定理

则 平面图是6-可着色的

$\exists v,\ \deg v \le 5$，考虑数学归纳法，每次删去deg最小的那个点

简证5色定理

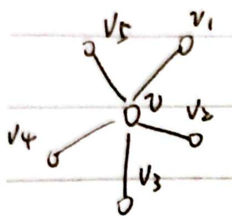
数学归纳法　1阶平面图✓

考虑 $p \to p+1$ 阶：

由平面图性质 $\exists v\in V.\ \deg v\le 5$. $G-v$ 为5-可着色. 且 $G-v$ 已用 $c_1\cdots c_5$ 着色

1° $\deg v<5$. 则将 v 染上与 v 邻接点相异的颜色

2° $\deg v=5$　1). v 邻接的点用了少于5种色，则与1°同



2) 否则，设染色为 $c_1\cdots c_5$，点分别为 $v_1\cdots v_5$

考虑 $G_{13}=(V_{13},E_{13})$ 是 c_1,c_3 色的点集的导出子图.

a) v_1 与 v_3 在 G_{13} 的2个支中，在 v_1 所在的支中把 c_1,c_3 对调，再将 v 染成 c_1

b). 否则，v_1 与 v_3 连通. 则此时 v_2 与 v_4 一定在不同支中.

同 a) 操作即可

群论

代数系：$(S,\circ)$（$\circ$ 为S上的运算）

结合律：n个元素运算只与n个元素及其次序有关

交换：只与n个元素有关

aB：$\{a\circ b \mid b\in B\}$　AB：$\{a\circ b \mid a\in A, b\in B\}$

半群：代数系，并且 $\circ$ 满足结合律. 若还有交换律→交换半群

S可有限，可无限.

如 $(R,+)$ 可换半群. $(M_n,\cdot)$（矩乘）半群

如果一个半群同时有左、右单位元. 则仅有1个单位元. 且唯一

因 $e_l\cdot e_r = e_r = e_l$（单位元自身也是S中的元素，运算满足封闭性）

有2个左元 ⇒ 必无右元（证明同上）

有单位元的半群 ⇒ 幺半群 $(S,\circ,e)$

例 $Z_n=\{[0],[1],\cdots,[n-1]\}$，$[i]=\{m\mid m\in Z,\ m=i \bmod n\}$，则 $Z=\{Z_n,+\}$ 也是半群 可交换

定理 有限半群 $(S,\circ)$ 为幺半群 iff $\exists s,t\in S$ $sS=S$，$St=S$

考虑 $\varphi: S\to sS$ 也可：由于 $|S|=|sS|$ 故 $S\to sS$ 存在一个双射

由 $\varphi(S)=sS$ 可知 φ 是满射 而 $S=sS$，由之前结论(也可反证) φ 为单射

故 φ 为双射 由 $S=sS$ 故 φ 为置换，可拆成若干循环置换，取各循环 size 的 lcm 的 m

则有 $\varphi^m(x)=s^m x=x$ ∴ s^n 为左单位元

同理 $x\cdot t^k=x$ t^k 为右单位元 ∴ x 有左、右单位元 ∴ x 有单位元

可用"+"代替"$\circ$" → 0 用 0 表示单位元

逆元与群

$(S,\circ,e)$ 为幺半群 设 $\forall a\in S$，若 $\exists a_l\in S$，使 $a_l\circ a=e$，则 a_l 为 a 的左逆元素，若 $\exists a_r$，$a\circ a_r=$ 右逆

若 $\exists b\in S$，使 $\forall a\in S$，$a\circ b=b\circ a=e$，则 b 为 a 的逆元素

若既有左逆，也有右逆，则逆元素存在且唯一（类比单位元）$\exists b\in S$ $\forall a\in S$ $a\circ b=b\circ a=e$

群：每个元素都有逆元素的幺半群称为群

有限半群 $(S,\circ)$ 是群 iff $\forall s\in S$，$sS=S$，且 $\exists t\in S$ $St=S$（简证：S 为幺半群，考虑 $\forall x\in S$，$xS=S$，即取 S 幺元 e，则 $\exists p\in S$，$xp=e$，x 为 p 逆元，故任意元素都有幺元）

例. 设 $S=\{a,b,c\}$，$\circ$ 为 S 上运算 $(S,\circ)$ 能为半群吗？（且 $a\circ a=b$，$b\circ b=c$，$c\circ c=a$）

讨论一下 $a\circ b=$？ $a\circ b=a$？ ⇒ $a\circ(a\circ b)=a\circ a=b=b\circ b=c$ ✗ 故此时 $\circ$ 不满足结合律 $(S,\circ)$ 非半群

$a\circ b=b$？同理 ✗

$a\circ b=c$？ 反证 $a\circ b=b\circ b$ ∴ $a\circ a\circ b=a\circ b\circ b$ ∴ $b\circ b=a\circ c$ ∴ $c=a\circ c$，由上，这不可能

子半群、子幺半群

$(S,\circ)$ $B\subseteq S$ $\forall a,b\in B$，$a\circ b\in B$ 则 $(B,\circ)$ 为 $(S,\circ)$ 为子幺半群 $(B\circ B\subseteq B)$

若 $e\in B$ 则 $(B,\circ)$ … 子幺半群 $(e\in B$，且 $B\circ B\subseteq B)$

定理：一个幺半群的任意多子幺半群的交集仍是子幺半群

简证：设 $a,b\in\cap$，则 $a,b\in$ 所有子幺半群，故 $a\circ b\in$ 所有子幺半群，$a\circ b\in\cap$

定理 A 为 $(S,\circ)$ 的一个非空子集，S 包含 A 的所有子半群的交生成的子半群称为由 A 生成的子半群（

类比传递闭包 $(R^+=\bigcap\limits_{\substack{R\subseteq R'\\ R'\text{传递}}} R')$ 包含 A 的子半群的最小的 同理定义生成子幺半群

理想、左右~

半群 $(S,\circ)$ 一个非空子集 A 为 S 的一个左(右)理想 ⇔ $SA\subseteq A$ $(AS\subseteq A)$，左右理想？理想

（A 把 S "吸收"了，另外注意左、右的定义）

生成右不理想.

同上. S所有含A的左右理想的交

"最小性"

故　由A生成的左理想: $A \cup SA$. (因 $S(A\cup SA) = SA \subseteq (A\cup SA)$), 且最小)

右　$A \cup AS$

理想　$A \cup SA \cup AS \cup SAS$.

若S为幺半群, 则结论简化: $(M, \circ, e)$ 幺半群, 则:

左 MA　右 AM　理 MAM

(这里都忘了 MA 是 M 与 A 元素两两运算的意思)

作业中没有课本上的题 → 重点!

一个半群 存在若干右幺元，是群吗?

反例 $(\{x,y\},\circ)$
$$\begin{cases} xx=x \\ xy=x \\ yx=y \\ yy=y \end{cases}$$
不存在左幺元，不存在幺元，不是群

循环半群：由群中某个元素的生成的半群(本身)，记为(a) 必然可交换

例1. $M=\{e,a,a^2,a^3,a^4\}$，若$a^5=e$，证$(M,\circ\times)$是循环半群

只用证$(M,\times)=(a)$，证一下元素相同就行

例1. 循环半群生成元可能不唯一

如 $(\{i,-1,-i,1\},\times)$

半群同构.

$(S,\circ),(T,*)$ 存在双射$\varphi: S\to T$. $\varphi(a\circ b)=\varphi(a)*\varphi(b)$

则称$(S,\circ)$与$(T,*)$同构. $(S,\circ)\cong(T,*)$

幺半群

基本一致 + $\varphi(e_1)=\varphi(e_2)$ (但可省略，因 $\varphi(a\circ e_1)=\varphi(a)$

$\varphi(a)*\varphi(e)=\varphi(a)$ (必然等)

变换

$(S,*)$为半群，$a\in S$. $\rho_a: S\to S$. $\forall x\in S$, $\rho_a(x)=a*x$

充分重视概念

定义 $L(M)$ $L(S)=\{P_a \mid a\in S;\ P_a: S\to S$，使 $\forall x\in S$，$P_a(x)=a*x\}$

则 $L(S)$ 对映射的合成 $\circ$ 形成了一个半群 $(L(S),\circ)$，该半群称为变换半群（注意与可换半群区别）

~~变换半群~~ 运算的封闭性（2个映射的合成）：$P_b\circ P_a(x)=(b*a)*x$.

而 $b*a\in S$（由 S 为群），故 $(b*a)*x$ 也是 $L(S)$ 中的映射.

Cayley定理

同构：$(S,*)$ 为半群 $\varphi: S\to L(S)$（φ 为双射） $\forall a\in S$. $\varphi(a)=P_a$ 若对 $\forall x\in S$，$a*x=b*x$. 则 $a=b$. 则 φ 为同构.

任何幺半群 $(M,*,e)$ 同构于变换幺半群 $(L(M),\circ,I_M)$

同态

是2个半群之间的性质. $(S,\circ)$ $(T,*)$ 半群. $\varphi: S\to T$.（区别：φ 不一定是双射）$\forall a,b\in S$. $\varphi(a\circ b)=\varphi(a)*\varphi(b)$. 则二者同态

$\varphi(S)$：同态象

若 φ 为满射：为满同态

对幺半群来说也可类似（$(M_1,\circ,e_1)$ 与 $(M_2,*,e_2)$ 为2个幺半群. $\forall x,y\in S$ 有 $\varphi(x\circ y)=\varphi(x)*\varphi(y)$，则称幺半群 $(M_1,\circ,e_1)$ 与 $(M_2,*,e_2)$ 同态）

定理

$(S,\circ)$ 为半群，$(T,*)$ 为一个有二元代数运算 $*$ 的代数系（这个不一定是群）若存在满射 $\varphi: S\to T$ $\forall x,y\in S$. 有 $\varphi(x\circ y)=\varphi(x)*\varphi(y)$，则 $(T,*)$ 为半群

简证：先证 $(T,*)$ 封闭. 再证结合律. 利用同构易证

商幺半群：在商半群上加一个单位元

自然同态：$(S,\circ)$与$(T,*)$是2个半群，$\varphi: S\to T$为同态，半群$(S/E_\varphi,\cdot)$为商半群，令$\gamma: S\to S/E_\varphi$，对$\forall a\in S$，$\gamma(a)=[a]$，称γ为自然同态

类比自然映射：$X\to X/E_f$，同余关系作为等价关系，映射到对应等价类

同态基本定理

$(M_1,\circ,e_1)$与$(M_2,*,e_2)$为2个幺半群，$\varphi: M_1\to M_2$为同态。

(1) 则$\varphi(M_1)$是M_2的子幺半群

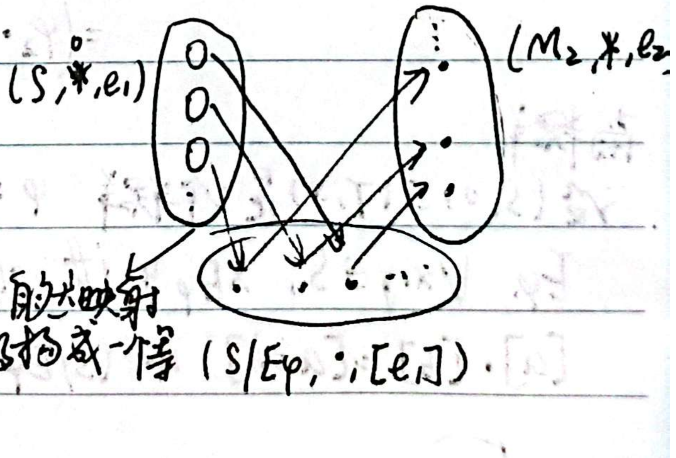
(2) 由φ所确定的等价关系E_φ为同余关系。若$aE_\varphi a'$，$bE_\varphi b'$，则$a\circ b\,E_\varphi\,(a'\circ b')$

于是，$[a]\cdot[b]=[a\circ b]$为M_1/E_φ上的二元运算，$(M_1/E_\varphi,\cdot,[e_1])$是商幺半群

(3) 存在唯一的M_1/E_φ到M_2的单射同态$\bar\varphi$，使$\bar\varphi\circ\gamma=\varphi$

其中$\gamma: M_1\to M_1/E_\varphi$为自然同态

(4) 若φ为满射，则M_1/E_φ与M_2同构



例1 D连通，$\forall v\in V$，$od(v)=1$，则D恰有1个有向圈

考虑$q=\sum od_i=p$。≥2个圈：$q\geq p+1$

无圈：$q=p-1$

逐步构造证法：找若干环，必有出度为2的点（若环不相交，则必 $g \geq p/4$
否则 取最后一个交点 u $od(u) \geq 2$）

哈图判断方法

① 平面图 → Grinberg定理，常用于说明不是哈图
$$\sum(i-2)(f_i - g_i) = 0$$

② 染色法 → 每个点黑白，邻接点不同，数黑白点数（可加点，若某边必在哈圈上）
相同 → 不一定　不同 → 一定不是

③ 充分条件：$\forall v \in V$，$\deg v \geq p/2$ → 哈图。
$\forall u, v \in V$ 不邻接，$\deg u + \deg v \geq p$ → 哈图
$\geq p-1$ → 有哈路

④ 不停边收缩（如：先收缩 $\deg = 2$ 的点，若一个点有2条边必在哈圈上，则剩下的边必不在。若出现一个比更小的必在哈圈上的圈，就不是哈图）

⑤ Peterson图不是哈图的证明？→ 讨论有几条边在哈圈上

"~~没有△"时入手~~"？⑥ 有割点/桥的图不是哈图

没有△"时如何入手？① 图兰定理，$g \leq [\frac{p^2}{4}]$
② 没有奇环？二分图？（常见于构造）