
哈爾濱工業大學(深圳)
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY, SHENZHEN
1920
H I T

第一章 线性规划

谢秉磊

第一章 线性规划

第二节 基本概念和基本定理

- 基本概念
  - 基变量、非基变量
  - 基本解、基
  - 基本可行解、可行基
  - 最优基本可行解、最优基
  - 非退化基本可行解
  - 退化基本可行解
- 基本定理

线性规划的标准形：

$$\min S=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \longrightarrow \min S=CX$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n= \\ x_j\geq 0,\quad j=1,2,\cdots,n \end{array}\right.$$

$$AX=b$$

$$X\geq 0$$

$$(LP)\ \min S=CX$$
$$AX=b$$
$$X\geq 0$$

$$C=(c_1,$$

$$(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$$

$$X=(x_1,$$

$$=(a_{ij})_{m\times n}$$

一. 基本概念：

$$(LP)\ \min S = CX$$

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

$C=(c_1,$

$X\ =(x_1$

$b=(b_1,$

$A=(a_{ij})_{m\times n}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

设$R(A)=m(m\leq n)$

因此A中有m列线性无关，不妨设前m列线性无关

$$A=(\underbrace{\overset{\text{基列}}{p_1,p_2,\cdots,p_m}}_{B(\text{可逆})},\underbrace{\overset{\text{非基列}}{p_{m+1},p_{m+2},\cdots,p_n}}_{N（\text{非基矩阵}）})=(B,N)$$

$\Big\downarrow$

称为(LP) 的一个**基**（**基矩阵**）

注：(LP)的基不惟一。

例： $\min S = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4$ $R(A) = 2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$$

$$A = \begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \end{array} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

该(LP)有5个基：

$$B_1 = (P_1, P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_4 = (P_2, P_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = (P_1, P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_5 = (P_3, P_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = (P_2, P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_6 = (P_1, P_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ 不是基

$$(LP)\ \min S = CX$$

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

$$AX = b$$

$$\Downarrow$$

$$(B, N)$$

$$\left(\underbrace{p_1, p_2, \cdots, p_m}_{\text{基列}}, \underbrace{p_{m+1}, p_{m+2}, \cdots, p_n}_{\text{非基列}}\right) \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix}\right\} X_B \\ \left.\begin{matrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}\right\} X_N \end{pmatrix} = b$$

$$\Downarrow$$

$$(B, N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = b$$

基变量：与基列相对应的分量称为基变量

非基变量：与非基列相对应的分量称为非基变量

注释：基变量，非基变量由基列，非基列来确定。

例： $\min S = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4$

$R(A) = 2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \end{array} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

该(LP)有5个基, 基列决定基变量：

$B_1 = (P_1, P_2)$ $\qquad X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

$B_2 = (P_1, P_3)$ $\qquad X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

$B_3 = (P_2, P_3)$ $\qquad X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

$B_4 = (P_2, P_4)$ $\qquad X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

$B_5 = (P_3, P_4)$ $\qquad X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

$$AX = b \Rightarrow (B,N)\begin{pmatrix}X_B\\ X_N\end{pmatrix} = b \Rightarrow BX_B + NX_N = b$$

$$\Rightarrow X_B + B^{-1}NX_N = B^{-1}b \Rightarrow X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$$

例：$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$ $A = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \multicolumn{2}{c}{B} & \multicolumn{2}{c}{N} \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$ $b = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ $R(A) = 2$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 + 2x_3 - x_4 \\ x_2 = 1 - 2x_3 - 0x_4 \end{cases}$$

$$AX=b \Rightarrow (B,N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}=b \Rightarrow BX_B+NX_N=b$$

$$\Rightarrow X_B+B^{-1}NX_N=B^{-1}b \Rightarrow X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N$$

令: $X_N=0$ 则: $X_B=B^{-1}b \Rightarrow X=\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

基本解： $X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 是$AX=b$的解，称为(LP)关于基B的基本解.

注： 基本解完全由基来决定，一个基对应一个基本解。

$$AX=b \rightarrow (B,N)\begin{pmatrix}X_B\\ X_N\end{pmatrix}=b \rightarrow BX_B+NX_N=b$$

$$\rightarrow X_B+B^{-1}NX_N=B^{-1}b \rightarrow X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N$$

例： $\begin{cases}x_1+x_2+0x_3+x_4=1\\ x_1+2x_2+2x_3+x_4=2\end{cases}$ $A=\left(\begin{array}{cccc}1&1&0&1\\ \multicolumn{2}{c}{B}&\multicolumn{2}{c}{N}\\ 1&2&2&1\end{array}\right)$ $b=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ $R(A)=2$

$$\downarrow x_3=x_4=0$$

$$X=\begin{pmatrix}X_B\\ X_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\ 1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\ 1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

基本解

例： $\min S = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$$

$R(A) = 2$

$$X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \end{array} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

该(LP)有5个基，5个基对应5个基本解：

$B_1 = (P_1, P_2)$ $\quad X^1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ $\quad X^1 = (0, 1, 0, 0)^T$

$B_2 = (P_1, P_3)$ $\quad X^2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ $\quad X^2 = (1, 0, 1/2, 0)^T$

$B_3 = (P_2, P_3)$ $\quad X^3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ $\quad X^3 = (0, 1, 0, 0)^T$

$B_4 = (P_2, P_4)$ $\quad X^4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ $\quad X^4 = (0, 1, 0, 0)^T$

$B_5 = (P_3, P_4)$ $\quad X^5 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ $\quad X^5 = (0, 0, 1/2, 1)^T$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = B_5^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

第一章 线性规划

第二节 基本概念和基本定理

- 基本概念
  - 基变量、非基变量✓
  - 基本解、基✓
  - 基本可行解、可行基⬅
  - 最优基本可行解、最优基
  - 非退化基本可行解
  - 退化基本可行解
- 基本定理

$$(LP)\ \ \min S = CX$$

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

基本解： $X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 是 $AX = b$ 的解，称为 (LP)

基：

关于基 B 的基本解.

基本可行解： 若 $X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$，则称 X 为 (LP) 关于

可行基：

可行基 B 的基本可行解。

（可行域的顶点）

$$AX = b \Rightarrow (B, N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = b \qquad X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\Rightarrow X_B + B^{-1}NX_N = B^{-1}b \Rightarrow X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$$

例：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}}_{B} & \underbrace{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}}_{N} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad R(A) = 2$$

$$\Big\downarrow\ x_3 = x_4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基本解

基本可行解

B是可行基

$$X=\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

例： $\min S = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4$　　$R(A)=2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$$

$$A=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \end{array} \qquad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

该(LP)有5个基, 5个基对应都是基本可行解：

$B_1=(P_1,P_2)$　$X^1=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$　$X^1=(0,1,0,0)^T$

$B_2=(P_1,P_3)$　$X^2=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$　$X^2=(1,0,1/2,0)^T$

$B_3=(P_2,P_3)$　$X^3=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$　$X^3=(0,1,0,0)^T$

$B_4=(P_2,P_4)$　$X^4=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$　$X^4=(0,1,0,0)^T$

$B_5=(P_3,P_4)$　$X^5=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$　$X^5=(0,0,1/2,1)^T$

第一章 线性规划

第二节 基本概念和基本定理

- 基本概念
  - 基变量、非基变量 ✓
  - 基本解、基 ✓
  - 基本可行解、可行基 ✓
  - 最优基本可行解、最优基 ←
  - 非退化基本可行解
  - 退化基本可行解
- 基本定理

$$(LP)\quad \min S = CX$$

$$AX = b \rightarrow \boxed{X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N}$$

$$X \geq 0$$

$$S = CX = (\underbrace{c_1, c_2, \cdots, c_m}_{C_B}, \underbrace{c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots, c_n}_{C_N}) \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix}\right\} X_B \\ \left.\begin{matrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}\right\} X_N \end{pmatrix}$$

$$= (C_B, C_N) \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = C_B X_B + C_N X_N$$

$$= C_B (B^{-1}b - B^{-1}NX_N) + C_N X_N$$

$$= C_B B^{-1}b - C_B B^{-1}NX_N + C_N X_N$$

$$= C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N) X_N$$

$$\boxed{S = CX = C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N) X_N}$$

规划1-2

定理1-1（最优性判别定理）

$$\min S = CX$$
$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

对于 (LP) 的基 B，若有 $X_B^* = \underline{B^{-1}b \geq 0}$ 且 $\underline{C - C_B B^{-1} A \geq 0}$ $(C_N - C_B B^{-1} N \geq 0)$ ，则基本可行解

$X^* = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 是 (LP) 的最优解，称为**最优基本可行解**，

B 称为**最优基**。最优值为 $C_B B^{-1} b$ 。

证明：对 $\forall X \in D$ 有

$$S = CX = C_B B^{-1} b + \underset{\geq 0}{\underline{(C_N - C_B B^{-1} N)X_N}}$$

$$\geq C_B B^{-1} b = (C_B, C_N) \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = CX^* \quad \therefore X^* \text{是最优解} \ ■$$

$$S = CX = C_B B^{-1} b + (C_N - C_B B^{-1} N) X_N$$

规划1-2

$$\begin{aligned}\min S &= CX\\ AX &= b\\ X &\ge 0\end{aligned}$$

证明： $C - C_B B^{-1} A \ge 0 \Leftrightarrow C_N - C_B B^{-1} N \ge 0$

$$\begin{aligned} C - C_B B^{-1} A &= (C_B, C_N) - C_B B^{-1}(B, N) \\ &= (C_B, C_N) - (C_B,\ C_B B^{-1} N) \\ &= (0,\ \ C_N - C_B B^{-1} N) \ \blacksquare \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$$

定理1-1（最优性判别定理）

对于 (LP) 的基 B，若有 $X_B^* = \underline{B^{-1}b \ge 0}$ 且 $\underline{C - C_B B^{-1} A \ge 0}$ $\underline{(C_N - C_B B^{-1} N \ge 0)}$ ，则基本可行解 $X^* = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 是 (LP) 的最优解，称为**最优基本可行解**，B 称为**最优基**。

检验数向量　非基变量检验数向量

$$X=\begin{pmatrix}X_B\\X_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}$$

例： $\min S = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$$

$$R(A) = 2$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \end{array} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

该(LP)有5个基, 5个基对应都是基本可行解：目标值：

$B_1 = (P_1, P_2)$	$X^1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$	$X^1 = (0,1,0,0)^T$	1
$B_2 = (P_1, P_3)$	$X^2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$	$X^2 = (1,0,1/2,0)^T$	2
$B_3 = (P_2, P_3)$	$X^3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$	$X^3 = (0,1,0,0)^T$	1
$B_4 = (P_2, P_4)$	$X^4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$	$X^4 = (0,1,0,0)^T$	1
$B_5 = (P_3, P_4)$	$X^5 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$	$X^5 = (0,0,1/2,1)^T$	3

$X^1, X^3, X^4 = (0,1,0,0)^T$ 是最优解　　　最优目标值：1

B_1，B_3，B_4 都是最优基

例： $\min S = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4$ $\quad R(A)=2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$$

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \multicolumn{2}{c}{B} & \multicolumn{2}{c}{N} \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 是基本可行解，B是可行基。

$$C = (1, 1, 2, 2) \quad C_B = (1, 1) \quad C_N = (2, 2)$$

$$\because C - C_B B^{-1} A = (1, 1, 2, 2) - (1,1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 2, 1) \geq 0$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$ 是最优基本可行解，B是最优基。最优目标值:1

$$\because C_N - C_B B^{-1} N = (2, 2) - (1,1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} :$$

$$C_B B^{-1} b = (1,1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

第一章 线性规划

第二节 基本概念和基本定理

- 基本概念
  - 基变量、非基变量✓
  - 基本解、基✓
  - 基本可行解、可行基✓
  - 最优基本可行解、最优基✓
  - 非退化基本可行解
  - 退化基本可行解
- 基本定理

对比概念：$\because R(A)=m \therefore A=(B,N), B-$可逆

$B-$基(可逆)	$X=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}$ $-$基本解$(AX=b)$
$B-$可行基	$X=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}$ $-$基本可行解，$B^{-1}b\geq 0$ $(AX=b, X\geq 0)$
$B-$最优基	$X=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}$ $-$最优基本可行解 $B^{-1}b\geq 0,\quad C-C_BB^{-1}A\geq 0$

第一章 线性规划

第二节 基本概念和基本定理

- 基本概念
  - 基变量、非基变量✓
  - 基本解、基✓
  - 基本可行解、可行基✓
  - 最优基本可行解、最优基✓
  - 非退化基本可行解 ⬅
  - 退化基本可行解
- 基本定理

非退化的基本可行解：

若基本可行解 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$中，$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}>\mathbf{0}$，则称该

基本可行解为非退化基本可行解。

退化的基本可行解：

若基本可行解$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$中，$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geq\mathbf{0}$,即$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

中至少有一个分量为 0，则称该基本可行解为退化基本可行解。

例： $\min S = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4$ $\quad R(A)=2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & & 1 & 0 & & 1\\ & B & & & N & \\ 1 & & 2 & 2 & & 1\end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\geq 0$$

$$X=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

退化的

是基本可行解，B是可行基。

$$C=(1, 1, 2, 2) \quad C_B=(1, 1) \quad C_N=(2, 2)$$

$$\because C-C_BB^{-1}A=(1, 1, 2, 2)-(1,1)\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\1 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix}=(0, 0, 2, 1)\geq 0$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}$$

退化的

是最优基本可行解，B是最优基。

$$\because C_N-C_BB^{-1}N=(2, 2)-(1,1)\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}=(2, 1)\geq 0$$

$$X=\begin{pmatrix}X_B\\X_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}$$

例： $\min S = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4$ $\quad R(A)=2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$$

$$A = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{matrix}\end{array} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

该(LP)有5个基, 5个基对应都是基本可行解：

$B_1 = (P_1, P_2)$ $\quad X^1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ $\quad X^1 = (0,1,0,0)^T$ 退化

$B_2 = (P_1, P_3)$ $\quad X^2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ $\quad X^2 = (1,0,1/2,0)^T$ 非退化

$B_3 = (P_2, P_3)$ $\quad X^3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ $\quad X^3 = (0,1,0,0)^T$ 退化

$B_4 = (P_2, P_4)$ $\quad X^4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ $\quad X^4 = (0,1,0,0)^T$ 退化

$B_5 = (P_3, P_4)$ $\quad X^5 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ $\quad X^5 = (0,0,1/2,1)^T$ 非退化

$X^1, X^3, X^4 = (0,1,0,0)^T$ 是最优解 退化

B_1, B_3, B_4 都是最优基

第一章 线性规划

第二节 基本概念和基本定理

- ✓ 基本概念
  - 基变量、非基变量✓
  - 基本解、基✓
  - 基本可行解、可行基✓
  - 最优基本可行解、最优基✓
  - 非退化基本可行解✓
  - 退化基本可行解
- ➡ 基本定理

引理： $$(LP)\ \min S = CX$$
$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

若 X是(LP)的一个可行解，若X中非零分量所对应的列向量线性无关，则 X是（LP） 的一个基本可行解.

证明：

$$A = (P_1, P_2, \cdots P_r, \cdots, P_n)$$

设 X中的前r个分量大于零，它们所对应的列向量线性无关，显然 $r \leq m$。

若$r = m$,

$B = (P_1, P_2, \cdots, P_m)$且$X$

$\Rightarrow B$是(LP)可行基, X是基本可行解

若$r < m, \because R(A) = m$，

有$(P_1, P_2, \cdots, P_r, P_{r+1}, \cdots, P_m)$ m个向量线性无关

它们构成(LP)一个基, X是退化的基本可行解

定理1-2： $(LP)\ \min S = CX$

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

对于线性规划问题的标准形有以下两个结论成立：

1. 若存在一个可行解，则必存在一个基本可行解；

2. 若存在一个最优解，则必存在一个最优基本可行解

证明：

1. 若$\forall X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$为可行解，有

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots + x_nP_n = b$$

若$x_1, x_2, \cdots, x_r \geq 0$，则$x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots + x_rP_r = b$

情形1：若$P_1, P_2, \cdots, P_r$线性无关，X本身是一个基本可行解。

情形2：若$P_1, P_2, \cdots, P_r$线性相关，能构造出基本可行解吗？

存在不全为零的常数 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r$

$$\delta_1 P_1 + \delta_2 P_2 + \cdots + \delta_r P_r = 0$$

$$(x_1 - \varepsilon\delta_1)P_1 + (x_2 - \varepsilon\delta_2)P_2 + \cdots + (x_r - \varepsilon\delta_r)P_r = b$$

如何选取合适的ε构造出新的可行解，且

$$x_s - \varepsilon\delta_s = 0?$$

$\varepsilon = \min\{\frac{x_i}{\delta_i} | \delta_i > 0\}$，构造的可行解至多有$r-1$个分量。

$\varepsilon = \min\{\frac{x_i}{\delta_i} \mid \delta_i > 0\}$，构造的可行解至多有$r-1$个分量。

1）若这*r*-1个分量对应的列向量线性无关

⇨ **构造出基本可行解**

2）若这*r*-1个分量对应的列向量线性相关

⇨ **继续消元，直到获得基本可行解**

例： $\min Z = -3x_1 - x_2 - 2x_3$

找出所有的基本解，基本可行解，并确定最优解。

$$\begin{cases} 12x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 9 \\ 8x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 10 \\ 3x_1 + 0x_2 + 0x_3 - x_6 = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array} \end{array} \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$B_1 = (P_1, P_2, P_3)$ $(|B_1| \neq 0)$ → 基本解：$X_1 = (0, \frac{16}{3}, -\frac{7}{6}, 0, 0, 0)^T$

$$B_1^{-1}b = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 \\ 8 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16/3 \\ -7/6 \end{pmatrix} \qquad B_4^{-1}b = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ -4 \\ 21/4 \end{pmatrix}$$

$B_4 = (P_1, P_2, P_6)$ $(|B_4| \neq 0)$ → 基本解：$X_4 = (\frac{7}{4}, -4, 0, 0, 0, \frac{21}{4})^T$

例： $\min Z = -3x_1 - x_2 - 2x_3$

$$\begin{cases} 12x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 9 \\ 8x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 10 \\ 3x_1 + 0x_2 + 0x_3 - x_6 = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array} \end{array} \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = (0, \frac{16}{3}, -\frac{7}{6}, 0, 0, 0)^T$$

$$X_4 = (\frac{7}{4}, -4, 0, 0, 0, \frac{21}{4})^T$$

16个基本解：

$X =$	$(x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_6)$
X_2	0	10	0	-7	0	0
X_3	0	3	0	0	7/2	0
X_4	7/4	-4	0	0	0	21/4
X_5	0	0	-5/2	8	0	0
X_6	0	0	3/2	0	8	0
X_7	1	0	-1/2	0	0	3
X_8	0	0	0	3	5	0

$X =$	$(x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_6)$
X_9	5/4	0	0	-2	0	15/4
X_{10}	0	3	-7/6	0	0	0
X_{11}	0	0	-5/2	8	0	0
X_{12}	0	0	0	3	5	0
X_{13}	3/4	0	0	0	2	9/4
X_{14}	0	10	0	-7	0	0
X_{15}	0	0	0	0	7/2	0
X_{16}	0	0	3/2	0	8	0

例：

$$A=\begin{array}{cccccc} 12 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array} \quad b=\begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

16个基本解：7个基本可行解：

$X=$	$(x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_6)$
~~X_2~~	~~0~~	~~10~~	~~0~~	~~-7~~	~~0~~	~~0~~
X_3	0	3	0	0	7/2	0
~~X_4~~	~~7/4~~	~~-4~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~21/4~~
~~X_5~~	~~0~~	~~0~~	~~-5/2~~	~~8~~	~~0~~	~~0~~
X_6	0	0	3/2	0	8	0
~~X_7~~	~~1~~	~~0~~	~~-1/2~~	~~0~~	~~0~~	~~3~~
X_8	0	0	0	3	5	0
~~X_9~~	~~5/4~~	~~0~~	~~0~~	~~-2~~	~~0~~	~~15/4~~
~~X_{10}~~	~~0~~	~~3~~	~~-7/6~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
~~X_{11}~~	~~0~~	~~0~~	~~-5/2~~	~~8~~	~~0~~	~~0~~
X_{12}	0	0	0	3	5	0
X_{13}	3/4	0	0	0	2	9/4
~~X_{14}~~	~~0~~	~~10~~	~~0~~	~~-7~~	~~0~~	~~0~~
X_{15}	0	3	0	0	7/2	0
X_{16}	0	0	3/2	0	8	0

例：

$$A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{matrix}\end{array} \quad b=\begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$X_3=X_{15}$ $X_6=X_{16}$ $X_8=X_{12}$

但 X_3 相应的基：$B_3=(P_1,P_2,P_5)$

X_{15} 相应的基：$B_{15}=(P_2,P_5,P_6)$

即不同的基对应相同的基本可行解。

7个基本可行解：

$X=$	$(x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_6)$
X_3	0	3	0	0	7/2	0
X_6	0	0	3/2	0	8	0
X_8	0	0	0	3	5	0

$X=$	$(x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_6)$
~~X_{12}~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~3~~	~~5~~	~~0~~
X_{13}	3/4	0	0	0	2	9/4
~~X_{15}~~	~~0~~	~~3~~	~~0~~	~~0~~	~~7/2~~	~~0~~
~~X_{16}~~	~~0~~	~~0~~	~~3/2~~	~~0~~	~~8~~	~~0~~

例： $\min Z = -3x_1 - x_2 - 2x_3$

$$\begin{cases} 12x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 9 \\ 8x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 10 \\ 3x_1 + 0x_2 + 0x_3 - x_6 = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array} \end{array} \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7个基本可行解：4个不同的基本可行解：

	$X =$	$(x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_6)$
-3	X_3	0	3	0	0	7/2	0
-3	X_6	0	0	3/2	0	8	0
0	X_8	0	0	0	3	5	0

	$X =$	$(x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_6)$
-9/4	X_{13}	3/4	0	0	0	2	9/4

X_3, X_6是最优解，$\min Z = -3$

第一章 线性规划

第二节 基本概念和基本定理

- ✓ 基本概念
  - 基变量、非基变量✓
  - 基本解、基✓
  - 基本可行解、可行基✓
  - 最优基本可行解、最优基✓
  - 非退化基本可行解✓
  - 退化基本可行解
- ✓ 基本定理