1) X 概率密度：$f_X=\begin{cases}\frac{x}{8} & x\in(0,4)\\ 0\end{cases}$ 求 $Y=2X+8$ 的密度 $f_Y(y)$

$y\le 8$：$F_Y(y)=0$　$f_Y(y)=F_Y'(y)=0$

$y\ge 16$：　　1　　　　0

$y\in(8,16)$：$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X+8\le y)$

$=P(X\le\frac{y-8}{2})$

$=F_X(\frac{y-8}{2})$

$f_Y(y)=F_Y'(y)=F_X'(\frac{y-8}{2})=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{y-8}{2}}{8}=\frac{y-8}{32}$

快速求 $Y=g(X)$．已知 X 概率密度求 Y？

先求 g 的反函数 h．$x=h(y)$ → g 严格单调

~~若 g~~

$\cancel{f_X(x)}$ $f_Y(y)=f_X(h(x$

$X\sim E(2)$ $F(X)$．则 $P(F(X)>\frac{1}{3})=P(Y>\frac{1}{3})=\frac{2}{3}$．

（因 $F(X)\sim U(0,1)$）

↓

是个结论！大题要证！！

随机变量函数的分布：

一般步骤：① $Y=f(x)\le y$ → 得出 $x\ge g(y)$ 或 $x\le g(y)$

② $F_Y(Y)=P(f(x)\le y)=P(\cancel{g(y)\le x}\ x\le g(y))$（其他情况同理）

$=F_X(g(y))$

③ $f(y=Y)=F_Y'(Y)=g'(y)\cdot F_X'(g(y))$

↓

是一段概率密度的积分，①可以直接积分

② 容易，利用分布函数作差求一段概率

一般利用 $f_X(x)$ 代表 $X=x$ 时的概率密度

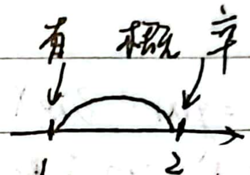
$F_X(x)$ 代表 $P(X\le x)$

例 X的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2 & (0<x<3)\\ 0 & (\text{others})\end{cases}$，令 $Y=\begin{cases}2 & x\le 1\\ x & 1<x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$

(1) 求Y的分布函数 (2). 求 $P(X\le Y)$

(1) 求Y分布函数 → $P(Y\le y)$

考虑Y可能取值? $P(1\le Y\le 2)=1$



分段讨论. ① $y<1$ (注意无1!) $P(Y\le y)=0$

② $y\ge 2$ $P(Y\le y)=1$

③ $y=1$. $P(Y\le y)=P(Y=1)=P(X\ge 2)=\int_2^3 \frac{1}{9}x^2\,dx$

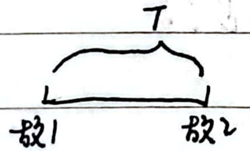
④ $1<y<2$. $P(Y\le y)=P(Y=1)+P(1<Y\le y)=\int_2^3 \frac{1}{9}x^2\,dx+\int_1^y x\,dx$

(2). $P(X\le Y)=P(X=Y)+P(X<Y)$

$=P(1<X<2)+P(X\le 1)$ 即 $P(X<2)$

习题T6.

(1) "时间间隔"?



连续型变量概率分布? → 分布函数 → 理解从故障1开始后,再过t得故2.
但只有 $t<T$. 不故障

$F_T(t)=P(T\le t)=1-P(T>t)=1-P(N(t)=0)=1-e^{-\lambda t}$

↳ 不知道几次故障, 不好求

实际上指数分布

(2). 利用指数分布的无记忆性

$P(T>16\mid T>8)=P(T>8)=1-e^{-8\lambda}$

一个重要结论：若变量X服从分布函数F(x)是严格单增的，则随机变量$Y=F_X(X)$ (F(x)) 服从 $U(0,1)$

意味着这段里没有$f(x)=0$的点

$P(Y\le y)=P(F(X)\le y)$. 由于$F(X)$严格单增，X有反函数 $P(X\le F^{-1}(y))=F(F^{-1}(y))$
$=y$

$\therefore Y\sim U(0,1)$

二维随机变量

$F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$ → 联合分布 $=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(\cancel{x,y}\ u,v)\,du\,dv$

$F_X(x)=P(X\le x, Y<+\infty)$ → 边缘分布函数

$F_Y(y)=P(X<+\infty, Y\le y)$ →

注：已知联合分布,可求边缘，反之求不了（加条件）

$F(+\infty,+\infty)=1$. $F(-\infty,-\infty)=0$

$F(-\infty,+\infty)=?=F_X(-\infty)=0$（一元分布函数）

$P(a<X\le b, c<Y\le d)=F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c)$

离散性变量

$\sum_i\sum_j p_{ij}=1$

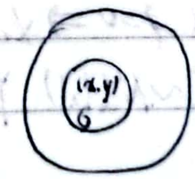
	x_1	x_2	$\cdots$
y_1			
y_2			
$\vdots$			

$P(X=x_i)=\sum_j p_{ij}\triangleq p_{i\cdot}$

$P(Y=y_j)=p_{\cdot j}$

连续型

$P((x,y)\in G)=\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$



一般利用$f_X(x)$代表 $X=x$时的概率密度

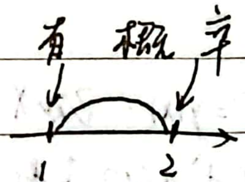
$F_X(x)$代表 $P(X\le x)$

例. X的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2 & (0<x<3)\\ 0 & (\text{others})\end{cases}$，令 $Y=\begin{cases}2 & x\le 1\\ x & 1<x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$

(1) 求Y的分布函数 (2). 求$P(X\le Y)$

(1) 求Y分布函数 → $P(Y\le y)$

考虑Y可能取值? $P(1\le Y\le 2)=1$



分段讨论. ① $y<1$ (注意无1!) $P(Y\le y)=0$

② $y\ge 2$ $P(Y\le y)=1$

③ $y=1$. $P(Y\le y)=P(Y=1)=P(X\ge 2)=\int_2^3 \frac{1}{9}x^2dx=$

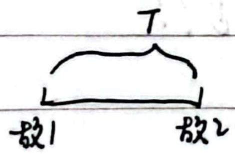
④ $1<y<2$. $P(Y\le y)=P(Y=1)+P(1<Y\le y)=\int_2^3\frac{1}{9}x^2dx+\int_1^y x\,dx$

(2). $P(X\le Y)=P(X=Y)+P(X<Y)$

$=P(1<X<2)+P(X\le 1)$ 即 $P(X<2)$

习题T6.

(1) "时间间隔"?



连续型变量概率分布? → 分布函数 → 理解从故障1发生后，再过T得故2. 但只有t<T. 不故障

$F_T(t)=P(T\le t)=1-P(T>t)=1-P(N(t)=0)=1-e^{-\lambda t}$

↳ 不知道几次故障，不好求

↓ 实际上指数分布

(2). 利用指数分布的无记忆性

$P(\underset{T}{\cancel{N(t)}}>16\mid\underset{T}{\cancel{N(t)}}>8)=P(T>8)=1-e^{-8\lambda}$

一个重要结论：若变量X服从分布函数F(x)是严格单增的，则随机变量 $Y=F_X(x)$ $(F(x))$ 服从 $U(0,1)$

意味着区段里fx没有 $f(x)=0$ 的点

$P(Y\le y)=P(F(X)\le y)$. 由于 $F(x)$ 严格单增，X有反函数 $P(X\le F^{-1}(y))=F(F^{-1}(y))=y$

$\therefore Y\sim U(0,1)$

二维随机变量

$F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$ → 联合分布 $=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$

$F_X(x)=P(X\le x, Y<+\infty)$ → 边缘分布函数

$F_Y(y)=P(X<+\infty, Y\le y)$ →

注：已知联合分布，可求边缘，反之求不了（加条件）

$F(+\infty,+\infty)=1$.　$F(-\infty,-\infty)=0$

$F(-\infty,+\infty)=?=F_X(-\infty)=0$ （一元分布函数）

$P(a<X\le b, c<Y\le d)=F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c)$

离散性变量

$\sum_i\sum_j p_{ij}=1$

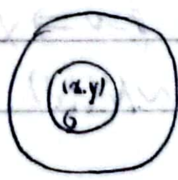
	x_1	x_2	$\cdots$
y_1			
y_2			
$\vdots$			

$P(X=x_i)=\sum_j p_{ij}\triangleq p_{i\cdot}$

$P(Y=y_j)=p_{\cdot j}$

连续型

$P((X,Y)\in G)=\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$



相关概念 ① 边缘分布函数 $F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dvdu$

② 联合边缘概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

关系 $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$　　　$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

$f_X(x)=F_X'(x)$

二维随机变量

X,Y为连续性变量:

$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

(X,Y)的..　　X,Y的概率密度

离散性:

$P(X=x_i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j)$

给离散性?→由定义判断(表格)

连续性?如给出$f(x,y)$?求出$f_X(x)$,$f_Y(y)$(积分)

再判断$f_X(x)$、$f_Y(y)$之积是否为$f(x,y)$

☆重要结论:若X与Y独立$\Longleftrightarrow \underbrace{f(x,y)}_{\text{联合概率密度}}=g(x)\cdot h(y)$ →g,h无特别含义

(小题用).

这里g,h只有一个变量:

与边缘概率密度差系数

(注意定义域也是需要拆开的!不能互相限制!)

$f(x,y)=\begin{cases}8xy & (0\le x<y<1)\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ →这里定义域拆不开,故不独立

例. (X,Y)服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$. 求$P(XY-Y<0)$

$P((X-1)Y<0)=P(X-1<0,Y>0)+P(X-1>0,Y<0)$

~~由~~ $\rho=0\Rightarrow X,Y$独立

$X\sim N(1,1)$　$Y\sim N(0,1)$