辨析概念 ① 求边缘分布函数 $F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)\,dv\,du$

② 求边缘概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$

关系: $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(t)\,dt$ $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx$

$f_X(x)=F_X'(x)$

二维随机变量

X, Y为连续性变量: $f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$

(X,Y)的.. X、Y的概率密度

离散性: $P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j)$

给离散性? → 由表判断(表格)

连续性? 如给出 $f(x,y)$? 求出 $f_X(x)$、$f_Y(y)$ (积分)

再判断 $f_X(x)$、$f_Y(y)$ 之积是否为 $f(x,y)$

→ 联合概率密度

☆ 重要结论: 若X与Y独立 $\Longleftrightarrow f(x,y)=g(x)\cdot h(y)$ → g, h 无特殊含义

(小题用)

这里g, h只有一个变量,

与边缘概率密度无关

(注意定义域也是需要拆开的! 不能互相限制!)

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy & (0\le x<y<1)\\ 0 & 其他\end{cases}$$ → 这里定义域拆不开, 故不独立

例. (X,Y)服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$. 求 $P(XY-Y<0)$

$P((X-1)Y<0)=P(X-1<0,Y>0)+P(X-1>0,Y<0)$

由 $\rho=0\Rightarrow X,Y$ 独立

$X\sim N(1,1)$ $Y\sim N(0,1)$

原式 $= P(X<1)P(Y>0)+P(X>1)P(Y<0)=\frac{1}{2}$

例1 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1+xy}{4} & |x|\le 1, |y|\le 1 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

证 X,Y 不独立，X^2 与 Y^2 独立

~~X与Y独立~~ $\longrightarrow$ X

X与Y独立 $\Longleftrightarrow F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

$\Longleftrightarrow$（连续）$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

$\Longleftrightarrow$（离散）$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$

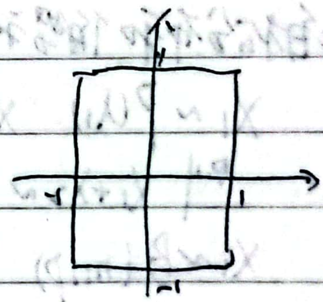
①. $f_X(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & |x|<1 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ ② $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & |y|<1 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

② ~~f_{X^2}~~ X^2 和 Y^2 的边缘概率密度好求 $\longrightarrow$ 随机变量函数的分布

但由边缘概率密度不好求联合概率密度，放弃.

考虑用定义式. $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

设 r.v. (X^2,Y^2) 分布函数 $F(s,t)=P(X^2\le s, Y^2\le t)=P(-\sqrt{s}\le X\le\sqrt{s}, -\sqrt{t}\le Y\le\sqrt{t})$



1° $s<0$ or $t<0$: $F(s,t)=0$

2° $0\le s<1$, $0\le t<1$: $F(s,t)=\iint\limits_{\substack{-\sqrt{s}\le x\le\sqrt{s} \\ -\sqrt{t}\le y\le\sqrt{t}}} f(x,y)dxdy=\sqrt{st}$

3° $0\le s<1$, $t\ge 1$: $F(s,t)=\sqrt{s}$

4° $s\ge 1$, $0\le t<1$: $F(s,t)=\sqrt{t}$.

5° $s\ge 1$, $t\ge 1$: $F(s,t)=1$

再对联合分布函数取极限，得边缘分布函数

$$F_{X^2}(s)=\lim_{t\to\infty}F(s,t)=\begin{cases}0 & s<0\\ \sqrt{s} & 0\le s<1\\ 1 & s\ge 1\end{cases}$$ 同理 $F_{Y^2}(t)$

乘一下即可判独立

二维随机变量函数的分布

四种题型(离散型)

一、只有一个变量 $Z=g(X,Y)$

直接求

二、 2个 $Z=g_1(\ )$, & $W=g_2(\ )$

直接求单个/联合分布列

三、 $Z\sim U[-2,2]$

$$X=\begin{cases}-1 & (Z\le -1)\\ 1 & (Z>-1)\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}-1 & (Z\le 1)\\ 1 & (Z>1)\end{cases}$$

求 (X,Y) 的概率分布

X,Y 只有 有限个取值 → 离散型变量

因此概率分布是分布列(而非分布函数)

四、计算型和证明

泊松分布和伯努利分布的可加性

$X_1\sim P(\lambda_1)$ $X_2\sim P(\lambda_2)$

则 $X_1+X_2\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$ (证明:构造二项展开)

$X_1\sim B(n_1,p)$ $X_2\sim B(n_2,p)$

则 $X_1+X_2\sim B(n_1+n_2,p)$

连续型的?

X,Y 连续,概率 p 为 $f(x,y)$. 求 $Z=X+Y$ 的 p.

先写分布函数，再求导可得

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)dy$

卷积公式

要求：x, y 不能互相限制（即独立）

独立的正态分布线性组合仍为正态分布（可加性）

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

$X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

$aX+bY+c\sim N(a\mu_1+b\mu_2+c,\ a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$

不用忘记加平方

2个

求连续变量函数的概率分布

一、分布函数法

已知 X, Y 的分布，求 $Z=f(x,y)$ 的分布

例1. $f(x,y)=x+y$

$F_Z(z)=P(X+Y\le z)=\iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\iint_{x+y\le z} f_X(x)f_Y(y)dxdy$

→ 累次积分即可

分类讨论较复杂

二、卷积

只有对 $Z=X+Y$ 才有用

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$

$=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)dy$

例1 离散+连续

$P(X=1)=0.3$　$P(X=2)=0.7$　Y的概率密度为 $f_Y(y)$

求 $Z=X+Y$ 的概率分布)

只能用分布函数法．$P(X+Y\le z)=P(X=1)\cdot P(Y+1\le z)$

$+P(X=2)\cdot P(Y+2\le z)$

$=0.3\cdot F_Y(z-1)+0.7F_Y(z-2)$

求导．$f_Z(z)=0.3f_Y(z-1)+0.7f_Y(z-2)$．

瑞利分布(仅做例题)

$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 在分布函数求概率时，转极坐标，

用分布函数比公式法简单

$$P(Z\le z)=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} f(x,y)dxdy=(\text{二重积分转极坐标})$$

二维随机变量函数的分布之积比系数

如：$Z=kX+Y$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X\left(\frac{1}{k}(z-y)\right)\cdot f_Y(y)\cdot\frac{1}{|k|}dy$$

$\hookrightarrow$ $x=\frac{1}{k}(z-y)$ 对z偏导

注意加绝对值！

如：$z=XY$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\cdot\frac{1}{|x|}dx$$

$\hookrightarrow$ $\frac{z}{x}$对z求导

max和min的分布函数

$P(\{\max\{x,y\}\le z)=P(X\le z,Y\le z)$

$=F_X(z)F_Y(z)$　(独立)

$P(\min\{X,Y\}\le z)=1-P(\min\{X,Y\}>z)$

$=1-P(X>z,Y>z)$

(独立)

$=1-P(X>z)P(Y>z)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))$

X_1, X_2相互独立，连续型 随机变量 概率密度 $f_1(x)\cdot f_2(x)$ 分布函数 $F_1(x)\cdot F_2(x)$

是否存在一个函数：1) $f_1(x)\cdot f_2(x)$为概率密度？

2) $F_1(x)\cdot F_2(x)$ 分布函数？ 3). ~~$f_1(x)$~~ $F_1(x)F_2(y)$?

1) X. $f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & 1<x<4\\ 0 & 其他\end{cases}$ $f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & 4<x<7\\ 0 & 其他\end{cases}$

$f_1(x)\cdot f_2(x)\equiv 0$

2). √ $Z=\max\{X,Y\}$

注：1) 2) 只有一个自变量 x → 一维随机变量

3). √. 考查二维随机变量 (X,Y) 的分布即可

（2个自变量 x,y）

条件分布.

离散型随机变量？求联合分布列，再求边缘分布列. 相除.

连续 ？

$F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)=\lim\limits_{\Delta y\to 0^+}P(X\le x|y-\Delta y\le Y\le y+\Delta y)$ （防止除以0

max和min分布函数.例.

设 X_1、X_2独立，且有相同的几何分布 $P(X_i=k)=p(1-p)^{k-1}$ $(i=1,2;k=1,2,\cdots$

求 $Y=\max(X_1,X_2)$的分布.

法(一). $P(Y=n)=P(X_1=n, X_2\le n)+P(X_1\le n-1, X_2=n)=\cdots$

法(二). $P(Y=n)=P(Y\le n)-P(Y\le n-1)$

$=P(X_1\le n, X_2\le n)-P(X_1\le n-1, X_2\le n-1)$ （利用独立，拆开）.

$=\left[\sum_{k=1}^{n}pq^{k-1}\right]^2-\left[\sum_{k=1}^{n-1}pq^{k-1}\right]^2=pq^{n-1}(2-q^n-q^{n-1})$

条件分布函数

$P(X\le x|Y=y)$，简记为 $F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}$ ~~P(~~ $f_{X|Y}(u|y)du$

条件概率密度

由推导可知，$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ $f(x,y)$→联合概率p，$f_Y(y)$→边缘概率p.

$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$.

例1. (X,Y)：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

求 $f_{Y|X}(y|x)$

X的边缘概率p？

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & |x|\le 1\\ 0 & |x|>1.\end{cases}$

$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1.\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

相除，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

例1. $X\sim U(0,1)$ 当 $X=x\ (0<x<1)$ 时，Y在 $(x,1)$ 服从均匀分布. 求 $f_Y(y)$

$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

在 $X=x$ 的条件下：$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, & x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

而 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$ ∴ $f(x,y)=\frac{1}{1-x}\cdot 1=\frac{1}{1-x}$ $(x<y<1,\ 0<x<1)$

核心是求联合概率p，再求边缘概率p.

∴ $f_Y(y)=\int_0^y\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-y)$ $(0<y<1)$

0 (其他)

13.1 设(X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} cxe^{-y}, & 0<x<y<+\infty \\ 0, & \text{others} \end{cases}$

(1) 求c. (2) X与Y独立? (3) $f_{X|Y}(x|y)$. $f_{Y|X}(y|x)$ (4) $P\{X<1|Y<2\}$. $P\{X<1$ ...

(5) 求(X,Y)联合分布函数 (6). $Z=X+Y$ 密度函数

(7). $P\{X+Y<1\}$ (8). $P\{\min\{X,Y\}<1\}$

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1 \Rightarrow c=1$

$\therefore f(x,y)=\begin{cases} xe^{-y}, & 0<x<y<+\infty \\ 0, & 其他 \end{cases}$

(2).

独立? 看分布函数 $F(x,y) \stackrel{?}{=} F_X(x)\cdot F_Y(y)$

此为连续变量 $\Rightarrow f(x,y) \stackrel{?}{=} f_X(x)\cdot f_Y(y)$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_{x}^{+\infty} f(x,y)dy = xe^{-x} \ (x>0)$. 0 (当 $x\le 0$).

同理, $f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{2}y^2e^{-y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$

由于 $0<x<y<+\infty$ 上; $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$ ∴不独立.

(3). 一个理解: 条件分布、条件概率密度理解?

$F_{X|Y}(x|y)$? $\Rightarrow P(X\le x|Y=y)$

$f_{X|Y}(x|y)$? $\Rightarrow P\{X=x|Y=y\}$ 的概率 p.

$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$ $\ast$ =上式

代入即可

(4). $P\{X<1|Y<2\}$, 注意这没法用条件分布 $(Y<2)$, 只能用定义

$P\{X<1|Y<2\}=\dfrac{P(X<1,Y<2)}{P(Y<2)}=\dfrac{\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{2} f(x,y)dxdy}{\int_{-\infty}^{2} f_Y(y)dy}=\dfrac{1-2e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-2}}{1-5e^{-2}}$

$P\{X<1|Y=2\}$? → 就是条件分布函数 $F_{X|Y}(1|2)=\int_{-\infty}^{1} f_{X|Y}(x|2)dx=\frac{1}{4}$

(5). $f(x,y)$ 分类讨论

(6). X, Y不独立 → 不能卷积公式！

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$ $\quad$ f 在 $x<z-x$ 处非0

1° $z<0$：$f_Z(z)=0$

2° $z\geq 0$：$f_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}} xe^{-(z-x)}dx$

$=e^{-z}\int_0^{\frac{z}{2}} xe^{x}dx=e^{-z}+(\frac{z}{2}-1)e^{-\frac{z}{2}}$

(7). $P(X+Y<1)=\int_{-\infty}^{1} f_Z(z)dz=1-e^{-\frac{1}{2}}-e^{-1}$

(8). $P(\min(X,Y)<1)=1-P(\min(X,Y)>1)$

$=1-P(X\geq 1,Y\geq 1)$

$=1-\int_1^{\infty}dv\int_0^{v} ue^{-v}du=1-\frac{5}{2}e^{-1}$

数学期望

X：$P(X=x_i)=p_i$，若 $\sum_{i=1}^{\infty} x_ip_i$ 绝对收敛，则称 $\sum_{i=1}^{\infty} x_ip_i$ 为期望

连续？$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

01分布：$E(X)=p$

泊松：$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda$

$X\sim P(\lambda)$，则 $E(X)=\lambda$

$X\sim G(p)$．$E(X)=1/p$

$X\sim E(\lambda)$ $\quad E(X)=\frac{1}{\lambda}$

一维随机变量函数的数学期望

设 $Y=g(X)$．则 $E(Y)=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$

$Z=g(X,Y)$．则 $E(Z)=E(g(X,Y))=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)\cdot p_{ij}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\cdot f(x,y)dxdy$

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dy$ $(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

$f_X(x))$

MOON TREE