(5) $f(x,y)$ 分类讨论

(6) X,Y 不独立 → 不能卷积公式！

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$　　f 在 $x<z-x$ 处非0

1° $z<0$：$f_Z(z)=0$

2° $z\geq 0$：$f_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}} xe^{-(z-x)}dx$

$=e^{-z}\int_0^{\frac{z}{2}} xe^{x}dx = e^{-z}+(\frac{z}{2}-1)e^{-\frac{z}{2}}$

(7). $P(X+Y<1)=\int_{-\infty}^{1} f_Z(z)dz = 1-e^{-\frac{1}{2}}-e^{-1}$

(8). $P(\min(X,Y)<1)=1-P(\min(X,Y)>1)$

$=1-P(X\geq 1, Y\geq 1)$

$=1-\int_1^{\infty}dv\int_1^{v} ue^{-v}du = 1-\frac{5}{2}e^{-1}$

数学期望

X：$P(X=x_i)=p_i$，若 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 绝对收敛，则称 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 为期望

连续？$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

01分布：$E(X)=p$.

泊松　：$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda$

$X\sim P(\lambda)$. 则 $E(X)=\lambda$.

$X\sim G(p)$.　$E(X)=1/p$

$X\sim E(\lambda)$　$E(X)=\frac{1}{\lambda}$

一维随机变量函数的数学期望

设 $Y=g(X)$．则 $E(Y)=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$.

$Z=g(X,Y)$．则 $E(Z)=E(g(X,Y))=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)\cdot p_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\cdot f(x,y)dxdy$

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dy$　$(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = f_X(x))$

扫描全能王 创建

性质 $E(C)=C$　$E(CX)=CE(X)$

$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$　注意X_1与X_2不必独立

X_1X_2 $\boxed{独立}$ $\Rightarrow E(X_1X_2)=E(X_1)E(X_2)$　(根本原因是$Cov(X,Y)=0$)

例 1..n号球放入1..n盒子，记配对个数X的期望

$X_i=\begin{cases}1 & i球放入i盒\\ 0 & 否则\end{cases}$

$E(X)=E(X_1+\cdots+X_n)=E(X_1)+\cdots+E(X_n)=n\times\frac{(n-1)!}{n!}=1$

钦定此位置恰好配对，其余位置任意

方差

$D(X)=E(X-E(X))^2$ (X-平均值的加权平均)　得有期望才有方差

$D(X)=E(X^2-2XE(X)+E^2(X))=E(X^2)-2E(X)\cdot E(X)+E^2(X)$

常数

$=E(X^2)-E^2(X)$

(同时，可知$E(X^2)\geq E^2(X)$)

推论：$E(X^2)=D(X)+E(X)^2$

泊松分布的方差？$X\sim P(\lambda)$ 则 $D(X)=\lambda$

均匀　$X\sim U[a,b]$. $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

性质

1. $D(C)=0$.
2. $D(CX)=C^2D(X)$

MOON TREE
扫描全能王 创建

3. 若X,Y $\boxed{\text{独立}}$ 则 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$ （因 $\pm 2Cov(X,Y)\xrightarrow{\text{独立}}0$）

↳ 注意与期望区别

推论：$D(c_0+\sum_{i=1}^{n}c_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}c_i^2D(X_i)$

4. 若X,Y $\boxed{\text{独立}}$ 则：$D(XY)=\cancel{D(X)+D(Y)}$ $D(X)D(Y)+D(X)[E(Y)]^2+D(Y)[E(X)]^2$

一些经典分布的方差

注意一下，特殊性质中涉及到多个变量的公式中，没要求独立的是期望的线性性

~~B(n,p)~~	分布列/概率p	期望	方差
$B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^kp^kq^{n-k}$	np	$np(1-p)=npq$
$P(\lambda)$	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
$G(p)$	$P(X=k)=q^{k-1}\cdot p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
$U[a,b]$	$f(x)=\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$E(\lambda)$	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

协方差

$Cov(X,Y)=E\{(X-E(X))(Y-E(Y))\}=\underline{E(XY)-E(X)E(Y)}$

则 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$

性质见课本（交换/提取因式/可加性）

“独立”与“不相关”（关系）

独立 $\xrightarrow{\quad}$ 不相关 …… 特殊：如果没有 ρ不存在？就没有“不相关”的概念

独立 $\not\xleftarrow{\quad}$ 不相关

（可能有其他的关系）

判断：不相关 ⇒ $\rho=0$

不独立 ⇒ 构造的任意事件不独立（只能用分布函数/密度/分布列判断）

大数定律

$(X,Y)\sim N(1,-1;2,2;\frac{1}{2})$. 用切……

估计 $P(|X+Y|\geq 3)\leq$ ____

$P(|\underbrace{X+Y-E(X+Y)}_{\text{“}E(X)\text{”}}|\geq \underbrace{3}_{\text{“}\varepsilon\text{”}})\leq\frac{D(X+Y)}{\varepsilon^2}=\frac{D(X+Y)}{9}$

MOON TREE

扫描全能王 创建

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$

$Cov(X,Y)=\rho\cdot\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=21$

$=6$

$\therefore\ \leq\frac{2}{3}$

例

$X_1,X_2,\cdots$ 独立 服从 $E(2)$ 求 $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$；$n\to+\infty$ 依概率收敛于什么？

$X_i\sim E(\frac{1}{2})$. $\therefore E(X_i)=\frac{1}{2}, D(X_i)=\frac{1}{4}$

$E(X_i^2)=D(X_i)+(E(X_i))^2=\frac{1}{2}$. （若为 X_i^5？只能积分）.

由辛钦大数定律，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\frac{1}{2}$

例. $X\sim E(\lambda)$. 求 $Y=\min(X,2)$ 的期望.

不能写出 $F_Y(y)\to f_Y(y)\to\cancel{E(Y)}$！因为 F_Y 不一定可导 如何验证？写出 $F_Y(y)$ 发现 $f_Y'(0^-)\neq f_Y'($

$E(Y)=E(\min(X,2))=\int_{-\infty}^{+\infty}\min(X,2)f_X(x)dx$

变成一维随机变量函数期望

$=\int_{x\leq2}xf_X(x)dx+\int_{x>2}2f_X(x)dx=\frac{1}{\lambda}(1-e^{-2\lambda})$

例. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布. $f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)} & (x>\theta)\\ 0 & (x\leq\theta)\end{cases}$.

$Z=\min(X_1,\cdots,X_n)$. 求 (1) $E(Z)$ (2) $D(Z)$

常规做法：$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-2(x-\theta)} & (x>\theta)\\ 0 & (x\leq\theta)\end{cases}$

高级做法：$X-\theta\sim E(2)$

（给计算）. $\min(\ )-\theta\sim E($

$F_Z(x)=1-[1-F_X(x)]^n=\begin{cases}1-e^{-2n(x-\theta)} & (x>\theta)\\ 0 & (x\leq\theta)\end{cases}$

$\therefore E(Z)=\frac{1}{2n}+\theta$

$\min(X_1-\theta,X_2-\theta,\cdots,X_n-$

再用分布函数那一套

$\therefore f_Z(x)=\begin{cases}2ne^{-2n(x-\theta)} & (x>\theta)\\ 0 & (x<\theta)\end{cases}$

$\therefore E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_Z(x)\cdot xdx=\frac{1}{2n}+\theta$. $E(Z^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_Z(x)\cdot x^2dx$

$D(Z)=E(Z^2)-(E(Z))^2$

MOON TREE

扫描全能王 创建

中心极限定理 $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$ 则 $\sum X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

Date　　Page.

例（清华期末）

$$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases} ye^{-(x+y)} & (x>0,y>0) \\ 0 & (其他) \end{cases}$$

(1) X 与 $X+Y$ 相关系数　(2) $Z=XY$ 求 $D(Z)$

(1). $\rho=\dfrac{Cov(X,X+Y)}{\sqrt{D(X)D(X+Y)}}=\dfrac{Cov(X,X)+Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(X)+D(Y)}}$　　$Cov(X,X)=D(X)$

$f(x,y)=(y\cdot e^{-y})\cdot(e^{-x})$，且 (x,y) 区域没有相互限制

$\therefore X,Y$ 独立.（大题写完整！）$\rightarrow f_X(x)=\int_0^{+\infty}f(x,y)dy=e^{-x}$

$f_Y(y)=\int_0^{+\infty}f(x,y)dx=ye^{-y}$

$\therefore Cov(X,Y)=0,\ D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

$E(X)=\iint_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\cdot x\,dx\,dy$.　$E(X^2)=\cdots$　$\rightarrow D(X)$

同理 $D(Y)\longrightarrow$ ✓

(2) $D(Z)=D(XY)=E(X^2Y^2)-(E(XY))^2=\cdots$

也可：$D(XY)\xlongequal{X,Y独立}D(X)D(Y)+D(X)E^2(Y)+D(Y)E^2(X)=\cdots$

例 r.v. X 可取 $a\le X\le b$. 证明：

(1). $a\le E(X)\le b$.　(2) $D(X)\le\dfrac{(b-a)^2}{4}$

(1). 放缩一下显然.

(2). 引理. r.v. X. 若 $D(X)$ 存在，则 $\forall c\in R$，有：

$D(X)\le E(X-c)^2$

证明：$D(X)=D(X-c)=E(X-c)^2-(E(X-c))^2\le E(X-c)^2$

（有用的结论）

$D(X)\le E(X-\frac{a+b}{2})^2\le E(b-\frac{a+b}{2})^2=E(\frac{b-a}{2})^2=\frac{(b-a)^2}{4}$.

例 $X\sim N(0,1)$，求 $E(Xe^{2X})$

原式 $=\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=e^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{(x-2)^2}{2}}dx$

MOON TREE

扫描全能王 创建

凑配方法！重要！！（尤其正态分布中）

$X\sim N(2,1)$

考查这个式子的含义. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$ 可以看成 x 的概率密度，乘上 x，就是期望 =.

$\therefore = 2e^2$

例1 r.v. X. 分布函数 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi(\frac{x-1}{2})$，$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数

求 $E(X)$

法(一)

原式 $=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$，其中 $f(x)=F'(x)=0.3\varphi(x)+0.35\varphi(\frac{x-1}{2})$

$$= \underbrace{0.3\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx}_{\equiv 0} + \underbrace{0.35\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\varphi(\frac{x-1}{2})dx}_{=0.7\int_{-\infty}^{+\infty}(2t+1)\varphi(t)dt = 0.7}$$

奇函数

法(二) $X=0.3X_1+0.7X_2$. 其中 $X_1\sim N(0,1)$. $X_2\sim N(1,2^2)$ ...

∵ 为什么能这么拆？看分布函数. $F(x)=0.3F_{X_1}(x_1)+0.7F_{X_2}(x_2)$

$=0.3\Phi(x_1)+0.7\Phi(\frac{x_2-1}{2})$

$\therefore E(X)=0.3E(X_1)+0.7E(X_2)=0.7$

例. X, Y 独立. 同分布于 $N(0,\frac{1}{2})$

$E(|X-Y|)$、$D(|X-Y|)$、$E(\max(X,Y))$、$E(\min(X,Y))$

记 $Z=X-Y$，则 $Z\sim N(0,1)$.

$E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|f_Z(z)dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

$D(|Z|)=E|Z|^2-(E|Z|)^2=1-\frac{2}{\pi}$　　$E|Z|^2$ 的计算需用分部积分

$E(\max(X,Y))=\frac{1}{2}E[(X+Y)+|X-Y|]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$E(\min(X,Y))=\frac{1}{2}E[(X+Y)-|X-Y|]=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

例1. 总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 有 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$. $Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{i+n}-2\bar{X})^2$. 求 $E(Y)$

令 $Z_i=X_i+X_{n+i}$，则 $Z_1,\cdots,Z_n$ i.i.d $Z\sim N(2\mu,2\sigma^2)$

$\bar{Z}=\frac{1}{n}\sum Z_i=2\bar{X}$.

MOON TREE

扫描全能王 创建

$$S_Z^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar Z)^2$$
$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{i+n}-2\bar X)^2=\frac{Y}{n-1}$$
$$E(S_Z^2)=\frac{1}{n-1}E(Y)\Rightarrow E(Y)=(n-1)E(S_Z^2)=(n-1)D(Z)=2(n-1)\sigma^2$$

例. $f(x)=\begin{cases}(\alpha+1)x^\alpha & (0<x<1)\\ 0 & (其他)\end{cases}$ 矩估计/MLE?

矩: $\alpha_1 = E(X)=\int_0^1(\alpha+1)x^\alpha=\frac{\alpha+1}{\alpha+2}=1-\frac{1}{\alpha+2}$

$\therefore \alpha=\frac{1}{1-\alpha_1}-2$

$\hat\alpha=\frac{1}{1-\bar X}-2$

求 MLE：取样本 $x_1\cdots x_n$

$$L(\alpha)=f(x_1)\cdots f(x_n)$$
$$=(\alpha+1)^n\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i^\alpha\quad(0<x<1)$$
$$\ln L(\alpha)=n\ln(\alpha+1)+\alpha\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$
$$\frac{d\ln L(\alpha)}{d\alpha}=\frac{n}{\alpha+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0\Rightarrow\hat\alpha=\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$$

如果似然函数没有驻点？仍取最大的位置.

一定要代回去检验！

例.

X为随r.v. $E|X|^r$存在. 证: $\forall\varepsilon>0$, 有 $P(|X|\geq\varepsilon)\leq\frac{E|X|^r}{\varepsilon^r}$

1° 离散型. $P(|X|\geq\varepsilon)=\sum_{|x_i|\geq\varepsilon}P_i\leq\sum_{|x_i|\geq\varepsilon}\frac{|x_i|^r}{\varepsilon^r}P_i\leq\sum_i\frac{|x_i|^r}{\varepsilon^r}P_i=\frac{E|X|^r}{\varepsilon^r}$

2° 连续型. $P(|X|\geq\varepsilon)=\int_{|x|\geq\varepsilon}f(x)dx\leq\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{|x|^r}{\varepsilon^r}f(x)dx\leq\frac{1}{\varepsilon^r}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^r\cdot f(x)dx=\frac{E|X|^r}{\varepsilon^r}$

* 2个注意：① 别漏了离散的情况 ② 类切比雪夫不等式放缩

MOON TREE

扫描全能王 创建

或$P(E(X)-\varepsilon<X<E(X)+\varepsilon)$

如果要用切比雪夫估计类似$P(|X-E(X)|<\varepsilon)$的时候，别忘了反过来！$\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

例 $\exists a,b\ (a\neq 0)$ $P(Y=aX+b)=1$. 则$\rho_{XY}=?$

注意不是1！！是±1，且依赖于a $\longrightarrow \frac{a}{|a|}$！

$Cov(X,Y)=0 \Leftrightarrow$ $\underbrace{X,Y\text{不相关}}_{\text{别记混}}$，但不能表说明X,Y独立

$|\rho|=1$则$P(Y=aX+b)$咋证？

$|\rho|=1 \Leftrightarrow Cov^2(X,Y)=D(X)\cdot D(Y) \Leftrightarrow (2Cov(X,Y))^2=4D(X)\cdot D(Y)$

$D(Y-tX)=D(Y)+t^2D(X)-2t\cdot Cov(X,Y)\geq 0$. （关于t的方程），且存在$=0$的点

$\therefore \Delta=(2Cov(X,Y))^2-4D(X)D(Y)=0$. $\therefore (2Cov(X,Y))^2=4D(X)D(Y)$

$|\rho|=1$

贝叶斯公式·第一大题

分布函数.判定.性质

离散分布.(μ). E、D.记性质

几何分布无记忆性

$P(X=a)=0$. $\not\Rightarrow$ $\{X=a\}=\varnothing$

正态分布.积分值记忆

二维随机变量

已知取边缘 $\not\rightarrow$ 联合分布

独立：F之积/分布列/条件分布

联合分布.拆成只有x,y函数之积，定义域也能拆 $\longrightarrow$ 独立

扫描全能王 创建