

哈尔滨工业大学  
2024 年秋大学物理 XB 试题 答案

题目回忆: Gaster 题解: Chi. Ya.  
本试题部分题目的表述已经过调整。仅供参考。

一、填空题 (每题 3 分)

1. 双原子刚性分子的理想气体经过准静态等压过程后, 对外做功  $A$  和放出热量  $Q$  的比值为 \_\_\_\_\_.

对于双原子刚性分子理想气体, 不考虑振动自由度, 其平动与转动自由度总计为  $f = 5$ , 因此

$$C_V = \frac{f}{2}R = \frac{5}{2}R, \quad C_p = C_V + R = \frac{7}{2}R.$$

在准静态等压过程中, 从温度  $T_1$  升至  $T_2$  时:

$$Q = nC_p(T_2 - T_1), \quad A = nR(T_2 - T_1).$$

因而

$$\frac{A}{Q} = \frac{nR(T_2 - T_1)}{\frac{7}{2}nR(T_2 - T_1)} = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7}.$$

故答案为:  $\frac{2}{7}$ .

2. 一理想气体组成的环境经过可逆等温膨胀后, 其熵 \_\_\_\_\_ (“增加”或“减少”或“不变”).  
理想气体做可逆等温膨胀时, 外界对气体所施约束是可逆过程, 并且气体吸收热量  $Q > 0$ 、体积增大。

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1} > 0 \quad (V_2 > V_1).$$

因此熵增加。

故答案为: 增加

3. 一定量理想气体处于容器中, 平均自由程为  $\bar{\lambda}$ , 平均碰撞频率  $\bar{z}$ , 若热力学温度变为原来的 4 倍, 体积不变, 分子的等效直径不变, 则平均自由程变为 \_\_\_\_\_, 平均碰撞频率变为 \_\_\_\_\_.

气体分子数目  $N$  不变、体积  $V$  不变, 则数密度  $n = \frac{N}{V}$  不变; 分子碰撞截面  $\sigma$  不变。对于理想气体分子平均自由程有近似关系

$$\bar{\lambda} \sim \frac{1}{n\sigma}$$

此值不依赖温度, 故  $\bar{\lambda}$  不变。

而平均碰撞频率可估算为

$$\bar{z} \sim \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}},$$

其中分子热运动平均速率  $\bar{v} \propto \sqrt{T}$ 。温度升为原来的 4 倍, 则  $\bar{v}$  增加到原来的 2 倍; 由于  $\bar{\lambda}$  不变, 因此

$$\bar{z} \rightarrow 2\bar{z}.$$

故答案为:  $\bar{\lambda}, 2\bar{z}$

4. 利用平凸透镜和平玻璃构成牛顿环装置，置于空气之中，以中心的暗环为第一级暗环，测得第  $k$  级暗环半径为  $r_1$ ，第  $k+5$  级暗环半径为  $r_2$ ，入射光波长为  $\lambda$ ，则透镜的曲率半径为 \_\_\_\_\_。 (本题是经过修正的版本，原题中指定  $k=5$ ，对应的可能答案已用绿色标出)  
若记第  $m$  级暗环的半径为  $r_m$ ，则在反射光干涉时可近似得到

$$r_m^2 = (m-1)R\lambda \quad (m=1, 2, 3, \dots).$$

题中，第  $k$  级暗环 ( $m=k$ ) 半径为  $r_1$ ，第  $k+5$  级暗环 ( $m=k+5$ ) 半径为  $r_2$ ：

$$r_k^2 = (k-1)R\lambda, \quad r_{k+5}^2 = (k+4)R\lambda,$$

记  $r_5 = r_1$ ,  $r_{10} = r_2$ 。则二者之差为

$$r_{k+5}^2 - r_k^2 = 5R\lambda.$$

因此

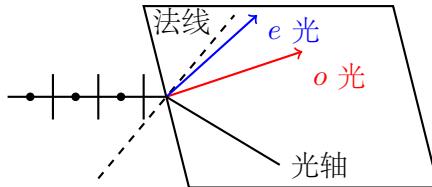
$$R = \frac{r_{k+5}^2 - r_k^2}{5\lambda} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{5\lambda}.$$

故答案为：  $\boxed{\frac{r_2^2 - r_1^2}{5\lambda}, \frac{r_2^2}{9\lambda}, \frac{r_1^2}{4\lambda}, \frac{(r_2 - r_1)^2}{\lambda}}$

5. 单色光入射其波长对应的四分之一波片后，出射光为线偏振光，则入射光偏振态为 \_\_\_\_\_；若单色自然光入射其波长对应的四分之一波片后，出射光的偏振态为 \_\_\_\_\_。  
四分之一波片能将椭圆/圆偏振光转换为线偏振光，也能将特定取向的线偏振光转换为椭圆/圆偏振光。若自然光（无偏振光）入射，由于自然光在各个偏振方向上等可能、相位无固定关系，通过波片后仍然保持不偏振状态。

故答案为：  $\boxed{\text{椭圆偏振光或圆偏振光，无偏振光}}$

6. 自然光照射到晶体上产生双折射现象， $o$  光、 $e$  光、法线、光轴和纸面在同一平面内，则光矢量振动方向在平面内的为 \_\_\_\_\_ (“ $e$  光”或“ $o$  光”)；该晶体为 \_\_\_\_\_ (“正”或“负”) 晶体。



对单轴晶体满足：

- 普通光 ( $o$  光)：电矢量  $E$  方向垂直于“纸面内的主截面”(即包含光轴和法线的平面)。
- 非普通光 ( $e$  光)：电矢量  $E$  方向位于包含光轴的主截面内。

观察到  $o$  光偏折比  $e$  光更大，可推断其折射率更大 (折射率大则折射角小)。故此类晶体为正晶体。

故答案为：  $\boxed{e \text{ 光, 正}}$

7. 普朗克发现能量不是连续的，而是离散的，对于频率为  $\nu$  的辐射，其最小能量单位为 \_\_\_\_\_。  
普朗克量子假说指出，频率为  $\nu$  的辐射能量只能是  $h\nu$  的整数倍，其中  $h$  为普朗克常数。最小能量单位即为

$$h\nu.$$

故答案为：  $\boxed{h\nu}$

8. 一质量为  $m_0$  的粒子, 动质量为  $\frac{5}{4}m_0$ , 求其德布罗意波长为 \_\_\_\_\_.  
经典“动质量”表述在相对论中可对应  $\gamma m_0$ , 其中

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

已知  $\gamma m_0 = \frac{5}{4}m_0 \Rightarrow \gamma = \frac{5}{4}$ .

则

$$\gamma = \frac{5}{4} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{3}{5}.$$

故  $v = 0.6c$ . 相对论动量

$$p = \gamma m_0 v = \frac{5}{4}m_0 \cdot \frac{3}{5}c = \frac{3}{4}m_0 c.$$

德布罗意波长公式  $\lambda = \frac{h}{p}$ , 故

$$\lambda = \frac{h}{\frac{3}{4}m_0 c} = \frac{4h}{3m_0 c}.$$

故答案为:  $\boxed{\frac{4h}{3m_0 c}}$

9. 金属的红限频率为  $\nu_0$ , 则其逸出功为 \_\_\_\_\_; 若入射光波长为  $\lambda$ , 其遏止电压为 \_\_\_\_\_.

金属逸出功  $W$  与红限频率  $\nu_0$  关系为

$$W = h\nu_0.$$

光电效应方程:

$$K_{\max} = h\nu - W \quad \text{且} \quad \nu = \frac{c}{\lambda}.$$

遏止电压  $U_0$  满足

$$eU_0 = K_{\max} = h\left(\frac{c}{\lambda} - \nu_0\right).$$

故

$$U_0 = \frac{h}{e}\left(\frac{c}{\lambda} - \nu_0\right).$$

故答案为:  $\boxed{h\nu_0, \frac{h}{e}\left(\frac{c}{\lambda} - \nu_0\right)}$

10. 请写出自由粒子在三维空间中运动的定态薛定谔方程 \_\_\_\_\_.

自由粒子势能  $V(\mathbf{r}) = 0$ , 三维时空下的定态(时间无关)薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}).$$

故答案为:  $\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r})}$

## 二、推导证明题（10 分）

11. 叙述热力学第二定律的开尔文表述和克劳修斯表述，并证明两种表述的等价性。

**开尔文表述：**不可能从单一热源吸收热量而将其全部转变为功，而不产生任何其他影响。

换言之，**不存在**一种循环发动机，仅从一个恒温热源吸收热量并全部转化为机械功，而对外界不产生任何其他影响。这也就说明了“热不能全部转化为功”的事实，或者说要想将热量转化为功，必须至少有两个温度不同的热源（一个吸热、一个放热）。

**克劳修斯表述：**不消耗外界功或者不产生其他影响的情况下，不可能将热量从低温物体传递到高温物体。

换言之，**不存在**一种循环装置能够将冷源中的热量自行传递到高温热源，而不向外界消耗功。要实现把冷源中热量送往高温物体的过程，必须要有外界的“做功”或其他方式的补偿。

**证明思路**：若开尔文表述可以被违背，则可构造一台只从单一热源吸热并将其全部转化为功的装置；我们再利用这“免费的功”驱动一个热泵（制冷机），便可从低温物体向高温物体输送热量，却不需要消耗任何额外能量，违反了克劳修斯表述。反之亦然。如果克劳修斯表述可被违背，则可构造只将热从低温传到高温而无需消耗功的装置，再利用所“节省下来的功”去帮助在单一热源与外界之间实现热量-功转换，就会违背开尔文表述。两者互相蕴含，故两个否的谓词逻辑表述等价，则原来的两个谓词逻辑等价。

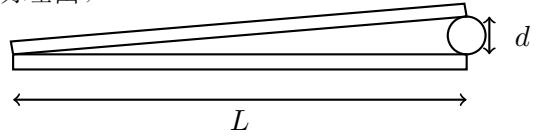
### 三、计算题 (50 分)

12. (7 分) 将两块玻璃板一端重合, 另一端放入一根细丝, 入射光波长为  $\lambda$ , 条纹间距为  $\Delta x$ , 剪尖总长度为  $L$ 。求:

(1) 剪尖棱边 (重叠处) 是明条纹还是暗条纹, 并说明理由;

(2) 剪尖的夹角  $\theta$ ;

(3) 细丝直径  $d$



(1) 在空气剪尖的反射光干涉中, 光从空气侧射向下表面 (空气-玻璃界面), 反射时有  $\pi$  相位跃迁。

两束反射光之间相差

$$\Delta\varphi = 2k t + \pi,$$

其中  $t$  是剪尖局部的空气隙厚度。当  $t = 0$  时 (即棱边处), 则相位差满足

$$\Delta\varphi = \pi.$$

相位差为  $\pi$  对应相消干涉, 故棱边处呈暗纹。

(2) 剪尖局部厚度  $t(x) = x \tan \theta$ 。在相邻明条纹之间, 厚度差满足  $\Delta t = \frac{\lambda}{2}$ 。又已知相邻条纹在  $x$  方向的间距为  $\Delta x$ , 故

$$\Delta t = \Delta x \tan \theta = \frac{\lambda}{2}.$$

因此可得

$$\tan \theta = \frac{\lambda}{2 \Delta x}.$$

由于剪尖角度  $\theta$  极小, 近似有  $\theta \approx \tan \theta$ , 故

$$\theta \approx \frac{\lambda}{2 \Delta x}.$$

(3) 剪尖总长度为  $L$ , 在  $x = L$  处的厚度正好等于细丝的直径  $d$ , 即

$$d = L \tan \theta.$$

由上一步得到  $\tan \theta = \frac{\lambda}{2 \Delta x}$ , 从而

$$d = \frac{\lambda L}{2 \Delta x}.$$

13. (7 分) 在光栅衍射中, 光的波长为  $600\text{nm}$ , 缝宽  $a = 2.0\mu\text{m}$ , 双缝间不透光的宽度  $b = 4.0\mu\text{m}$ 。求:

- (1) 单缝衍射的中央明纹的角宽度;
- (2) 在单缝衍射中央明纹范围内, 能看到的光栅主极大的个数;
- (3) 在屏幕上能看到的主极大的级次有哪些。

(1) 单缝衍射的主极暗角满足

$$a \sin \theta = \lambda.$$

其中  $\theta$  为从中心到第一暗纹的衍射角。中央明纹的半角宽即  $\theta_1$  满足

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a}.$$

因此中央明纹的角宽度为

$$\Delta\theta = 2\theta_1 \approx 2 \sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{a}\right).$$

代入数值:  $\lambda = 600\text{ nm}$ ,  $a = 2.0\mu\text{m}$ , 则

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{600 \times 10^{-9}}{2.0 \times 10^{-6}} = 0.3.$$

故  $\theta_1 = \sin^{-1}(0.3) \approx 17.46^\circ$ ,  $\Delta\theta \approx 34.92^\circ$ .

$34.92^\circ$  或  $0.6\text{rad}$

(2) 整个衍射光栅的周期为

$$d = a + b = 2.0\mu\text{m} + 4.0\mu\text{m} = 6.0\mu\text{m}.$$

光栅的主极大条件满足

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

要使这些主极大出现在单缝中央明纹内, 即  $|\theta| \leq \theta_1$ , 需要

$$|m| \leq \frac{d \sin \theta_1}{\lambda}.$$

又因  $\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a}$ , 故  $|m| \leq 3$ 。也就是说,  $m$  可能取

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3.$$

一共有 7 个可能的值, 但  $\frac{a+b}{a} = 3$ , 因此屏幕上缺  $3k$  级 ( $k \in \mathbb{Z}^*$ )。故在单缝衍射主瓣内可观察到的光栅主极大共有 5 条。

(3) 考虑极限情况,  $k_M = \frac{d \sin 90^\circ}{\lambda}$ , 解得  $k < 10 = k_M$ , 考虑到缺级, 则屏幕上可见:

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 7, \pm 8.$$

14. (7 分) 杨氏双缝干涉实验中, 双缝距离为 0.5mm, 缝和屏幕的距离为 2m, 在其中一个缝上放上厚度为 0.06mm 折射率为 1.5 的薄玻璃片, 入射光波长为 600nm。求:

(1) 中央明纹移动的距离;

(2) 相邻条纹间距。

玻璃片引入的额外光程差为

$$\Delta = (n - 1)t,$$

其中  $n = 1.5$ ,  $t = 0.06 \text{ mm} = 6.0 \times 10^{-5} \text{ m}$ , 故

$$\Delta = (1.5 - 1) \times 6.0 \times 10^{-5} \text{ m} = 0.5 \times 6.0 \times 10^{-5} \text{ m} = 3.0 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

条纹数量漂移为

$$N = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{3.0 \times 10^{-5}}{6.0 \times 10^{-7}} = 50.$$

即中央明纹向一侧移动了约 50 个干涉条纹。杨氏双缝干涉中, 条纹在屏幕上的间距为

$$\beta = \frac{\lambda D}{d}.$$

$$\beta = \frac{600 \times 10^{-9} \text{ m} \times 2 \text{ m}}{0.5 \times 10^{-3} \text{ m}} = \frac{1.2 \times 10^{-6}}{0.5 \times 10^{-3}} = \frac{1.2}{0.5} \times 10^{-3} = 2.4 \times 10^{-3} \text{ m} = 2.4 \text{ mm}.$$

故中央明纹移动的距离为

$$\Delta y = N\beta = 50 \times 2.4 \text{ mm} = 120 \text{ mm}.$$

(1)

120mm.

(2)

2.4mm.

15. (7 分) 势函数为

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 2a \\ \infty, & x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 2a \end{cases}$$

- (1) 直接写出波函数归一化形式和能量分布;
- (2) 求原子从第二激发态跃迁到基态放出的光子的频率;
- (3) 求相邻能级的能量之差并说明在什么条件下量子力学的结果趋近与经典理论的结果。

(1) 对于  $0 < x < 2a$  的一维无限深势阱, 其本征波函数与能量为

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{2a}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2m(2a)^2} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{8ma^2}.$$

(2) 第二激发态,  $n = 3$ 。则

$$E_3 - E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2} (9 - 1) = \frac{8\hbar^2 \pi^2}{8ma^2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{ma^2}.$$

放出的光子频率

$$\nu = \frac{E_3 - E_1}{h} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{ma^2 h} = \frac{\hbar \pi}{2ma^2}.$$

$$\frac{\hbar \pi}{2ma^2}.$$

(3) 相邻能级  $E_{n+1}$  与  $E_n$  之差为

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2} ((n+1)^2 - n^2) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2} (2n + 1).$$

当  $n$  非常大时,  $2n + 1 \approx 2n$ , 能级变得密集, 量子间隔相对总能量变得很小。在极大量子数(高激发态)极限下, 量子体系的能谱会在一定程度上与经典理论可近似对应。在高量子数极限下量子力学结果趋近于经典结果。

$$\frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2} (2n + 1), \text{ 极高激发态。}$$

16. (7 分) 波函数为

$$\psi(x) = \begin{cases} C(x - \frac{a}{2})(x + \frac{a}{2}), & -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ 0, & x \leq -\frac{a}{2} \text{ 或 } x \geq \frac{a}{2} \end{cases}$$

- (1) 求归一化常数  $C$ ;
- (2) 求概率密度分布函数;
- (3) 求在何处概率密度分布函数最大。

(1) 令

$$f(x) = \left( x^2 - \frac{a^2}{4} \right).$$

则  $\psi(x) = C f(x)$  (在区间  $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ )。归一化条件为

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} C^2 (f(x))^2 dx = C^2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2 - \frac{a^2}{4})^2 dx = 1.$$

定义

$$I = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2 - \frac{a^2}{4})^2 dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left( x^4 - \frac{a^2}{2} x^2 + \frac{a^4}{16} \right) dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^4 dx - \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx + \frac{a^4}{16} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx.$$

相加得到

$$I = \frac{a^5}{80} - \frac{a^5}{24} + \frac{a^5}{16} = \frac{a^5}{30}.$$

于是

$$C^2 \frac{a^5}{30} = 1 \implies C = \sqrt{\frac{30}{a^5}} = \frac{\sqrt{30}}{a^{5/2}}.$$

$$\frac{\sqrt{30}}{a^{5/2}}.$$

(2) 由  $\rho(x) = |\psi(x)|^2$ , 可得

$$\rho(x) = \begin{cases} C^2 \left( x^2 - \frac{a^2}{4} \right)^2, & -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中  $C = \frac{\sqrt{30}}{a^{5/2}}$ 。

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{30}{a^5} \left( x - \frac{a}{2} \right)^2 \left( x + \frac{a}{2} \right)^2, & -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(3) 要使  $(x^2 - \frac{a^2}{4})^2$  最大, 需要考察函数

$$g(x) = \left( x^2 - \frac{a^2}{4} \right)^2.$$

令  $u = x^2 - \frac{a^2}{4}$ , 则  $g(x) = u^2$ . 可知  $x = 0$  处  $u$  的绝对值  $|\frac{a^2}{4}|$  最大, 故

$\rho(x)$  在  $x = 0$  时取最大值.

17. (7 分) 已知粒子波长为 500nm, 其相对不确定度为 1%, 求其位置的不确定度。

(使用  $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ )

粒子动量

$$p = \frac{h}{\lambda}.$$

动量的不确定度

$$\Delta p = 0.01 p = 0.01 \frac{h}{\lambda}.$$

故

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2 \Delta p} = \frac{\hbar}{2 \times 0.01 \frac{h}{\lambda}} = \frac{\hbar \lambda}{0.02 h} = \frac{\lambda}{0.02 (2\pi)} = \frac{\lambda}{0.04 \pi} = \frac{25}{\pi} \lambda \approx 7.96 \lambda.$$

当  $\lambda = 500 \text{ nm} = 5.0 \times 10^{-7} \text{ m}$ , 可得

$$\Delta x \approx 7.96 \times 5.0 \times 10^{-7} \text{ m} = 3.98 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

$$3.98 \mu\text{m}.$$

18. (8 分) 氢原子的量子态可以用  $\Psi_{nlm_lm_s}$  表示

(1)  $\Psi_{120\frac{1}{2}}, \Psi_{110\frac{1}{2}}, \Psi_{100\frac{1}{2}}, \Psi_{100\frac{3}{2}}, \Psi_{220\frac{1}{2}}, \Psi_{230\frac{1}{2}}, \Psi_{321\frac{1}{2}}$  中哪些是实际可能存在的量子态;

(2) 求 (1) 问中所有量子态的角动量  $L$  和角动量在  $z$  轴上的分量  $L_z$ ;

(3) 若一个电子的激发态可以表示为  $3p^1$ , 则其可能的量子态有哪些。

(1) 判断原则:

$$\begin{cases} n \geq 1, \\ 0 \leq l \leq n-1, \\ -l \leq m_l \leq l, \\ m_s = \pm \frac{1}{2}. \end{cases}$$

电子自旋量子数  $s = \frac{1}{2}$ , 故  $m_s$  只能取  $\pm \frac{1}{2}$ 。

- $\Psi_{120\frac{1}{2}}$ :  $l=2$  不满足  $0 \leq l \leq 0$ , 不可能。
- $\Psi_{110\frac{1}{2}}$ : 同上, 不可能。
- $\Psi_{100\frac{1}{2}}$ : 对  $n=1$ , 允许  $l=0, m_l=0, m_s=\frac{1}{2}$ , 可以存在。
- $\Psi_{100\frac{3}{2}}$ : 自旋量子数  $m_s=\frac{3}{2}$  是不可能的, 不可能。
- $\Psi_{220\frac{1}{2}}$ : 对  $n=2$  只能有  $l=0, 1$ , 不可能。
- $\Psi_{230\frac{1}{2}}$ : 对  $n=2$  只能有  $l=0, 1$ , 不可能。
- $\Psi_{321\frac{1}{2}}$ : 对  $n=3$ , 允许  $l=2, m_l=1, m_s=\frac{1}{2}$ , 可以存在。

故  $\Psi_{100\frac{1}{2}}, \Psi_{321\frac{1}{2}}$  是实际可能存在的态。

$$\Psi_{100\frac{1}{2}}, \Psi_{321\frac{1}{2}}.$$

(2) 角动量大小

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar, \quad L_z = m_l \hbar.$$

$$\Psi_{120\frac{1}{2}} : l = 2 \Rightarrow L = \sqrt{6} \hbar, \quad L_z = 0.$$

$$\Psi_{110\frac{1}{2}} : l = 1 \Rightarrow L = \sqrt{2} \hbar, \quad L_z = 0.$$

$$\Psi_{100\frac{1}{2}} : l = 0 \Rightarrow L = 0, \quad L_z = 0.$$

$$\Psi_{100\frac{3}{2}} : l = 0 \Rightarrow L = 0, \quad L_z = 0.$$

$$\Psi_{220\frac{1}{2}} : l = 2 \Rightarrow L = \sqrt{6} \hbar, \quad L_z = 0.$$

$$\Psi_{230\frac{1}{2}} : l = 3 \Rightarrow L = \sqrt{12} \hbar = 2\sqrt{3} \hbar, \quad L_z = 0.$$

$$\Psi_{321\frac{1}{2}} : l = 1 \Rightarrow L = \sqrt{6} \hbar, \quad L_z = \hbar.$$

(3)

$$3p^1 \implies n = 3, l = 1, m_s = \pm \frac{1}{2}, m_l = -1, 0, +1.$$

只考虑单电子的量子态，则“ $3p$ ”对应  $n = 3, l = 1$ ，而  $m_l$  可取  $-1, 0, +1$ ，同时  $m_s$  可取  $\pm \frac{1}{2}$ 。  
故：

$$\Psi_{31-1\frac{1}{2}}, \quad \Psi_{310\frac{1}{2}}, \quad \Psi_{311\frac{1}{2}}, \quad \Psi_{31-1-\frac{1}{2}}, \quad \Psi_{310-\frac{1}{2}}, \quad \Psi_{311-\frac{1}{2}}.$$

#### 四、设计应用题 (10 分)

19. 请根据所学光学知识，设计一个实验测定晶体的一个参数。

- (1) 画出原理图并简要说明实验原理；
- (2) 推导出晶体的参数的计算公式。

#### 实验原理

布拉格定律描述了 X 射线与晶体相互作用的衍射条件：

$$n\lambda = 2d \sin \theta$$

通过测量衍射角  $\theta$ ，可以计算晶面间距  $d$ ，进而推导晶体的晶格常数  $a$ 。

另外，固定入射 X 射线方向，通过旋转晶体，在与入射线成  $2\theta$  方向可以观察到衍射主极。布喇格定律还可用于分析如下晶面间距与衍射角的关系，进而确定部分晶形。

$$2d_1 \sin \theta_1 = \lambda, \quad 2d_2 \sin \theta_2 = \lambda, \quad 2d_3 \sin \theta_3 = \lambda$$

不同晶面间距  $d_1, d_2, d_3$  满足比值关系：

$$d_1 : d_2 : d_3 = \frac{1}{\sin \theta_1} : \frac{1}{\sin \theta_2} : \frac{1}{\sin \theta_3}$$

#### 计算公式的推导

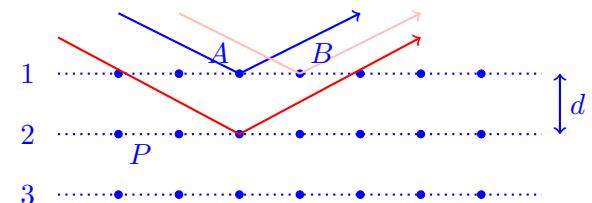
##### 晶面间距 $d$

由：

$$n\lambda = 2d \sin \theta$$

解得：

$$d = \frac{n\lambda}{2 \sin \theta}$$



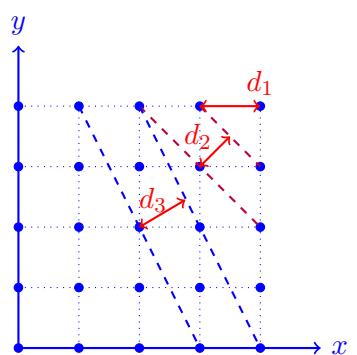
##### 晶格常数 $a$

对于晶面索引  $(h, k, l)$ ，晶面间距与晶格常数的关系为：

$$d = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$$

将  $d$  代入，得：

$$a = \frac{n\lambda \cdot \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}{2 \sin \theta}$$



#### 晶形判定

若实验测得  $d_1 : d_2 : d_3 = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{5}}$ ，则晶体结构为立方晶系。