第二章 对偶理论

谢秉磊

第二章 对偶理论

第二节 对偶理论——原规划和对偶规划最优解之间的关系

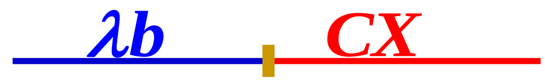
- 弱对偶定理
- 强对偶定理
- 松紧定理

一. 弱对偶定理：

$$(P)\quad \min S = CX \qquad\qquad (D)\quad \max Z = \lambda b$$

$$AX = b \qquad\qquad \lambda A \le C$$

$$X \ge 0$$



定理2-1：

设X 和 λ 分别是(P)和(D)的可行解，则有$CX \ge \lambda b$.

证明：

$$\because \lambda A \le C,\quad X \ge 0 \qquad \therefore \lambda \underbrace{AX}_{b} \le CX \qquad \therefore \lambda b \le CX \ \blacksquare$$

推论1：

若 X^0和λ^0分别是(P)和(D)的可行解，且 $CX^0 = \lambda^0 b$,

则 X^0和λ^0分别是(P)和(D)的最优解。

弱对偶定理：

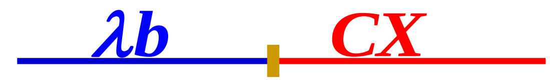
$(P)\ \min S = CX$

$AX = b$

$X \geq 0$

$(D)\ \max Z = \lambda b$

$\lambda A \leq C$



定理2-1：

设X和λ分别是(P)和(D)的可行解，则有$CX \geq \lambda b$.

推论1：

若X^0和λ^0分别是(P)和(D)的可行解，且$CX^0 = \lambda^0 b$,

则X^0和λ^0分别是(P)和(D)的最优解。

证明：

设X是(P)的任意可行解，由定理2-1知：

$CX \geq \lambda^0 b = CX^0$ 所以 X^0是(P)的最优解。■

第二章 线性规划

第二节 对偶理论——原规划和对偶规划解之间的关系

- 弱对偶定理
- 强对偶定理
- 松紧定理

二. 强对偶定理：

$$(P)\quad \min S = CX \qquad (D)\ \max Z = \lambda b$$
$$AX = b \qquad\qquad \lambda A \le C$$
$$X \ge 0$$

定理2-2：

(P)有有限的最优解 X^* $\Leftrightarrow$ (D)有有限的最优解λ^*，且相应的目标函数值相等，即 $CX^* = \lambda^* b$。

证明： $\Rightarrow$ $\because X^*$是(P)的最优解，$\therefore X^*$是最优基本可行解。

设对应的最优基为B，

$$C - C_B B^{-1} A \ge 0 \longrightarrow \underbrace{C_B B^{-1}}_{\lambda^*} A \le C$$

则$X^* = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_B^* \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\longrightarrow \lambda^* A \le C \quad \lambda^*\text{是}(D)\text{的可行解}$$

$$\because \lambda^* b = C_B B^{-1} \underbrace{b}_{AX^*} = C_B B^{-1} \underbrace{A}_{(B,N)} X^* = C_B B^{-1}(B,N)\begin{pmatrix} X_B^* \\ 0 \end{pmatrix} = (C_B, C_B B^{-1} N)\begin{pmatrix} X_B^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= C_B X_B^* = (C_B, C_N)\begin{pmatrix} X_B^* \\ 0 \end{pmatrix} = CX^*$$

$\therefore \lambda^*$是(D)的最优解。■

强对偶定理：

$$(P)\quad \min S = CX \qquad\qquad (D)\ \max Z = \lambda b$$
$$AX = b \qquad\qquad \lambda A \le C$$
$$X \ge 0$$

定理2-2：

(P)有有限的最优解 X^* $\Leftrightarrow$ (D)有有限的最优解λ^*，且相应的目标函数值相等，即 $CX^* = \lambda^* b$。

推论1：

若(P)和(D)中有一个有可行解，但没有有限的最优解，则另一个问题无可行解。

证明： 反证法：

设(P)有可行解 X^0，但没有有限的最优解，

即$\min CX = -\infty$， 则(D)没有可行解。 若(D) 有可行解 λ^0，

则由定理2-1，$CX \ge \lambda^0 b \Rightarrow -\infty = \min CX \ge \lambda^0 b$，矛盾。

所以(D)没有可行解。■

强对偶定理：

$$(P)\quad \min S = CX \qquad (D)\ \max Z = \lambda b$$
$$AX = b \qquad \lambda A \le C$$
$$X \ge 0$$

定理2-2：

(P)有有限的最优解 X^* $\Leftrightarrow$ (D)有有限的最优解λ^*，且相应的目标函数值相等，即 $CX^* = \lambda^* b$。

推论2：

若(P)和(D)同时有可行解，则必同时有有限的最优解，且它们在最优解处的目标函数值相等。

推论3：

若X^*是(P)的最优基本可行解，B是相应的最优基，

则单纯形乘子 $\pi = C_B B^{-1}$ 是(D)的最优解。

第二章 对偶理论

第二节 对偶理论——原规划和对偶规划解之间的关系

- 弱对偶定理
- 强对偶定理
- 松紧定理

三. 松紧定理：

$(P)\ \min S = CX$

$AX = b$

$X \geq 0$

$(D)\ \max Z = \lambda b$

$\lambda A \leq C$

$C - \lambda^0 A \geq 0$

$c_j - \lambda^0 p_j \geq 0$

定理2-3：

设 X^0, λ^0 分别是(P)和(D)的可行解，

则 X^0, λ^0 分别是(P)和(D)的最优解 $\rightleftarrows$ $(C - \lambda^0 A)X^0 = 0$

$\updownarrow$

$\sum_{j=1}^{n}(c_j - \lambda^0 p_j)x_j^0 = 0 \rightarrow (c_j - \lambda^0 p_j)x_j^0 = 0 \quad j = 1,2,\cdots,n$

证明：

$\Rightarrow$ 设 X^0, λ^0 分别是(P)和(D)的最优解，由定理2-2有

$CX^0 = \lambda^0 b = \lambda^0 AX^0 \longrightarrow (C - \lambda^0 A)X^0 = 0$

$\Leftarrow$ $(C - \lambda^0 A)X^0 = 0 \rightarrow CX^0 = \lambda^0 AX^0 = \lambda^0 b$

由定理2-1的推论1， X^0, λ^0分别是(P)和(D)的最优解。■

■ 例

$$\max z = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 16 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

的最优解是 $\boldsymbol{X}^*=(6, 2, 0)^T$，求其对偶问题的最优解 $\boldsymbol{Y}^*$ 。

解：写出原问题的对偶问题，即

$$\min w = 10y_1 + 16y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ 2y_1 + 2y_2 \ge 4 \\ y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{松紧定理}} \begin{cases} y_1 + 2y_2 = 3 \\ 2y_1 + 2y_2 = 4 \end{cases}$$

对偶问题的最优解 $\boldsymbol{Y}^* = (1, 1)^T$ 。

练习:

$$\max z = 6x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 20x_4$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 10x_4 \le 600 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 40x_4 \le 400 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \le 500 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

的最优解是 $\boldsymbol{X}^* = (400/3, 0, 0, 20/3)^T$, 求其对偶问题的最优解。

作答

第二章 对偶理论

第二节 对偶理论——原规划和对偶规划解之间的关系

- 弱对偶定理
- 强对偶定理
- 松紧定理