第7章 树定义：连通无圈图，且是极小连通图

平凡树：$p=1$

叶子：度为1的点

树的顶点数为树的阶

非平凡树至少2个叶子（考虑最长路）

……是双图（按深度染色）

双图 $\Leftrightarrow$ 所有圈长为偶数（$\Rightarrow$ 显然 $\Leftarrow$ 思路 反证，染色，若不是双图则必有奇环）

为什么 $q=p-1$？连通 $\to q\geq p-1$ } $q=p-1$
无圈 $\to q\leq p-1$

$G=(V,E)$ 是一个 (p,q) 图，则下列命题等价：

1. G为树 2. G中任2个点有唯一一条路 3. G连通且 $p=q+1$ 4. G无圈且 $p=q+1$
5. G无圈，不邻接2个点连条边得有唯一圈的图.

思路：$1\Rightarrow2\Rightarrow3\Rightarrow4\Rightarrow5\Rightarrow1$

$1\Rightarrow2$. 连通+无圈 ✓

$2\Rightarrow3$. $p=1,2,3$ 时成立.

假设少于 p 个点时的图对2.成立

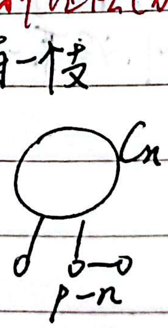
今设 $G^*=(p,q)$ 且满足条件2. 往证 $p=q+1$. 从G中去掉一条边，得2个支 G_1,G_2. 由于 G_1,G_2 满足2. 故 $p_1=q_1+1$，$p_2=q_2+1$（归纳假设）

而 $q=q_1+q_2+1$. $p=p_1+p_2$，故 $p=q+1$

$3\Rightarrow4$. 只用证G无圈 和圈有关，证明边数的问题，可考虑这种证法（加边，少支）

假设有圈 C_n. 则欲使G连通，~~$p-n$ 个点全为~~ 则只有一个支

每连一条边，跨少一个支. 故到连 $p-n$ 条边



至少有 $p-n+n=p$ 条边. 矛盾

$4\Rightarrow5$？困难. 考虑 $4\Rightarrow1\Rightarrow2\Rightarrow5$

由于 (u,v) 间只有唯一一条路，u,v 不邻接

故 u,v 相连后只有一个圈（这个圈必经过 (u,v)，若不唯一圈则不唯一路）

只需求证 4⇒1，即证G为连通

反证：若不连通，设有 $k(k\ge 2)$ 个支，则每个支均为一棵树 有 $p_i = q_i + 1$ (p_i, q_i)

$\therefore p = \sum_{i=1}^{k}(q_i+1) = q+k \quad \therefore k=1$

而 $k\ge 2$，矛盾

5⇒1 只需证G连通.

设 u,v 不邻接，则 u,v 连边后形成圈，则说明 u−v 在原图有路，因 u,v 新连边又在圈上，故圈为 u−v−…−u，v−…−u 为原图的一条路，故 u,v 连通

树的中心

$v\in V$，v的偏心率：$e(v) = \max\limits_{u\in V}\{d(u,v)\}$

$r(G) = \min\{e(v)\}$ 半径 ⟶ 尽量"均衡" ⟶ 树的中心

$e(v) = r(G)$：v为G的中心

$d(G) = \max\{e(v)\}$ 直径 ⟶ 最长距离

例1. T是树，则T的中心为一个点，或为2个邻接的点.

证(思路)：归纳. 设 $p<k$ 成立. 删掉T的所有叶子得到T'. 由于叶子必不是中心，故T的中心还在T'中. 由归纳假设知结论成立

最长路(树的直径)算法：

任取一个点 u，找 $\arg\max\{d(u,v)\}$ 的 v

再找 $\max\{d(v,w)\} = d(G)$

例1. n_i：T中度为 i 的点的个数，且 $\sum_{i=1}^{k} n_i = p$；证 $n_1 = 2 + n_3 + \dots + (k-2)n_k$

$$\begin{cases} 2q = \sum_{i=1}^{k} n_i \times i \\ q = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right) - 1 \end{cases} \Rightarrow \checkmark$$

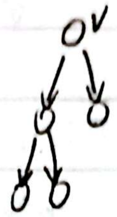
有根树

不同之处在于认为有根树是有向树. 有唯一顶点v, $Id(v)=0$, v为根

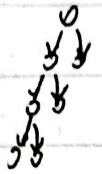
深度: 设 dep根 = 0

高度: $\max\{dep_i\}$

层: 深度为i的顶点所处的层为第i层



正则树. 出度为0/m的有根树 (~~完全m叉树~~)



2-正则树

定理 高为h的m-正则树最多有m^h个叶子.

定理. m-正则树若有i个内顶点(非叶子)则有mi+1个顶点.

考虑有向树的出度. $\sum_{v\in V} od(v)$ = 所有内顶点的od之和 = mi

而 除了根之外,每点均有1个入度. 故有mi+1个点.

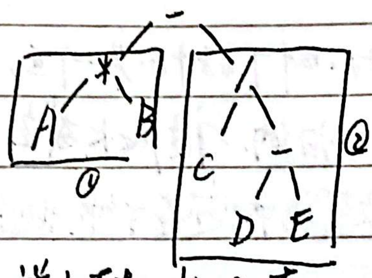
定理(小题) m-正则树的顶点为n个, 叶子l个, 内顶点数i个

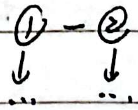
则n,l,i知二推一

有序树 有根树+每个点v的儿子规定的次序(从左到右)

* 用有序树写语法树(考小题).

A*B-C/(D-E)





递归下去: 左 中 右

左左中左右 …

二叉树. 2个儿子数

高为h. 的T的顶点数 ≤ $2^{h+1}-1$

满二叉树:

完全:

桥.

$w(G-v) > w(G)$ ($v\in V$/$x\in E$), 则为割点/桥

$w(G-x) > w(G)$

桥的端点, 若deg≥2, 则为割点

→ 新的判哈密顿图的方法

有割点/桥的图一定不是哈密顿图

反证. 哈密顿图上删掉任意一点, 剩下图仍连通

非平凡连通图至少2个非割点

考虑最长路端点

设 $G=(V,E)$ 连通. v 是割点 $\Leftrightarrow$ $V\setminus\{v\}$ 的一个划分 $\{U,W\}$, 使得 $u\in U$, $w\in W$, v 在 u,w 间的每一条路

$\Leftrightarrow \exists u,w$, v 在 $u\to w$ 每条路上

证: $\Leftarrow$ 显然

$\Rightarrow$ 设 $G-v$ 其中一个支为 U, 剩下所有支构成 W.

考虑若 $\forall u\in U$, $w\in W$, v 在 u,w 间~~不在~~的每一条路上.

则 u,w 在 $G-v$ 中仍有路径. 故与 v 是割点矛盾

G 连通. x 是桥 ① $\Leftrightarrow$ V 的一个划分 $\{U,W\}$. $\forall u\in U$, $\forall w\in W$. 使 x 在 u,w 间的每一条路 ②

$\Leftrightarrow$ x 不在 G 的任何一个圈上 ③ (这与"有割点/桥"一定非哈密顿图类似)

$\Leftrightarrow \exists u,w$, x 在 $u\to w$ 每条路上

①$\Leftrightarrow$② 同上

①$\Leftrightarrow$③. ①$\Rightarrow$③ 反证. 在圈上了删去 x 后仍连通

①$\Leftarrow$③ 考虑桥两端的点 u,v.

若删去 x 后 u,v 连通. 则说明 x 在圈上, 矛盾

$\therefore u,v$ 不连通. $\therefore x$ 为桥

割集: 最小边集破坏连通性. 上确界 $w(G-S)>w(G)$

例1. T 为 G 的生成树. S 是 G 的割集. 则 S 与 T 至少一条公共边

反证. 假设无公共边. 则 T 为 $G-S$ 的生成树

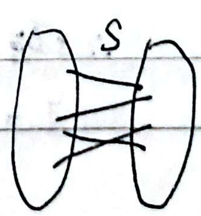
连通 不连通

割集: 可以证明 $w(G-S)=2$ $\Rightarrow$ 连通图

不连通? 为某个支的割集

例1. 连通图的每个圈与割集有偶数条公共边

简证: $G-S$ 有2个支. 形成双图



例. $a_1\cdots a_p$ 正整数 且 $\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$ 证：

数归. 拿出一个 $a_1=1$ 和 a_p-1 $(a_p\geq 2)$ 则 $a_2+\cdots+a_{p-1}+a_p-1=2(p-1-1)$

至少有个1,可反证 即可

运用归纳假设,可构造出树

a_p与a_1再连条边. → ✓

例. G的直径>3, 则G^c直径<3.

即证 $d(u,v)$在G^c中<3

1° u,v在G中不连通. 则 $d(u,v)=1$

2° u,v在G中连通. a). $\forall w\in V\setminus\{u,v\}$. 有 $(w,u)\in E$ 或 $(w,v)\in E$ 此时G直径为3.矛盾

b) $\exists w\in V\setminus\{u,v\}$ w不与u,v邻接. 则 $d(u,v)=2$.

↳在G^c中邻接

例. G是树, 且$\Delta(G)\geq k$. 则G中至少有k个叶子.

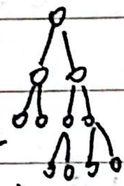
取u, 使 $\deg u\geq k$

则$G-u$至少有k个支 (反证. 与u邻接的点 必各在一个支中,否则形成了圈)

每支连通.无圈→树→至少2个叶子,去掉与u邻接的点. 1个叶子. 共k个.

例. T是一个正则2元树, 有i个内顶点, E为所有内顶点深度之和,

I为所有叶子深度之和. 证: $I=E+2i$



~~二元树~~ 正则2元树. 有i个内顶点,故有i+1个叶子

法(一). 数学归纳法. 1…i−1 个内顶点都成立 → i个内顶点也成立

取根结点. 断开, 得到2个树 (内顶点为i_2,i_3. 其中$i_2+i_3=i-1$)

得 $I_2=E_2+2i_2$, $I_3=E_3+2i_3$. $\therefore I_2+I_3=E_2+E_3+2(i-1)$

根连2条边. I_2+i_2+1, E_2+i_2 ; E_3+i_3, I_3+i_3+1. $\therefore I=I_2+I_3+i_2+i_3+2$

$E=E_2+E_3+i_2+i_3$

$\therefore I=E+2i$

法(二) 每加一条边. $\Delta I=\Delta E+1$

$\therefore \Delta I_总=\Delta E_总+\underbrace{边数}_{=2i}$

$I=E+2i$

by SkyRainWind & 朝武芳乃