主管
领导
审核
签字

哈尔滨工业大学（深圳）2020/2021 学年秋季学期

高等数学 A（期中）试题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

注意行为规范　　遵守考场纪律

姓名 学号 班号 学院 密 封

一、填空题（每小题 1 分，共 5 小题，满分 5 分）

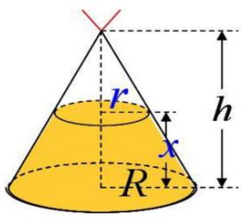
1\. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^{-kn}=\mathrm{e}^{-10}$，则常数 $k=$____________.

2\. 设 n 为正整数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=$____________.

3\. 曲线 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 在 $x=0$ 所对应点处的切线方程为____________.

4\. 已知函数 $f(x)=\ln(3x-2x^2)$，则 $f^{(n)}(x)=$____________.

5\. 有一个底半径为 R cm、高为 h cm 的圆锥容器（如下图所示），今以 $25\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$ 的速度自顶部向容器内注水，则当容器内的水位等于锥高的一半时水面上升的速度为____________.



二、选择题（每小题 1 分，共 5 小题，满分 5 分，每小题中给出的四个选项中只有一个是符合题目要求的，把所选项的字母填在题后的括号内）

1\. “对任给的 $\varepsilon\in(0,1)$ 总存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|\le\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|\le 2\varepsilon$ 成立”是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的（　）

(A) 充分条件，但非必要条件；(B) 必要条件，但非充分条件；
(C) 充分必要条件；　　　　(D) 既非充分条件，又非必要条件。

2. 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin(\pi x)}$ 的可去间断点的个数为（　）

(A) 1； (B) 2； (C) 3； (D) 无穷多个。

3. 设函数 $f(x)=\left(e^x-1\right)\left(e^{2x}-2\right)\cdots\left(e^{nx}-n\right)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$（　）

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$； (B) $(-1)^n(n-1)!$； (C) $(-1)^{n-1}n!$； (D) $(-1)^n n!$。

4. 当 $x\to 0^+$ 时，若 $\left(\ln(1+2x)\right)^\alpha$，$\left(1-\cos x\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的取值范围是（　）

(A) $(2,+\infty)$； (B) $(1,2)$； (C) $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$； (D) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$。

5. 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，当自变量 x 有增量 Δx 时相应的函数增量 $\Delta y=\left(x^2+2e^x\Delta x\right)\Delta x+y\Delta x+\alpha$，其中 α 是当 $\Delta x\to 0$ 时关于 Δx 的高阶无穷小，则当 $x=-1, y=1, \Delta x=0.1$ 时微分 $\mathrm{d}y=$（　）

(A) 0.1； (B) 0.2； (C) $0.1+0.02e^{-1}$； (D) $0.2+0.02e^{-1}$。

三、 (4 分) 确定常数 a,b 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases} b\cos x+(a+1)x, x\le 0, \\ e^{-ax}+x^2\cos\dfrac{1}{x}, x>0 \end{cases}$ 处处可导，并求 $f'(x)$。

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

密 封

四、(4 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有连续的二阶导数，且 $f'(1)=1, f''(1)=2$，求参数方程 $\begin{cases} x=f(\mathrm{e}^{-t}), \\ y=f(\mathrm{e}^{t}) \end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 在 $t=0$ 处的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=0}$。

五、(4 分) 计算 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$。

六、 (4 分) （1）证明：对于任意的正整数n，都有$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$；

（2）设$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$（$n=1,2,\cdots$），证明数列$\{a_n\}$收敛。

七、(4 分) （1）证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$；

（2） 设函数 $f(x)$ 在开区间 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq 0$，证明：对于开区间 $(-1,1)$ 内任一 $x\neq 0$，存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使得 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ 成立，并证明 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$。

姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 班号＿＿＿＿ 学院＿＿＿＿

密 封