定理 任一无穷集X都含一个可数子集A

证. 考虑X中任取一个x_1，则此时X变为$X\setminus\{x_1\}$

$X\setminus\{x_1\}$ $\quad x_2 \quad$ $X\setminus\{x_1,x_2\}$

⋮

取$x_1,x_2,\cdots$，就得到一个可列集合$\{x_1,x_2,\cdots\}$

定理 可数集的任一无穷子集为可数集

证. 设此可数集为$A=\{a_1,a_2,\cdots\}$

无穷子集$B\subset A$,

从a_1开始，每次看是否有$a_i\in B$, $\cdots$

将所有a_i按顺序排列，得$\{b_1,b_2,\cdots\}$

定理. $A_1,A_2,\cdots,A_n$为可数集，则$\bigcup_{i=1}^{n}A_i$也为可数集

$$\begin{array}{ccc} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots \\ \vdots & & \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots \end{array}$$

按此顺序排b_i即可

定理 A可数，B为有穷集，则$A\setminus B$、$A\cup B$也为可数集

$A\setminus B$：从a_1开始扫描，每次若$a_i\notin B$就加入集合中

将所有加入集合的元素按a_i的顺序排列，得$c_1,c_2,\cdots$也可用可数定义得

$A\cup B$：设$P=A\cap B$.

设$B\setminus P=\{b_1,b_2,\cdots,b_r\}$

则$A\cup B=A\cup(B\setminus P)=\{b_1,b_2,\cdots,b_r,a_1,a_2,\cdots\}$

由定义，可数

定理. $A_1,A_2,\cdots$为有穷集，则$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$至多可数.

证：顺着编号

证：不可同构

推论：全体有理数之集为可数集

定理：M无穷集，A至多可数，则$M\cup A\sim M$ → 注意这里M为可数|连续统…均可

证 设$P\subseteq M\setminus A$，且P可数

则$M=(M\setminus P)\cup P$

$M\cup A=(M\setminus P)\cup(A\cup P)$.　　由于$M\setminus P\sim M\setminus P$

$P\sim A\cup P$（2个可数集的并也可数，而可数意味着与N对等）

故$P\sim N\sim A\cup P$）

定理：M无穷集，A至多可数，$M\setminus A$为无穷，则

$M\sim M\setminus A$

证．$M\setminus A\sim(M\setminus A)\cup A$．同上

无穷集．M与M的一个真子集对等，则M为无穷的

定理．$A_1,A_2,\cdots,A_n$可数集，则$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$可数

证．~~设~~ 下证$A_1\times A_2$可数

设$B_k=\{(a_k,b_j)|j\in N\}$

则$A_1\times A_2=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$（可数个可数集并起来仍可数）

可数

归纳法知$A_1\times\cdots\times A_n$可数

推论：整系数多项式可数个 → 代数数可数

不可数集

如$[0,1]$是不可数集

证：反证．设为可数集，则全部数可列如下：

$$\begin{cases} x_1: 0.x_{11}x_{12}x_{13}\cdots \\ x_2: 0.x_{21}x_{22}x_{23}\cdots \\ x_3: \cdots \end{cases}$$

考虑$0.b_1b_2b_3\cdots$

$b_1=\begin{cases}1 & x_{11}\neq 1\\ 2 & x_{11}=1\end{cases}$　$b_2=\begin{cases}1 & x_{22}\neq 1\\ 2 & x_{22}=1\end{cases}$　…

显然 b 不是 $x_1, x_2, \cdots$ 中的任一数

连续统

X 为集合，如果存在 $\varphi: X \xrightarrow{\text{双射}} [0,1]$，则称 X 为连续统

设 $a, b \in R$，~~a<b~~ $a<b$，则 $[a,b]$ 为连续统

$\varphi: [0,1] \to [a,b]$，$\forall x \in [0,1]$，$\varphi(x) = a + (b-a)x$

于是 $(a,b) \sim [0,1] \sim [a,b) \sim (a,b]$　$(M \backslash A \sim M \cup A \sim M)$

定理．$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为连续统，则 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \sim [0,1]$　可数个可数 / 连续统之并为可数 / 连续统 ← 要求两两不交

证：$A_1 \sim [0, p_1)$

$A_2 \sim [p_1, p_2)$

$\vdots$

$A_n \sim [p_{n-1}, 1]$

若 $A_1, A_2, \cdots$ 两两不交，均为连续统，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \sim [0,1]$

在上式基础上 $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$ 即可

全体实数之集为连续统（$\cot \pi x$ $[0,1] \sim R$）

无理数之集 $\cdots$（去掉可数集 A 仍为连续统）

超越数 $\cdots$　与 M 对等

0,1 无穷序列的全体是连续统

将每个无穷序列看成二进制小数即可 → 构成了 $[0,1]$ 的所有实数

A 为可数集，则 $2^A \sim [0,1]$

取 $B \in 2^A$ $(B \subseteq A)$，考查 B 的特征函数 $\chi_{2^A}(B)$，一一对应一个 01 序列

自然数无穷序列的全体是连续统

(基本)

考虑 1,2,3,…

先考虑递增序列 $1\le k_1<k_2<\cdots$，显然考虑 $\{k_1,k_2,\cdots\}$ 的特征函数，必一一对应了一个无穷长 01 序列，进而，是连续统

如果不递增？$\{k_1,k_2-k_1,\cdots\}$ 显然，也是与 $\{k_1,k_2,\cdots\}$ 一一对应，进而连续统

复习一下：有 2 种无穷。

可数集 $\sim N$

无穷集 $\sim (0,1)$

关系：$2^N\sim(0,1)$，同时，还可以 $\sim N^N\sim R^N$

就是 $\{0,1\}\times\{0,1\}\times\cdots$（可数个），就对应了所有的 01 序列

$2^N\sim 8^N\to\{0,\cdots,7\}\times\{0,\cdots,7\}\times\cdots$ 所有的 0~7 序列，看成 8 进制小数

为什么 R^N 是连续统？只需证 $R\times R$ 为连续统。$\forall a\in R_1, b\in R_2$，$a$ 对应一个序列 $m_1m_2\cdots$ b 对应 $n_1n_2\cdots$ (a,b) 对应 $m_1n_1m_2n_2\cdots$ 为连续统

因此 $R\times R$ 仍对应一个 01 序列

为什么连续统个连续统的并是连续统？$R\times R=R$

平面上的点 → 看成连续统个线之并

基数

定义：

设 A.B 为集合，其基数分别为 α,β，若 $|A|$ A 与 B 的一个真子集对等，但 A 不与 B 对等，则称 $\alpha<\beta$.（$|A|=\alpha$，$|B|=\beta$）.

对任一集合 M，$|M|<|2^M|$.

M 能与 2^M 的一个真子集一一对应，但 M 不能与 2^M 一一对应

证：1° $f:M\to\{\{x\}\mid x\in M\}\subset 2^M$.

2° 反证，设能一一对应，设 $\varphi:M\to 2^M$，φ 为双射（一个元素对应一个集合

$\forall m\in M$，$\varphi(m)\in 2^M$（$\varphi(m)\subseteq M$）

若 $m\in\varphi(m)$，则称 m 为好元素.

$m\notin$ 坏

考虑这个集合：$\{x\mid x\notin\varphi(x)\}=B$，则 $B\in 2^M$

考虑 B 的原象 b，若 b 为好元素，则 $b\in\varphi(b)$，又由 φ 定义，$b\notin\varphi(b)$

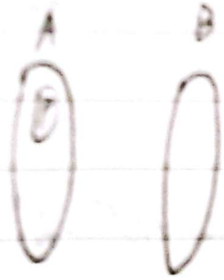
坏 $b\notin$ $b\in$

矛盾！∴无一一对应

康托定理：设 A B 为集合，$f: A\to B$，$g: B\to A$，若 f, g 为单射，则 $A\sim B$

这个定理给了我们一种证明2个集合对等的方法：构造2个单射

证明



思想：$g: B\to A$ 将A中有g原象的元素都和B中一一对应。

再把没原象的拿出来，利用f建立一一对应

$\varphi(P) = A\setminus g(B\setminus f(P))$

$\varphi(P)$实质：P并上（A中无g原象的元素），故 $P\subseteq\varphi(P)$

可以证明 $\exists D$，$D=\varphi(D)\Rightarrow$ ✓

基数的运算

A, B为集合，$|A|=\alpha$，$|B|=\beta$，$A\cap B=\phi$，则 $A\cup B$ 基数：$\alpha+\beta$

$A\times B$ 基数为 $\alpha\cdot\beta$。 $\{f\mid f: A\to B\}$ 基数：β^{α}

易证，2个集合对等，则基数相等

$n+a=a$，$n+c=c$ $n\cdot a=a$ $n\cdot c=c$

$a+a=a$ $c+c=c$。 $a+c=c$。

$a\cdot a=a$ $c\cdot c=c$ $a\cdot c=c$

$2^a=c$。 $c^a=c$ $c^c=2^c$ $\to$ 只有子集才能使基数↑

$(2^R\sim\{f\mid f: R\to R\}$

例 $A=\{a_1, a_2, \cdots\}$，设 $S=$ 所有A的有穷子集构成的集合

求证：S可数

设 $A_1=\{a_1\}$，则 A_1 的所有子集 $\to 2^{A_1}$

$A_2=\{a_1, a_2\}$ $\to 2^{A_2}$

⋮

$S=\bigcup_{n=1}^{\infty} 2^{A_n}$ 对每个特定的n来说，由于n有限，故 2^{A_n} 有限

可数个有穷集并起来 $\to$ 可数集

注意 $S\neq 2^A$！ 不可数

例1 设$A=B\cup C$，$A\sim[0,1]$ 证：B与C中至少有一个与$[0,1]$对等
(即：$|B|=c$ or $|C|=c$)

设$A=\{(x,y)\mid x,y\in(0,1)\}$

若$\exists x\in(0,1)$，使$\{(x,y_x)\mid y_x\in(0,1)\}\subset B$，则$|B|=c$. ✓

否则，$\forall x\in(0,1)$，$\exists y(x)$，使$(x,y(x))\subset C$. $\therefore C\sim[0,1]$，$|C|=c$ ✓

例1 若A可数，则2^A不可数.

A可数 $\therefore A\sim N$. 不妨设$A=N$

法(一). $2^N\sim R$ ($2^N\sim$无穷所有01无穷序列$\sim R$)，R不可数

法(二). ~~假设~~ 设$f: N\to\{0,1\}$

设2^N可列如下:

$f(x_1)=$ 01序列

$f(x_2)=$ 01序列

$\vdots$

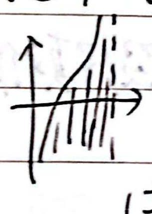
考虑b，其中$b_i=\begin{cases}0 & f(x_i)\text{的第}i\text{位为}1\\ 1 & \text{others}\end{cases}$ 矛盾!

例1 证：所有连续函数的集合$F\sim[0,1]$

证明对等：用康托定理，只需构造$f: F\to[0,1]$ $g: [0,1]\to F$ 单射

g是容易的，如：$\forall x\in g[0,1]$. 构造函数 $y=x$

f? 构造 $F\to 2^{Q\times Q}$. 是单射. 故$F\sim[0,1]$



考虑一个函数下方的区域的有理点对

显然f是单射.

(若F不是连续函数? $\to$ 则F与$2^{R\times R}$有单射)

由$\because f, g$是单射. 由康托定理，F与$[0,1]$对等

by SkyRainWind & 朝武芳乃