第一章 线性规划

谢秉磊

第一章 线性规划

第三节 图解法及几何理论

- 图解法
- 线性规划问题解的几种情况
- 几何理论

一. 图解法：（只适用于二维的问题）

例1：

$$\max S = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1. 画出可行域
2. 画出目标函数等值线
3. 移动等值线求最优解

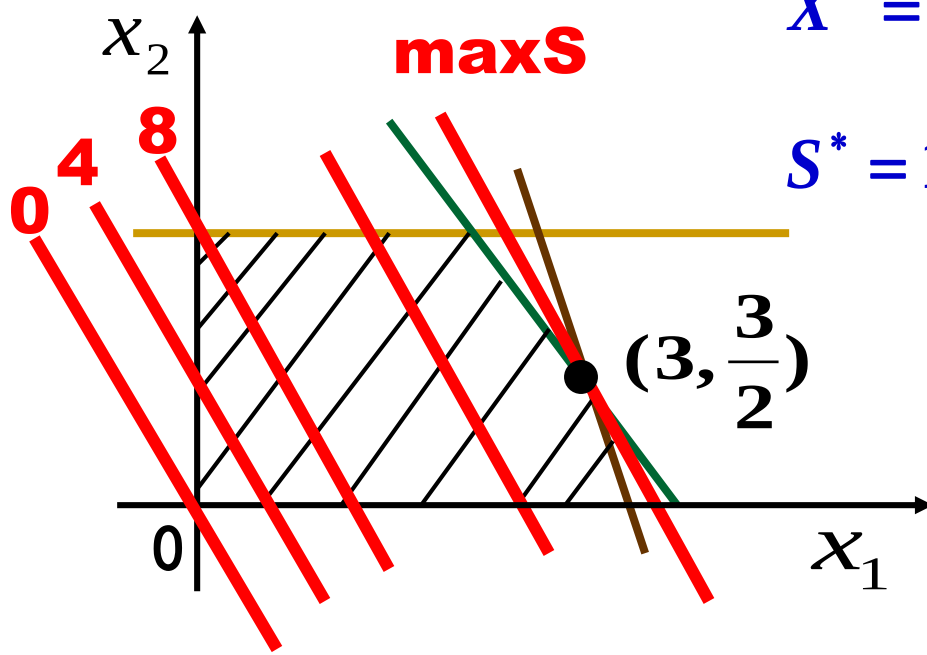
$$S = 3x_1 + 4x_2$$

$$\Downarrow$$

$$x_2 = -\frac{3}{4}x_1 + \frac{S}{4}$$

$$X^* = (3, \frac{3}{2})^T$$

$$S^* = 15$$



二. 线性规划问题解的几种情况：

1. 有唯一的最优解

例2:

$$\max S = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

例1: $\max S = 3x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

直线

尤解

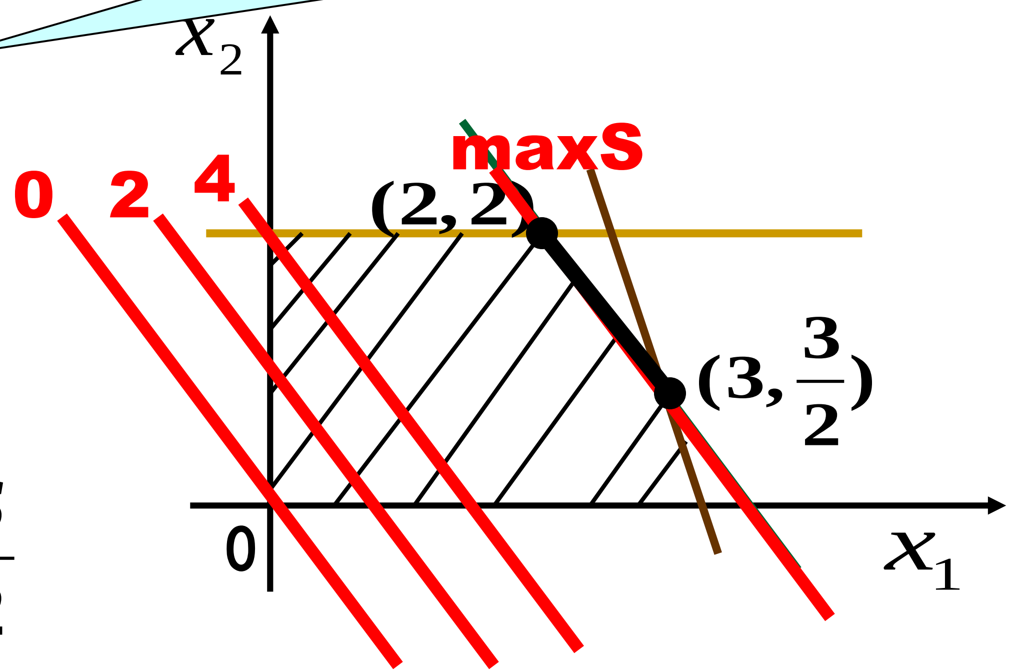
有可行解

$$S^* = 6$$

$$S = x_1 + 2x_2$$

⇓

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{S}{2}$$



二. 线性规划问题解的几种情况：

1. 有唯一的最优解

2. 有无穷多个最优解

例3：

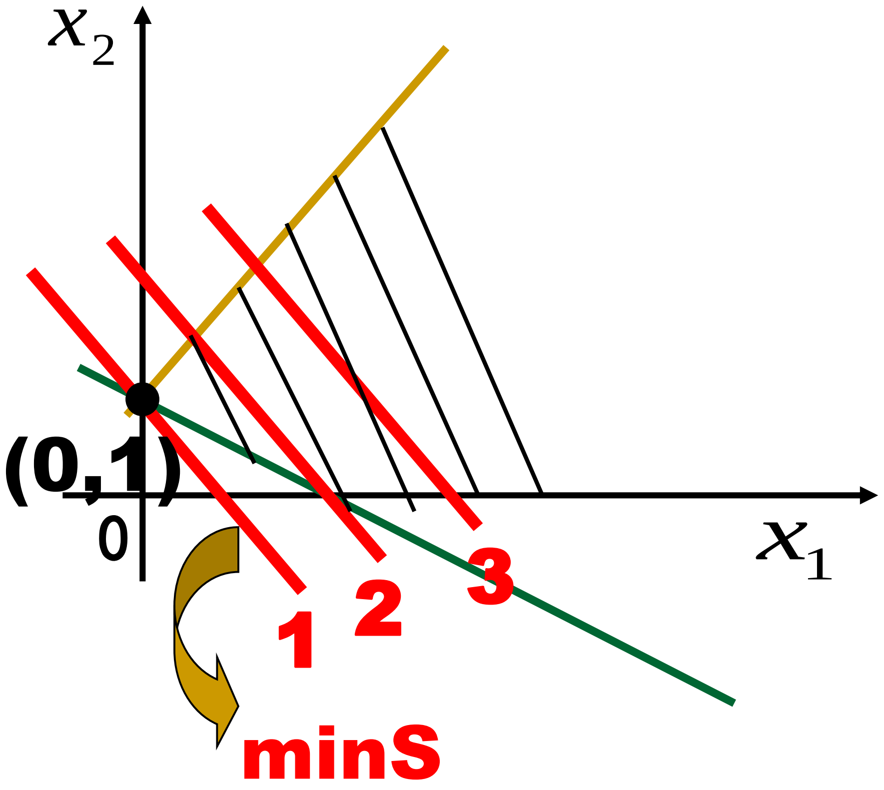
$$\min S = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$S = x_1 + x_2$$

$$\Downarrow$$

$$x_2 = -x_1 + S$$



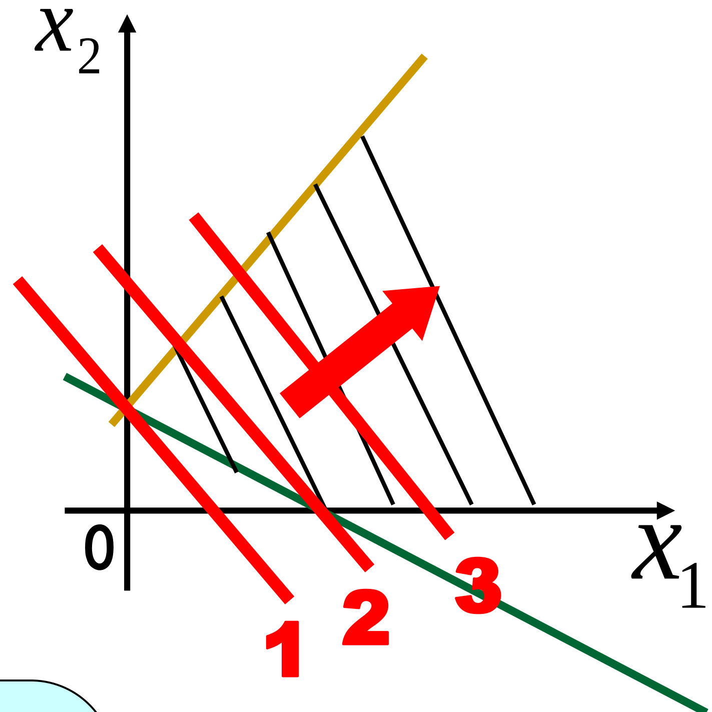
$$X^* = (0, 1)^T$$

$$S^* = 1$$

例4：

$$\max S = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



例3： $\min S = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max S = +\infty$$

称为**没有有限的最优解**

二. 线性规划问题解的几种情况：

1. 有唯一的最优解

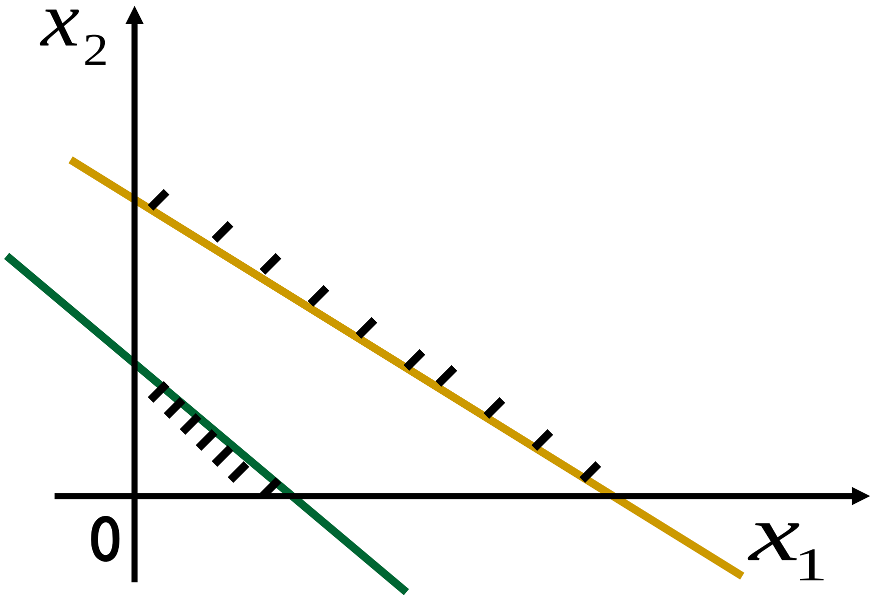
2. 有无穷多个最优解

3. 没有有限的最优解

例5：

$$\min S = 3x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



$D =$ 空集

没有可行解，

故没有最优解。

二. 线性规划问题解的几种情况：

1. 有唯一的最优解

2. 有无穷多个最优解

3. 没有有限的最优解

4. 没有可行解，故没有最优解

设置

用图解法求解LP问题

$$\max Z = 34x_1 + 40x_2$$

$$4x_1 + 6x_2 \le 48$$

$$2x_1 + 2x_2 \le 18$$

$$2x_1 + x_2 \le 16$$

$$x_1、x_2 \ge 0$$

作答

第一章 线性规划

第三节 图解法及几何理论

- 图解法
- 线性规划问题解的几种情况
- 几何理论

三. 几何理论：

凸组合定义： 设$X_1, X_2, \cdots, X_k$是R^n中已知的k个点，有$X \in R^n$

$\exists$非负$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$，使得$X = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i$，且$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

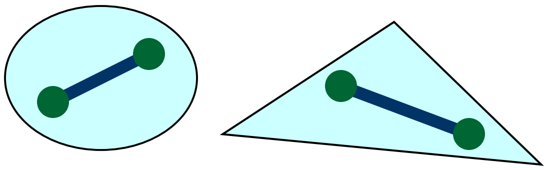
则X是$X_1, X_2, \cdots, X_k$的凸组合。

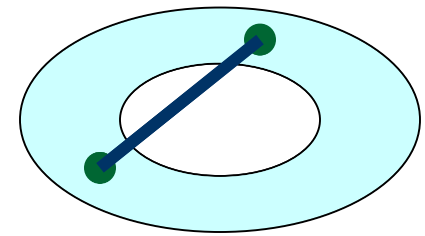
注释： X_1和X_2的凸组合的全体就是连接X_1和X_2两点的线段

凸集定义： 设点集 $D \subset R^n$. 如果对于任意两点$X_1, X_2 \in D$，他们的凸组合都属于D，则D称为凸集

三. 几何理论：

凸集的几何定义： 若一个集合的任意两点的连线（直线）仍在这个集合中，则称这个集合为凸集。



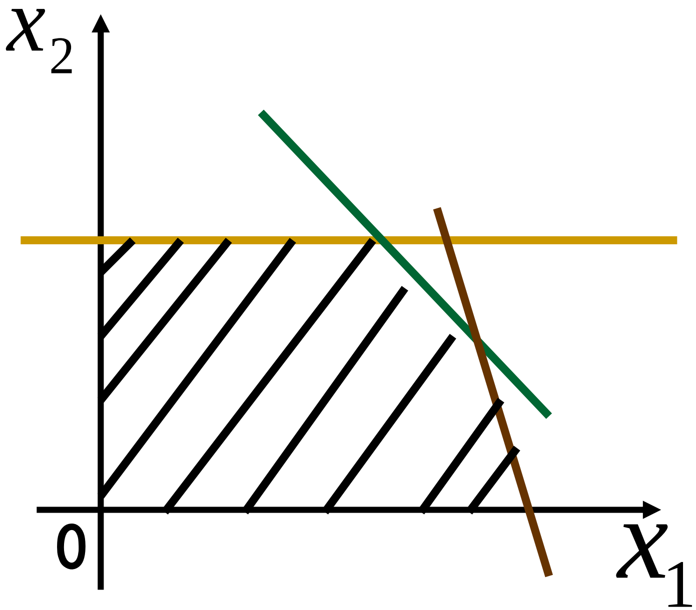


极点的定义：

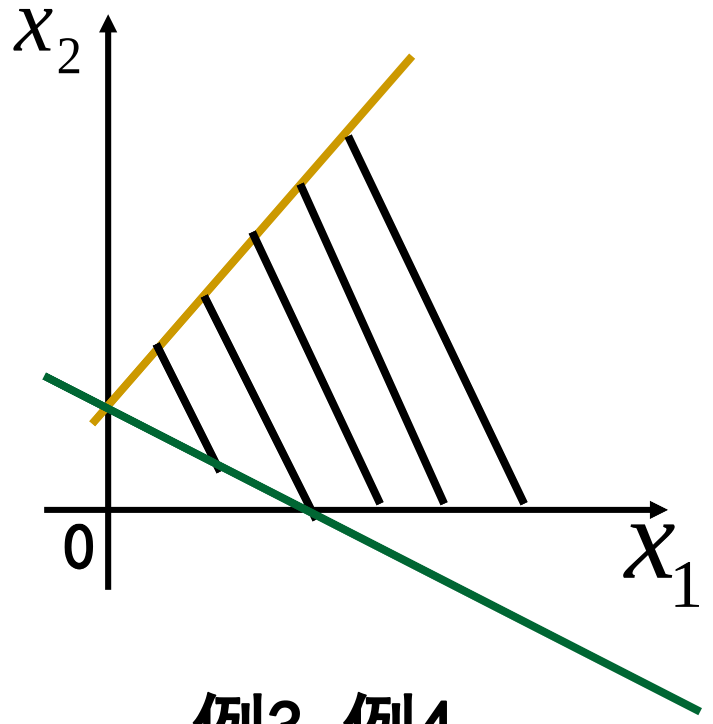
设X是凸集D中的一点，如果X不能表示为D中两个相异点的凸组合，则X为D的极点（又称顶点）。

结论：

1. (LP)的可行域是凸集。



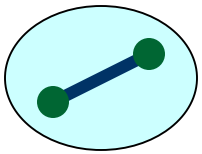
例1 例2

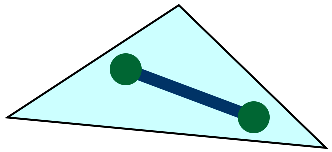


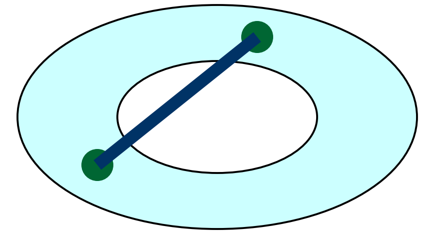
例3 例4

三. 几何理论：

凸集的几何定义：若一个集合的任意两点的连线（直线）仍在这个集合中，则称这个集合为凸集。

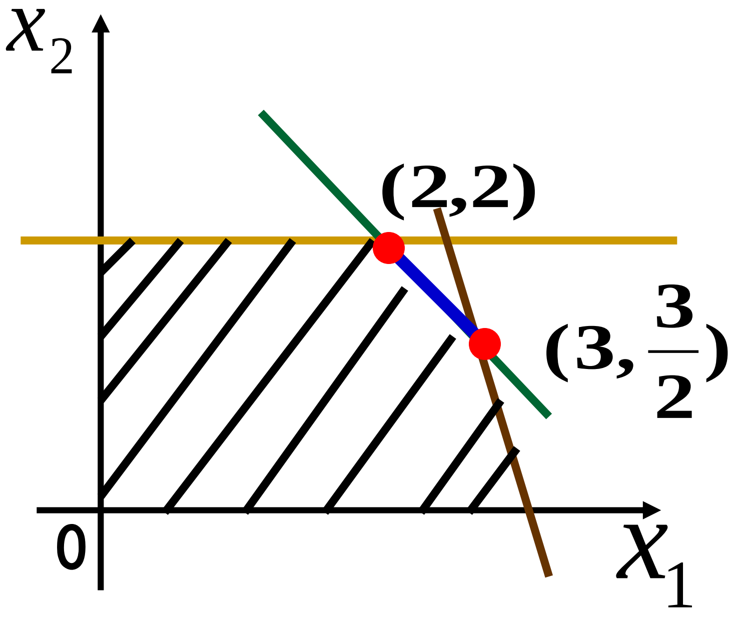






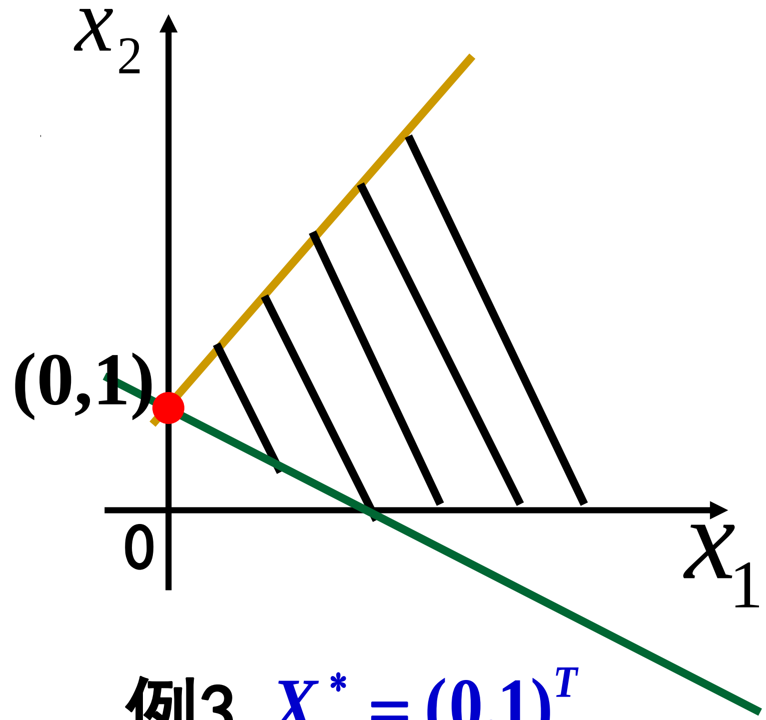
结论：

1. (***LP***)的可行域是为凸集。
2. (***LP***)若有有限的最优解，则一定可以在可行域的某个顶点上达到。



例1 $X^* = (3,\frac{3}{2})^T$

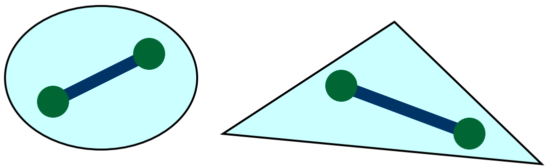
例2 $X^* =$ 两点间线段上所有可行解

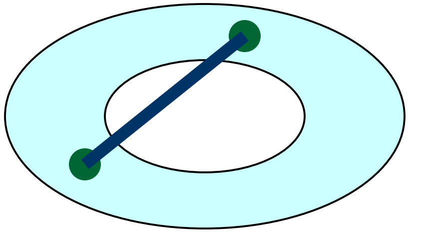


例3 $X^* = (0,1)^T$

三. 几何理论：

凸集的几何定义： 若一个集合的任意两点的连线（直线）仍在这个集合中，则称这个集合为凸集。





结论：

1. (LP)的可行域是为凸集。
2. (LP)若有有限的最优解，则一定可以在可行域的某个顶点上达到。

定理1-3（等价定理）(LP)可行域的顶点等价于线性规划的基本可行解。

证明：必要性（反证法）

设X是可行域D的顶点，非零分量为前k个，有

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots + x_kP_k = b$$

$P_1,P_2,\cdots,P_k$线性无关？

若$P_1, P_2, \cdots, P_k$线性相关，$\exists$不全为零$\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k$,

$$\delta_1P_1 + \delta_2P_2 + \cdots + \delta_kP_k = 0.$$

令$\delta=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_k,0,\cdots,0)^T$，有$A\delta=0.$

设$\varepsilon=\min\{\frac{x_i}{|\delta_i|}\,|\,\delta_i\neq 0\}$，构造 $\begin{cases} X_1=X+\varepsilon\delta\geq 0 \\ X_2=X-\varepsilon\delta\geq 0 \end{cases}$

得到：$X=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$，与X是顶点矛盾。

$P_1,P_2,\cdots,P_k$线性无关 $\longrightarrow$ X是基本可行解

引理1-1

三. 几何理论：

定理1-3（等价定理）(LP)可行域的顶点等价于线性规划的基本可行解。

推论：

1. 若凸集D非空，则它至少有一个极点。

2. 如果一个线性规划问题有有限个最优解，则必有一个最优解是D的极点。

三. 几何理论：

定理1-4 设凸集D非空有界，则$X \in D$的充要条件是：X可以表示为D的顶点的凸组合。

定理1-5 目标函数CX一定可以在(LP)非空有界集D的某一顶点处达到最小。

证明： 设$X_1, X_2, \cdots, X_r$是D的全部极点，对于$\forall X \in D$

$$X = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i, \lambda_i \geq 0, i = 1,2,\cdots,r$$

令$CX_s = \min\{CX_i, i = 1,2,\cdots,r\}$,

$$CX = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i CX_i \geq \sum_{i=1}^{r} \lambda_i CX_s = CX_s。$$

第一章 线性规划

第三节 图解法及几何理论

- 图解法
- 线性规划问题解的几种情况
- 几何理论

作业：第1章 **5(1)(2)(6)**