，$h=-\frac{1}{3}$(舍去)，故 $h=2$，即闸门矩形部分的高应为 2m.

A

9.（91-2）如图，x 轴上的一线密度为常数 μ，长度为 l 的细杆，若质量为 m 的质点到杆右端的距离为 a，已知引力系数为 k，则质点和细杆之间引力的大小为



（A）$\int_{-l}^{0}\frac{km\mu}{(a-x)^2}dx.$　　（B）$\int_{0}^{l}\frac{km\mu}{(a-x)^2}dx.$

（C）$2\int_{-\frac{l}{2}}^{0}\frac{km\mu}{(a+x)^2}dx.$　　（D）$2\int_{0}^{\frac{l}{2}}\frac{km\mu}{(a+x)^2}dx.$

$$\boxed{F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}}$$