例1. $G=(p,q)$ $p\geq 2$ 若 $\delta(G)\geq (p+k-1)/2$ 则G为k-连通

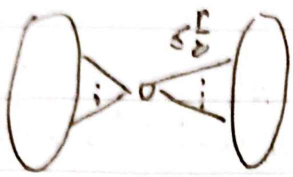
即证任删(k-1)个点后仍连通

设删(k-1)个点 得G'. 有p-k+1个点

$\delta \geq (p+k-1)/2-(k-1)=\frac{p-k+1}{2}$　　由 $\delta\geq\frac{p}{2}$ 则连通

知G连通

例. $r\geq 2$. G为r-正则图, $\kappa(G)=1$ 证: $\lambda(G)\leq[\frac{r}{2}]$




抽屉原理

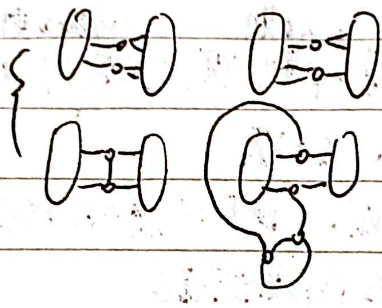
例1 G为3次图. 证: $\kappa(G)=\lambda(G)$

① $\kappa(G)=0$. ② $\lambda(G)=0$

② $\kappa(G)=1$. $\lambda(G)=1$ (第7章习题最后一题)

③ $\kappa(G)=3$ 则 $3\leq\lambda(G)\leq 3$

④ $\kappa(G)=2$　$\lambda(G)=2 \Rightarrow$ {



第九章.

平面图. 可平面图. (注意区分看清题目)

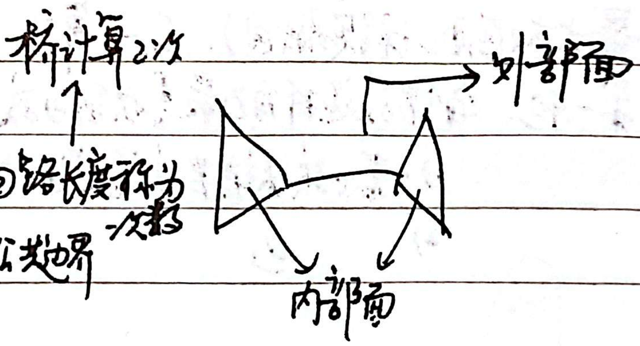
面的次数: 包围每个面的所有边组成的回路长度称为次数

一些性质: ① 一条边不是桥, 则它必是2个面的公共边界

② 桥只能是一个面的边界

③ G中所有面的次数之和等于边数的2倍 ($2q=\sum n_i$)

→ 常用放缩技巧: $2q=f\cdot\bar{n}\geq n'\cdot f$ (面数)(平均次数)




2个关系: $\begin{cases} 2q=\sum n_i\geq n'\cdot f \\ 2q=\sum deg_i\geq deg\cdot p \end{cases}$

反证法常用

欧拉公式

$G=(V,E)$ 为 $(p,q)$ 图 有 $f$ 个面，$p-q+f=2$

证明用归纳法，对 $f$ 归纳

推论：$G$ ………… ，$k$ 个支，$p-q+f=k+1$

证明就是考虑每个支（都是平面图），求一下和，去掉 $(k-1)$ 个外部（因为只有1个外部 算1次）

极大平面图，$G$ 的每个面均为△，不可能往 $G$ 加边而不破坏平面性

常用 $\Longleftrightarrow$ $q=3p-6$（反之也✓，$q=3p-6$ 则为极大平面图）（一直用 $f\cdot n=2q$，$p-q+f=2$）

每个面由 $n$ 条边围成

（可平面图，且每个面均为四边形，则 $q=2p-4$）

定理 反例 $K_5$ 不可平面，$p=$

证：$p=5$，$q=10\Rightarrow f=7$，

$21\le f\cdot n=2q=20$ 矛盾

（因 $n\ge3$）

定理 反例 $K_{3,3}$ 不可平面，

证：$p=6$，$q=9\Rightarrow f=5$

二分图 $\Rightarrow n\ge4$（不可能形成三元环，故 $n\ne3$）

$20\le f\cdot n=2q=18$

定理：平面图存在一个点度数 $\le5$（证明见后）

例 不存在7条棱的多面体（凸）

证：$\begin{cases} f\cdot n=2q,\ n\ge3 \Rightarrow 2q\ge3f \\ \cancel{p+q}\ p-q+f=2 \\ q=7 \end{cases}$ $\Rightarrow f=4$，只能是三棱锥 ✗

正多面体 5种

证：$\left.\begin{array}{l} \deg v\ge3，记为 \deg v=m \\ f 的次数：n \end{array}\right\}$ $m,n\ge3$

$\begin{cases} 2q=m\cdot p=f\cdot n \\ p-q+f=2 \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$，$\begin{cases} m=3,\ n=3,4,5 \\ n=3,\ m=3,4,5 \end{cases}$

正4面体　6面体（长方体）　12（$p-q+f=2$，$2q=nf=5f$，$2q=p\cdot 3$，$f=12$）

8面体　20面体

找一张图的最大流：

方法就是不断找最增广路（反向边取负）

别忘了标上每条边的流量！

算法：不断找增广路

可平面图

Grinberg 定理（有哈密顿图必要条件），常用于判断哈密顿圈不存在或某两条边不同在哈密顿圈上

定理：G为哈密顿图 $(p,q)$，C为哈...圈，$f_i$ 为C内由i条边围成的面的个数

是平面图 $g_i$：C外i条边 ... $\Rightarrow \begin{cases} f_3+2f_4+3f_5+\cdots = 1\cdot g_3+2g_4+3g_5+\cdots = p-2 \\ 1\cdot(f_3-g_3)+2\cdot(f_4-g_4)+\cdots=0 \end{cases}$

证明：把C内的边删了（$q'$条），再连上.

由平面图，边只有端点相交. ∴ C内部共有 $q'+1$ 个面.

$$f_1+\cdots+f = q'+1$$

又有. $1\cdot f_1+2\cdot f_2+3\cdot f_3+\cdots = 2q'+p$.

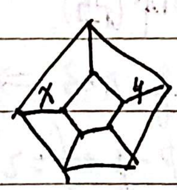
作差即可

例1. (9.2.1) 非哈...图.

次数为9的面只有1个

由Grinberg，$\cancel{3\cdot f}$ $\underbrace{3\cdot(f_5-g_5)+6\cdot(f_8-g_8)}_{3|(\ \ )}+\underbrace{7\cdot(f_9-g_9)}_{=\pm 7}=0$ 矛盾

例1. (9.2.2) x,y不同在哈...圈上




有4,5次的面.

$\underbrace{2\cdot(f_4-g_4)}+3\cdot(f_5-g_5)=0$

↓

$3|(\ \ )$. 只可能 $f_4=1, g_4=4$ 或反之

只可能是相邻的2条边

Kuratowski：G为平面图 ⇔ G不含可收缩到 $K_5$, $K_{3,3}$ 的子图

顶点着色

n-可着色：G可由n种色染，使得任一条边2端颜色都不同

色数：求最小可着色的数 $(K(G))$

最大独立集，求色数 → 都是NP完全

$\begin{cases} 1\le K(G)\le p. \\ K(K_p)=p. \end{cases}$ K(树)=K(双图)=2

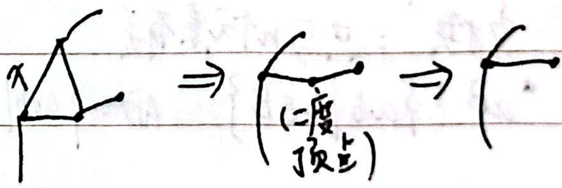
2n元环 $K=2$　$(2n+1)$元环 $K=3$.

定理
平面图一定有一个点度≤5
反证: 若≥6, $2q\ge 6p$, $q\ge 3p$, 而 $q\le 3p-6$ (对于平面图), 矛盾

例1 设G为图, 则G为$(\Delta(G)+1)$-可着色
归纳于p.
$p=3$时, 例如 △ … 满足条件
设 $G=(p,q)$ 时, G为$(\Delta G+1)$-可着色
考虑 $G=(p+1,q)$
$\forall v\in V$, $\deg v\le \Delta G$
考虑 $G-v$, 则有 $G-v$ 为 $\Delta(G-v)+1$-可着色 $\le \Delta G+1$ 可着色
∴ $G-v$ 可有 $\Delta G+1$ 个色的染色方案
而 $\deg v\le\Delta G$ ∴ 与v邻接的点有至多 $\Delta G$ 个色
v取异于 $\Delta G$ 个色的色, 则为 $\Delta G+1$-可染色

结合下面的定理, 归纳于…
定理: 5色定理
定理: G为无△的平面图, G为4-可着色的 因为(反证) $\begin{cases} p-q+f=2 \\ 2q\ge 4f\ (\text{无}\triangle) \\ 2q\ge 4p\ (\text{度数}) \end{cases}$ 得 $2\le 0$
定理: …… $\exists v\in V$, $\deg v\le 3$ (证: 平面图无桥, 无△, 则 $q\le 2p-4$ 反证即可)

习题 9.5 $T_1$.
反证. 先把x, y收缩.
再把2度顶点收缩
→ 例9.2.2




9.5 $T_2$. 反证 + $T_1$
9.5 $T_5$. $f=12$, $\deg v\ge 3$, 则G存在至多由4条边围成的面 ✗ 反例?
考虑正十二面体
$T_8$. $G=(V,E)$ $K(G)=k$, 则G中至少 $C_k^2$ 条边
考虑 $V_1$ $V_2$ … $V_k$ ($V_i$: 第i个颜色的点的导出子图).
由反证, $V_i$, $V_j$ 必两两连边 (否则, $K(G)\le k-1$)

定理

则 平面图是6-可着色的

$\exists v, \deg v \le 5$ 考虑数学归纳法，每次删去deg最小的那个点

简证5色定理

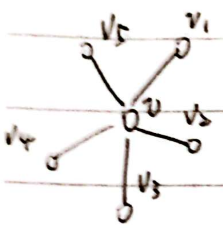
数学归纳法 对于平面图✓

考虑 $P \to p+1$ 阶：

由平面图性质 $\exists v \in V, \deg v \le 5$. $G-v$ 为5-可着色，且 $G-v$ 已用 $c_1 \cdots c_5$ 着色

1° $\deg v < 5$ 则将 $v$ 染上与 $v$ 邻接点相异的颜色

2° $\deg v = 5$ 1). $v$ 邻接的点用了少于5种色，则与1°同




2) 否则，设染色为 $c_1 \cdots c_5$，点分别为 $v_1 \cdots v_5$

考虑 $G_{13} = (V_{13}, E_{13})$ 是 $c_1, c_3$ 色的点集的导出子图.

a) $v_1$ 与 $v_3$ 在 $G_{13}$ 的2个支中，在 $v_1$ 所在的支中把 $c_1, c_3$ 对换，再将 $v$ 染成 $c_1$

b). 否则，$v_1$ 与 $v_3$ 连通. 则此时 $v_2$ 与 $v_4$ 一定在不同支中.

同 a) 操作即可

# 群论

代数系：$(S, \circ)$ （$\circ$ 为S上的运算）

结合律：n个元素运算只与n个元素及其次序有关

交换：只与n个元素有关

" $aB$ : $\{a \circ b \mid b \in B\}$ $\quad AB$ : $\{a \circ b \mid a \in A, b \in B\}$

半群：代数系，且且 $\circ$ 满足结合律. 若还满足交换律 → 交换半群

S可有限，可无限.

如 $(R, +)$ 可换半群. $(M_n, \cdot)$（矩乘）半群

如果一个半群同时有左、右单位元. 则仅有1个单位元. 且唯一

因 $e_l \cdot e_r = e_l = e_r = e_l$（单位元自身也是S中的元素，运算满足封闭性）

by SkyRainWind & 朝武芳乃

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App