1.（04-1）设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求

$z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

$$\begin{cases}2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ -6x+20y-2z+2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$$

求驻点，令 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$

$(9,3,3)$

或 $(-9,-3,-3)$

$$\begin{cases}2-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0\\ -6-2\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0\end{cases}$$

$$20-2\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}+2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}-2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

① $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(9,3,3)}=\frac{1}{6}$，$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(9,3,3)}=-\frac{1}{2}$，$C=\frac{5}{3}$

所以 $AC-B^2=\frac{1}{36}>0$，为极小值 $z(9,3)=3$

② $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{1}{6}$，$B=\frac{1}{2}$，$C=-\frac{5}{3}$

$AC-B^2=\frac{1}{36}>0$ 所以为极大值

$z(-9,-3)=-3$

2、构造 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

$$\begin{cases}F_x'=0\\F_y'=0\\F_\lambda'=0\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}f_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x'(x_0,y_0)=0\\f_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y'(x_0,y_0)=0\end{matrix}$$

由于 $\varphi_y'(x_0,y_0)\neq0$

D

2.（06-1;2;3）设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y'(x,y)\neq0$，已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$

在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是

（A）若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

（B）若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq0$.

（C）若 $f_x'(x_0,y_0)\neq0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

（D）若 $f_x'(x_0,y_0)\neq0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq0$.

3.（88-2,3）将长为 a 的铁丝切成两段，一段围成正方形，另一段围成圆形，问这两段铁丝各长为多少时，正方形与圆形的面积之和为最小.

设圆形周长为 x，则正方形为 $a-x$

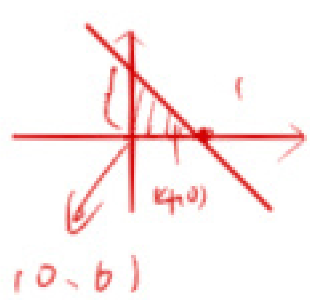
$$A(x)=\left(\frac{a-x}{4}\right)^2+\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$$

$$A'(x)=\frac{4+\pi}{8\pi}x-\frac{a}{8}=0$$

$$x_0=\frac{\pi a}{4+\pi}\ (\text{唯一}),\quad A''(x)=\frac{4+\pi}{8\pi}>0$$

所以当正方形长 $\frac{4a}{4+\pi}$，和最小.

4.（95-3）求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$、x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的极值，最大值与最小值.



$$\begin{cases} f_x=2xy(4-x-y)+x^2y(-1)=0 \\ f_y=x^2(4-x-y)+x^2y(-1)=0 \end{cases} \Rightarrow x=0\ (\text{注意}y\text{都成立})$$
驻点 $(4,0)$，$(2,1)$

结合条件，$x=0$ 时，y 应该取 $[0,6]$，又因为 $(4,0)$ 和线段均为区域边界，所以只用判断 $(2,1)$

$f''_{xx}=8y-6xy-2y^2$，$f''_{xy}=8x-3x^2-4xy$

$f''_{yy}=-2x^2$

所以代入得 $A=-6$，$B=-4$，$C=-8$.

$AC-B^2=-32<0$，为极大值，$f(2,1)=$

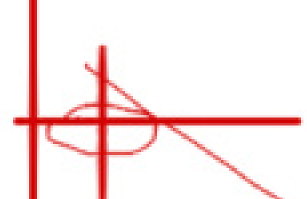
考虑边界：在 $x=0$ 和 $y=0$ 上，$f=0$，而在 $x+y=6$ 上，代入后 $f=2x^3-12x^2$，$f'=6x^2-24x$

令 $f'=0$，$\begin{cases}x=0\ (\text{不讨论})\\ x=4\end{cases}$ 而 $f''=12x-24\big|_{x=4}=24>0$，所以 $f(4,2)=-64$.

结合可得最大值为4、最小值为 -64

5.（94-1）在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点，使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短.

常规：设点为 (x,y)



$$d=\frac{|2x+3y-6|}{\sqrt{4+9}}\Rightarrow d^2=\frac{(2x+3y-6)^2}{13}$$

$$L=(2x+3y-6)^2+\lambda(x^2+4y^2-4)$$

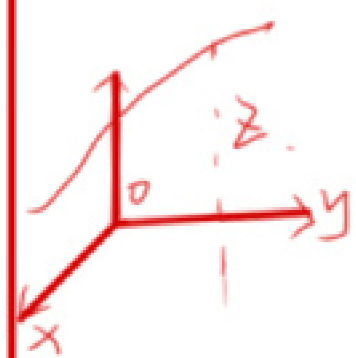
$$\begin{cases} L_x=2(2x+3y-6)\cdot 2+2x\lambda=0 \\ L_y=2(2x+3y-6)\cdot 3+8\lambda y=0 \\ L_\lambda=x^2+4y^2-4=0 \end{cases}$$

得到 $\begin{cases} -\frac{x\lambda}{2}=2x+3y-6 \\ -\frac{4\lambda}{3}y=2x+3y-6 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{8}{3}y$，代入 $x^2+4y^2=4$

解得 $x=\pm\frac{8}{5}$，$y=\pm\frac{3}{5}$，由于已知在第一象限（图像）

所以点为 $\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$，$d_{min}=\frac{\sqrt{13}}{13}$

6.（08-1）已知曲线 C：$\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0, \\ x+y+3z=5, \end{cases}$ 求曲线 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.



距离即是为 $|z|$

所以设

$L = z^2 + \lambda(x^2+y^2-2z^2) + \mu(x+y+3z-5)$

$\begin{cases} L_x = 2\lambda x + \mu = 0 \\ L_y = 2\lambda y + \mu = 0 \\ L_z = 2z - 4\lambda z + 3\mu = 0 \\ L_\lambda = x^2+y^2-2z^2 = 0 \\ L_\mu = x+y+3z-5 = 0 \end{cases}$

综合解得 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-5 \\ z=5 \\ \lambda=-1 \\ \mu=-10 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \\ \lambda=-\frac{1}{5} \\ \mu=\frac{2}{5} \end{cases}$

所以 $|z|_{min}=1$，$(-5,-5,5)$

$|z|_{max}=5$ $(1,1,1)$