第一章 线性规划

谢秉磊

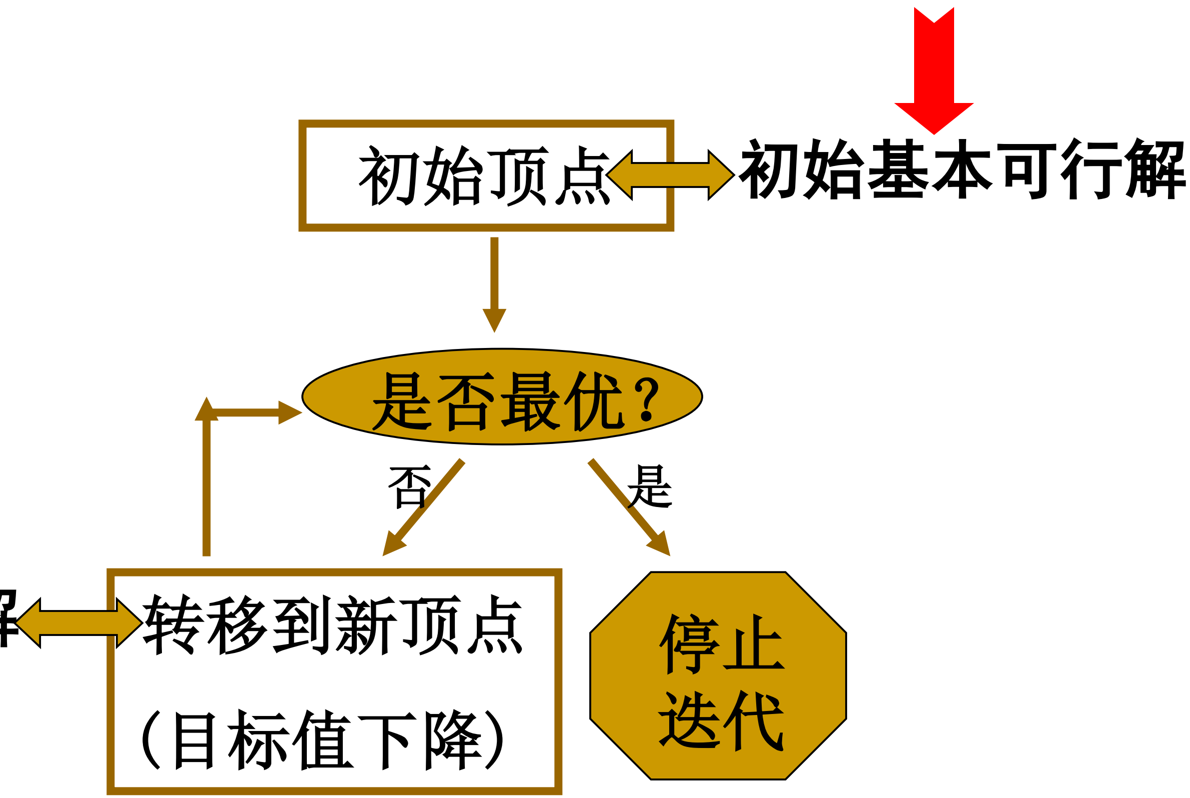
第一章 线性规划

第四节 单纯形法

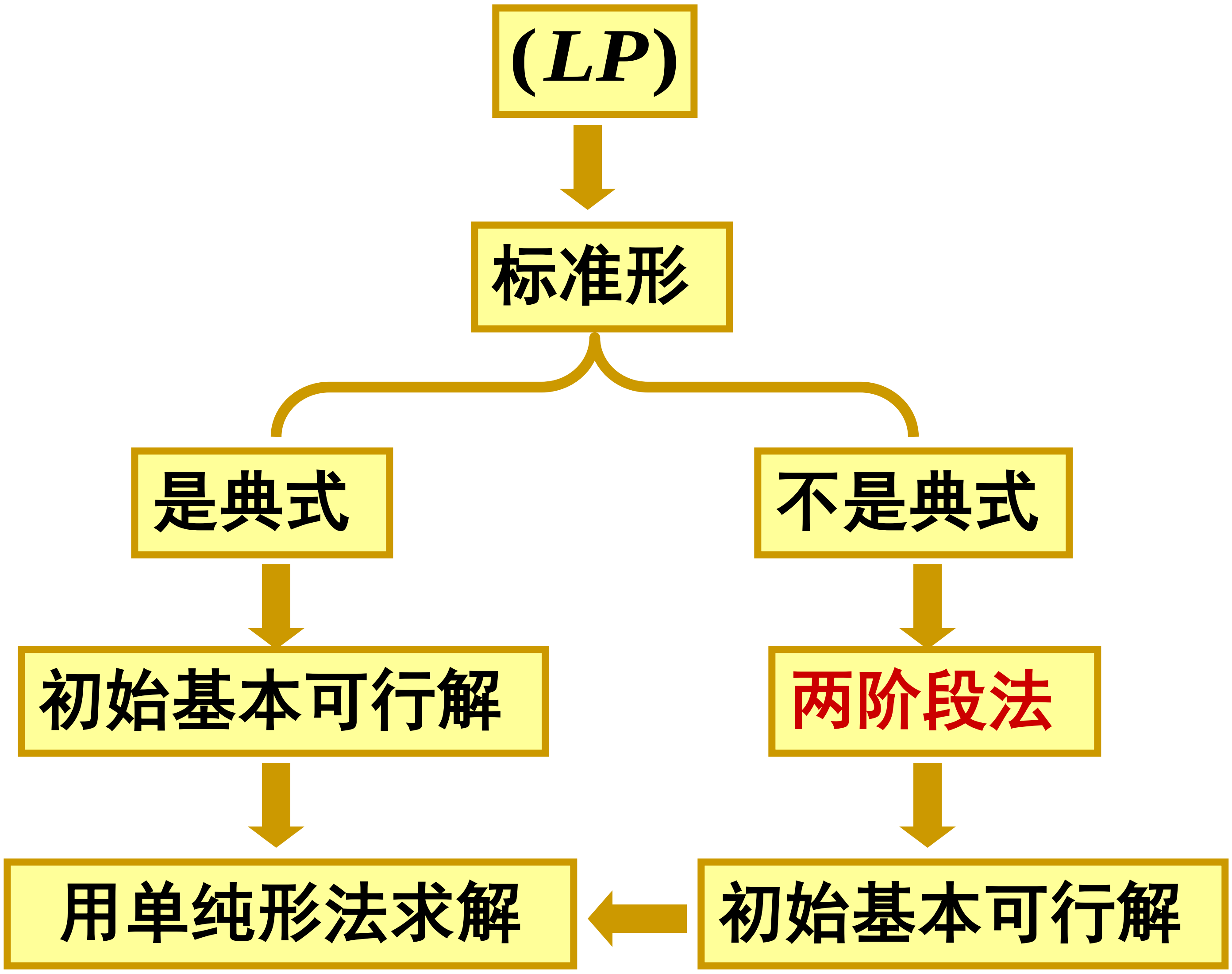
- 典式
- 迭代原理
- 单纯形法举例
- 两阶段法

四. 两阶段法：

单纯形法的迭代原理：



何时使用两阶段法：



例1−11

$$\max S = x_1 + 3x_2 + 4x_3 \qquad \min(-S) = -x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 \le 10 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 5 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3 \end{cases} \xrightarrow{\text{标准形}} \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + x_4 = 10 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 5 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

$\Downarrow$

以 x_4, x_5 为基变量的典式

$\Downarrow$

$$X^0 = (0,0,0,10,5)^T$$

$\Downarrow$

用**单纯形法**求解

注意：还有很多标准形不是典式

例：

$$\min S = 4x_1 + x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3 \end{cases} \longrightarrow \text{用}\textbf{两阶段法}\text{求解}$$

两阶段法的思想：

两阶段法：

第一阶段：建立辅助(LP)，求出原(LP)的一个初始基本可行解。

第二阶段：再用单纯形法去求原(LP)的最优解。

第一阶段：建立辅助(LP)，求原(LP)的一个初始基本可行解。

原(LP) → 辅助(LP) $\min Z=\sum_{i=1}^{m} y_i$

$\min S = CX$

$AX=b$

$X \geq 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + y_m = b_m \\ x_j \geq 0, j=1,2,\cdots n \\ y_i \geq 0, i=1,2,\cdots m \end{cases}$$

→ 人工变量

$\min Z=\sum_{i=1}^{m} y_i$

$AX+Y=b$

$X \geq 0, Y \geq 0$

典式 $X^0=(0,0,\cdots,0,b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$

用单纯形法求解

辅助(LP)

$$\min Z=\sum_{i=1}^{m} y_i \quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+y_1=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+y_2=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+y_m=b_m \\ x_j\ge 0,\ j=1,2,\cdots n,\ y_i\ge 0,\ i=1,2,\cdots m \end{cases}$$

$y_{0j}=c_j-C_BB^{-1}p_j$

$y_{00}=C_BB^{-1}b$

			0	0		0	1	1		1
			x_1	x_2	$\cdots$	x_n	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
C_B	y_{0j}	$-\sum_{i=1}^{m} b_i$	$-\sum_{i=1}^{m} a_{i1}$	$-\sum_{i=1}^{m} a_{i2}$		$-\sum_{i=1}^{m} a_{in}$	0	0	$\cdots$	0
1	y_1	b_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0
1	y_2	b_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0
	$\vdots$	$\vdots$								
1	y_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1

初始单纯形表

用单纯形法求得辅助问题的最优解。

例1-13 求解线性规划问题：

$$y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \geq 0$$

$$\min S = 4x_1 + x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

第一阶段

$$\xrightarrow{\text{辅助}(LP)}$$

$$\min Z = y_1 + y_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + y_1 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + y_2 = 3 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3 \\ y_j \geq 0, j = 1,2 \end{cases}$$

辅助 (LP) 单纯形表

			0	0	0	1	1
			x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
C_B	X_B	-7	-5	-4	-3	0	0
1	y_1	4	2	1	2	1	0
1	y_2	3	3	3	1	0	1

辅助(LP) $\min Z=\sum_{i=1}^{m} y_i$

$$AX+Y=b$$

$$X\geq 0, Y\geq 0$$

设辅助(LP)的最

$Y^*=(y_1^*, y_2^*, \cdots$

则 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^* \geq 0$

原(LP)

$$\min S=CX$$

$$AX=b$$

$$X\geq 0$$

辅助(LP)的最优解与原(LP)的初始基本可行解的关系：

1) 若 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^* > 0$，则原$(LP)$无可行解。

反证法：

若原(LP)有可行解 $\overline{X}$，则 $A\overline{X}=b, \overline{X}\geq 0$

$\therefore \begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{X} \\ 0 \end{pmatrix}$ 是辅助(LP)的可行解。

而$0=\sum_{i=1}^{m} \overline{y}_i = \overline{Z} < Z^*$，矛盾。所以原$(LP)$无可行解。

辅助(LP) $\min Z=\sum_{i=1}^{m} y_i$

$AX+Y=b$

$X\ge 0, Y\ge 0$

设辅助(LP)的最

$Y^*=(y_1^*, y_2^*, \cdots$

则 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^* \ge 0$

原(LP)

$\min S=CX$

$AX=b$

$X\ge 0$

辅助(LP)的最优解与原(LP)的初始基本可行解的关系：

1) 若 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^* > 0$，原$(LP)$无可行解。

2) 若 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^* = 0$，可得到原$(LP)$的一个初始基本可行解。

$\because$ 每个$y_i^* \ge 0$ $\therefore$ $y_i^*=0, i=1,2,\cdots,m$，即$Y^*=0$

$\therefore AX^*+Y^*=b$ 且$X^*\ge 0$ $\longrightarrow$ $AX^*=b$, $X^*\ge 0$ $\longrightarrow$ X^*是原(LP)的可行解。

辅助(LP) $\min Z=\sum_{i=1}^{m} y_i$

$$AX+Y=b$$

$$X\geq 0, Y\geq 0$$

设辅助(LP)的最优解为$\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix}$

$Y^*=(y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*)^T$

则 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^* \geq 0$

辅助(LP)的最优解与原(LP)的初始基本可行解的关系：

1) 若 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^* > 0$， 原$(LP)$无可行解。

2) 若 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^* = 0$, 可得到原$(LP)$的一个初始基本可行解。

1° 在辅助(LP)的最优解 $\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix}$ 中， 若 $y_i^*=0, i=1,2,\cdots,m$

都是非基变量，则m个基变量都在中 X^*，

$\therefore X^*$是原(LP)的初始基本可行解。

2) 若 $Z^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* = 0$，则可得到原($LP$)的一个初始基本可行解

1° 在辅助(LP)的最优解 $\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix}$ 中，若 $y_i^* = 0, i = 1, 2, \cdots, m$ 都是非基变量，则m个基变量都在中 X^*，

$\therefore X^*$ 是原(LP)的初始基本可行解。

			x_1	x_2	$\cdots$	x_n	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
C_B	y_{0j}	$-\sum_{i=1}^{m} b_i$	$-\sum_{i=1}^{m} a_{i1}$	$-\sum_{i=1}^{m} a_{i2}$		$-\sum_{i=1}^{m} a_{in}$	0	0	$\cdots$	0
$x_m \rightarrow$	y_1	b_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0
$x_1 \rightarrow$	y_2	b_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0
	$\vdots$	$\vdots$								
$x_2 \rightarrow$	y_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1

初始单纯形表

辅助(LP) $\min Z=\sum_{i=1}^{m} y_i$

$AX+Y=b$

$X\ge 0, Y\ge 0$

设辅助(LP)的最优解为$\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix}$

$Y^*=(y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*)^T$

则 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^* \ge 0$

辅助(LP)的最优解与原(LP)的初始基本可行解的关系：

1) 若 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^* > 0$， 原$(LP)$无可行解。

2) 若 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^* = 0$，可得到原$(LP)$的一个初始基本可行解。

2° 在辅助(LP)的最优解$\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix}$中，若有某个$y_i^*=0$仍是基变量，

则可将 y_i 与某个非基变量 $x_j(=0)$ 交换 $(y_{ij}\ne 0)$,

交换后可得到原(LP)的一个退化的初始基本可行解。

辅助(LP)得最优表

$x_j^* = 0$

			x_1	x_2		x_j	x_n	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
	y_{0j}	0	★	★	0	★	★	★	★		★
	x_1	★	★	★	0	★	★	★	★		★
	x_2	★	★	★	0	★	★	★	★		★
x_j →	y_i	$y_i^*=0$	★	★	1	$y_{ij} \neq 0$	★	★	★		★
	x_m	★	★	★	0	★	★	★	★		★

在 $\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix}$ 中，若有某个 $y_i^* = 0$ 仍是基变量，则 X^* 中只有 m-1个基变量，则可将 y_i 与 $x_j (= 0)$ 交换 $(y_{ij} \neq 0)$,交换后可得到原(LP)的一个退化的初始基本可行解。

辅助(LP) $\min Z=\sum y_i$ 设最优解为 $\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix}$

$$AX+Y=b$$
$$X\ge 0, Y\ge 0$$

原(LP)
$$\min S=CX$$
$$AX=b$$
$$X\ge 0$$

辅助(LP)的最优解与原(LP)的初始基本可行解的关系：

1) 若 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^*>0$， 则原$(LP)$无可行解。

2) 若 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^*=0$，则可得到原$(LP)$的一个初始基本可行解。

1°在辅助(LP)的最优解$\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix}$中，若 $y_i^*=0, i=1,2,\cdots,m$

都是非基变量，则 X^* 是原(LP)的初始基本可行解。

2°在辅助(LP)的最优解$\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix}$中，若有某个$y_i^*=0$仍是基变量，

则可将 y_i与某个非基变量 $x_j(=0)$ 交换 $(y_{ij}\ne 0)$,

交换后可得到原(LP)的一个退化的初始基本可行解。

两阶段法的思想：

两阶段法：

第一阶段： 建立辅助(LP)求出原(LP)的一个初始基本可行解

第二阶段： 再用单纯形法去求原(LP)的最优解

主观题 10分

设置

用两阶段法写出下列问题第一阶段的辅助规划模型。

$$\max Z = 3x_1 - x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

第二阶段：用单纯形法去求原(*LP*)的最优解

第二阶段：用单纯形法去求原 (*LP*) 的最优解

		x_1	x_2	x_j	x_n	y_1	y_2	$\cdots$ y_m
y_{0j}	★	★	★	0	★	★	★	★
x_1	★	★	★	0	★	★	★	★
x_2	★	★	★	0	★	★	★	★
x_j	0	★	★	1	★	★	★	★
x_m	★	★	★	0	★	★	★	★

原(*LP*)的初始单纯形表

辅助(*LP*)的最优表(退化)

在辅助 (*LP*) 的最优表中删去人工列及检验数行，补上原 (*LP*)的检验数行，即得到原 (*LP*) 的初始单纯形表(对应初始基本可行解)，再用单纯形法求原 (*LP*) 的最优解。

第二阶段：用单纯形法去求原(LP)的最优解

		x_1	x_2	x_j	x_n
y_{0j}	★	★	★	★	★
x_1	★	★	★	0	★
x_2	★	★	★	0	★
x_j	0	★	★	1	★
x_m	★	★	★	0	★

原(LP)的初始单纯形表

辅助(LP)的最优表（退化）

原(LP)

$$\min S = CX$$
$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

辅助(LP)

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} y_i$$
$$AX + Y = b$$
$$X \geq 0, Y \geq 0$$

$$AX + Y = b$$
$$\downarrow$$
$$AX = b \quad \text{初始表}$$
$$\downarrow$$
$$A'X = b' \quad \text{最优表}$$

例1-13 求解线性规划问题： $y_{0j}=c_j-C_BB^{-1}$ $y_{00}=C_BB^{-1}b$

$$\min S=4x_1+x_2+x_3$$

$$\begin{cases}2x_1+x_2+2x_3=4\\3x_1+3x_2+x_3=3\\x_j\ge 0, j=1,2,3\end{cases}$$

第一阶段

$\xrightarrow{\text{辅助}(LP)}$

$$\min Z=y_1+y_2$$

$$\begin{cases}2x_1+x_2+2x_3+y_1=4\\3x_1+3x_2+x_3+y_2=3\\x_j\ge 0, j=1,2,3\\y_j\ge 0, j=1,2\end{cases}$$

辅助(LP)单纯形表

			0	0	0	1	1
			x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
C_B	X_B	-7	-5	-4	-3	0	0
1	y_1	4	2	1	2	1	0
1	y_2	3	3	3	1	0	1

例1-13　第一阶段　$y_{0j}=c_j-C_BB^{-1}p_j\ge 0$?

初始表		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
X_B	-7	-5	-4	-3	0	0
y_1	4	2	1	2	1	0
x_1	1	$\boxed{1}$	1	$1/3$	0	$1/3$

$\times\frac{1}{3}$

初始表 ⟶ 表1 ⟶ 表2 ⟶ 最优表

X^0　X^1　X^2　X^*

例1-13　**第一阶段**

		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
X_B	-7	-5	-4	-3	0	0
y_1	2	0	-1	$4/3$	1	$-2/3$
x_1	1	1	1	$1/3$	0	$1/3$

-2

例1-13 第一阶段

		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
X_B	-2	0	1	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
y_1	2	0	-1	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$
x_1	1	1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

5

例1-13 第一阶段

$$y_{0j}=c_j-C_BB^{-1}p_j\geq 0$$

表1		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
X_B	**-2**	**0**	**1**	$-\frac{4}{3}$	**0**	$\frac{5}{3}$	
x_3	$\frac{3}{2}$	**0**	$-\frac{3}{4}$	$\boxed{1}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\times\frac{3}{4}$
x_1	**1**	**1**	**1**	$\frac{1}{3}$	**0**	$\frac{1}{3}$	

例1-13　**第一阶段**

表1		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
X_B	-2	0	1	$-4/3$	0	$5/3$
x_3	$3/2$	0	$-3/4$	1	$3/4$	$-1/2$
x_1	$1/2$	1	$5/4$	0	$-1/4$	$1/2$

$\times -\frac{1}{3}$

例1–13 第一阶段

表1		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
X_B	0	0	0	0	1	1
x_3	$3/2$	0	$-3/4$	1	$3/4$	$-1/2$
x_1	$1/2$	1	$5/4$	0	$-1/4$	$1/2$

$\times \frac{4}{3}$

例1-13 第一阶段 $y_{0j}=c_j-($

$$\min S = 4x_1 + x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ \quad , j = 1,2,3 \end{cases}$$

最优表		x_1	x_2	x_3	y_1
X_B					
x_3	$3/2$	0	$-3/4$	1	
x_1	$1/2$	1	$5/4$	0	

$$\min Z = y_1 + y_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + y_1 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + y_2 = 3 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3 \\ y_j \geq 0, j = 1,2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0x_1 - \frac{3}{4}x_2 + x_3 = \frac{3}{2} \\ x_1 + \frac{5}{4}x_2 + 0x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

例1-13　**第二阶段**　$y_{0j}=c_j-C_BB^{-1}p_j$　$y_{00}=C_BB^{-1}b$

			4	1	1		
	初始表		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
	X_B	$-\frac{7}{2}$ 0	0	$-\frac{13}{4}$ 0	0	1	1
1	x_3	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$
4	x_1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
		$B^{-1}b$	$B^{-1}p_1$	$B^{-1}p_2$	$B^{-1}p_3$		

在上面最优表中删去人工列和
添加原(LP)的检验数行，得到
单纯形表。

$$B=(p_3,p_1)=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\qquad B^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\min S=4x_1+x_2+x_3$$

$$\begin{cases}2x_1+x_2+2x_3=4\\ 3x_1+3x_2+x_3=3\\ x_j\ge 0,\ j=1,2,3\end{cases}$$

例1-13 第二阶段 $y_{0j}=c_j-C_B B^{-1}p_j\ge 0$?

初始表		x_1	x_2	x_3
X_B	$-7/2$	0	$-13/4$	0
x_3	$3/2$	0	$-3/4$	1
x_2	$2/5$	$4/5$	1	0

$\times\frac{4}{5}$

例1-13　第二阶段

初始表		x_1	x_2	x_3
X_B	$-\frac{7}{2}$	0	$-\frac{13}{4}$	0
x_3	$\frac{9}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	1
x_2	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	0

$\times\frac{3}{4}$

例1-13　第二阶段

初始表		x_1	x_2	x_3
X_B	$-11/5$	$13/5$	0	0
x_3	$9/5$	$3/5$	0	1
x_2	$2/5$	$4/5$	1	0

$\times \frac{13}{4}$

例1-13 第二阶段 $y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \geq 0$

最优表		x_1	x_2	x_3
x_B	$-11/5$	$13/5$	0	0
x_3	$9/5$	$3/5$	0	1
x_2	$2/5$	$4/5$	1	0

得到原(LP)的最优解：

$$X^* = (0, 2/5, 9/5)^T, Z^* = 11/5$$

$$\min S = 4x_1 + x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

例1-14 求解线性规划问题：$y_{0j}=c_j-C_BB^{-1}p_j$ $y_{00}=C_BB^{-1}b$

$\min S = x_1+2x_2+3x_3$ 第一阶段 $\min Z = y_1+y_2$

$$\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=4 \\ 4x_1-9x_2+14x_3=16 \\ x_j\ge 0, j=1,2,3 \end{cases} \xrightarrow{\text{辅助}(LP)} \begin{cases} x_1-2x_2+4x_3+y_1=4 \\ 4x_1-9x_2+14x_3+y_2=16 \\ x_j\ge 0, j=1,2,3 \\ y_j\ge 0, j=1,2 \end{cases}$$

辅助(LP)单纯形表

			0	0	0	1	1
初始表			x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
C_B	X_B	-20	-5	11	-18	0	0
1	y_1	4	1	-2	4	1	0
1	y_2	16	4	-9	14	0	1

例1-14 第一阶段 $y_{0j}=c_j-C_B B^{-1}p_j\geq 0$?

初始表		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
X_B	0	0	1	2	5	0
x_1	4	1	-2	4	1	0
y_2	16	4	-9	14	0	1

5

例1-14　第一阶段

初始表		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
X_B	0	0	1	2	5	0
x_1	4	1	-2	4	1	0
y_2	0	0	-1	-2	-4	1

-4

例1-14　第一阶段 $y_{0j}=c_j-C_BB^{-1}p_j\geq 0$

最优表		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
X_B	0	0	1	2	5	0
x_1	4	1	-2	4	1	0
x_2	0	0	1	2	4	-1

-1

已得辅助(*LP*)的最优表，$X^*=(4,0,0,0,0)^T, Z^*=0$

但人工变量 $y_2=0$ 仍是基变量，为使它离基，y_2 所在第二行中的非零元均可做主元，如-1为主元，用 x_2 替换 y_2 为基变量。

例1-14 第一阶段

最优表		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
X_B	0	0	1	2	5	0
x_1	4	1	0	8	9	-2
x_2	0	0	1	2	4	-1

2

例1-14　第一阶段

最优表		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
X_B	0	0	0	0	1	1
x_1	4	1	0	8	9	-2
x_2	0	0	1	2	4	-1

-1

例1-14　第一阶段

最优表		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
X_B	0	0	0	0	1	1
x_1	4	1	0	8	9	-2
x_2	0	0	1	2	4	-1

$$X^* = (\underline{4},\underline{0},0,0,0)^T, Z^* = 0$$

得到原(LP)的退化的初始基本可行解 $X^0 = (4,0,0)^T$

例1-14　第二阶段

最优表		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
X_B	0	0	0	0	1	1
x_1	4	1	0	8	9	-2
x_2	0	0	1	2	4	-1

在上面最优表中删去人工列和检验数行，

例1-14　第二阶段　$y_{0j}=c_j-C_BB^{-1}p_j$　$y_{00}=C_BB^{-1}b$

			1	2	3
	初始表		x_1	x_2	x_3
	x_B	-4	0	0	-9
1	x_1	4	1	0	8
2	x_2	0	0	1	2

在上面最优表中删去人工列

添加原(LP)的检验数行，得

单纯形表。

$X^0=(\underline{4},\underline{0},0)^T$ (退化解)　$S^0=$

$$\min S=x_1+2x_2+3x_3$$

$$\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=4 \\ 4x_1-9x_2+14x_3=16 \\ x_j\geq 0, j=1,2,3 \end{cases}$$

例1-14　第二阶段　$y_{0j}=c_j-C_BB^{-1}p_j\geq 0$?

初始表		x_1	x_2	x_3	
X_B	-4	0	0	-9	
x_1	4	1	0	8	
x_3	0	0	1	2	$\theta=0$

例1-14　第二阶段

初始表		x_1	x_2	x_3
X_B	-4	0	0	-9
x_1	4	1	0	8
x_3	0	0	$\frac{1}{2}$	1

$\times \frac{1}{2}$

例1-14　第二阶段

初始表		x_1	x_2	x_3
X_B	-4	0	0	-9
x_1	4	1	-4	0
x_3	0	0	$1/2$	1

-8

例1-14　第二阶段

初始表		x_1	x_2	x_3
X_B	-4	0	$9/2$	0
x_1	4	1	-4	0
x_3	0	0	$1/2$	1

9

例1-14　第二阶段 $y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \geq 0$ √

最优表		x_1	x_2	x_3
x_B	-4	0	$9/2$	0
x_1	4	1	-4	0
x_3	0	0	$1/2$	1

得到原(LP)的最优解：$X^* = (4,0,0)^T$(退化解)

$$S^* = 4$$

例1-14　第二阶段

初始表		x_1	x_2	x_3	
X_B	-4	0	0	-9	
x_1	4	1	0	8	
x_2	0	0	1	2	$\theta=0$

原(LP)的初始单纯形表。$X^0=(4,0,0)^T$(退化解)

$$S^1=y_{00}+y_{03}\theta=4-9\theta=4 \qquad S^0=4$$

在退化情况下,负检验数相应的非基变量进基得到的新的基本可行解目标值未必一定下降。

判断当前基本可行解是否是最优解：　充分但不必要

1)若$C-C_BB^{-1}A\geq 0$或$C_N-C_BB^{-1}N\geq 0$,

即非基变量x_j的检验数$y_{0j}=c_j-C_BB^{-1}p_j$都≥ 0

则 $X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ ≥ 0 是最优解。

$$S^1=y_{00}+y_{0q}\theta\begin{cases} <y_{00}, & \theta>0 \\ =y_{00}, & \theta=0 \end{cases}$$

2)若有某些检验数$y_{0j}<0$,例如：$y_{0q}<0$, $(m+1\leq q\leq n)$,

则 $X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ >0 不是最优解。（非退化情形）$\theta>0$

3)若有某些检验数 $y_{0j}<0$, 例如：$y_{0q}<0$, $(m+1\leq q\leq n)$,

$X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ ≥ 0 也有可能是最优解。（退化情形）

第一章 线性规划

第四节 单纯形法

- 典式
- 迭代原理
- 单纯形法举例
- 两阶段法

作业：第1章　7（1）（3）/