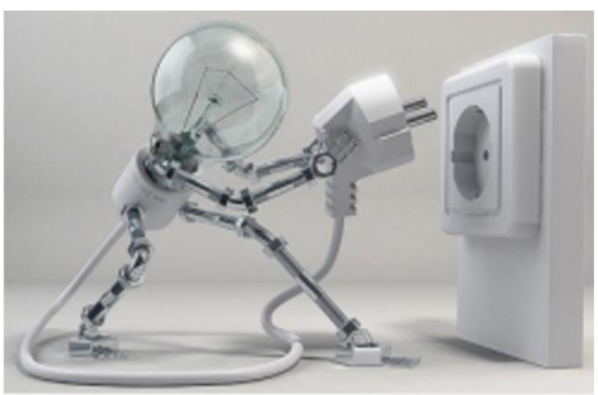
哈爾濱工業大學(深圳)
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY, SHENZHEN

《自动化认知与实践》之 - 轮式机器人运动学建模



机电学院自动化 陈浩耀
邮箱：hychen5@hit.edu.cn
地址：G栋310

内容

- 介绍
  - 什么是机器人?
  - 机器人类型
- 轮子的分类
  - 固定轮
  - 居中定向轮
  - 偏心定向轮
  - 万向轮
- 移动机器人运动
  - 差速驱动
  - 三轮驱动
  - 同步驱动
  - 全方位
  - 阿克曼转向
- 移动机器人的运动学模型
- 总结

什么是机器人?

- 没有确切的定义，但一般定义机器人为具有感应，智能和机动性的机器。

你觉得什么才是机器人？

1) 长得像人？
2) 有眼睛？
3) 有手有脚有轮子有翅膀？
4) 有耳朵？ 语音识别？
5) 会说话？
6) 有逻辑思维？
7) 有情感？
8) 与人协作？
9) 自我学习能力？

什么是机器人?

- 没有确切的定义，但一般定义机器人为具有感应，智能和机动性的机器。

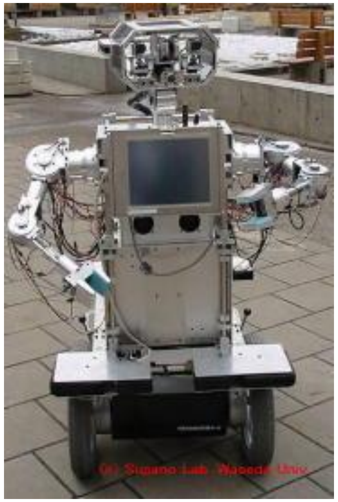
你觉得什么才是机器人？

- 要被认定为机器人，机器必须能够:
  1) **感知**：能从周围获取信息
  2) **可执行任务**：移动或操纵，做一些实际的事情，比如移动或操纵物体
  3) **可重新编程**：可以做不同的事情
  4) **人机交互**：具有人机交互接口，甚至自主交互接口

机器人的类型

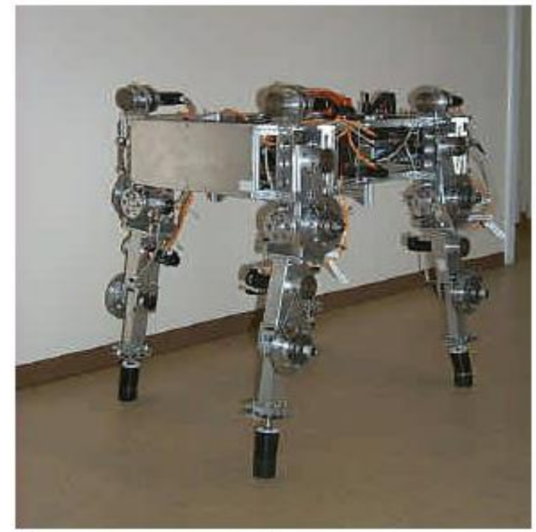
- 机械臂

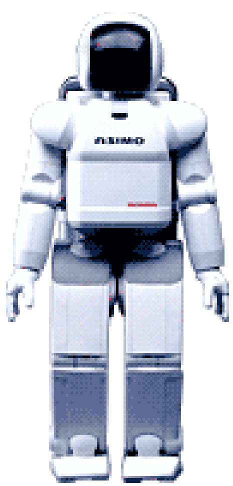
- 移动机器人机械臂



机器人的类型

- 轮式机器人
- 足式机器人
- 空中机器人
- 水下机器人
- 类人机器人





轮式移动机器人(WMR)

Yamabico

MagellanPro

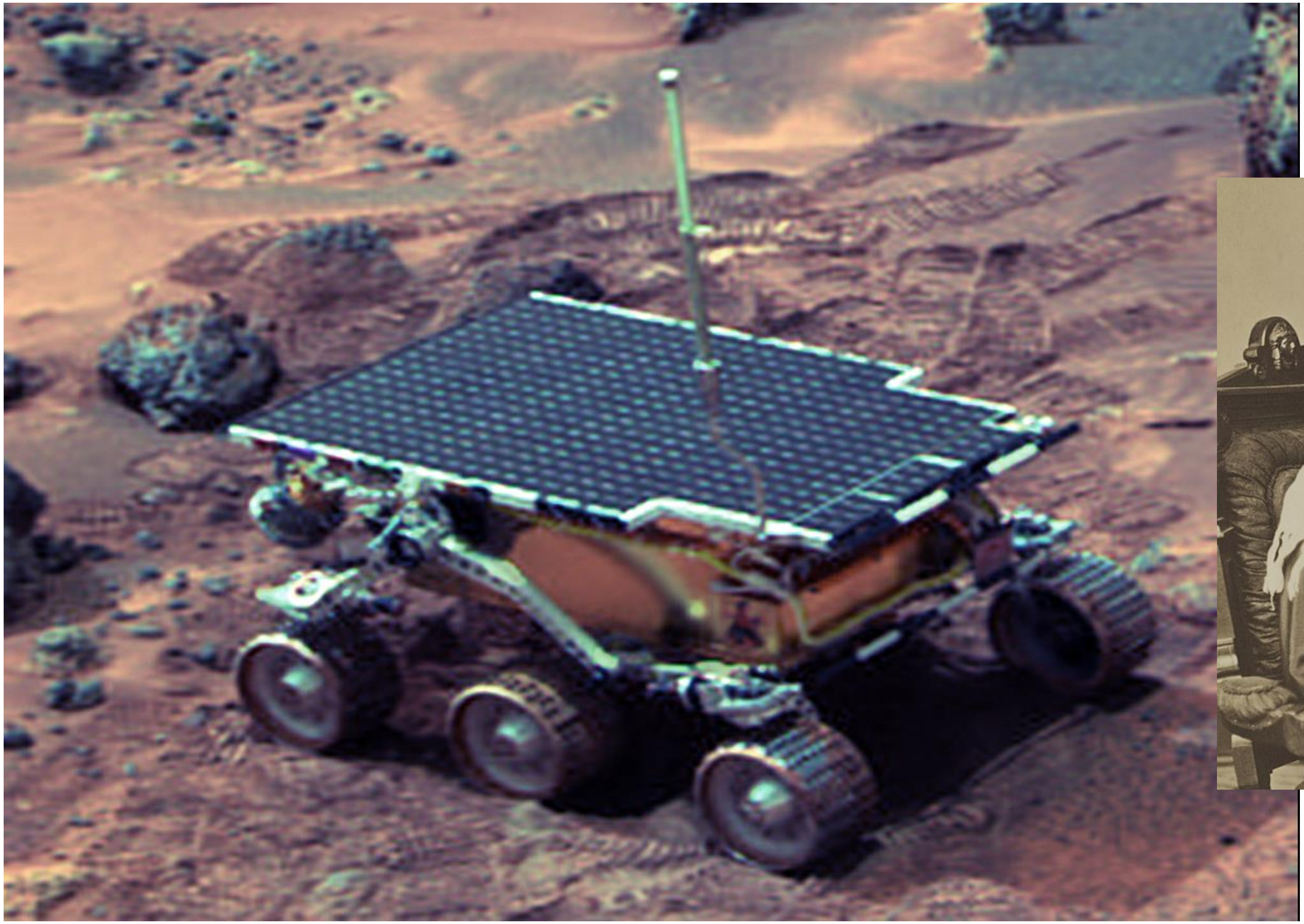
Sojourner

ATRV-2

Hilare 2-Bis

Koy

轮式移动机器人(WMR)



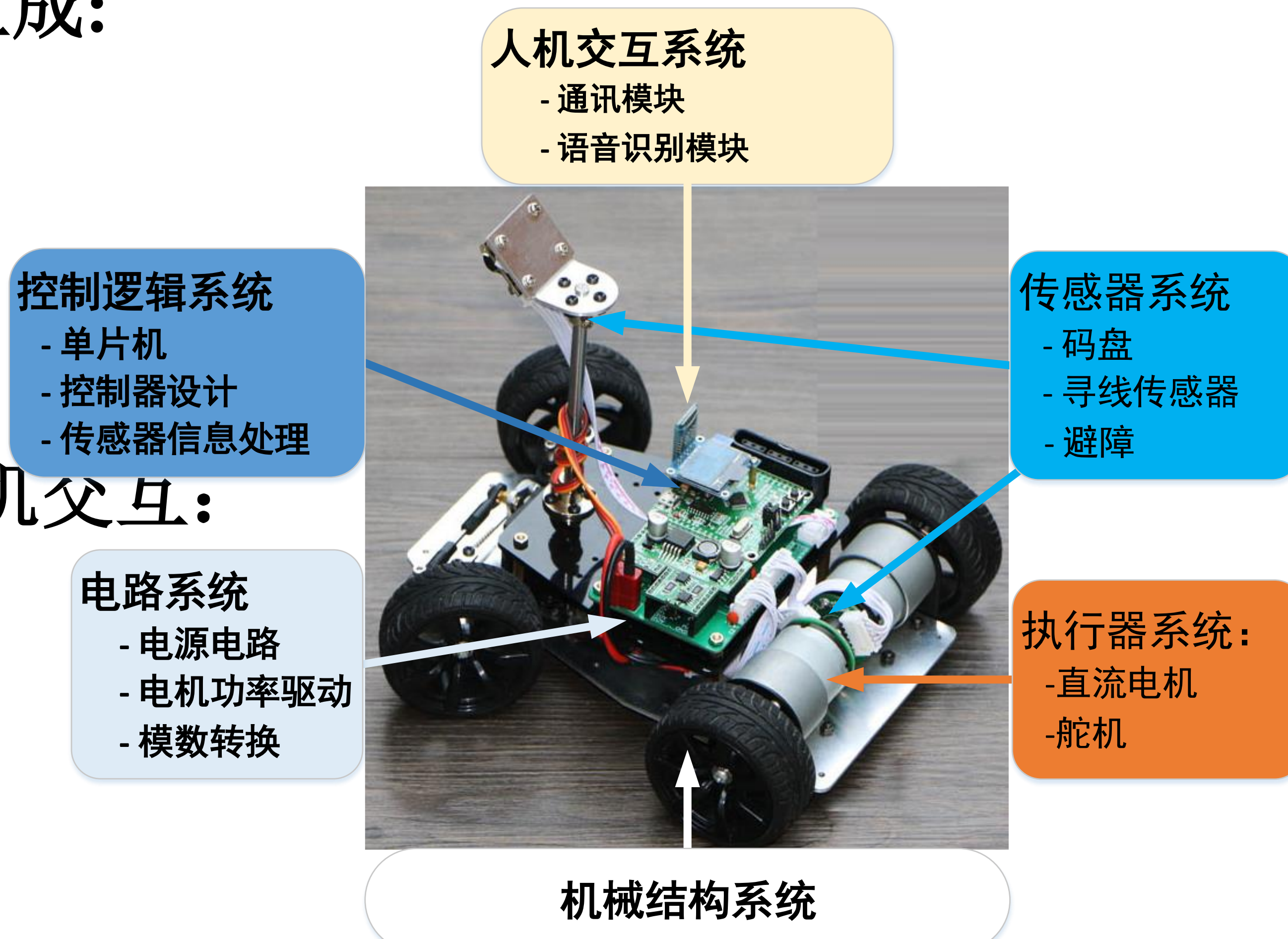
旅居者号（英文：**Sojourner**）

轮式移动机器人

- 各种硬件和计算软件组件的组合
- 子系统的组成:
  - 运动：机器人如何在其环境中移动
  - 感知：机器人如何测量自身及其环境的属性
  - 控制：机器人如何产生物理动作
  - 推理：机器人如何将测量结果映射到行动
  - 通信/人机交互：机器人如何彼此通信或与外部操作员沟通

轮式移动机器人

- 各种硬件和计算软件组件的组合
- 子系统的组成:
  - 运动:
  - 感知:
  - 控制:
  - 推理:
  - 通信/人机交互:



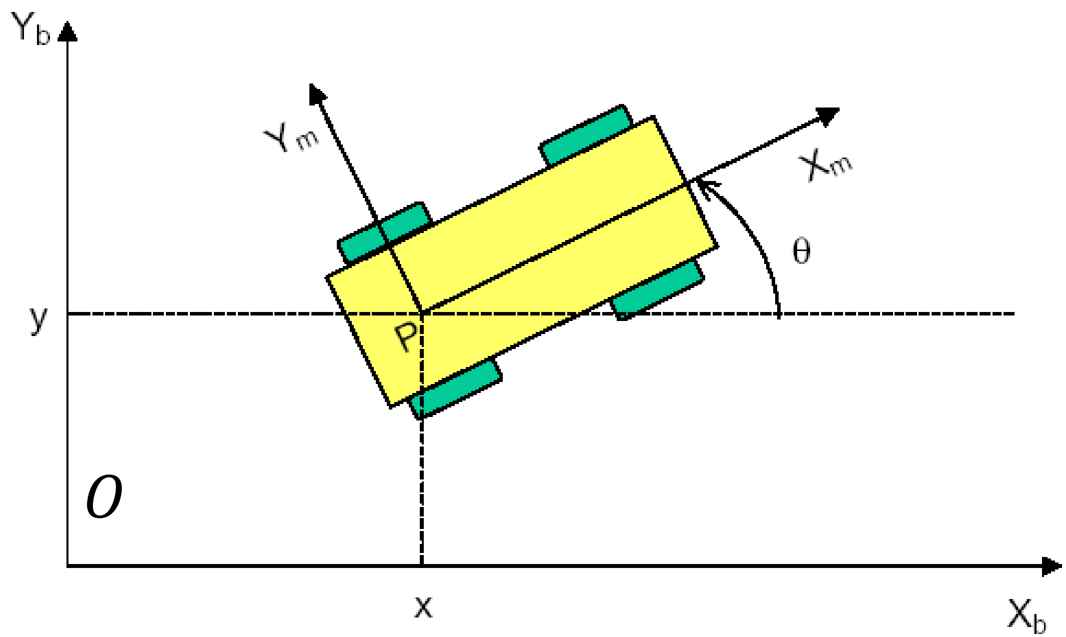
移动机器人运动

- **运动** – 机器人移动的过程
  - 为了产生运动，必须将力施加到机器人上
  - 电机输出，有效载荷

- **动力学** – 对力如何产生运动进行建模
  - 处理力和运动之间的关系

- **运动学** – 研究运动的数学，不考虑影响力对运动的影响
  - 研究系统的几何关系
  - 研究运动参数与系统行为之间的关系
    - 例如给机器人小车一个前进加速度，车体怎么运动

模型符号定义



位姿：位置 (x, y) 和 方向 θ

机器人坐标系

$$X_m - P - Y_m$$

世界坐标系

$$X_b - O - Y_b$$

$P = (x, y, \theta)^T$　　机器人在世界坐标系下的坐标

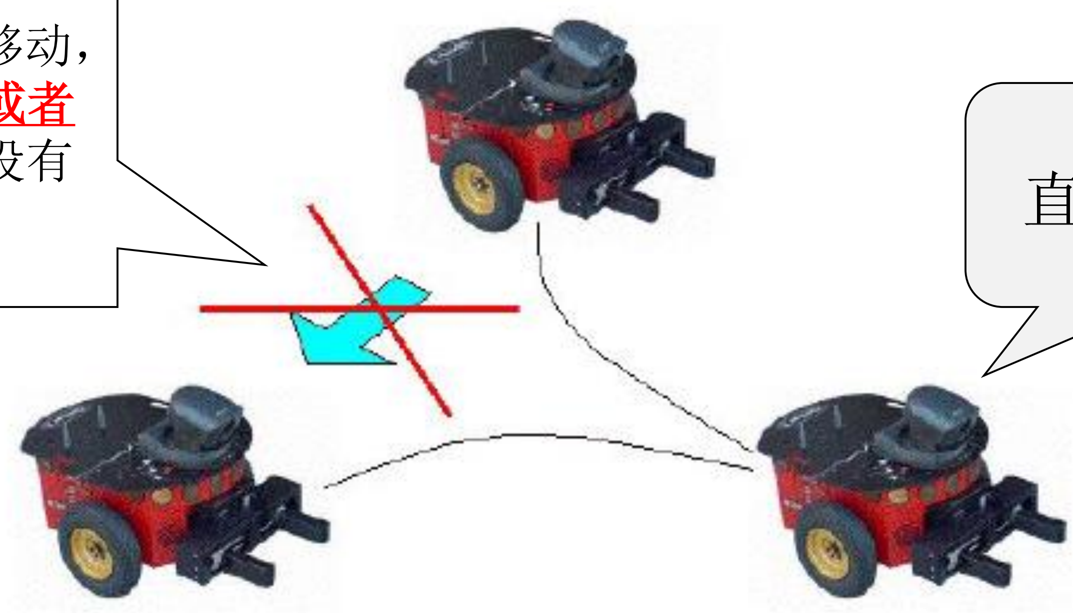
- $R(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 旋转矩阵：机器人坐标系相对于世界坐标系的旋转变换
- 变换矩阵：机器人坐标系相对于世界坐标系的欧氏变换

非完整的约束

这是什么意思?

即，你的机器人只能在某些方向移动（向前向后），其他方向不行。

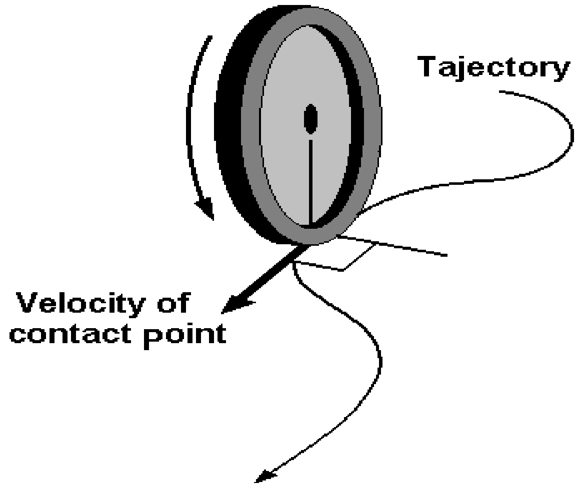
机器人可以前后移动，但不能向左移动或者向右移动在车轮没有变换方向情况下。



直直往前走

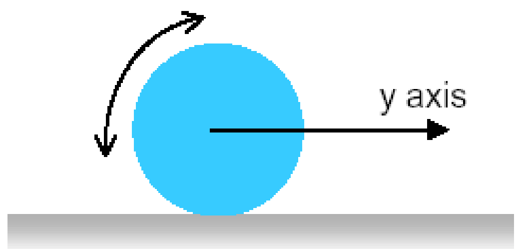
理想滚动轮

- 假设:
  - 在转向的正交方向上不发生滑动（不滑动）。
  - 车轮和地面之间没有平移（纯滚动）。
  - 每个车轮至多有一个转向连杆，转向轴垂直于地面

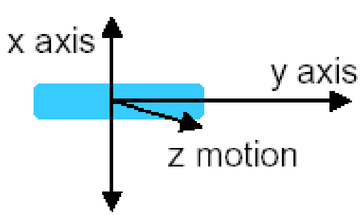


不滑动和纯滚动

Idealized rolling wheel

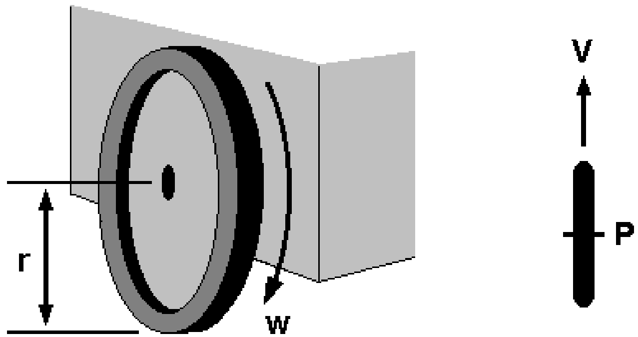


侧滑

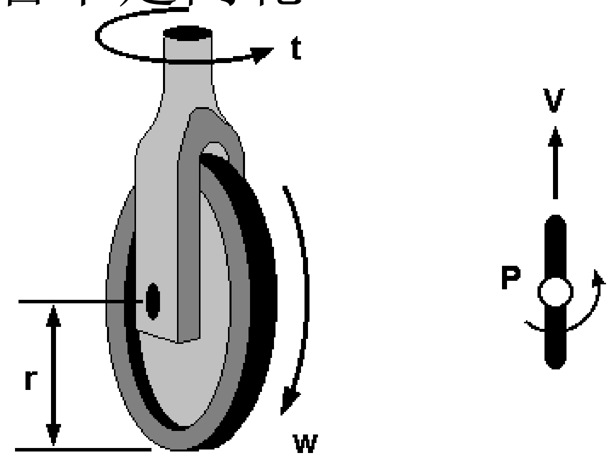


轮子类型

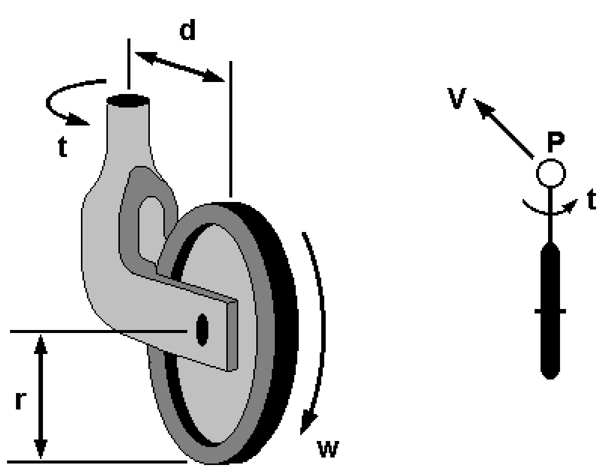
固定轮



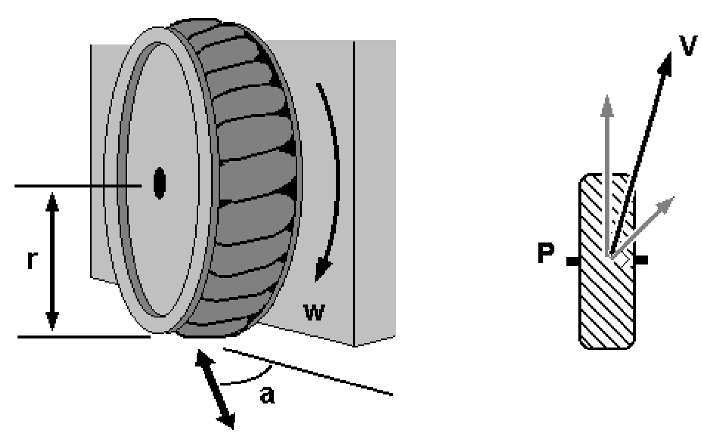
居中定向轮



偏心定向轮（脚轮）

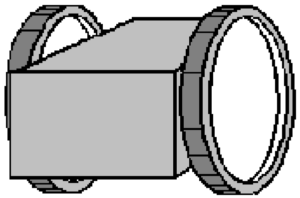


万向轮：全方位属性



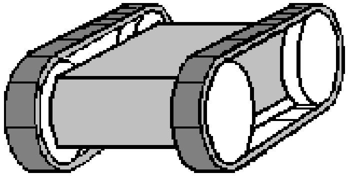
轮式移动机器人类型

例子



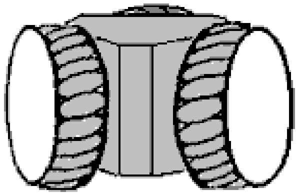
双轮机器人

- 运动光滑
- 有可能有滑移
- 有时使用滚球来平衡



履带机器人

- 精确的直线运动
- 抗滑性能优秀
- 不精确的转向建模



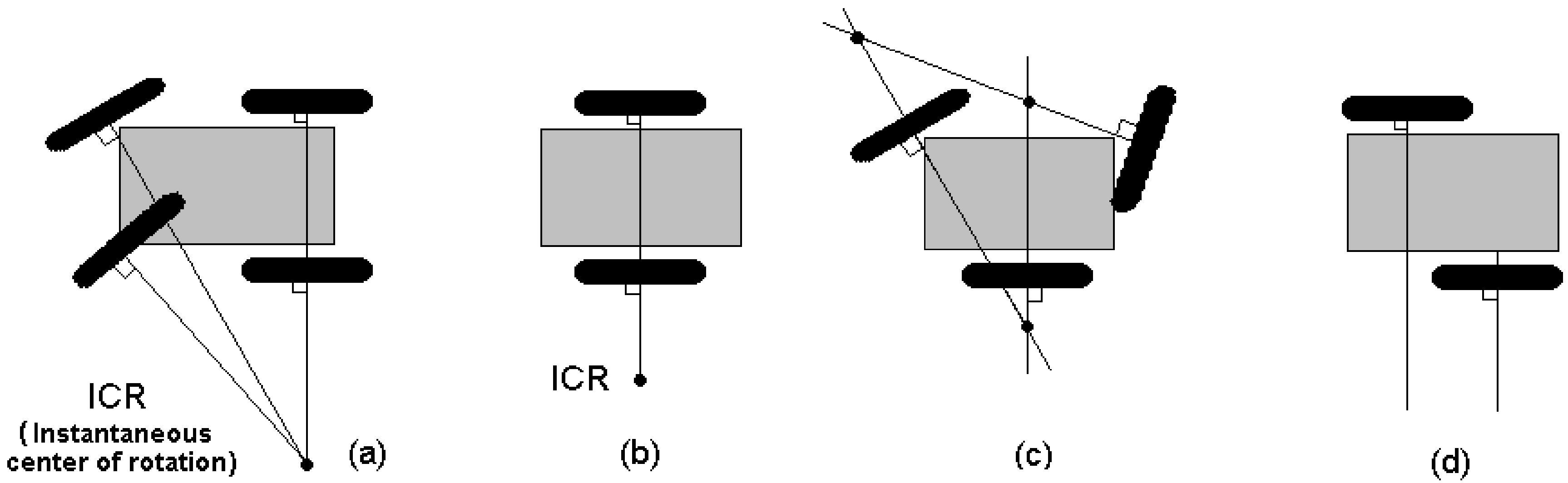
全向轮机器人

- 自由的运动
- 复杂的结构
- 结构上的弱点

移动机器人运动

- 瞬时旋转中心(ICR, Instantaneous Center of Rotation) 或

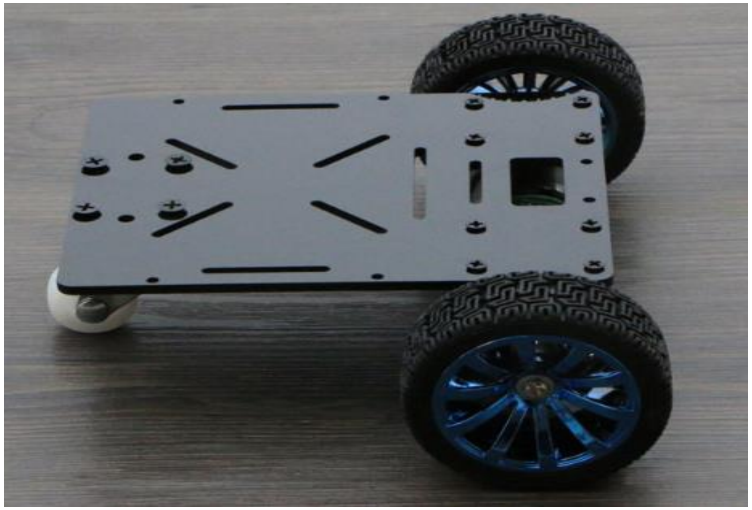
  瞬时曲率中心(ICC, Instantaneous Center of Curvature)
  - 车轮所有轴的交叉点

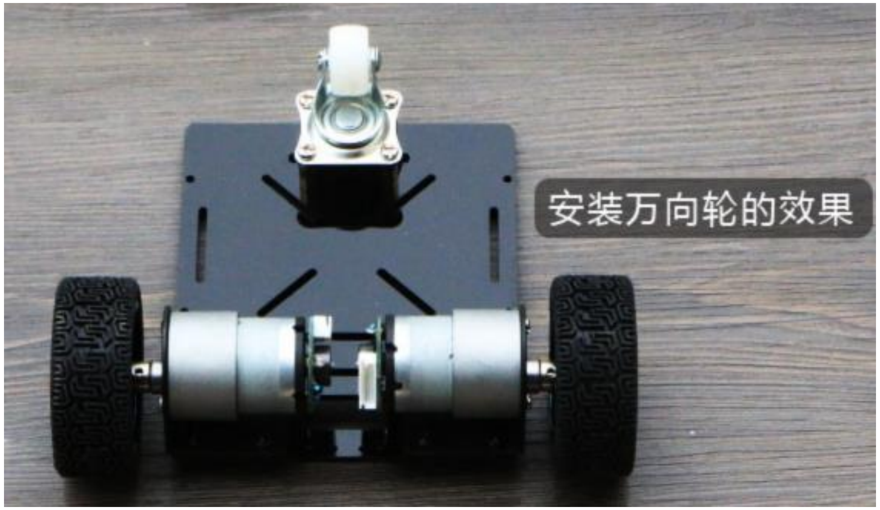


移动机器人运动

- 差速驱动
  - 两个驱动轮（加上滚珠平衡）
  - 最简单的驱动机制
  - 对两个轮子的相对速度敏感（小误差导致不同的轨迹，而不仅仅是速度）
- 三轮驱动
  - 有两个后轮加上转向轮
  - 不能转动 ±90º
  - 有限的曲率半径
- 同步驱动
- 全方位
- 汽车驾驶（阿克曼转向）

差速驱动





- 机器人的姿势

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}$$

(x, y) : 机器人位置

θ： 机器人转向

- 控制输入

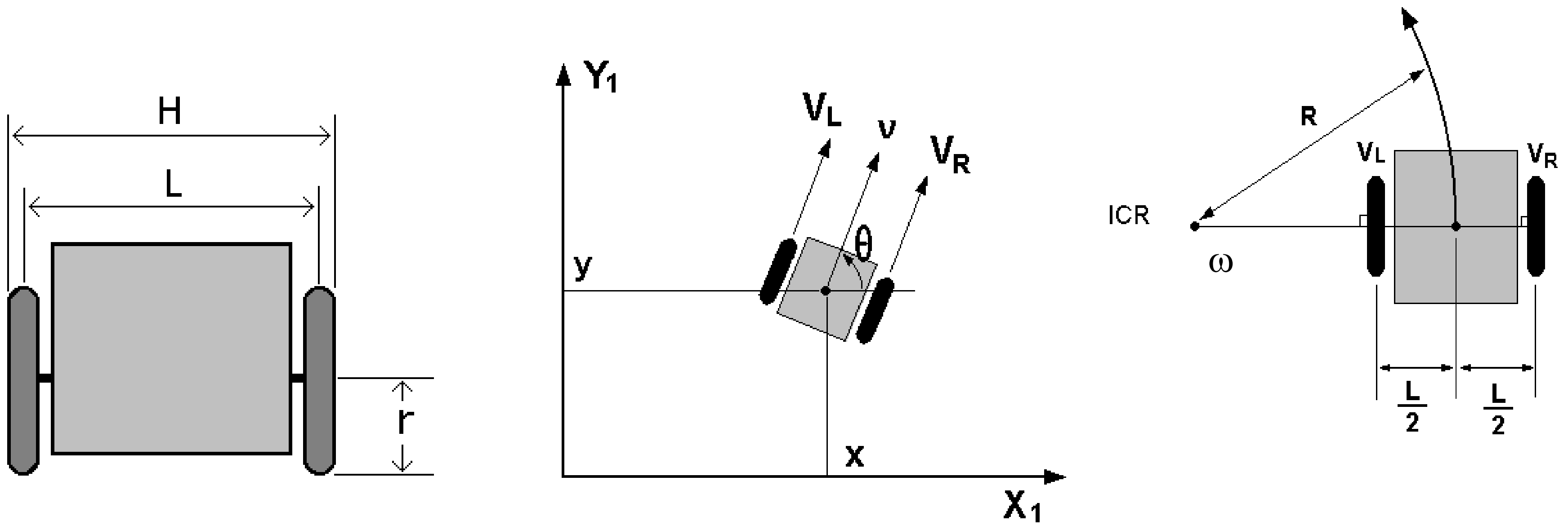
$$U = \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}$$

v ： 机器人线速度

ω ： 机器人角速度

每个轮子的角速度不一样

差速驱动



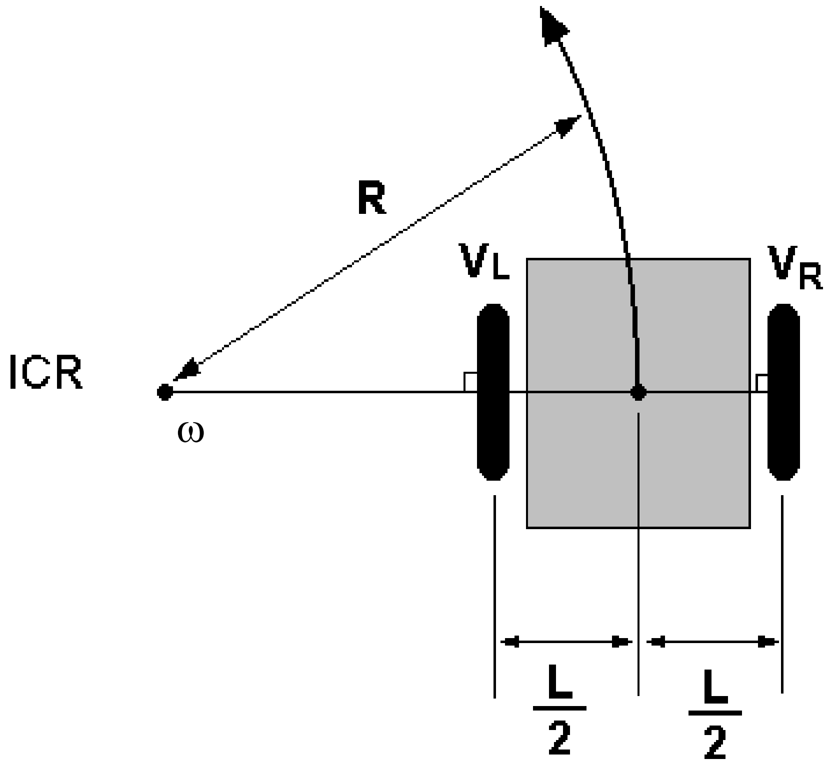
$V_R(t)$ – 右轮的线速度

$V_L(t)$ – 左轮的线速度

r – 每个车轮的半径

R – 机器人轨迹的瞬时曲率半径(从ICC到两个轮子之间的中点的距离).

差速驱动



属性：在每个时刻，左右车轮必须遵循以相同角速度ω围绕ICC运动一定的移动轨迹，于是有：

$$\omega(R+\frac{L}{2})=V_R$$

$$\omega(R-\frac{L}{2})=V_L$$

差速驱动

- 运动学模型（世界坐标系下）
  - 控制输入和车轮速度之间的关系

$$V_L = r\,\omega_L \qquad V_R = r\,\omega_R$$

$$\omega = \frac{V_R - V_L}{L} \qquad v = \frac{V_R + V_L}{2}$$

  - 运动学方程

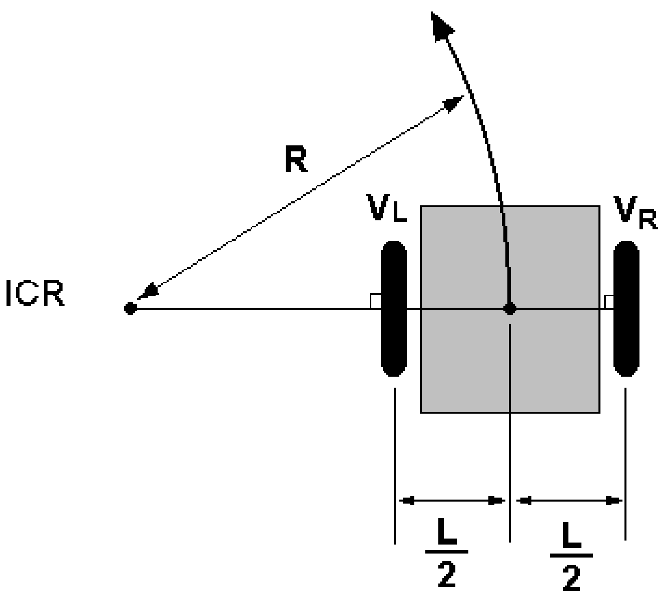
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}$$

差速驱动

- 瞬时旋转中心

$$\omega(R+\frac{L}{2})=V_R \qquad (V_R-V_L)/L = V_R/(R+\frac{L}{2})$$

$$\omega(R-\frac{L}{2})=V_L \qquad R=\frac{L}{2}\frac{V_R+V_L}{V_R-V_L}$$

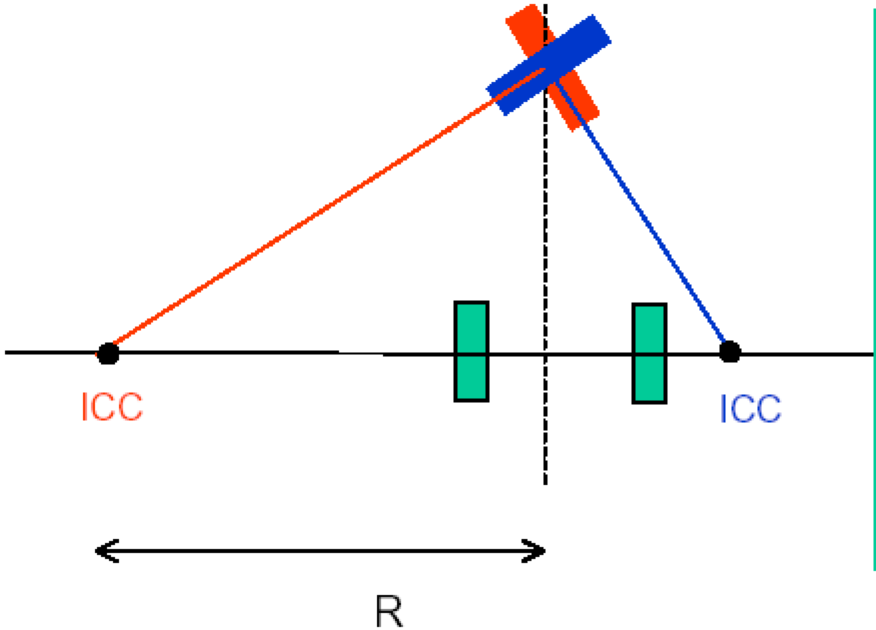


R：转弯半径

- 直线运动
  R = Infinity → $V_R = V_L$
- 旋转运动
  R = 0 → $V_R = -V_L$

三轮移动机器人

- 三个轮子：两个后轮和一个前轮
- 转向和动力通过前轮提供
- 控制变量:
  - 转向方向 $\alpha(t)$
  - 转向轮的角速度 $w_s(t)$



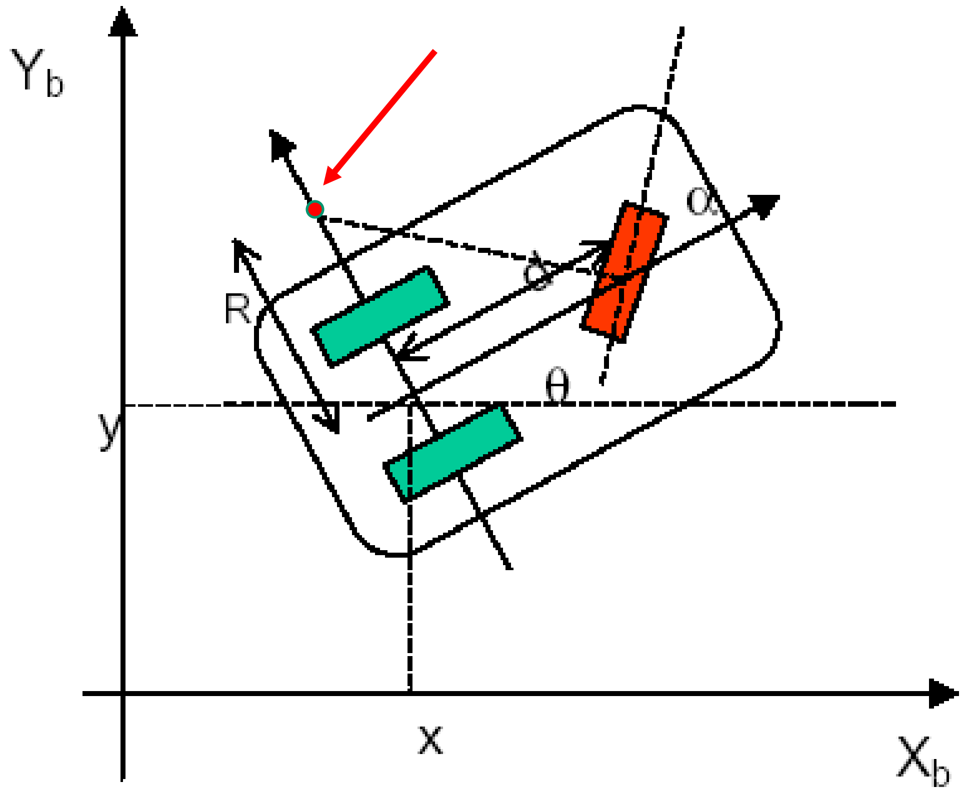
ICC 必须放置在经过且垂直于后轮的直线上

后轮固定不可扭转

三轮移动机器人

若转向轮偏离车体方向角度为α(t)，

则三轮车将以角速度 w(t) 绕某一个点旋转，该点处在垂直于后轮的直线上且距离车体后轮轴中心点长度R。



三轮移动机器人

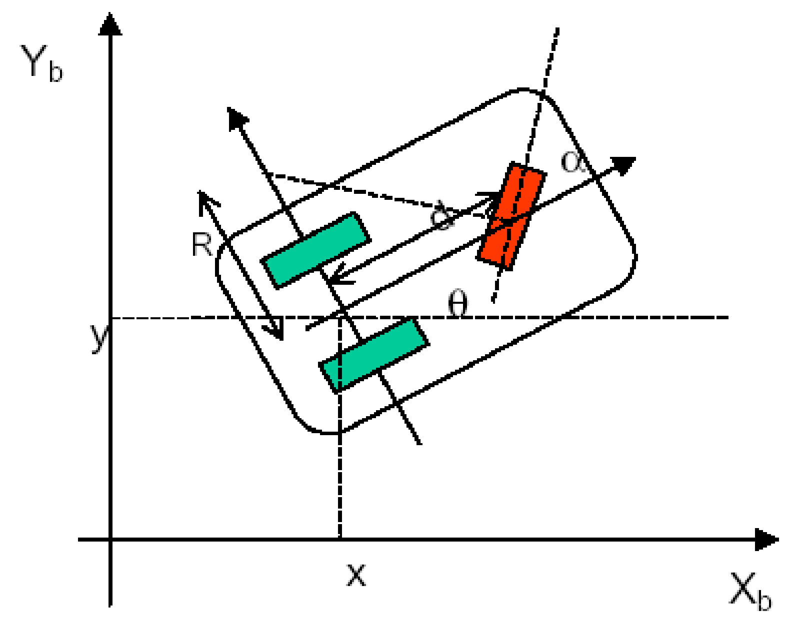
□ 机器人坐标系中的运动学模型

$$v_x(t) = v_s(t)\cos\alpha(t)$$

$$v_y(t) = 0$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{v_s(t)}{d}\sin\alpha(t)$$

默认没有滑动



三轮移动机器人

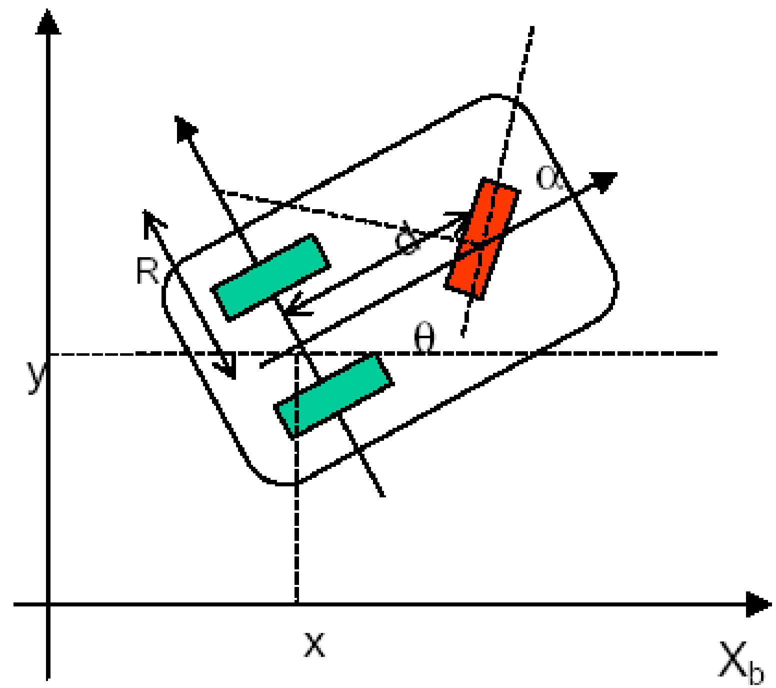
- 转向轮的线速度

$$V_s(t) = \omega_s(t)r$$

- 转弯半径

$$R(t) = d\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha(t)\right)$$

- 机器人坐标系相对于世界坐标系的角速度

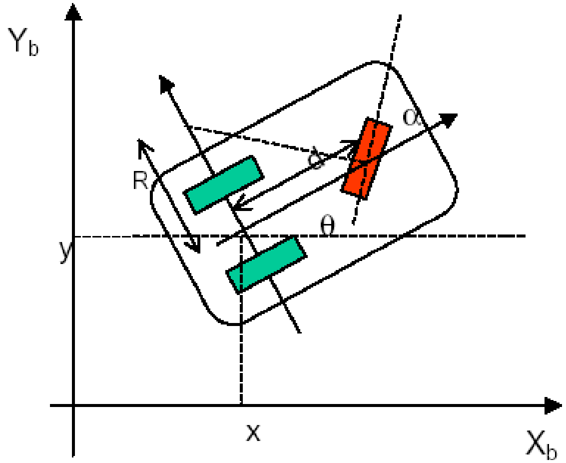


$$\omega(t) = \frac{\omega_s(t)r}{\sqrt{d^2 + R^2(t)}} = \frac{V_s(t)}{d}\sin\alpha(t)$$

三轮移动机器人

在世界坐标系内的运动学模型

$$\dot{x}(t) = v_s(t)\cos\alpha(t)\cos\theta(t)$$
$$\dot{y}(t) = v_s(t)\cos\alpha(t)\sin\theta(t)$$
$$\dot{\theta}(t) = \frac{v_s(t)}{d}\sin\alpha(t)$$



$$V_x(t) = V_s(t)cos\alpha(t)$$

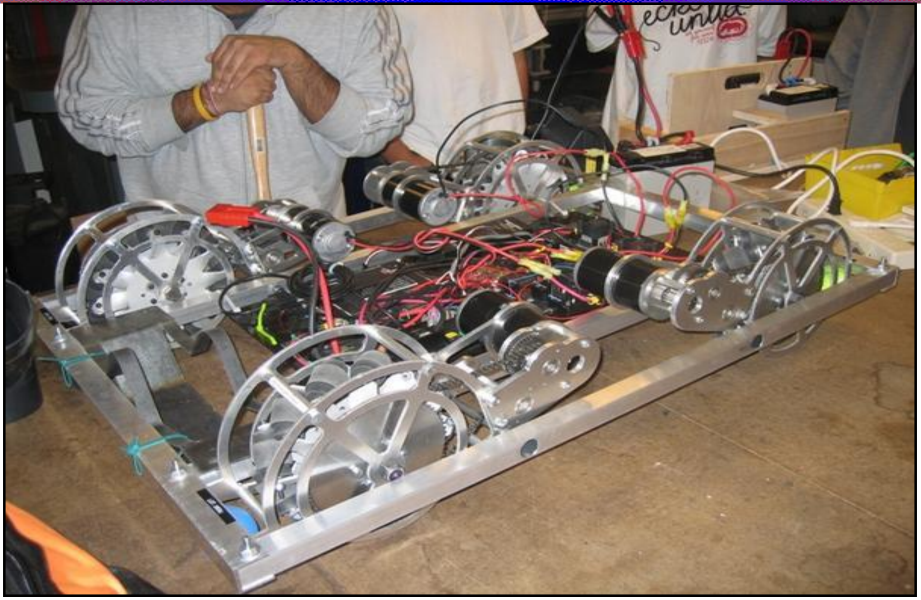
$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

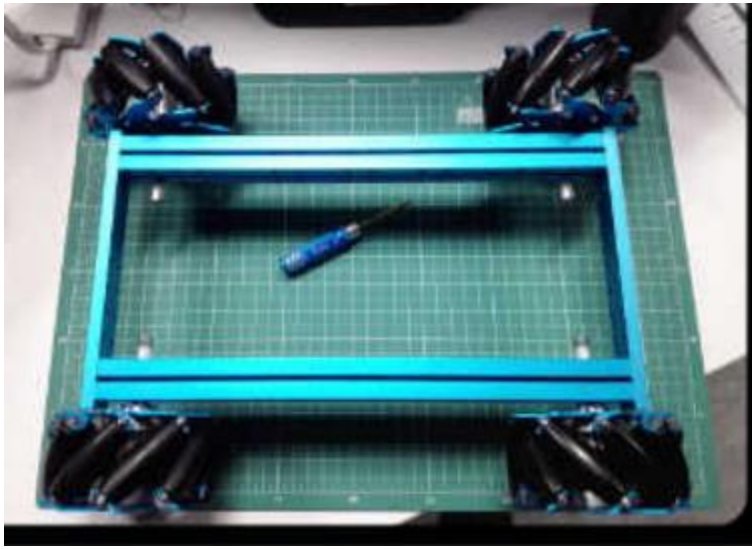
$$v(t) = v_s(t)\cos\alpha(t)$$
$$w(t) = \frac{v_s(t)}{d}\sin\alpha(t)$$

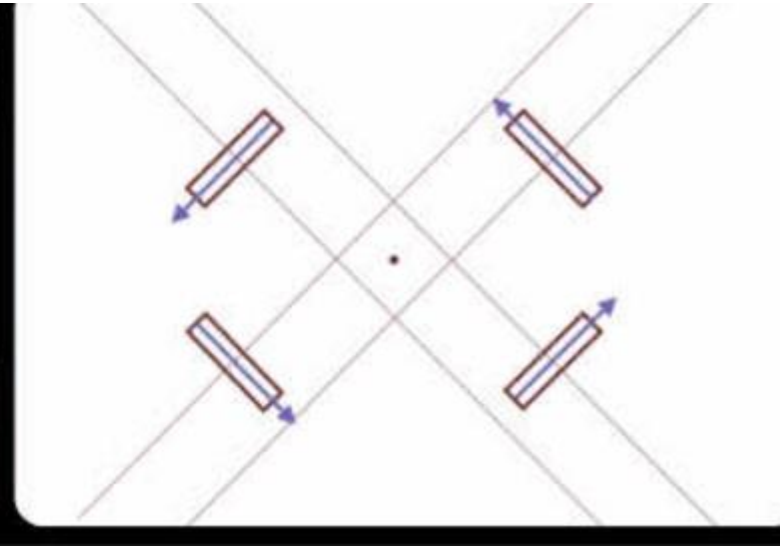
麦克纳姆轮全向驱动

麦克纳姆轮全向驱动

麦克纳姆轮全向驱动







麦克纳姆轮全向驱动

运动学建模

麦轮底盘的数学模型比较复杂，我们在此分四步进行：

①将底盘的运动分解为三个独立变量来描述；

②根据第一步的结果，计算出每个轮子轴心位置的速度；

③根据第二步的结果，计算出每个轮子与地面接触的辊子的速度；

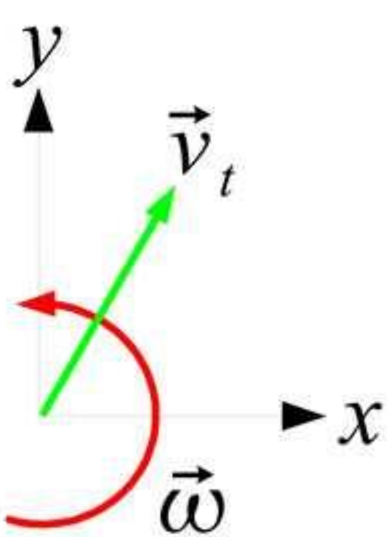
④根据第三部的结果，计算出轮子的真实转速。

麦克纳姆轮全向驱动

- 运动学建模

麦轮底盘的数学模型比较复杂，我们在此分四步进行：

①将底盘的运动分解为三个独立变量来描述；



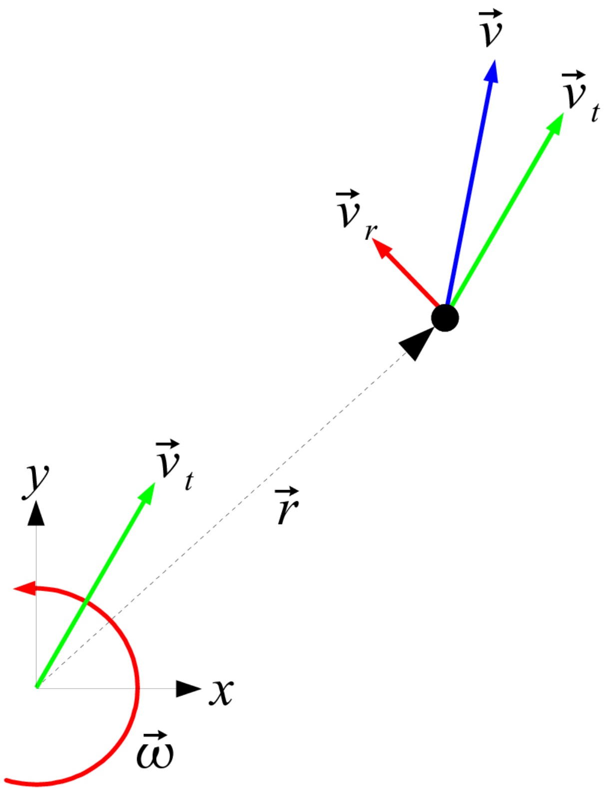
v_{t_y} 表示 X 轴运动的速度，即左右方向，定义向右为正；

v_{t_x}表示 Y 轴运动的速度，即前后方向，定义向前为正；

ω 表示 yaw 轴自转的角速度，定义逆时针为正。

麦克纳姆轮全向驱动

麦轮底盘的数学模型比较复杂，我们在此分四步进行：
①将底盘的运动分解为三个独立变量来描述；
②根据第一步的结果，计算出每个轮子轴心位置的速度；



$\vec{r}$ 为从几何中心指向轮子轴心的矢量；

$\vec{v}$ 为轮子轴心的运动速度矢量；

$\vec{v_r}$ 为轮子轴心沿垂直于 $\vec{r}$ 的方向（即切线方向）的速度分量；

可以计算出：

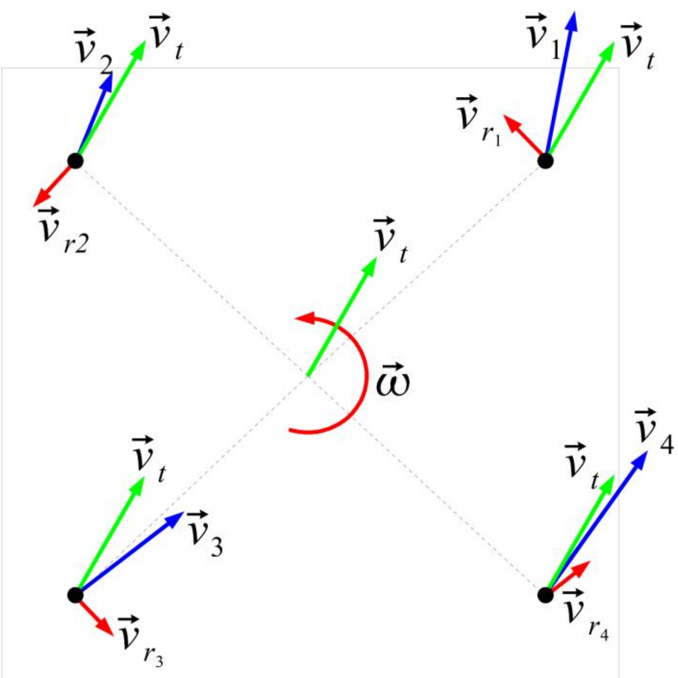
$$\vec{v} = \vec{v}_t + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

分别计算 X、Y 轴的分量为：

$$v_x = v_{t_x} - \omega \cdot r_y$$
$$v_y = v_{t_y} + \omega \cdot r_x$$

麦克纳姆轮全向驱动

麦轮底盘的数学模型比较复杂，我们在此分四步进行：
①将底盘的运动分解为三个独立变量来描述；
②根据第一步的结果，计算出每个轮子轴心位置的速度；



$\vec{r}$ 为从几何中心指向轮子轴心的矢量；

$\vec{v}$ 为轮子轴心的运动速度矢量；

$\vec{v_r}$ 为轮子轴心沿垂直于 $\vec{r}$ 的方向（即切线方向）的速度分量；

可以计算出：

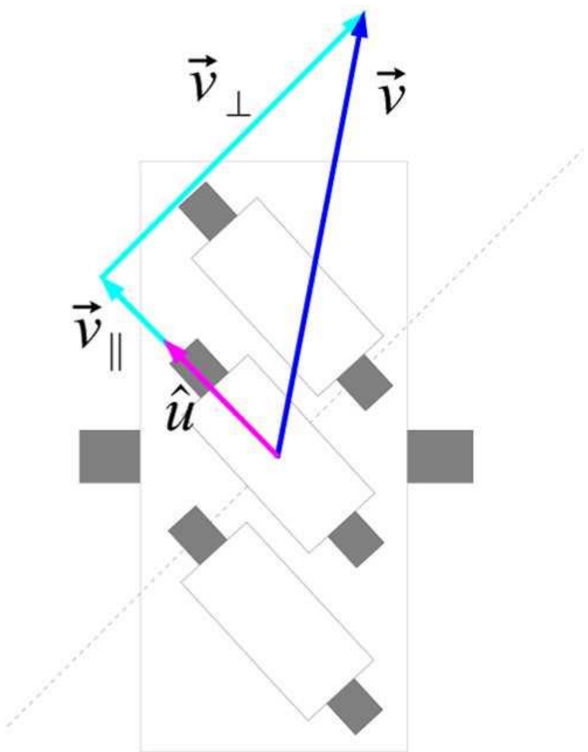
$$\vec{v} = \vec{v}_t + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

分别计算 X、Y 轴的分量为：

$$v_x = v_{t_x} - \omega \cdot r_y$$
$$v_y = v_{t_y} + \omega \cdot r_x$$

麦克纳姆轮全向驱动

麦轮底盘的数学模型比较复杂，我们在此分四步进行：
①将底盘的运动分解为三个独立变量来描述；
②根据第一步的结果，计算出每个轮子轴心位置的速度；
③根据第二步的结果，计算出每个轮子与地面接触的辊子的速度；



分解出沿辊子方向的速度 $\overrightarrow{v_\parallel}$

和垂直于辊子方向的速度 $\overrightarrow{v_\perp}$

$$
\begin{aligned}
v_\parallel &= \vec{v}\cdot\hat{u} \\
&= (v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath})\cdot \\
&\quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\jmath}\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}v_x + \frac{1}{\sqrt{2}}v_y
\end{aligned}
$$

其中 $\overrightarrow{v_\perp}$ 是可无视的

麦克纳姆轮全向驱动

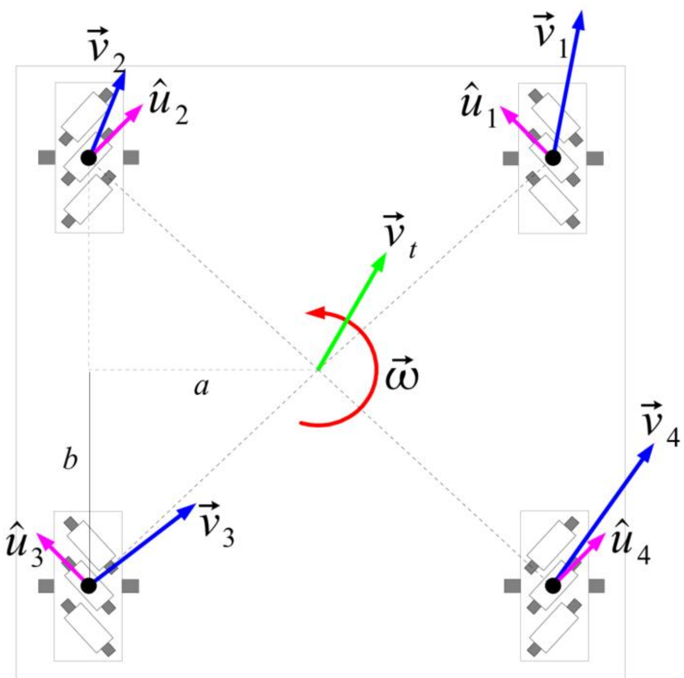
麦轮底盘的数学模型比较复杂，我们在此分四步进行：
①将底盘的运动分解为三个独立变量来描述；
②根据第一步的结果，计算出每个轮子轴心位置的速度；
③根据第二步的结果，计算出每个轮子与地面接触的辊子的速度；
④根据第三部的结果，计算出轮子的真实转速。

$$\begin{aligned} v_w &= \frac{v_{\parallel}}{\cos 45^\circ} \\ &= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}v_x + \frac{1}{\sqrt{2}}v_y\right) \\ &= -v_x + v_y \end{aligned}$$

麦克纳姆轮全向驱动

麦轮底盘的数学模型比较复杂，我们在此分四步进行：
①将底盘的运动分解为三个独立变量来描述；
②根据第一步的结果，计算出每个轮子轴心位置的速度；
③根据第二步的结果，计算出每个轮子与地面接触的辊子的速度；
④根据第三部的结果，计算出轮子的真实转速。

以第三个轮子举例：



$$
\begin{aligned}
v_{3_x} &= v_{t_x} + \omega b \\
v_{3_y} &= v_{t_y} - \omega a \\
\hat{u}_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\jmath}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{w_3} &= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}v_{3_x} + \frac{1}{\sqrt{2}}v_{3_y}\right) \\
&= -v_{3_x} + v_{3_y} \\
&= -v_{t_x} - \omega b + v_{t_y} - \omega a \\
&= v_{t_y} - v_{t_x} - \omega(a+b)
\end{aligned}
$$

麦克纳姆轮全向驱动

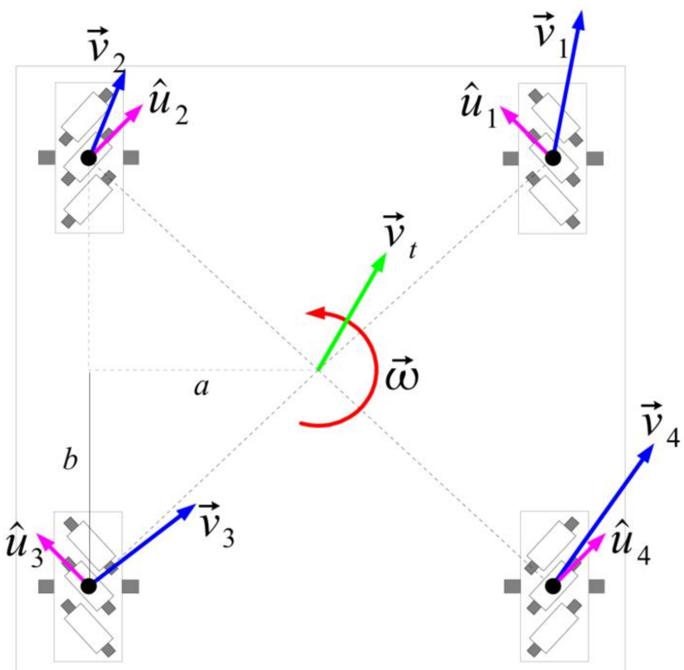
麦轮底盘的数学模型比较复杂，我们在此分四步进行：

①将底盘的运动分解为三个独立变量来描述；

②根据第一步的结果，计算出每个轮子轴心位置的速度；

③根据第二步的结果，计算出每个轮子与地面接触的辊子的速度；

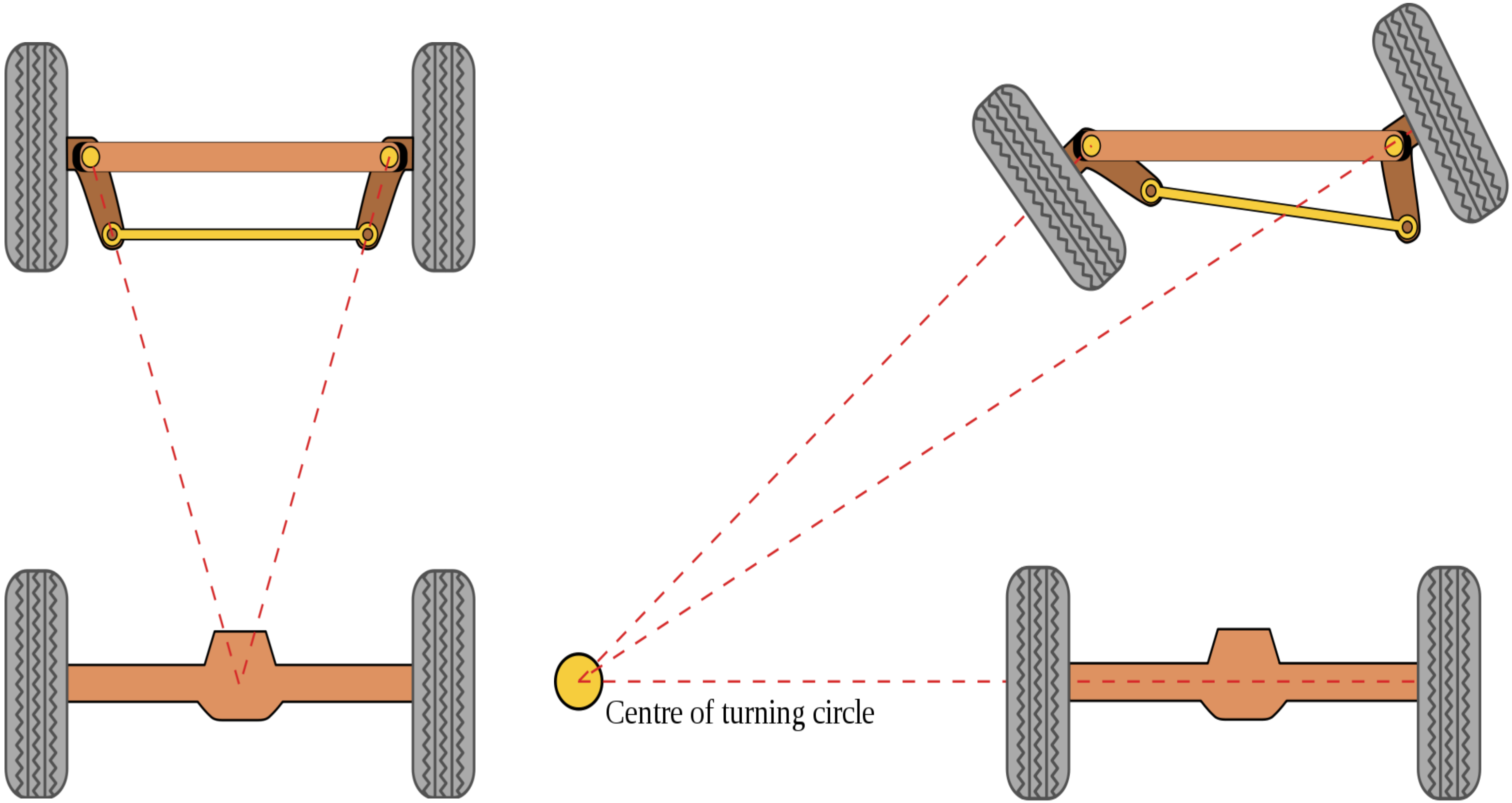
④根据第三部的结果，计算出轮子的真实转速。



其他三个轮子：

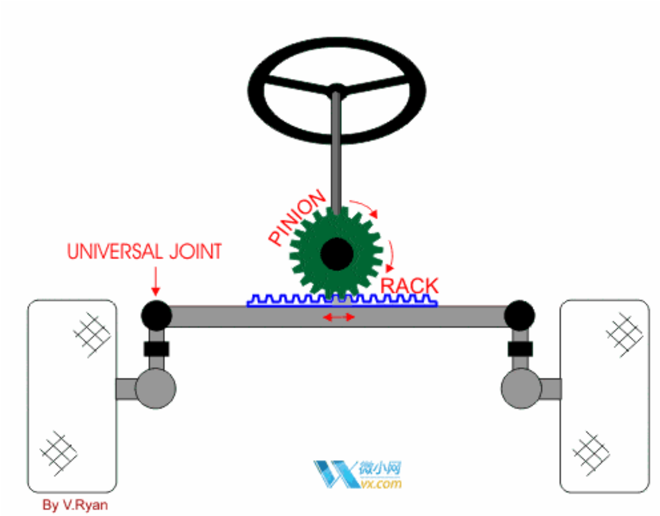
$$
\begin{aligned}
v_{w_1} &= v_{t_y} - v_{t_x} + \omega(a+b) \\
v_{w_2} &= v_{t_y} + v_{t_x} - \omega(a+b) \\
v_{w_4} &= v_{t_y} + v_{t_x} + \omega(a+b)
\end{aligned}
$$

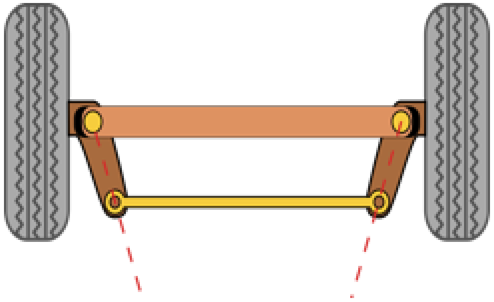
阿克曼（ Ackman ）转向驱动



阿克曼（Ackman）转向驱动

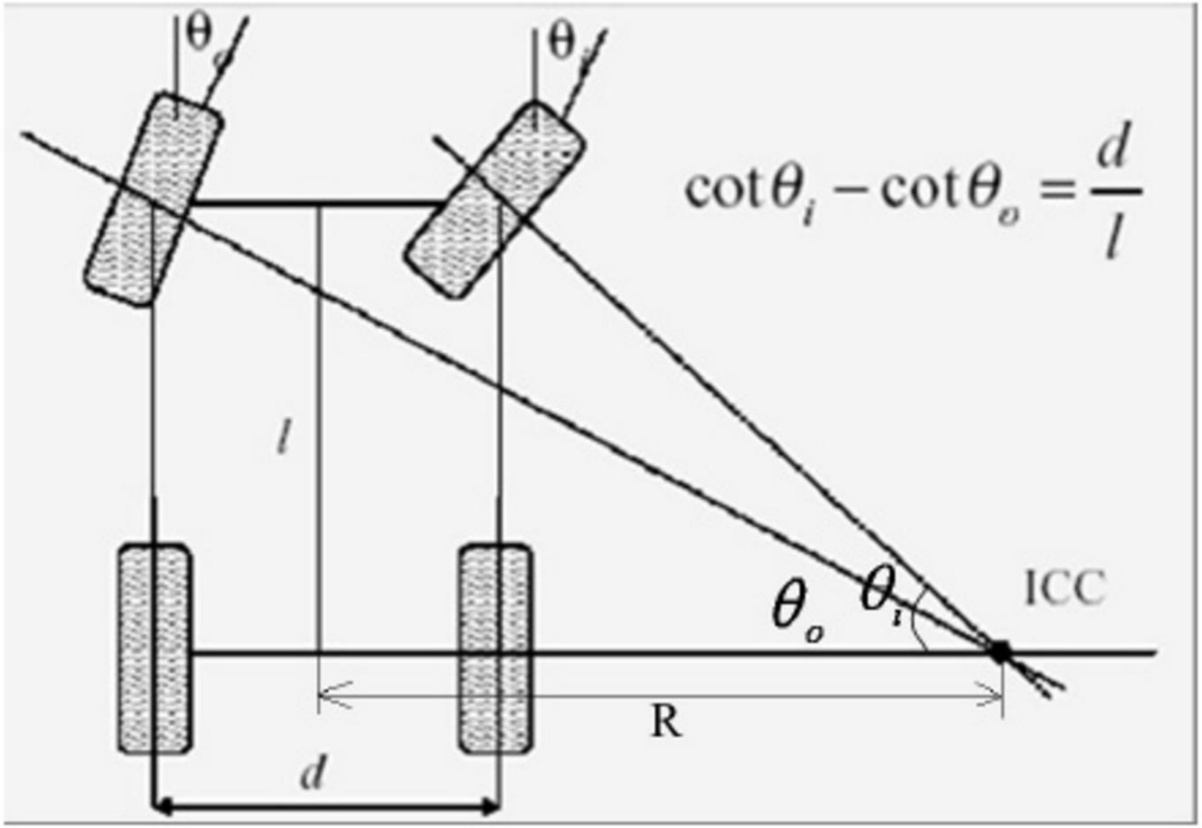
机器人驱动(梯形转向机构)





- 在机动车辆使用中,内前轮旋转的角度稍大于外前轮 (可以减少滑移).
- 梯形转向机构能提供一个相当高精度的航位推算同时保持牵引力和离地净高.
- 是大部分室外运动车辆的首选运动模型.

阿克曼（Ackman）转向驱动

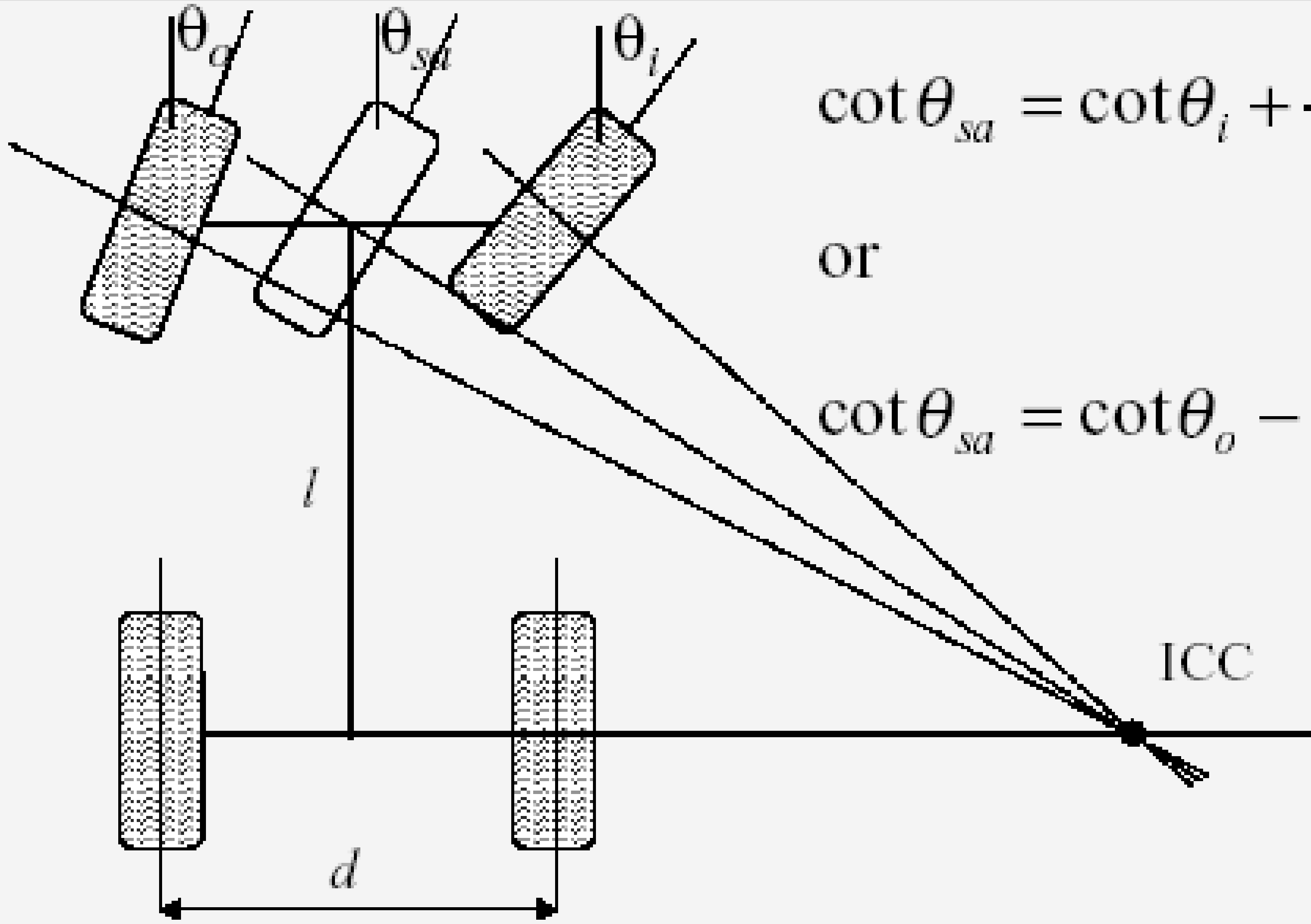


梯形转向结构方程:

$$\cot\theta_i - \cot\theta_o = \frac{R+\frac{d}{2}}{l} - \frac{R-\frac{d}{2}}{l} = \frac{\mathrm{d}}{l}$$

- d = 轮子横向间距
- l = 车轮纵向间距
- θ_i = 内轮相对间隔角度
- θ_o =外轮相对间隔角度

阿克曼（Ackman）转向驱动



$$\cot\theta_{sa} = \cot\theta_i + \frac{d}{2l}$$

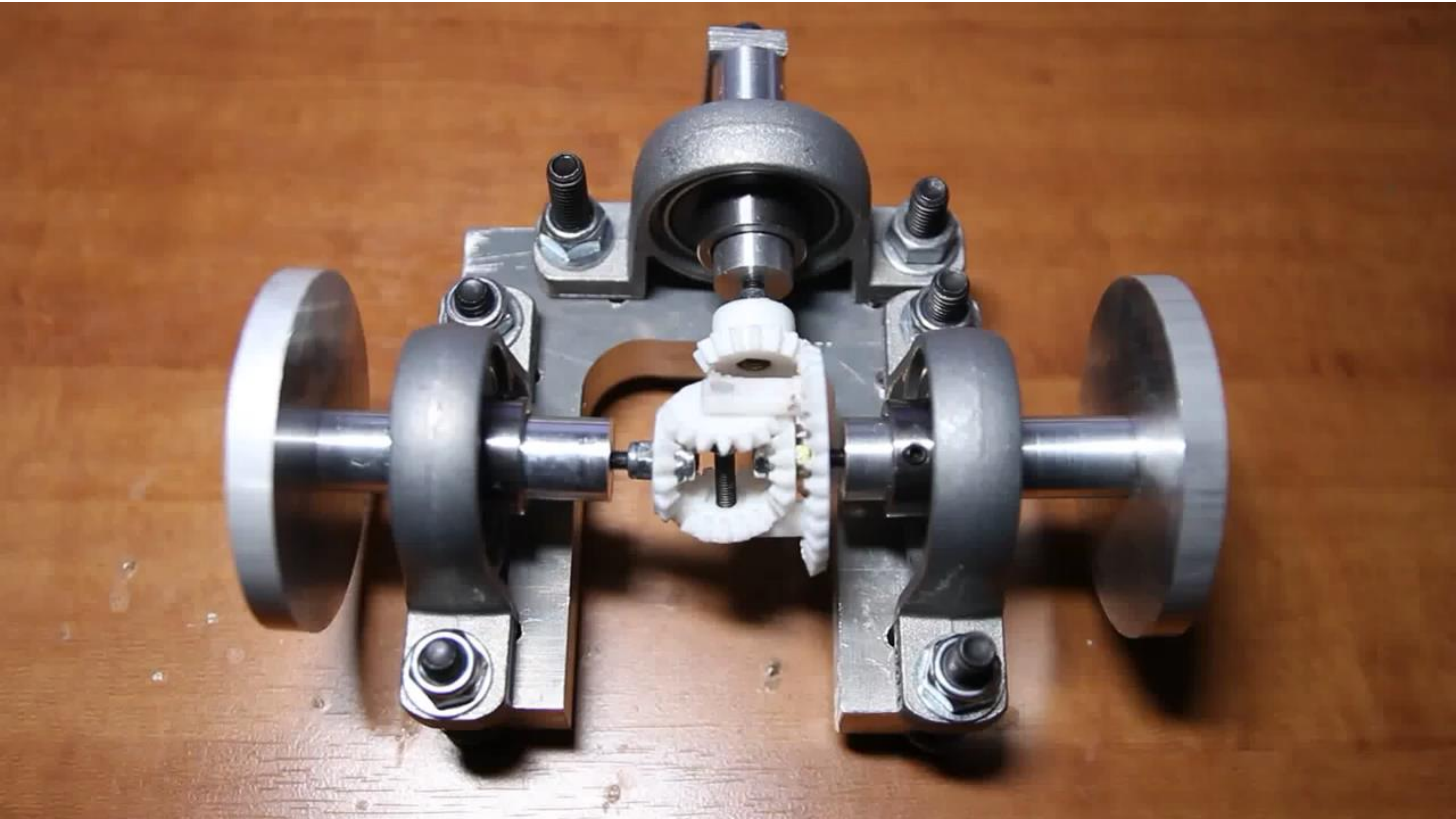
or

$$\cot\theta_{sa} = \cot\theta_o - \frac{d}{2l}$$

汽车差速器原理：https://youtu.be/OdqCw8-cIlY

阿克曼（Ackman）转向驱动

汽车差速器原理：



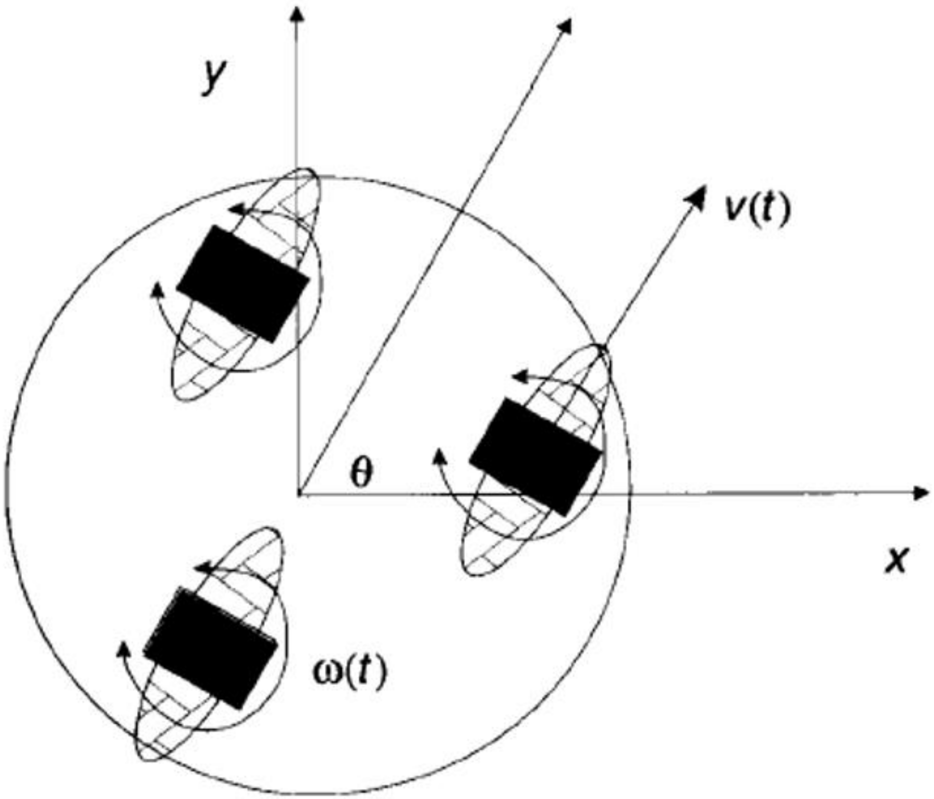
同步驱动

- 在同步驱动机器人中，每个轮子都能被转动和扭转。

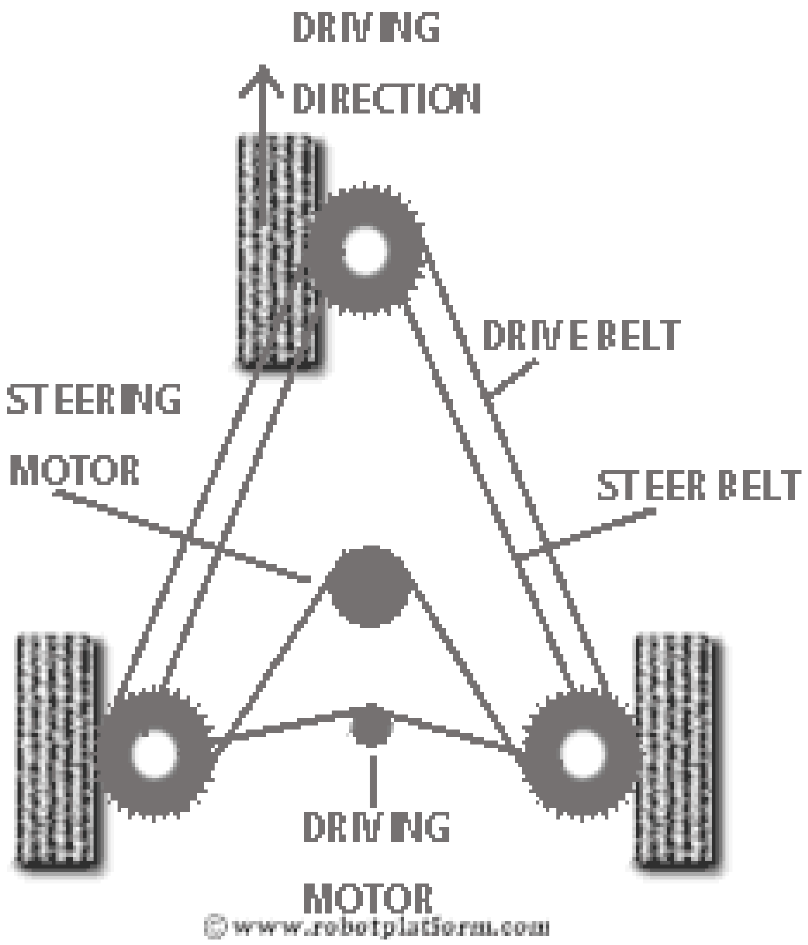
- 典型配置
  - 三个导向轮是等边三角形的三个顶点
  - 圆柱形平台以这个三角形为支撑
  - 所有的轮子同步旋转同步扭转

- 这实现了完整的运动行为（各个方向都能运动）

同步驱动

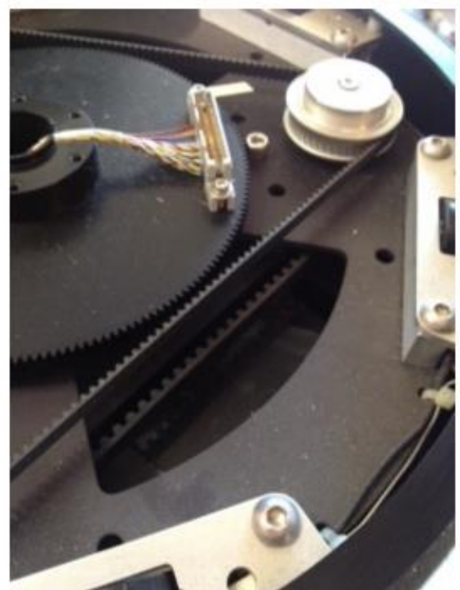


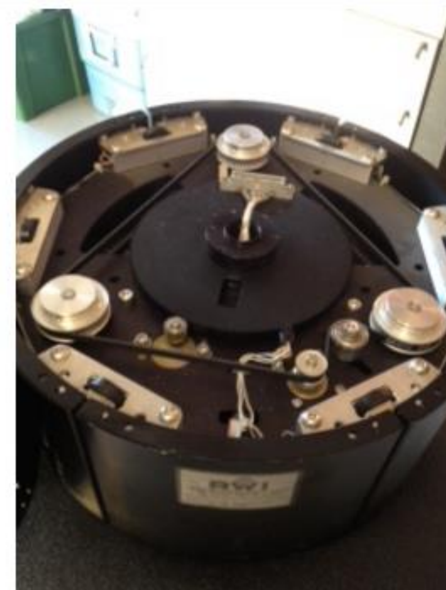
y
v(t)
θ
x
ω(t)



DRIVING
DIRECTION
DRIVE BELT
STEERING
MOTOR
STEER BELT
DRIVING
MOTOR
©www.robotplatform.com
SYNCHRONOUS DRIVE

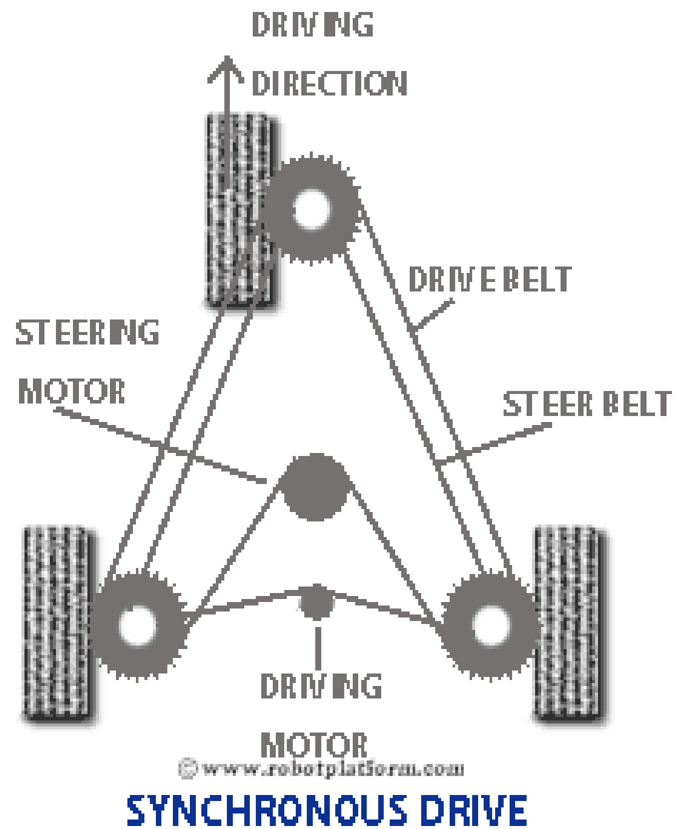
同步驱动





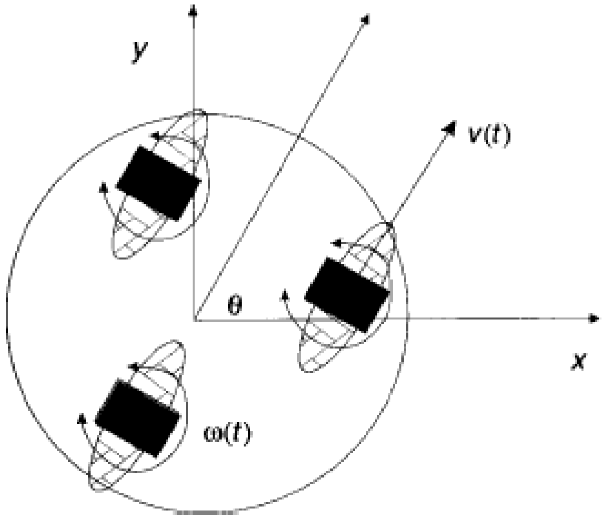
同步驱动

- 所有的轮子转向一致
- 所有的三个车轮指向相同的方向，并以相同的速度转向
  - 这通常通过使用将轮子物理连接在一起的复杂皮带集合来实现
- 车辆控制车轮指向的方向和速度
- 由于所有的车轮保持平行，同步驱动总是围绕机器人的中心旋转
- 同步驱动机器人能够直接控制姿态的姿态角θ。



同步驱动

- 控制变量(独立)
  - v(t), w(t)



$$x(t) = \int_0^t v(\sigma)\cos(\theta(\sigma))d\sigma$$

$$y(t) = \int_0^t v(\sigma)\sin(\theta(\sigma))d\sigma$$

$$\theta(t) = \int_0^t w(\sigma)d\sigma$$

- ICC 总是在无穷处
- 改变轮子的转向来改变ICC的方向

同步驱动

- 特例:
  - v(t)=0, w(t)=w 在Δt内,
    机器人旋转w Δt .
  - v(t)=v, w(t)=0 在 Δt 内,
    机器人平移 v Δt.

总结

- 什么是机器人?
- 机器人的类型
- 移动机器人的移动方式
  - 5 种
- 轮式移动机器人的运动学模型

- 背景学习（思考）
  - 市场?
  - 相似产品?
  - 技术内容?

作业：写出两轮差动小车的运动学模型