$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

1.曲线 $L:\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(a>0)$ 在 $t=\frac{\pi}{2}$ 对应点处的曲率为 $\frac{\sqrt{2}}{4a}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} \quad \frac{d\frac{dy}{dx}}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{a^2\cos t(1-\cos t)-a^2\sin^2 t}{a^2(1-\cos t)^2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)}$$

$$=\frac{-1}{a(1-\cos t)^2}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{a}$$

2.求椭圆 $4x^2+y^2=4$ 在点 $(0,2)$ 处的曲率.

$8x+2y\cdot y'=0$ 代入$(0,2)\Rightarrow y'=0$

$8+2y'\cdot y'+2y\cdot y''=0\Rightarrow y''=-2 \quad K=\frac{2}{1}=2$

3.求曲线 $y=\ln\sec x$ 在点 (x,y) 处的曲率及曲率半径.

$y'=\frac{1}{\sec x}\cdot\tan x\cdot\sec x=\tan x$

$y''=\sec^2 x$

$\Rightarrow K=\frac{\sec^2 x}{(1+\tan^2 x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan^2 x)^{\frac{3}{2}}}=\cos x$

$\rho=\frac{1}{\cos x}=\sec x$

4.求抛物线 $y=x^2-4x+3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径.

$2 \quad \frac{1}{2}$

5.求曲线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 在 $t=t_0$ 相应的点处的曲率.

$K=\frac{2}{|3a\sin 2t_0|}$

6.对数曲线 $y=\ln x$ 上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

$y'=\frac{1}{x} \quad y''=-\frac{1}{x^2}$

$K=\frac{\frac{1}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

曲率半径 $\rho=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}$

$\rho'=\frac{\frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot x\cdot 2x-(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2}$

若 $\rho'=0$

$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (x>0)$

在 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\ln\frac{\sqrt{2}}{2})$ 最小.

为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

7.曲线弧 $y=\sin x(0<x<\pi)$ 上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

$y'=\cos x$

$y''=-\sin x$

$x\in(0,\pi)$

$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}$

$\rho=\frac{1}{K}=\frac{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}{\sin x}$

$\rho'=\frac{-\frac{3}{2}(1+\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}\cdot 2\cos x\cdot\sin x-(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}\cdot\cos x}{\sin^2 x}$

$\Leftarrow$ 求 $\rho'=0 \quad x=\frac{\pi}{2}$

$\rho=1$

8.（16-2）已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动，记坐标原点与点 P 间的距离为 l.若点 P 的横坐标对时间的变化率为常数 v_0，则当点 P 运动到点 $(1,1)$ 时，l 对时间的变化率是 $2\sqrt{2}v_0$.

$y=x^3 \Rightarrow l=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x^6}$

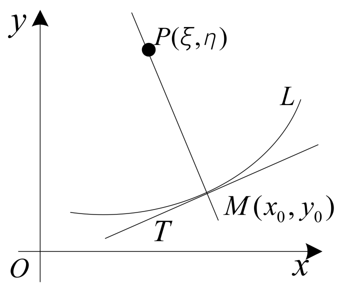
$\frac{dl}{dt}=\frac{dl}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\frac{2x+6x^5}{\sqrt{x^2+x^6}}\cdot v_0\Big|_{x=1}=2\sqrt{2}v_0$

9.（91-2）质点以速度 $t\sin t^2$ 米/秒作直线运动，则从时刻 $t_1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 秒到 $t_2=\sqrt{\pi}$ 秒内质点所经过的路程等于 $\frac{1}{2}$ 米.

$S=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} t\sin t^2\,dt=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}}\sin t^2\,dt^2$

$=-\frac{1}{2}\cos t^2\Big|_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{2}$

10.（95-2）如图，设曲线 L 的方程为 $y=f(x)$，且 $y''>0$，又 MT,MP 分别为该曲线在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线和法线.



已知线段 MP 的长度为 $\frac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}$（其中 $y_0'=y'(x_0),\ y_0''=y''(x_0)$），试推导出点 $P(\xi,\eta)$ 的坐标表达式.

—— 曲率半径

曲率中心公式 $\left(x_0-\frac{y_0'(1+y_0'^2)}{f''(x_0)},\ f(x_0)+\frac{f'(x_0)^2+1}{f''(x_0)}\right)$

常规求法:

$|MP|=\sqrt{(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2}=\frac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}\Rightarrow (x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2=\frac{(1+y_0'^2)^3}{y_0''^2}$

$y_0'=-\frac{x_0-\xi}{y_0-\eta}\Rightarrow x_0-\xi=-y_0'(y_0-\eta)$ ① 代入 $\Rightarrow y_0'^2(y_0-\eta)^2+(y_0-\eta)^2=\cdots$

$\Rightarrow (y_0-\eta)^2=\frac{(1+y_0'^2)^2}{y_0''^2}\Rightarrow y_0-\eta=\frac{-(1+y_0'^2)}{y_0''}$ 代入 ① $\Rightarrow \begin{cases}\xi=\\ \eta=\end{cases}$ 与结论一致