第二章 对偶理论

谢秉磊

第二章 对偶理论

第一节 对偶规划

- 对偶问题的提出
- 对偶规划的定义

一. 对偶问题的提出：

例：A工厂在计划期内要安排生产甲乙两种产品，它们需要在四种不同的设备上加工。加工工时数、可得利润、总工时数均列于下表。

问：应如何安排生产才能获利最大?

	A	B	C	D	利润
甲	2	1	4	0	20
乙	2	2	0	4	30
总工时数	12	8	16	12	

建立数学模型： 设 x_1, x_2 为计划期内甲、乙的产量

问题:求利润最大 $\max S = 20x_1 + 30x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 + 0x_2 \le 16 \\ 0x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_j \ge 0, j = 1,2 \end{cases}$$

	A	B	C	D	利润
甲	2	1	4	0	20
乙	2	2	0	4	30
总工时数	12	8	16	12	

对偶问题： 不自己生产甲、乙两种产品，而将生产设备的总工时用于出租，收取租金。

对偶规划：

$$\min Z = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \geq 20 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \geq 30 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

设 y_1, y_2, y_3, y_4 为设备 A, B, C, D 每工时的价格

	A	B	C	D	利润
甲	2	1	4	0	20
乙	2	2	0	4	30
总工时数	12	8	16	12	

对偶理论2-1

原规划(*P*)：

$$\max S = 20x_1 + 30x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 & y_1 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 & y_2 \\ 4x_1 + 0x_2 \le 16 & y_3 \\ 0x_1 + 4x_2 \le 12 & y_4 \\ x_j \ge 0, j = 1,2 \end{cases}$$

对偶规划(*D*)：

$$\min Z = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \ge 20 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \ge 30 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

y_1, y_2, y_3, y_4 称为**对偶变量**

	A (y_1)	B (y_2)	C (y_3)	D (y_4)	利润
甲	2	1	4	0	20
乙	2	2	0	4	30
总工时数	12	8	16	12	

第二章 对偶理论

第一节 对偶规划

- 对偶问题的提出
- 对偶规划的定义

二. 对偶规划的定义：

原规划(*P*)：

$$\max S = 20x_1 + 30x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 + 0x_2 \le 16 \\ 0x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_j \ge 0, j = 1,2 \end{cases}$$

对偶规划(*D*)：

$$\min Z = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \ge 20 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \ge 30 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

(*P*)与(*D*)的对应关系：

1 约束条件的系数矩阵是转置关系且不等号反向

2 约束右端项 $\rightleftharpoons$ 目标函数的系数

3 求 $\max S$ $\rightleftharpoons$ 求 $\min Z$

写出对偶规划的向量形式：

$$\max S = 20x_1 + 30x_2 \qquad \min Z = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$(P)\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 & y_1 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 & y_2 \\ 4x_1 + 0x_2 \le 16 & y_3 \\ 0x_1 + 4x_2 \le 12 & y_4 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2 & \lambda = (y_1, y_2, y_3, y_4) \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \ge 20 & x_1 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \ge 30 & x_2 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \max S &= CX \\ AX &\le b \\ X &\ge 0 \end{aligned} \quad \xleftrightarrow{\text{对称}} \quad \begin{aligned} \min Z &= \lambda b \\ \lambda A &\ge C \\ \lambda &\ge 0 \end{aligned}} = (y_1, y_2, y_3, y_4)\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix} \quad C = (20,30) \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$(y_1, y_2, y_3, y_4)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \ge (20,30)$$

与不等式约束条件相对应的对偶变量取值非负

对偶规划的定义：

定义2-1（对偶关系） ⟶ 对偶关系的对称形式

$$(P)\quad \min S = CX \qquad \xleftrightarrow{\text{对称}} \qquad (D)\quad \max Z = \lambda b$$

$$AX \geq b \qquad\qquad \lambda A \leq C$$

$$X \geq 0 \qquad\qquad \lambda \geq 0$$ 对偶变量

(P)与(D)的对应关系：

1 约束条件的系数矩阵是转置关系且不等号反向

2 约束右端项 $\rightleftarrows$ 目标函数的系数

3 求$\max S$ $\rightleftarrows$ 求$\min Z$

写对偶规划的方法：$(LP) \longrightarrow$

$$(P)\quad \min S = CX,\quad AX \geq b,\quad X \geq 0 \longrightarrow (D)\quad \max Z = \lambda b,\quad \lambda A \leq C,\quad \lambda \geq 0$$

例：

对偶关系的非对称形式

$$(P)\quad \begin{aligned} &\min S = CX \\ &AX = b \\ &X \geq 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} AX \geq b \\ AX \leq b \end{cases} \qquad (D)\quad \begin{aligned} &\max Z = \lambda b \\ &\lambda A \leq C \end{aligned}$$

$$\min S = CX \quad \begin{cases} AX \geq b \\ AX \geq -b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$\min S = CX \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} X \geq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$b \longrightarrow u(m维)$

$-b \longrightarrow v(m维)$

$\xrightarrow{(u,v)(2m维)}$

$$\max Z = (u,v)\begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} = ub - vb = (u-v)b$$

$$(u,v)\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \leq C \longrightarrow uA - vA \leq C$$

$$(u-v)A \leq C$$

$$(u,v) \geq 0 \qquad \lambda A \leq C$$

令$u - v = \lambda(m维)$

虽然 $u,v \geq 0$

但 λ 为自由变量

与等式约束条件相对应的对偶变量为自由变量

写对偶规划的原则：

(P)

$$\min S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ge b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \cdots, x_n \text{为自由变量} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \min S = CX \\ AX \ge b \\ X \ge 0 \end{matrix} \quad \xleftrightarrow{\text{对称}} \quad \begin{matrix} \max Z = \lambda b \\ \lambda A \le C \\ \lambda \ge 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \min S = CX \\ AX = b \\ X \ge 0 \end{matrix} \quad \xleftrightarrow{\text{非对称}} \quad \begin{matrix} \max Z = \lambda b \\ \lambda A \le C \end{matrix}$$

	$x_1 \ge 0$	$x_2 \ge 0$	$\cdots$	x_n自	
$\lambda_1 \ge 0$	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	$\ge b_1$
$\lambda_2 \ge 0$	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	$\ge b_2$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
λ_m自	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	$= b_m$
	$\le c_1$	$\le c_2$	$\cdots$	$= c_n$	

(D)

$$\max Z = b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \cdots + b_m\lambda_m$$

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + \cdots + a_{m1}\lambda_m \le c_1 \\ a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{m2}\lambda_m \le c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}\lambda_1 + a_{2n}\lambda_2 + \cdots + a_{mn}\lambda_m = c_n \\ \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \cdots, \lambda_m \text{为自由变量} \end{cases}$$

对偶理论2-1

例2-1：

(P)

$$\min S = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0, x_3\text{自由变量} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 3 \\ -x_1 - 4x_2 - 6x_3 \ge -5 \\ x_1, x_2 \ge 0, x_3\text{自由变量} \end{cases}$$

$$\min S = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

	$x_1 \ge 0$	$x_2 \ge 0$	x_3自	
$\lambda_1 \ge 0$	2	3	5	≥ 2
λ_2自	3	1	7	$=3$
$\lambda_3 \ge 0$	−1	−4	−6	≥ -5
	$\le$ 2	$\le$ 2	$=$ 4	

(D)

$$\max Z = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 5\lambda_3$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 \le 2 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 \le 2 \\ 5\lambda_1 + 7\lambda_2 - 6\lambda_3 = 4 \\ \lambda_1, \lambda_3 \ge 0, \lambda_2\text{自由变量} \end{cases}$$

例：写出下面线性规划的对偶规划

$$\max\ z = 5x_1 + 8x_2 + 10x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 48 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 120 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3 \text{自由} \end{cases}$$

主观题 10分

设置

请写出下面线性规划问题的对偶规划

$$\max S = -x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 \le 5 \\ x_1 - 3x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2\text{为自由变量} \end{cases}$$

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

第二章 对偶理论

第一节 对偶规划

- 对偶问题的提出
- 对偶规划的定义

作业：第2章课后 1（1）（2）（3）