主管 领核 客字

哈尔滨工业大学 2022 学年 春 季学期 近世代数 A 试 题

题号	_	=	Ξ	四	五	六	七	八	九	+	总分
得分											
阅卷人											

本试卷满分 100 分

1. 设S为半群,且左、右消去律成立,即对 $\forall a,b,c \in S$,若有ab=ac或ba=ca必有b=c,证明: 对 $\forall a,b \in S$,若有 $(ab)^2=a^2b^2$,则S为交换半群。(10 分)

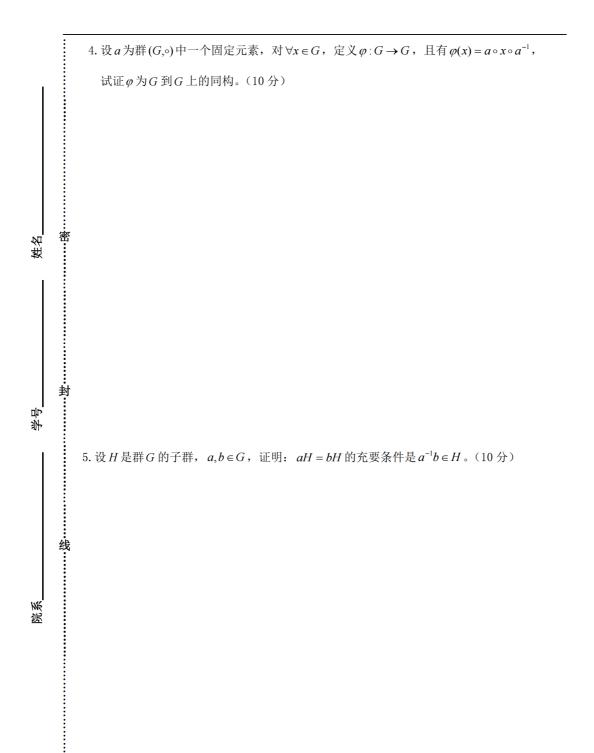
W

2. 设(S,o,e)为	幺半群,	(T,*)为一个。	具有二元	元代数运算"	* "	的代数系,	φ 为 S 到 T	的满射,	且对
$\forall x, y \in S \hat{\eta}$:	$\varphi(x\circ y)=$	$= \varphi(x) * \varphi(y)$,	试证:	(T,*)为幺半	群,	且其单位。	元为 $arphi(e)$ 。	(10分)	

3. 设 $G = \{x | x \in Q \exists x \neq 1\}$,其中Q为有理数集。定义二元运算"。"如下:

 $x \circ y = x + y - xy, \ \forall x, y \in Q$

证明(G,o)为群。(10分)



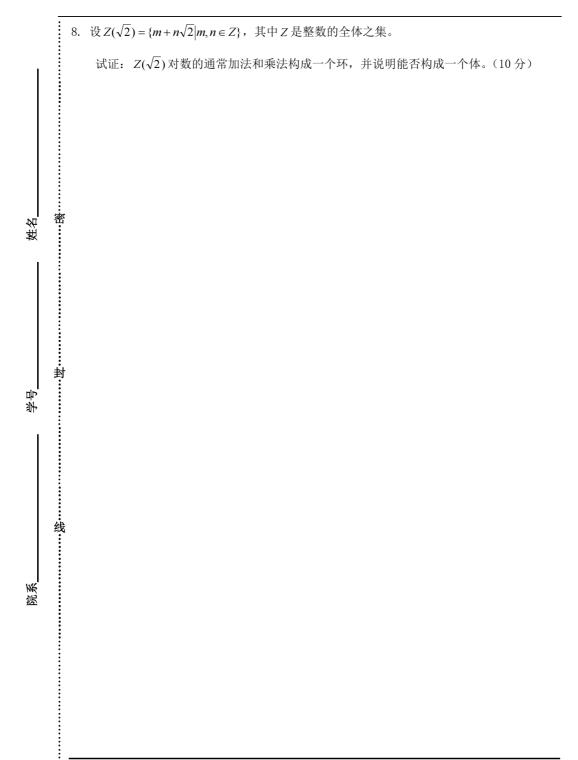
6. 在整数加法群(Z,+)和模n同余等价类加法群 (Z_n,\oplus) 之间定义映射如下:

$$\varphi: Z \to Z_n$$
, $\varphi(a) = [a], \forall a \in Z$

其中 Z_n 上的加法 \oplus 定义为: $[i] \oplus [j] = [i+j]$, 其中 $i, j \in Z$

- 1) 证明 φ 为 $Z \to Z_n$ 上的满同态。
- 2) 给出同态 φ 的同态核 $\mathit{Ker}\ \varphi$ 。并简述其在群的同态基本定理中的作用。(10 分)

7. 设G是一个阶为2n的交换群,试证G必有一个n阶商群。(10分)



10.	设 (Z_n, Θ, \otimes) 为模 n 的同余类环,其中" Θ "与" \otimes "分别定义 如下:	
	$[i] \oplus [j] = [i+j], [i] \otimes [j] = [i*j], \forall [i], [j] \in Z_n$	
	其中 $i, j \in \mathbb{Z}$,"+"与"*"为通常的整数的加法与乘法运算。	
	举例说明 n 为何值时 Z_n 是一个域,并分别给出此时非零元素关于 " \oplus " 和 " \otimes " 运算的元素的阶。(10 分)	
	第6页(共6页)	
		CSDN @Broker (掮客)

9. 设G 是交换群,则G 的所有阶数为有限的元素构成的集合H 是G 的正规子群。(10 分)