连通度

$G=(V,E)$，从G得到不连通图/平凡图去掉的最小顶点/边数

$\kappa(G)$、$\lambda(G)$.

定理 则有 $\kappa(G)\le\lambda(G)\le\delta(G)$

证明：考虑$\kappa(G)$的上界为$\lambda(G)$（删掉$\lambda(G)$每一条边的其中一个端点）　$\lambda(G)$上界为$\delta(G)$（删掉u相连的边，$\deg u=\delta(G)$）

例1. T是k+1个点的树，若$\delta(G)\ge k$，则G有同构于T的子图

数学归纳法 设T为k阶树成立. 考虑(k+1)阶树

设u为T的叶子. 考虑$T-u$为k阶树. 由于$\delta(G)\ge k\ge k-1$. 故G有同构于$T-u$的子图F_1

设T中与u邻接点为v. 在同构图F_1中与v对应的点v'. 由$\deg v'\ge k$.

则G中有一个不在F_1且与v'邻接的点u'. 则u'与u对应

$G+u'$为与T同构

定理. $G=(V,E)$. $|V|=p$. 若$\delta(G)\ge p/2$ 则$\lambda(G)=\delta(G)$

由前定理可知，$\lambda(G)\le\delta(G)$. 下证$\lambda(G)<\delta(G)$不可能 或证$\lambda(G)\ge\delta(G)$

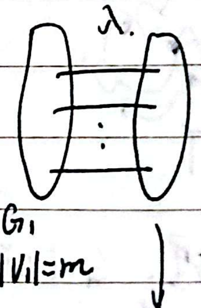
法(一) 假设 $\lambda<\delta$. 则2点均在V_1的边至少有：($|V_1|=m$)

$\frac{1}{2}(m\delta-\lambda)>\frac{1}{2}(m\delta-\delta)=\frac{1}{2}\delta(m-1)$ (V_1中的点的连边，再去掉割集的边)

若$\delta\ge m$. 则V_1中的边 $>\frac{1}{2}m(m-1)$. 矛盾

$\delta<m$. 故$m\ge\frac{p+1}{2}$ (由$\delta\ge\frac{p}{2}$)

同理 $|V_2|\ge\frac{p+1}{2}$，矛盾



法(二). 不妨设 $m\le\frac{p}{2}$ ($|V_1|\le\frac{p}{2}$)

故$\delta\ge m(\delta-(m-1))\ge\delta$ (因为$\delta\ge\frac{p}{2}\ge m$)

又$\lambda\le\delta$　$\therefore\lambda=\delta$

→因为G_1到G_2的所有边都要删(由割的定义)

致删边 $=\sum_{i\in G_1} i\to v$的边数$(v\in G_2)\ge m(\delta-(m-1))$

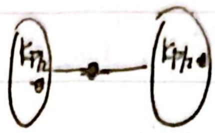
构造

例1. $\delta(G)=[p/2-1]$. $\lambda(G)<\delta(G)$

$\delta=2$

$\lambda=1$

或



*定义 $\kappa(G)\geq n$. n-连通 (等价于,删去任意 $1,\cdots,n-1$ 个点,仍连通)

$\lambda(G)\geq n$ n-边连通 (等价于, $\cdots$ 边 $\cdots$)

定理 $G=(V,E)$. $|V|=p\geq 3$. 则 G 是2-连通 $\Leftrightarrow$ G 的任2个不同顶点在 G 的同一个圈上

$\Leftarrow$ 可知 G 中无割点.

$\Rightarrow$ 施归纳于 $d(u,v)$ (→最短路). $d(u,v)=1$ 时 u,v 不是桥.

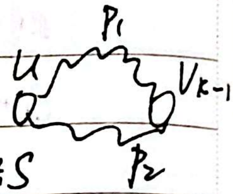
由桥的性质(3), u,v 必在圈上.

假设 $d(u,v)=k-1$ 成立

今设 $d(u,v)=k$. 且长为 k 的路为 $u\,v_1\cdots v_{k-1}\,v$

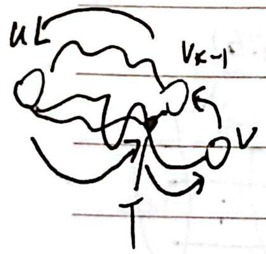
则 $d(u,v_{k-1})=k-1$ (不可能更小,否则 $d(u,v)\neq k$)

从而 u,v_{k-1} 间有2条边不相交的路 P_1,P_2.



又 $\because G$ 为2-连通 $\therefore G-v_{k-1}$ 连通. 故 $G-v_{k-1}$ 中 u,v 有路 S

设 S 与 P_2 的最后一个交点为 T.



则 $v_{k-1}\xrightarrow{P_1}u\xrightarrow{P_2}T\xrightarrow{S}v\to v_{k-1}$

(u,v) 在这个圈上.

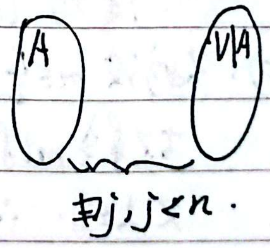
定理. $G=(V,E)$ 为 n-边连通 $\Leftrightarrow$ 不存在 V 的真子集 A, 使 A 的某个顶点与 $V\setminus A$ 的 (连接) (任意所有) 某个顶点的边的总数 $<n$

(任意所有)

$\Rightarrow$ 反证. 变成 j 连通了 ($j<n$)

$\Leftarrow$ 反证 设 $\exists$ 割集 E'. $|E'|<n$.

把2边的点集拴起来 $\Rightarrow$ 存在 A, $V\setminus A$ 了! 矛盾



找 j, $j<n$.

设 $G=(V,E)$, $s,t\in V$, $(s,t)\notin E$. $S\subseteq V$. 若 $G-S$ 中, s,t 分属不同支, 则称 S 分离 s,t

Hall定理

m个女 n男. 有些相互之间有好感时才能配对, 能否两两配对:

$\forall k\in[1,m]$. 任意k个女总喜欢的男 $\geq k$

数学表达 (相异代表系)

$G=(V_1\cup V_2, E)$. $\Gamma: V_1\to 2^{V_2}$.

G有完全匹配 $\iff \forall S\subseteq V_1$, $|\Gamma(S)|\geq |S|$. 其中 $\Gamma(S)=\{u \mid \forall v\in S, \exists u\in V_2, uv\in E\}$

给若干集合, 求相异代表系? 在每个集合中取一个元素, 且取得元素互不相同

t条件

$G=(V_1\cup V_2, E)$ 为偶图. $|V_1|\leq |V_2|$. G中存在 $V_1\to V_2$ 完全匹配的充分条件为: $\exists t\in N_+$.

使 V_1 中顶点度 $\geq t$, V_2 中顶点度 $\leq t$

例 7门课, 7人, 每人可以上其中3门课, 每课可以被其中3个人上. 问能否安排, 使每个人恰上1门课

转化: 给一个偶图 V_1: 人 V_2: 课

$|V_1|\leq |V_2|$. 由于 $|V_1|$度 ≥ 3, $|V_2|$度 ≤ 3

$\therefore V_1\to V_2$ 存在完全匹配

最大权匹配 (稳定婚姻问题). G-S算法

第一轮. 每个男孩选择自己最喜欢的女孩, 并表白

1). 若女孩未被男孩追求过, 则接受

2) 已 比较. 比当前还喜欢. 接受

否则 拒绝

第二轮: 每个单身男孩向从未拒绝过自己的女孩中选最喜欢的, 表白.

男孩的对象变差. 女孩对象变好

例1. $G=(p,q)$ $p\geq 2$. 若 $\delta(G)\geq (p+k-1)/2$ 则G为k-连通

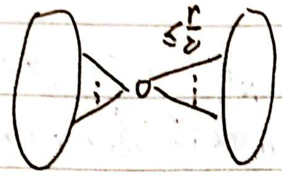
即证任删$(k-1)$个点后仍连通.

设删$(k-1)$个点,得G'. 有$p-k+1$个点.

$\delta\geq (p+k-1)/2-(k-1)=\frac{p-k+1}{2}$ 由 $\delta\geq\frac{p}{2}$ 则连通.

知G连通

例1. $r\geq 2$. G为r-正则图, $K(G)=1$ 证: $\lambda(G)\leq[\frac{r}{2}]$



抽屉原理

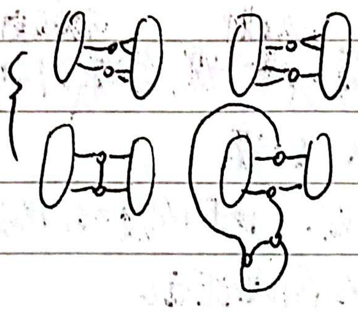
例1 G为3次图. 证: $K(G)=\lambda(G)$

① $K(G)=0$. $\lambda(G)=0$

② $K(G)=1$. $\lambda(G)=1$ (第7章习题最后一题)

③ $K(G)=3$ 则 $3\leq\lambda(G)\leq 3$

④ $K(G)=2$ $\lambda(G)=2$ ⇒ {

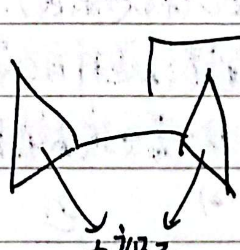


第九章.

平面图. 可平面图. (注意区分看清题目)

面的次数: 包围每个面的所有边组成的回路长度称为次数

桥计算2次



一些性质: ① 一条边不是桥, 则它必是2个面的公共边界

② 桥只能是一个面的边界

③ G中所有面的次数之和为边数的2倍 ($2q=\sum n_i$)

↳常用放缩技巧: $2q=f\cdot\bar{n}\geq n'\cdot f$ (面数) (平均次数)

2个关系: $\begin{cases}2q=\sum n_i\geq n'\cdot f\\ 2q=\sum deg_i\geq deg\cdot p\end{cases}$

反证法常用

by SkyRainWind & 朝武芳乃