

主管
领导
审核
签字

哈尔滨工业大学 2022 学年 春 季学期

近世代数 A 试 题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

本试卷满分 100 分

1. 设 S 为半群, 且左、右消去律成立, 即对 $\forall a, b, c \in S$, 若有 $ab = ac$ 或 $ba = ca$ 必有 $b = c$, 证明: 对 $\forall a, b \in S$, 若有 $(ab)^2 = a^2b^2$, 则 S 为交换半群。(10 分)

姓名

学号

院系

密

封

线

2. 设 (S, \circ, e) 为么半群, $(T, *)$ 为一个具有二元代数运算 “ $*$ ” 的代数系, φ 为 S 到 T 的满射, 且对 $\forall x, y \in S$ 有: $\varphi(x \circ y) = \varphi(x) * \varphi(y)$, 试证: $(T, *)$ 为么半群, 且其单位元为 $\varphi(e)$ 。(10 分)

3. 设 $G = \{x | x \in Q \text{ 且 } x \neq 1\}$, 其中 Q 为有理数集。定义二元运算 “ \circ ” 如下:

$$x \circ y = x + y - xy, \forall x, y \in Q$$

证明 (G, \circ) 为群。(10 分)

姓名

学号

院系

密

封

线

4. 设 a 为群 (G, \circ) 中一个固定元素, 对 $\forall x \in G$, 定义 $\varphi: G \rightarrow G$, 且有 $\varphi(x) = a \circ x \circ a^{-1}$, 试证 φ 为 G 到 G 上的同构。(10 分)

5. 设 H 是群 G 的子群, $a, b \in G$, 证明: $aH = bH$ 的充要条件是 $a^{-1}b \in H$ 。(10 分)

6. 在整数加法群 $(\mathbb{Z}, +)$ 和模 n 同余等价类加法群 (\mathbb{Z}_n, \oplus) 之间定义映射如下:

$$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n, \quad \varphi(a) = [a], \quad \forall a \in \mathbb{Z}$$

其中 \mathbb{Z}_n 上的加法 \oplus 定义为: $[i] \oplus [j] = [i + j]$, 其中 $i, j \in \mathbb{Z}$

1) 证明 φ 为 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ 上的满同态。

2) 给出同态 φ 的同态核 $\text{Ker } \varphi$ 。并简述其在群的同态基本定理中的作用。(10 分)

7. 设 G 是一个阶为 $2n$ 的交换群, 试证 G 必有一个 n 阶商群。(10 分)

姓名

学号

院系

密

封

线

8. 设 $Z(\sqrt{2}) = \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$, 其中 \mathbb{Z} 是整数的全体之集。

试证: $Z(\sqrt{2})$ 对数的通常加法和乘法构成一个环, 并说明能否构成一个体。(10 分)

9. 设 G 是交换群, 则 G 的所有阶数为有限的元素构成的集合 H 是 G 的正规子群。(10 分)

10. 设 (Z_n, \oplus, \otimes) 为模 n 的同余类环, 其中 “ \oplus ” 与 “ \otimes ” 分别定义 如下:

$$[i] \oplus [j] = [i + j], \quad [i] \otimes [j] = [i * j], \quad \forall [i], [j] \in Z_n.$$

其中 $i, j \in Z$, “ $+$ ” 与 “ $*$ ” 为通常的整数的加法与乘法运算。

举例说明 n 为何值时 Z_n 是一个域, 并分别给出此时非零元素关于 “ \oplus ” 和 “ \otimes ” 运算的元素的阶。(10 分)