如果p，那么q，则称p蕴含q 记作 $p\to q$

"$p\to q$"这个命题的真值表 (if p, then q)

p	q	$p\to q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

一些推论

1. $p\to q$为真，p为真 $\Rightarrow$ q为真
2. $p\to q$为真 $\to$ $\neg q\to\neg p$为真
3. q为真 $\Rightarrow$ $p\to q$为真 (p是否为真无所谓)
4. $\neg q\to\neg p$, $p \Rightarrow q$ (反证法)

子集：$A\subseteq B$：$\forall x\in A, x\in B$

例. 证：$\emptyset\subseteq A$ ("if $x\in\emptyset$, then $x\in A$")

法(一). 证明逆否命题("if $x\notin A$, then $x\notin\emptyset$")

逆

$x\notin\emptyset$为真 (q为真)

因此 $p\to q$ 必为真. 因此原问题得证

法(二) ~~$x\notin\emptyset$~~ p："$x\in\emptyset$"为假

故 $p\to q$ 必为真.

故原问题为真

反思：要证明为真的实际为"$p\to q$"

属于.

$A\in B, B\in C \Rightarrow A\in C$? ✗　　$\{1\}\in\{\{1\}\}$, $\{\{1\}\}\in\{\{\{1\}\}\}$

$A\in B$且$A\subseteq B$的例子? $\{1\} \subseteq / \in \{\{1\},1\}$

真子集"$\subset$"

$A\subset B$：$A\subseteq B$且$\exists b\in A$, $b\notin B$.

A不是A的真子集 $A\not\subset A$

$A\subset B, B\subset C \Rightarrow A\subset C$
$\varphi\subset A \ (A\neq\varphi)$

幂集 2^A
$\{1,2\}$ 幂集: $\{\varphi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ 集族 ┌→即:任一个元素都为集合
(集族:以集合为元素的集合)

集合的并 记为: $\{A_\xi\}_{\xi\in I}$
$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$
交
$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$

设 $\{A_\xi\}_{\xi\in I}$ 为集族, A为集合(另一个集合)
则
$$A\cap(\cup A_\xi)=\cup(A\cap A_\xi) \quad (1)$$
$$A\cup(\cap A_\xi)=\cap(A\cup A_\xi) \quad (2)$$

证一下(2)式:
1° 先证左⊆右.
$\forall x\in A\cup(\cap A_\xi)$, 则 $x\in A$ 或 $\forall\xi\in I, x\in A_\xi$
i.e. $x\in A$, 或 $\forall\xi\in I, x\in A_\xi$
i.e. $\forall\xi\in I, x\in A_\xi$ 或 $x\in A$
从而 $\forall\xi\in I, x\in A\cup A_\xi$.
故 $x\in$ 右. 故左⊆右
2° 右⊆左.
$\forall x\in\cap(A\cup A_\xi)$, 则 $x\in A\cup A_\xi\ (\xi=1,2,\cdots,|A|)$.
若 $x\notin A$, 则 $x\in A_\xi\ (\xi=1,2,\cdots,|A|)$. 故 $x\in A\cup(\cap A_\xi)$ } 右⊆左
若 $x\in A$, 则 $x\in A\cup(\cap A_\xi)$.
∴左=右

利用 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ 推证 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$(A\cup B)\cap(A\cup C)=((A\cup B)\cap A)\cup((A\cup B)\cap C)$ (已有利用改式子.将(A∪B)看成"A")

$=A\cup((A\cup B)\cap C)$

$=A\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$=A\cup(B\cap C)$

例 A,B,C集合. 且 $A\cup B=A\cup C$, $A\cap B=A\cap C$, 证 $B=C$

$\forall x\in B$.

故 $x\in A\cup B=A\cup C$, 故 $x\in A$ 或 $x\in C$.

若 $x\in A$, 故 $x\in A\cap B=A\cap C$, $x\in C$.

$x\in C$.

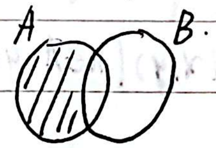
} $B\subseteq C$

同理 $C\subseteq B$.

$\therefore B=C$

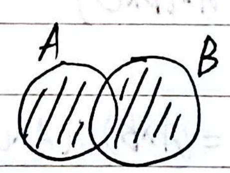
差运算

$A\backslash B=\{x\in A$ 且 $x\notin B\}$



性质: $A\cap(B\backslash C)=(A\cap B)\backslash(A\cap C)$ (对称差和差均关于交有分配律)

对称差: $A\triangle B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$
异或



$A\triangle B=B\triangle A$

$A\triangle(B\triangle C)=A\triangle B\triangle C$.

$\phi\triangle A=A$

$A\triangle A=\phi$.

$A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$

例 $B=A\triangle B \Leftrightarrow A=\phi$.

$\Leftarrow$(充分性)：显然

$\Rightarrow$(必要性)：

法(一) 类似异或. 左异或一个B

法(二) 反证. 设 $x\in A$, $A\neq\phi$

if $x\in B$：$x\notin A\triangle B \Rightarrow x\notin B$ 矛盾

if $x\notin B$：$x\in A\triangle B \Rightarrow x\in B$ 矛盾

补集

$A^c\cup A=S$, $A^c\cup A=\phi$

$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

$A\backslash B=A\cap B^c$.

笛卡尔乘积 序对

$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,\ y\in B\}$

$A\times B\neq B\times A$

$A\times B\times C\neq A\times(B\times C)$

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

$A\times(B\backslash C)=(A\times B)\backslash(A\times C)$

上下极限

$\overline{A}=\{x\mid \exists i_1<i_2<\cdots,\ x\in A_{i_k}\}$

$\exists k\in N^+$

$\underline{A}=\{x\mid x\in \bigcap_{i\geq k} A_i\}$

例 证 $\overline{A}=\bigcap_{i=1}^{\infty}(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k)$ （$\overline{A}$ 上极限）

1° 左⊆右

设 $x\in\overline{A}$. 则由定义. $\exists i_1<i_2<\cdots$, $x\in A_{i_k}$

对于 $\forall n\in N$（注意这里认为 $N=\{1,2,\cdots\}$）

$\exists l$. $i_l>n$. 故 $x\in A_{i_l}$. 故 $x\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$.

（整体来看：$\forall n\in N$, $x\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$）

由交的定义. $x\in\bigcap_{i=1}^{\infty}(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k)$ 故左⊆右.

2° 右⊆左

设 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k)$. 我想证明 $x\in$ 无穷多个 A_i.

如何证？类似数学归纳法，先找1个，再找个大的，再⋯

令 $n=1$. $x\in\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$. 由并运算定义，$\exists i_1$, $x\in A_{i_1}$

令 $n=i_1+1$. $x\in\bigcup_{k=i_1+1}^{\infty}A_k$. ⋯⋯ $\exists i_2>i_1$

令 $n=i_2+1$. ⋯

$\therefore\exists i_1<i_2<\cdots$, $x\in A_{i_k}$. 即 $x\in$ 左.

例. 证 $(A\cup B)\setminus B=(A\setminus B)\cup B\Leftrightarrow B=\phi$.

充分性（$\Leftarrow$）. 将 $B=\phi$ 代入⋯

必要性（$\Rightarrow$）. $B=\phi$ 是个不好处理的结论. → 反证！

设 $x\in B$. 故 $x\in(A\setminus B)\cup B$. 故 $x\in(A\cup B)\setminus B$

由差定义，$x\notin B$. 矛盾 $B=\phi$

笛卡尔乘积.

$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$ 有序对

$A\times B\times C=\{(x,y,z)\mid x\in A, y\in B, z\in C\}$ 有序对（同时进行，无顺序）

by SkyRainWind & 朝武芳乃