哈尔滨工业大学 2025-2026学年秋季学期
问天讲师团——离散数学模拟试题

考试时间：120 分钟　　总分：100 分

考试题型据说全是大题，因此选择了全大题的命题方式。并依照唯一的公开资料 2023离散数学（A）的大致分数分布进行了命题。本试题不是为了押题，只是为了过考点，并且督促大家复习，所以希望大家好好练习，谢谢喵

有任何疑问请联系 QQ：2016307096，谢谢喵。

一.（40 分） 解答题（共 6 题，每题 7 分）

1. I 设有一个集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{a, b, c\}$，那么从 X 到 Y 上的不同的满射的个数是多少？

   II 一般地，如果集合 $|X| = m, |Y| = n$，那从 X 到 Y 上的不同的满射的个数是多少？

   III 利用映射的关系或者抽屉原理，证明 Erdös-Szekeres 定理：在由 $mn + 1$ 个元素构成的序列中，必存在长度为 $m + 1$ 的递增子序列，或存在长度为 $n + 1$ 的递减子序列（不允许使用 Dilworth 定理直接导出结论）。

2. I 如果 $X = \{1, 2, 3, 4\}$，那通常小于等于号 $\leq$ 这个二元关系的序对集合是什么？

   II 在集合 $X = 1, 2, 4, 8, 16$ 中，在“整除”这一偏序关系下，元素 16 是这个集合的极大元素还是最大元素？或者两者都是？

   III 设 $R \subseteq X \times X$，证明：

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{+\infty} R^n.$$

3. I 在 $\{\uparrow, \downarrow, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ 中选出几个联结词，构成最小联结词完备集，要求：

   (a) 写出只由一个联结词构成的最小联结词完备集（写全）；

   (b) 写出由两个联结词构成的最小联结词完备集（写出三个即可）。

   II $p \rightarrow q$ 的主析取范式；

   III $(P \wedge Q) \rightarrow (\neg Q \wedge R)$的合取范式，并在合取范式的基础上求出主合取范式。

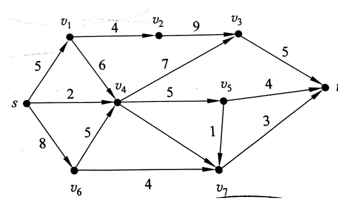
4. I $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&1&4&3\end{pmatrix}$，写出 σ^{-1}；

II $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&3&5&2&1&7&6&8\end{pmatrix}$，把 σ 写成循环置换的形式，并且说明这是奇置换还是偶置换；

III 证明：在 n 次置换 S_n 中，奇置换的个数与偶置换的个数相等。

5. I 给出一种求最小生成树的算法的基本思想；

II 给定一个运输网络，s 是源点，t 是汇点，为这张网络求出一个最大流和一个最小割。

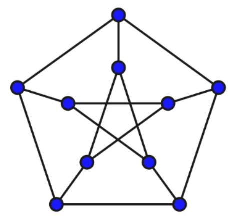


6. 设 G 是一张简单连通图。

   I 在 G 是 r 次图的情况下，如果 $\kappa(G) = 1$，证明：

$$\lambda(G) \leq [\frac{r}{2}];$$

   II 说明 Peterson 图不是 Hamilton 图。



二. （40 分） 证明题（共 8 题，前两道大题每题 7 分，其他题目每题 7 分）

1. 证明下列几个命题（第一问 2 分，后两问每一问 3 分）：

   I 证明：$\vdash_{PC} (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ ，只允许使用公理 A_1, A_2, A_3 以及分离规则 r_{MP}；

   II 证明：$\vdash_{PC} ((A \to B) \to C) \to ((C \to A) \to A)$，允许使用课上讲过的常用定理和公理，但是不允许使用三段论和演绎定理；

   III 证明：$\vdash_{FC} \forall x \neg \mathcal{A} \to \exists x \mathcal{B} \vdash \exists x(\neg \mathcal{A} \to \mathcal{B})$，允许使用掌握的所有方法。

2. I 画出一个可平面的 Hamilton 图，并写出可平面 Hamilton 图的 Grinberg 定理（只写一条即可，使用 f_i 和 g_i 分别表示 i 次的内面和外面）然后证明其中之一；

   II 证明 Ore 定理：设 $G=(V,E)$ 是顶点数 $p\geq 3$ 的简单图，若对任意不相邻顶点 $v,u\in V$，有 $deg(v)+deg(u)\geq p$，则 G 是哈密顿图。

3. 设 G 是一张 p,q 图。（每小问 4 分）

   I 如果 G 是一张极大平面图而且在 $p\geq 4$ ，证明：$\delta(G)\geq 3$；

   II 在 $p\geq 4$ 时，证明： G 中有 4 个度不超过 5 的顶点。

4. 设 $S=\{a,b,c\}$，$\circ$ 是 S 上的二元运算，且：$a\circ a=b, b\circ b=c, c\circ c=a$，证明：$(S,\circ)$ 不构成半群。

5. I $c=|[0,1]|=|\mathbb{R}|$，利用 Cantor-Bernstein 定理证明：$c^c=2^c$;

   II 说明 Cantor 对角线法的基本思想，并且借此证明出区间 $[0,1]$ 中所有数的集合是不可数的。

6. 设 $(S, \circ)$ 为半群，$A \subseteq S$ 且 $A \neq \varnothing$，证明：

   I 由 A 生成的左理想为 $A \cup S \circ A$;

   II 由 A 生成的理想为 $A \cup S \circ A \cup A \circ S \cup S \circ A \circ S$。

7. 设树中度数为 i 的顶点个数为 n_i，p 为树的阶，显然 $\sum_{i=1}^{k} n_i = p$。证明：

$$n_1 = 2 + n_3 + 2n_4 + \cdots + (k-2)n_k.$$

8. 证明：$H \leq G, a \in G, aH = H \iff a \in H$。