第二章 对偶理论

谢秉磊

第二章 对偶理论

第三节 对偶单纯形法

- 基本思想
- 迭代原理
- 举例求解
- 影子价格

一. 基本思想：$(P)\ \min S = CX$

$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

$$\min S = C_B B^{-1} b + (C_N - C_B B^{-1} N) X_N$$
$$X_B + B^{-1} N X_N = B^{-1} b$$
$$X_B, X_N \geq 0$$

最优表

$j \in \{1,2,\cdots,n\} \backslash \{J_1, J_2, \cdots, J_m\}$

		x_{J_1}	x_{J_2}	$\cdots$	x_{J_r}	$\cdots$	x_{J_m}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_j	$\cdots$
	$-y_{00}$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{0k}	$\cdots$	y_{0j}	$\cdots$
x_{J_1}	y_{10}	1							y_{1k}		y_{1j}	
x_{J_2}	y_{20}		1						y_{2k}		y_{2j}	
x_{J_r}	y_{r0}				1				y_{rk}		y_{rj}	
x_{J_m}	y_{m0}						1		y_{mk}		y_{mj}	

$C - C_B B^{-1} A \geqslant 0$

$y_{0j} = C_j - C_B B^{-1} p_j$

$B^{-1} b \geqslant 0$　　$\{J_1, J_2, \cdots, J_m\}$是基变量下标集

单纯形法是保持 $B^{-1} b \geq 0$使迭代向实现$C - C_B B^{-1} A \geq 0$进行。

对偶单纯形法是保持$C - C_B B^{-1} A \geq 0$ 使迭代向实现 $B^{-1} b \geq 0$进行。

$$(P)\ \min S = CX \qquad (D)\ \max Z = \lambda b$$
$$AX = b \qquad \lambda A \le C$$
$$X \ge 0$$

对偶可行解，正则基：

若(P)的一个基B，使得单纯形乘子$\lambda = C_B B^{-1}$是(D)的可行解$(C - \lambda A = \underline{C - C_B B^{-1} A \ge 0})$，则$(P)$相应的基本解

$$X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$称为对偶可行解，B称为正则基。

若$\underline{B^{-1}b \ge 0}$，则这个解$X$是$(P)$的最优基本可行解。

$$(P)\ \min S = CX \qquad (D)\ \max Z = \lambda b$$
$$AX = b \qquad \lambda A \le C$$
$$X \ge 0$$

对偶可行解，正则基：

若(P)的一个基B，使得单纯形乘子$\lambda = C_B B^{-1}$是(D)的可行解

$(C - \lambda A = \underline{C - C_B B^{-1} A \ge 0})$， 则$(P)$相应的基本解 $X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 称为

对偶可行解，B称为正则基。若$\underline{B^{-1}b \ge 0}$ ，则X是(P)的最优解。

理解：

1) 一个基B对应一个单纯形乘子$\lambda = C_B B^{-1}$

2) $\lambda = C_B B^{-1}$是(D)的可行解 $\Longleftrightarrow$ $C - C_B B^{-1} A \ge 0$

$\Longleftrightarrow$ B相应的单纯形表的检验数行≥ 0

3)

4)

对应正则基的单纯形乘子是(D)的可行解；

对应最优基的单纯形乘子是(D)的最优解。

$$(P)\ \min S = CX \qquad (D)\ \max Z = \lambda b$$
$$AX = b \qquad \lambda A \le C$$
$$X \ge 0$$

对偶可行解，正则基：

若(P)的一个基B，使得单纯形乘子$\lambda = C_B B^{-1}$是(D)的可行解$(C-\lambda A = \underline{C - C_B B^{-1} A \ge 0})$，则$(P)$相应的基本解 $X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 称为对偶可行解，B称为正则基。若$\underline{B^{-1}b \ge 0}$，则$X$是$(P)$的最优解。

基	可行基	正则基	最优基
B 可逆	$B^{-1}b \ge 0$	$C - C_B B^{-1} A \ge 0$	$B^{-1}b \ge 0$ $C - C_B B^{-1} A \ge 0$
基本解	基本可行解	对偶可行解	最优基本可行解

第二章 对偶理论

第三节 对偶单纯形法

- 基本思想
- 迭代原理
- 举例求解
- 影子价格

二. 迭代原理: $(LP)\min S = CX$

$$AX = b$$
$$X \ge 0$$

$$\min S = C_B B^{-1} b + (C_N - C_B B^{-1} N) X_N$$
$$X_B + B^{-1} N X_N = B^{-1} b$$
$$X_B, X_N \ge 0$$

		x_{J_1}	x_{J_2}	$\cdots$	x_{J_r}	$\cdots$	x_{J_m}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_j	$j \in \{1,2,\cdots,n\} \setminus \{J_1, J_2, \cdots, J_m\}$
	$-y_{00}$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{0k}	$\cdots$	y_{0j}	$\cdots$
x_{J_1}	y_{10}	1							y_{1k}		y_{1j}	
x_{J_2}	y_{20}		1						y_{2k}		y_{2j}	
x_{J_r}	y_{r0}				1				y_{rk}		y_{rj}	
x_{J_m}	y_{m0}						1		y_{mk}		y_{mj}	
	$B^{-1}b$	$B^{-1}p_{J_1}$	$B^{-1}p_{J_2}$				$B^{-1}p_{J_m}$		$B^{-1}p_k$		$B^{-1}p_j$	

$$C - C_B B^{-1} A$$

$$y_{0j} = C_j - C_B B^{-1} p_j$$

$$y_{00} = C_B B^{-1} b$$

X_B^T X_N^T x_{J_1} x_{J_2} $\cdots$ x_{J_m} $\cdots$ x_k $\cdots$ x_j $\cdots$ b

$$(B \quad N \quad b) = (p_{J_1}, p_{J_2}, \cdots, p_{J_m}, \cdots, p_k, \cdots, p_j, \cdots, b)$$

$$\xrightarrow{B^{-1}}$$

$$(E \quad B^{-1}N \quad B^{-1}b) = (B^{-1}p_{J_1}, B^{-1}p_{J_2}, \cdots, B^{-1}p_{J_m}, \cdots, B^{-1}p_k \cdots, B^{-1}p_j, \cdots B^{-1}b)$$

准备工作：

$$(D)\ \max Z=\lambda b$$
$$\lambda A\le C$$

$$\lambda A\le C \longrightarrow \lambda(p_1,p_2,\cdots,p_n)\le(c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

$$\longrightarrow (\lambda p_1,\lambda p_2,\cdots,\lambda p_n)\le(c_1,c_2,\cdots,c_n)\longrightarrow \boxed{\lambda p_j\le c_j}\ ,\ j=1,2,\cdots,n$$

$$E=B^{-1}B=B^{-1}(p_{J_1},p_{J_2},\cdots,p_{J_m})=(B^{-1}p_{J_1},B^{-1}p_{J_2},\cdots,B^{-1}p_{J_m})=\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \boxed{B^{-1}p_{J_j}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow j\\ \\ \\ \end{array}}\longrightarrow \quad B^{-1}p_{J_j}=\begin{pmatrix}u^1\\ \vdots\\ u^i\\ \vdots\\ u^m\end{pmatrix}p_{J_j}=\begin{pmatrix}u^1p_{J_j}\\ \vdots\\ u^ip_{J_j}\\ \vdots\\ u^mp_{J_j}\end{pmatrix}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow j\\ \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \boxed{u^ip_{J_j}=\begin{cases}0, & i\ne j\\ 1, & i=j\end{cases}}$$

准备工作：

$$(P)\ \min S = CX \qquad (D)\ \max Z = \lambda b$$
$$AX = b \qquad \lambda A \le C$$
$$X \ge 0$$

$$
\begin{array}{c|c|cccccccccccc}
 & & x_{J_1} & x_{J_2} & \cdots & x_{J_r} & \cdots & x_{J_m} & \cdots & x_k & \cdots & x_j & \cdots \\
\hline
 & -y_{00} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & y_{0k} & \cdots & y_{0j} & \cdots \\
\hline
x_{J_1} & y_{10} & 1 & & & & & & & y_{1k} & & y_{1j} & \\
x_{J_2} & y_{20} & & 1 & & & & & & y_{2k} & & y_{2j} & \\
x_{J_r} & y_{r0} & & & & 1 & & & & y_{rk} & & y_{rj} & \\
x_{J_m} & y_{m0} & & & & & & 1 & & y_{mk} & & y_{mj} & \\
\hline
 & B^{-1}b & & & & & & & & & & B^{-1}p_j &
\end{array}
$$

$j \in \{1,2,\cdots,n\} \setminus \{J_1, J_2, \cdots, J_m\}$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^r \\ \vdots \\ u^m \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} u^1 b \\ \vdots \\ u^r b \\ \vdots \\ u^m b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{r0} \\ \vdots \\ y_{m0} \end{pmatrix} \longrightarrow u^r b = y_{r0}$$

准备工作：

$$(P)\ \min S = CX \qquad AX = b \qquad X \geq 0$$

$$(D)\ \max Z = \lambda b \qquad \lambda A \leq C$$

		x_{J_1}	x_{J_2}	$\cdots$	x_{J_r}	$\cdots$	x_{J_m}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_j $j \in \{1,2,\cdots,n\} \setminus \{J_1, J_2, \cdots, J_m\}$	
	$-y_{00}$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{0k}	$\cdots$	y_{0j}	$\cdots$
x_{J_1}	y_{10}	1							y_{1k}		y_{1j}	
x_{J_2}	y_{20}		1						y_{2k}		y_{2j}	
x_{J_r}	y_{r0}				1				y_{rk}		y_{rj}	
x_{J_m}	y_{m0}						1		y_{mk}		y_{mj}	
	$B^{-1}b$										$B^{-1}p_j$	

$$B^{-1}p_j = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^r \\ \vdots \\ u^m \end{pmatrix} p_j = \begin{pmatrix} u^1 p_j \\ \vdots \\ u^r p_j \\ \vdots \\ u^m p_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{rj} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{pmatrix} \longrightarrow u^r p_j = y_{rj}$$

二. 迭代原理：

$$(P)\ \min S = CX \qquad AX = b \qquad X \geq 0$$

$$(D)\ \max Z = \lambda b \qquad \lambda A \leq C$$

		x_{J_1}	x_{J_2}	$\cdots$	x_{J_r}	$\cdots$	x_{J_m}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_j	
	$-y_{00}$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{0k}	$\cdots$	y_{0j}	$\cdots$
x_{J_1}	y_{10}	1							y_{1k}		y_{1j}	
x_{J_2}	y_{20}		1						y_{2k}		y_{2j}	
x_{J_r}	y_{r0}				1				y_{rk}		y_{rj}	
x_{J_m}	y_{m0} $B^{-1}b$						1		y_{mk}		y_{mj} $B^{-1}p_j$	

$j \in \{1,2,\cdots,n\} \backslash \{J_1, J_2, \cdots, J_m\}$

$C - C_B B^{-1} A \geqslant 0$

$y_{0j} = C_j - C_B B^{-1} p_j$

设 $B = (p_{J_1}, p_{J_2}, \cdots, p_{J_m})$ 是(P)的一个正则基，

则 $C - \underbrace{C_B B^{-1}}_{\lambda} A \geq 0 \longrightarrow \lambda A \leq C \longrightarrow \lambda$ 是(D)的可行解

$\longrightarrow \lambda p_j \leq c_j, j = 1,2,\cdots,n$

二. 迭代原理:

$$(P)\ \min S = CX \qquad AX = b \qquad X \geq 0$$

$$(D)\ \max Z = \lambda b \qquad \lambda A \leq C$$

		x_{J_1}	x_{J_2}	$\cdots$	x_{J_r}	$\cdots$	x_{J_m}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_j	
	$-y_{00}$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{0k}	$\cdots$	y_{0j}	$\cdots$
x_{J_1}	y_{10}	1							y_{1k}		y_{1j}	
x_{J_2}	y_{20}		1						y_{2k}		y_{2j}	
x_{J_r}	y_{r0}				1				y_{rk}		y_{rj}	
x_{J_m}	y_{m0}						1		y_{mk}		y_{mj}	

$j \in \{1,2,\cdots,n\} \setminus \{J_1, J_2, \cdots, J_m\}$

$C - C_B B^{-1} A \geq 0$

$y_{0j} = C_j - C_B B^{-1} p_j$

$B^{-1}b \ngeq 0$ $\quad B^{-1}p_j$ $\quad j = 1,2,\cdots,n$

设$B = (p_{J_1}, p_{J_2}, \cdots, p_{J_m})$是$(P)$的一个正则基,$\lambda = C_B B^{-1}$且$\lambda p_j \leq c_j$

若$B^{-1}b \geq 0$, 则 $X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$是$(P)$的最优解, $\lambda = C_B B^{-1}$是(D)的最优解。

若$B^{-1}b \ngeq 0$, 即$\exists 1 \leq i \leq m$使 $x_{J_i} = y_{i0} < 0$, 则当前基本解$X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$不是最优解，因此进行换基运算，得到新表。

二. 迭代原理：

$$(P)\ \min S = CX \qquad (D)\ \max Z = \lambda b$$
$$AX = b \qquad \lambda A \le C$$
$$X \ge 0$$

		x_{J_1}	x_{J_2}	$\cdots$	x_{J_r}	$\cdots$	x_{J_m}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_j	
	$-y_{00}$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{0k}	$\cdots$	y_{0j}	$\cdots$
x_{J_1}	y_{10}	1							y_{1k}		y_{1j}	
x_I	y_{20}		1						y_{2k}		y_{2j}	
$\leftarrow x_{J_r}$	$y_{r0} < 0$				1				y_{rk}		y_{rj}	
x_{J_m}	y_{m0}						1		y_{mk}		y_{mj}	

$j \in \{1,2,\cdots,n\} \backslash \{J_1, J_2, \cdots, J_m\}$

$C - C_B B^{-1} A \geqslant 0$

$y_{0j} = C_j - C_B B^{-1} p_j$

$B^{-1}b \ngeq 0$ $\qquad B^{-1}p_j$

1. 确定离基变量： $r = \min(\ i \mid y_{i0} < 0, 1 \le i \le m)$

则第r个方程的基变量x_{J_r}离基。

二. 迭代原理:

$$(P)\ \min S = CX \qquad (D)\ \max Z = \lambda b$$
$$AX = b \qquad \lambda A \le C$$
$$X \ge 0$$

		x_{J_1}	x_{J_2}	$\cdots$	x_{J_r}	$\cdots$	x_{J_m}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_j	$j\in\{1,2,\cdots,n\}\setminus\{J_1,J_2,\cdots,J_m\}$
	$-y_{00}$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{0k}	$\cdots$	y_{0j}	$\cdots$ $C-C_BB^{-1}A\geqslant 0$
x_{J_1}	y_{10}	1							y_{1k}		y_{1j}	$y_{0j}=C_j-C_BB^{-1}p_j$
x_{J_2}	y_{20}		1						y_{2k}		y_{2j}	
$\leftarrow x_{J_r}$	$y_{r0}<0$				1				y_{rk}		y_{rj}	
x_{J_m}	y_{m0} $B^{-1}b\ngeq 0$						1		y_{mk}			

$$B=(p_{J_1},p_{J_2},\cdots p_{J_r}\cdots,p_{J_m})$$
$$\bar{B}=(p_{J_1},p_{J_2},\cdots p_k\cdots,p_{J_m})$$

2. 确定进基变量:

$\because \lambda = C_B B^{-1}$不是$(D)$的最优解, $\therefore \lambda b = C_B B^{-1} b$ 不是(D)的最优值.

所以(D)有可行解 $\bar{\lambda}$ 使目标值↑, 即 $\bar{\lambda} b > \lambda b$.

令$\bar{\lambda} = \lambda - \varepsilon u^r$, u^r是B^{-1}的第r个行向量, $\varepsilon > 0$

$\bar{\lambda} = C_{\bar{B}}\bar{B}^{-1}$ $\qquad$ $C - C_{\bar{B}}\bar{B}^{-1}A \ge 0$

2. 确定进基变量：

$(D)\ \max Z = \lambda b$

$\lambda A \le C$

令$\bar{\lambda} = \lambda - \varepsilon u^r$, u^r是B^{-1}的第r个行向量, $\varepsilon > 0$

1) 对$\forall \varepsilon > 0, \bar{\lambda} b = \lambda b - \varepsilon u^r b = \lambda b - \varepsilon y_{r0}$

$$(P)\ \min S = CX$$
$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

$$(D)\ \max Z = \lambda b$$
$$\lambda A \leq C$$

		x_{J_1}	x_{J_2}	$\cdots$	x_{J_r}	$\cdots$	x_{J_m}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_j	
	$-y_{00}$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{0k}	$\cdots$	y_{0j}	$\cdots$
x_{J_1}	y_{10}	1							y_{1k}		y_{1j}	
x_{J_2}	y_{20}		1						y_{2k}		y_{2j}	
← x_{J_r}	y_{r0} <0				1				y_{rk}		y_{rj}	
x_{J_m}	y_{m0}						1		y_{mk}		y_{mj}	

$B^{-1}b$ $\quad$ $B^{-1}p_j$

$j \in \{1,2,\cdots,n\} \backslash \{J_1, J_2, \cdots, J_m\}$

$C - C_B B^{-1} A \geq 0$

$y_{0j} = C_j - C_B B^{-1} p_j$

2. 确定进基变量：

$(D)\ \max Z=\lambda b$

$\lambda A\le C$

令$\bar{\lambda}=\lambda-\varepsilon u^r$，$u^r$是$B^{-1}$的第$r$个行向量，$\varepsilon>0$

1) 对$\forall\varepsilon>0$，$\bar{\lambda}b=\lambda b-\varepsilon \underline{u^r b}=\lambda b-\varepsilon \overset{<0}{y_{r0}}>\lambda b$（$\bar{\lambda}$使$(D)$目标值↑）

2. 确定进基变量：

$$(D)\quad \max Z = \lambda b,\qquad \lambda A \le C$$

令 $\bar{\lambda} = \lambda - \varepsilon u^r$，$u^r$是$B^{-1}$的第$r$个行向量，$\varepsilon > 0$

1) 对 $\forall \varepsilon > 0$，$\bar{\lambda} b = \lambda b - \varepsilon \underline{u^r b} = \lambda b - \varepsilon \overset{<0}{y_{r0}} > \lambda b$ （$\bar{\lambda}$使(D)目标值↑）

2) 取ε使$\bar{\lambda}$是(D)的可行解，即$\bar{\lambda} A \le C \Leftrightarrow \bar{\lambda} p_j \le c_j, j = 1,2,\cdots,n$

对偶单纯形法的求解过程：

$\lambda = C_B B^{-1}$
(D)的可行解
$\lambda b < \max Z$
$C - C_B B^{-1} A \ge 0$

→

$\bar{\lambda} = C_{\bar{B}} \bar{B}^{-1}$
(D)的可行解
$\lambda b < \bar{\lambda} b$
$\bar{\lambda} b < \max Z$
$C - C_{\bar{B}} \bar{B}^{-1} A \ge 0$

→

$\bar{\bar{\lambda}} = C_{\bar{\bar{B}}} \bar{\bar{B}}^{-1}$
(D)的可行解
$\bar{\lambda} b < \bar{\bar{\lambda}} b$
$C - C_{\bar{\bar{B}}} \bar{\bar{B}}^{-1} A \ge 0$

$\bar{\bar{\lambda}} b = \max Z = \min S$ → (P)的最优解

$$X^* = \begin{pmatrix} \bar{\bar{B}}^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\bar{\bar{\lambda}} b \to +\infty$ → (P)无可行解

2. 确定进基变量：

$(D)\ \max Z = \lambda b$

$\lambda A \le C$

令$\bar{\lambda} = \lambda - \varepsilon u^r$，$u^r$是$B^{-1}$的第$r$个行向量，$\varepsilon > 0$

1) 对$\forall \varepsilon > 0, \bar{\lambda} b = \lambda b - \varepsilon \underline{u^r b} = \lambda b - \varepsilon \overset{<0}{y_{r0}} > \lambda b$ ($\bar{\lambda}$使(D)目标值↑)

2) 取ε使$\bar{\lambda}$是(D)的可行解，即$\bar{\lambda} A \le C \Leftrightarrow \bar{\lambda} p_j \le c_j, j = 1,2,\cdots,n$

[1]不离基的基列p_{J_i}　$\bar{\lambda} p_{J_i} = \lambda p_{J_i} - \varepsilon \underline{u^r p_{J_i}}$

$i \ne r$

$$x_{J_1}, x_{J_2}, \cdots x_{J_r} \cdots, x_{J_m}$$

$$B = (p_{J_1}, p_{J_2}, \cdots p_{J_r} \cdots, p_{J_m})$$

$$A = (p_{J_1}, p_{J_2}, \cdots p_{J_r} \cdots, p_{J_m}, \cdots p_k \cdots p_j \cdots)$$

2. 确定进基变量：

$(D)\ \max Z = \lambda b$

$\lambda A \le C$

令$\bar{\lambda} = \lambda - \varepsilon u^r$, u^r是B^{-1}的第r个行向量, $\varepsilon > 0$

1) 对$\forall \varepsilon > 0, \bar{\lambda} b = \lambda b - \varepsilon \underline{u^r b} = \lambda b - \varepsilon \overset{<0}{y_{r0}} > \lambda b$ ($\bar{\lambda}$ 使(D)目标值↑)

2) 取ε使$\bar{\lambda}$ 是(D)的可行解，即$\bar{\lambda} A \le C \Leftrightarrow \bar{\lambda} p_j \le c_j, j = 1,2,\cdots,n$

[1]不离基的基列p_{J_i} $\quad \bar{\lambda} p_{J_i} = \lambda p_{J_i} - \varepsilon \underline{u^r p_{J_i}} = \lambda p_{J_i} = C_B \underline{B^{-1} p_{J_i}}$

$i \ne r$

$= (c_{J_1}, \cdots, c_{J_i}, \cdots, c_{J_m})$

$x_{J_1}, \cdots x_{J_i} \cdots, x_{J_m}$

2. 确定进基变量:

$$(D)\ \max Z = \lambda b \qquad \lambda A \le C$$

令 $\bar{\lambda} = \lambda - \varepsilon u^r$, u^r是B^{-1}的第r个行向量, $\varepsilon > 0$

1) 对$\forall \varepsilon > 0, \bar{\lambda} b = \lambda b - \varepsilon \underline{u^r b} = \lambda b - \varepsilon \underset{<0}{y_{r0}} > \lambda b$ ($\bar{\lambda}$ 使(D)目标值↑)

2) 取ε使$\bar{\lambda}$是(D)的可行解, 即$\bar{\lambda} A \le C \Leftrightarrow \bar{\lambda} p_j \le c_j, j = 1,2,\cdots,n$

[1]不离基的基列 p_{J_i} $\quad \bar{\lambda} p_{J_i} = \lambda p_{J_i} - \varepsilon \underline{u^r p_{J_i}} = \lambda p_{J_i} = C_B \underline{B^{-1} p_{J_i}}$

$i \ne r$

$$= (c_{J_1}, \cdots, c_{J_i}, \cdots, c_{J_m}) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = c_{J_i}$$

$$x_{J_1}, \cdots x_{J_i} \cdots, x_{J_m}$$

[2] 离基的基列p_{J_r} $\bar{\lambda} p_{J_r} = \lambda p_{J_r} - \varepsilon \underline{u^r p_{J_r}}$

$$x_{J_1}, x_{J_2}, \cdots x_{J_r} \cdots, x_{J_m}$$

$$B = (p_{J_1}, p_{J_2}, \cdots p_{J_r} \cdots, p_{J_m})$$

2. 确定进基变量：

$$(D)\quad \max Z=\lambda b$$
$$\lambda A\le C$$

令 $\bar{\lambda}=\lambda-\varepsilon u^r$, u^r是B^{-1}的第r个行向量，$\varepsilon>0$

1) 对 $\forall\varepsilon>0,\ \bar{\lambda}b=\lambda b-\varepsilon\,\underline{u^r b}=\lambda b-\varepsilon\,\overset{<0}{y_{r0}}>\lambda b$ ($\bar{\lambda}$ 使(D)目标值↑)

2) 取ε使 $\bar{\lambda}$ 是(D)的可行解，即$\bar{\lambda}A\le C\Leftrightarrow \bar{\lambda}p_j\le c_j,\ j=1,2,\cdots,n$

[1] 不离基的基列 p_{J_i} $\quad \bar{\lambda}p_{J_i}=\lambda p_{J_i}-\varepsilon\,\underline{u^r p_{J_i}}=\lambda p_{J_i}=C_B\underline{B^{-1}p_{J_i}}$

$i\ne r$

$$=(c_{J_1},\cdots,c_{J_i},\cdots,c_{J_m})\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=c_{J_i}$$

[2] 离基的基列 p_{J_r} $\quad \bar{\lambda}p_{J_r}=\lambda p_{J_r}-\varepsilon\,\underline{u^r p_{J_r}}=\lambda p_{J_r}-\varepsilon\ =C_B\underline{B^{-1}p_{J_r}}-\varepsilon$

$$=(c_{J_1},\cdots,c_{J_r},\cdots,c_{J_m})\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}-\varepsilon=c_{J_r}-\varepsilon<c_{J_r}$$

2. 确定进基变量：

$$(D)\ \max Z = \lambda b$$
$$\lambda A \le C$$

令$\bar{\lambda} = \lambda - \varepsilon u^r$，$u^r$是$B^{-1}$的第$r$个行向量，$\varepsilon > 0$

1) 对$\forall \varepsilon > 0$，$\bar{\lambda} b = \lambda b - \varepsilon \underline{u^r b} = \lambda b - \varepsilon \overset{<0}{y_{r0}} > \lambda b$（$\bar{\lambda}$ 使(D)目标值↑）

2) 取ε使$\bar{\lambda}$ 是(D)的可行解，即$\bar{\lambda} A \le C \Leftrightarrow \bar{\lambda} p_j \le c_j, j = 1,2,\cdots,n$

[1] 不离基的基列p_{J_i} $\quad i \ne r$

[2] 离基的基列p_{J_r}

[3] 非基列p_j $\quad \bar{\lambda} p_j = \lambda p_j - \varepsilon \underline{u^r p_j}$

$$A = (p_{J_1}, p_{J_2}, \cdots p_{J_r} \cdots, p_{J_m}, \cdots p_k \cdots p_j \cdots)$$

2. 确定进基变量：

$$(D)\ \max Z = \lambda b$$
$$\lambda A \le C$$

令 $\bar{\lambda} = \lambda - \varepsilon u^r$，$u^r$ 是 B^{-1} 的第 r 个行向量，$\varepsilon > 0$

1) 对 $\forall \varepsilon > 0$，$\bar{\lambda} b = \lambda b - \varepsilon \underline{u^r b} = \lambda b - \varepsilon \overset{<0}{y_{r0}} > \lambda b$（$\bar{\lambda}$ 使 (D) 目标值↑）

2) 取 ε 使 $\bar{\lambda}$ 是 (D) 的可行解，即 $\bar{\lambda} A \le C \Leftrightarrow \bar{\lambda} p_j \le c_j,\ j = 1,2,\cdots,n$

[1] 不离基的基列 p_{J_i} $\quad$ [2] 离基的基列 p_{J_r}
$i \ne r$

[3] 非基列 p_j $\quad \bar{\lambda} p_j = \lambda p_j - \varepsilon \underline{u^r p_j} = \lambda p_j - \varepsilon y_{rj} = C_B B^{-1} p_j - \varepsilon y_{rj}$

$$= c_j - (\underline{c_j - C_B B^{-1} p_j}) - \varepsilon y_{rj} = c_j - y_{0j} - \varepsilon y_{rj}$$

2. 确定进基变量：

$$(D)\ \max Z=\lambda b$$
$$\lambda A\le C$$

令$\bar{\lambda}=\lambda-\varepsilon u^r$，$u^r$是$B^{-1}$的第$r$个行向量，$\varepsilon>0$

2) 取ε使$\bar{\lambda}$是(D)的可行解，即$\bar{\lambda}A\le C\Leftrightarrow\bar{\lambda}p_j\le c_j,\ j=1,2,\cdots,n$

[1] 不离基的基列p_{J_i}　[2] 离基的基列p_{J_r}

[3] 非基列p_j　$\bar{\lambda}p_j=\underline{c_j-y_{0j}-\varepsilon y_{rj}}$

1 若对$\forall j\in\{1,2,\cdots,n\}\backslash\{J_1,J_2,\cdots,J_m\}$，都有$y_{rj}\ge 0$，

二. 迭代原理：

$$(P)\ \min S = CX \quad AX = b \quad X \geq 0$$

$$(D)\ \max Z = \lambda b \quad \lambda A \leq C$$

$j \in \{1,2,\cdots,n\} \setminus \{J_1, J_2, \cdots, J_m\}$

		x_{J_1}	x_{J_2}	$\cdots$	x_{J_r}	$\cdots$	x_{J_m}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_j	
	$-y_{00}$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{0k}	$\cdots$	y_{0j}	$\cdots$
x_{J_1}	y_{10}	1							y_{1k}		y_{1j}	
x_{J_2}	y_{20}		1						y_{2k}		y_{2j}	
$\leftarrow x_{J_r}$	$y_{r0} < 0$				1				y_{rk}		$y_{rj} \geq 0$	
x_{J_m}	y_{m0}						1		y_{mk}		y_{mj}	

$B^{-1}b$　　$B^{-1}p_j$

$$C - C_B B^{-1} A \geq 0$$

$$y_{0j} = C_j - C_B B^{-1} p_j \geq 0$$

2. 确定进基变量：

$(D)\ \max Z = \lambda b$

$\lambda A \le C$

令$\bar{\lambda} = \lambda - \varepsilon u^r$，$u^r$是$B^{-1}$的第$r$个行向量，$\varepsilon > 0$

2) 取ε使$\bar{\lambda}$是(D)的可行解，即$\bar{\lambda} A \le C \Leftrightarrow \bar{\lambda} p_j \le c_j, j = 1,2,\cdots,n$

$C - C_B B^{-1} A \geqslant 0$

$y_{0j} = C_j - C_B B^{-1} p_j \geqslant 0$

[1] 不离基的基列 p_{J_i} [2] 离基的基列 p

[3] 非基列 p_j $\bar{\lambda} p_j = \underline{c_j - y_{0j} - \varepsilon y_{rj}}$

1 若对$\forall j \in \{1,2,\cdots,n\} \backslash \{J_1, J_2, \cdots, J_m\}$，都有$y_{rj} \ge 0$，

则$\bar{\lambda} p_j = c_j - y_{0j} - \varepsilon y_{rj} \le c_j$ 即对$\forall \varepsilon > 0$，$\bar{\lambda}$是(D)的可行解。

但$\bar{\lambda} b = \lambda b - \varepsilon y_{r0}$

2. 确定进基变量：

$(D)\ \max Z=\lambda b$

$\lambda A\le C$

令$\overline{\lambda}=\lambda-\varepsilon u^r$，$u^r$是$B^{-1}$的第$r$个行向量，$\varepsilon>0$

2) 取ε使$\overline{\lambda}$是(D)的可行解，即$\overline{\lambda}A\le C \Leftrightarrow \overline{\lambda}p_j\le c_j, j=1,2,\cdots,n$

[1]不离基的基列p_{J_i} [2] 离基的基列p_{J_r}

[3] 非基列p_j $\overline{\lambda}p_j=\underline{c_j-y_{0j}-\varepsilon y_{rj}}$

1 若对$\forall j\in\{1,2,\cdots,n\}\backslash\{J_1,J_2,\cdots,J_m\}$，都有$y_{rj}\ge 0$，

则$\overline{\lambda}p_j=c_j-y_{0j}-\varepsilon y_{rj}\le c_j$ 即对$\forall\varepsilon>0$，$\overline{\lambda}$是(D)的可行解。

但$\overline{\lambda}b=\lambda b-\underline{\varepsilon y_{r0}}_{<0}\xrightarrow[\varepsilon\to+\infty]{}+\infty$ 即(D)没有有限的最优解，

所以(P)无可行解。

2 若$\exists j\in\{1,2,\cdots,n\}\backslash\{J_1,J_2,\cdots,J_m\}$使$y_{rj}<0$，

二. 迭代原理：

$$(P)\ \min S = CX \qquad AX = b \qquad X \geq 0$$

$$(D)\ \max Z = \lambda b \qquad \lambda A \leq C$$

		x_{J_1}	x_{J_2}	$\cdots$	x_{J_r}	$\cdots$	x_{J_m}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_j	
	$-y_{00}$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{0k}	$\cdots$	y_{0j}	$\cdots$
x_{J_1}	y_{10}	1							y_{1k}		y_{1j}	
x_{J_2}	y_{20}		1						y_{2k}		y_{2j}	
$\leftarrow x_{J_r}$	$y_{r0} < 0$				1				y_{rk}		$y_{rj} < 0$	
x_{J_m}	y_{m0}						1		y_{mk}		y_{mj}	

$j \in \{1,2,\cdots,n\} \setminus \{J_1, J_2, \cdots, J_m\}$

$C - C_B B^{-1} A \geqslant 0$

$y_{0j} = C_j - C_B B^{-1} p_j$

$B^{-1}b$ $\qquad$ $B^{-1}p_j$

2. 确定进基变量：

$(D)\ \max Z = \lambda b$

$\lambda A \le C$

令$\bar{\lambda} = \lambda - \varepsilon u^r$，$u^r$是$B^{-1}$的第$r$个行向量，$\varepsilon > 0$

2) 取ε使$\bar{\lambda}$是(D)的可行解，即$\bar{\lambda} A \le C \Leftrightarrow \bar{\lambda} p_j \le c_j, j = 1,2,\cdots,n$

[1] 不离基的基列p_{J_i}　[2] 离基的基列p_{J_r}

[3] 非基列p_j　$\bar{\lambda} p_j = \underline{c_j - y_{0j} - \varepsilon y_{rj}}$

1 若对$\forall j \in \{1,2,\cdots,n\} \setminus \{J_1, J_2, \cdots, J_m\}$，都有$y_{rj} \ge 0$，

(D)没有有限的最优解，所以(P)无可行解。

2 若$\exists j \in \{1,2,\cdots,n\} \setminus \{J_1, J_2, \cdots, J_m\}$使$y_{rj} < 0$，

要使$\bar{\lambda} p_j = c_j - y_{0j} - \varepsilon y_{rj} \le c_j \longrightarrow -y_{0j} - \varepsilon y_{rj} \le 0 \longrightarrow \varepsilon \le \dfrac{y_{0j}}{-y_{rj}}$

$\longrightarrow \varepsilon = \min\left\{\dfrac{y_{0j}}{-y_{rj}} \,\middle|\, y_{rj} < 0\right\} = \dfrac{y_{0k}}{-y_{rk}} \longrightarrow x_k$为进基变量，$y_{rk}$为主元

3. 进行换基运算：得到新的单纯形表

二. 迭代原理:

$$(P)\ \min S = CX \qquad AX = b \qquad X \geq 0$$

$$(D)\ \max Z = \lambda b \qquad \lambda A \leq C$$

$j\in\{1,2,\cdots,n\}\setminus\{J_1,J_2,\cdots,J_m\}$

$C - C_B B^{-1} A \geqslant 0$

$y_{0j} = C_j - C_B B^{-1} p_j$

		x_{J_1}	x_{J_2}	$\cdots$	x_{J_r}	$\cdots$	x_{J_m}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_j	$\cdots$
	$-y_{00}$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{0k}	$\cdots$	y_{0j}	$\cdots$
x_{J_1}	y_{10}	1							y_{1k}		y_{1j}	
x_{J_2}	y_{20}		1						y_{2k}		y_{2j}	
x_{J_r}	$y_{r0}<0$				1				$y_{rk}<0$		$y_{rj}<0$	
x_{J_m}	y_{m0} $B^{-1}b$						1		y_{mk}		y_{mj}	

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{y_{0j}}{-y_{rj}}\,\middle|\, y_{rj}<0\right\} = \frac{y_{0k}}{-y_{rk}} \longrightarrow x_k\text{为进基变量}$$

以 y_{rk} 为主元进行换基运算，得到新的单纯形表。

$\because \bar{\lambda} b = C_{\bar{B}} \bar{B}^{-1} b > \lambda b = C_B B^{-1} b$,所以新表对应的基本解目标值↑

第二章 线性规划

第三节 对偶单纯形法

- 基本思想
- 迭代原理
- 举例求解
- 影子价格

三. 举例:

注意: 对偶单纯形法开始于一个正则基B,即$C-C_BB^{-1}A\geq 0$

所以适用于$C\geq 0$且不等式约束都是 "$\geq$" 的问题。

例2-2:

$$\min S=3x_1+4x_2+5x_3 \quad \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3\geq 5 \\ 2x_1+2x_2+x_3\geq 6 \\ x_1,x_2,x_3\geq 0 \end{cases}$$

$C=(3,4,5)\geq 0$

$\xrightarrow{\text{标准形}}$

$$\min S=3x_1+4x_2+5x_3 \quad \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=5 \\ 2x_1+2x_2+x_3-x_5=6 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0 \end{cases}$$

$\Big\downarrow$ 正则基

$$\min S=3x_1+4x_2+5x_3 \quad \begin{cases} -x_1-2x_2-3x_3+x_4=-5 \\ -2x_1-2x_2-x_3+x_5=-6 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0 \end{cases}$$

正则基$B=(p_4,p_5)=E$

$C_B=(0,0)$ $\quad C-C_BB^{-1}A\geq 0$

$C=(3,4,5,0,0)$

例2-2：

$$\min S = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \geq 0$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

			3	4	5	0	0
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	y_{0j}	0	3	4	5	0	0
0	x_4	-5	-1	-2	-3	1	0
0	x_5	-6	-2	-2	-1	0	1

$$B = (p_4, p_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

正则基

$B^{-1}b \geq 0$ ？ ✕

$$\varepsilon = \min\{\frac{y_{0j}}{-y_{rj}} \mid y_{rj} < 0\} = \min\{\frac{3}{1}, \frac{4}{2}, \frac{5}{3}\} = \frac{5}{3} \longrightarrow x_3\text{为进基变量}$$

例2-2：

$$\min S = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_{0j}	**0**	**3**	**4**	**5**	**0**	**0**
x_3	**-5** $\frac{5}{3}$	**-1** $\frac{1}{3}$	**-2** $\frac{2}{3}$	**-3** **1**	**1** $-\frac{1}{3}$	**0**
x_5	**-6**	**-2**	**-2**	**-1**	**0**	**1**

$\times(-\frac{1}{3})$

例2-2：

$$\min S = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_{0j}	**0**	**3**	**4**	**5**	**0**	**0**
x_3	$5/3$	$1/3$	$2/3$	**1**	$-1/3$	**0**
x_5	**-6** $-13/3$	**-2** $-5/3$	**-2** $-4/3$	**-1** 0	**0** $-1/3$	**1**

例2-2：

$$\min S = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_{0j}	0 $-25/3$	3 $4/3$	4 $2/3$	5 0	0 $5/3$	0
x_3	$5/3$	$1/3$	$2/3$	1	$-1/3$	0
x_5	$-13/3$	$-5/3$	$-4/3$	0	$-1/3$	1

-5

例2-2：

$$\min S = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$y_{0j} = C_j - C_B B^{-1} p_j \geqslant 0$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_{0j}	$-25/3$	$4/3$	$2/3$	0	$5/3$	0
x_3	$5/3$	$1/3$	$2/3$	1	$-1/3$	0
x_5	$-13/3$	$-5/3$	$-4/3$	0	$-1/3$	1

$$B = (p_3, p_5) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

正则基

$B^{-1}b \geq 0$? ✕

$$\varepsilon = \min\{\frac{y_{0j}}{-y_{rj}} \Big| y_{rj} < 0\} = \min\{\frac{4}{5}, \frac{2}{4}, \frac{5}{1}\} = \frac{1}{2} \longrightarrow x_2\text{为进基变量}$$

例2−2：

$$\min S = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_{0j}	$-\frac{25}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0
x_3	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0
x_2	$-\frac{13}{3}$ $\frac{13}{4}$	$-\frac{5}{3}$ $\frac{5}{4}$	$-\frac{4}{3}$ 1	0	$-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$	-1 $\frac{3}{4}$

$\times(-\frac{3}{4})$

例2-2：

$$\min S = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_{0j}	$-\frac{25}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0
x_3	$-\frac{5}{3}$ / $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$ / $-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$ / 0	1	$-\frac{1}{3}$ / $-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ / 0
x_2	$\frac{13}{4}$	$\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$

$\times(-\frac{2}{3})$

例2-2：

$$\min S = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_{0j}	$-63/6$	$1/2$	0	0	$3/2$	$1/2$
x_3	$-1/2$	$-1/2$	0	1	$-1/2$	$1/2$
x_2	$13/4$	$5/4$	$\boxed{1}$	0	$1/4$	$-3/4$

$\times\left(-\frac{2}{3}\right)$

例2-2：

$$\min S = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$y_{0j} = C_j - C_B B^{-1} p_j \geqslant 0$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_{0j}	$-63/6$	$1/2$	0	0	$3/2$	$1/2$
x_3	$-1/2$	$-1/2$	0	1	$-1/2$	$1/2$
x_2	$13/4$	$5/4$	1	0	$1/4$	$-3/4$

$$B = (p_3, p_2) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

正则基

$B^{-1}b \geq 0$?

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{y_{0j}}{-y_{rj}} \,\middle|\, y_{rj} < 0\right\} = \min\left\{\frac{1/2}{1/2}, \frac{3/2}{1/2}\right\} = \frac{1/2}{1/2} \longrightarrow x_1\text{为进基变量}$$

续例2-2：

$$\min S = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
y_{0j}	$-\frac{63}{6}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	
x_1	$-\frac{1}{2}$ 1	$-\frac{1}{2}$ 1	0	1 -2	$-\frac{1}{2}$ 1	$\frac{1}{2}$ -1	-2
x_2	$\frac{13}{4}$	$\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	

例2-2：

$$\min S = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_{0j}	$-63/6$	$1/2$	0	0	$3/2$	$1/2$
x_1	1	1	0	-2	1	-1
x_2	$13/4$ 2	$5/4$ 0	1	$5/2$ 0	$1/4$ -1	$-3/4$ $-1/2$

$\times(-\frac{5}{4})$

例2-2：

$$\min S = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_{0j}	-11	0	0	0	1	1
x_1	1	1	0	-2	1	-1
x_2	2	0	1	$\frac{5}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$

$\times(-\frac{1}{2})$

例2-2：

$$\min S = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$y_{0j} = C_j - C_B B^{-1} p_j \geq 0$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

最优表

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_{0j}	-11	0	0	1	1	1
x_1	1	1	0	-2	1	-1
x_2	2	0	1	$5/2$	-1	$1/2$

$$B = (p_1, p_2) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

正则基 最优基

$B^{-1}b \geq 0$? ✓

最优解 $X^* = (1,2,0,0,0)^T, S^* = 11$

原问题最优解 $X^* = (1,2,0)^T$

对偶理论 2-3

例2-2：

$$\min S = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
λ_1自	-1	-2	-3	1	0	=-5
λ_2自	-2	-2	-1	0	1	=-6
	≤ 3	≤ 4	≤ 5	≤ 0	≤ 0	

$$(D_1)\ \max Z = -5\lambda_1 - 6\lambda_2$$

$$\begin{cases} -\lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 3 \\ -2\lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 4 \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 \leq 5 \\ \lambda_1 \leq 0 \\ \lambda_2 \leq 0 \end{cases}$$

例2-2：

$$\min S = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

$$(D_1)\ \max Z = -5\lambda_1 - 6\lambda_2$$

$$\begin{cases} -\lambda_1 - 2\lambda_2 \le 3 \\ -2\lambda_1 - 2\lambda_2 \le 4 \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 \le 5 \\ \lambda_1 \le 0 \\ \lambda_2 \le 0 \end{cases}$$

最优表

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_{0j}	-11	0	0	1	1	1
x_1	1	1	0	-2	1	-1
x_2	2	0	1	$5/2$	-1	$1/2$

最优基

$$B = (p_1, p_2) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$y_{0j} = C_j - C_B B^{-1} p_j$$

$$\underset{(1,1)}{\underset{\parallel}{(y_{04}, y_{05})}} = (\underset{0}{\underset{\parallel}{c_4}} - C_B B^{-1} p_4, \underset{0}{\underset{\parallel}{c_5}} - C_B B^{-1} p_5) = -C_B B^{-1} \underset{E}{\underset{\parallel}{(p_4, p_5)}} = -C_B B^{-1}$$

$$(D_1)\text{有最优解}\ \lambda^* = C_B B^{-1} = (3,4)\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = (-1,-1)$$

例2-2：

$$\min S = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{对偶}}$

$$(D_1)\ \max Z = -5\lambda_1 - 6\lambda_2$$

$$\begin{cases} -\lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 3 \\ -2\lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 4 \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 \leq 5 \\ \lambda_1 \leq 0 \\ \lambda_2 \leq 0 \end{cases}$$

(D_1)有最优解

$$\lambda^* = C_B B^{-1} = (-1,-1)$$

$\uparrow$ 标准形

$\downarrow$ $y_i = -\lambda_i \quad i = 1,2$

$$\min S = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ \\ \end{array} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

最优解$X^* = (1,2,0)^T$

$\xrightarrow{\text{对偶}}$

$$(D_2)\max Z = 5y_1 + 6y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 3 \\ 2y_1 + 2y_2 \leq 4 \\ 3y_1 + y_2 \leq 5 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

(D_2)有最优解

$$Y^* = (1,1)$$

第二章 对偶理论

第三节 对偶单纯形法

- 基本思想
- 迭代原理
- 举例求解
- 影子价格

作业：第二章课后习题 2（1）（2）/

回顾——图解法：（只适用于二维的问题）

例1：

$$\max S = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$S = 3x_1 + 4x_2$$

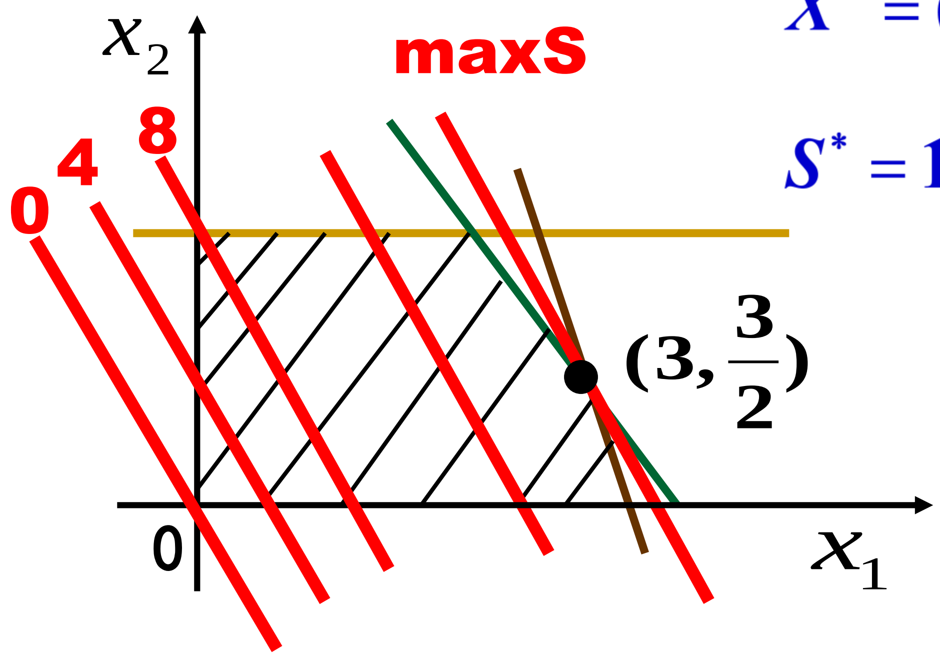
$$\Downarrow$$

$$x_2 = -\frac{3}{4}x_1 + \frac{S}{4}$$

1. 画出可行域
2. 画出目标函数等值线
3. 移动等值线求最优解

$$X^* = (3, \frac{3}{2})^T$$

$$S^* = 15$$



四. 影子价格：

$$(P)\ \min S = CX \quad AX = b \quad X \geq 0$$

$$(D)\ \max Z = \lambda b \quad \lambda A \leq C$$

设B是(P)的最优基

则$X^0 = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$是$(P)$的最优解，$\lambda^0 = C_B B^{-1}$是$(D)$的最优解。

且 $S = CX^0 = \lambda^0 b = C_B B^{-1} b$是最优值。

$$= \lambda_1^0 b_1 + \lambda_2^0 b_2 + \cdots + \lambda_m^0 b_m$$

$$b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$$

$$\lambda^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \cdots, \lambda_m^0)$$

$b_1, b_2, \cdots, b_m$ —— 通常在实际问题中表示资源拥有量.

$\lambda_1^0, \lambda_2^0, \cdots, \lambda_m^0$ —— 表示单位资源的价格，称为影子价格。

例：

某工厂在计划期内要安排生产甲乙两种产品，它们需要在四种不同的设备上加工。加工工时数、可得利润、总工时数均列于下表。

问：应如何安排生产才能获利最大？

	A	B	C	D	利润
甲	**2**	**1**	**4**	**0**	**20**
乙	**2**	**2**	**0**	**4**	**30**
总工时数	**12**	**8**	**16**	**12**	

例： $\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4$ —— **A, B, C, D的单位资源的价格**

(影子价格)

		A	B	C	D	利润
x_1	甲	2	1	4	0	20
x_2	乙	2	2	0	4	30
		12	8	16	12	

A, B, C, D的资源拥有量

$$(P)\ \max S = 20x_1 + 30x_2 \qquad (D)\ \min Z = 12\lambda_1 + 8\lambda_2 + 16\lambda_3 + 12\lambda_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 & \lambda_1 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 & \lambda_2 \\ 4x_1 + 0x_2 \le 16 & \lambda_3 \\ 0x_1 + 4x_2 \le 12 & \lambda_4 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + 0\lambda_4 \ge 20 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3 + 4\lambda_4 \ge 30 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \ge 0 \end{cases}$$

例： $\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4$ —— A, B, C, D的单位资源的价格

(影子价格)

		A	B	C	D	利润
x_1	甲	2	1	4	0	20
x_2	乙	2	2	0	4	30
		12	8	16	12	

A, B, C, D的资源拥有量

$(P)\ \max S = 20x_1 + 30x_2 \quad (D)\ \min Z = 12\lambda_1 + 8\lambda_2 + 16\lambda_3 + 12\lambda_4$

最优解：$X^0 = (x_1^0, x_2^0)^T \qquad \lambda^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0, \lambda_4^0)^T$

甲乙最优产量　　　　4种设备单位工时的最优定价

总收入：$S^0 = \underbrace{20x_1^0 + 30x_2^0}_{\text{自己生产的利润收入}} = \underbrace{12\lambda_1^0 + 8\lambda_2^0 + 16\lambda_3^0 + 12\lambda_4^0}_{\text{对外出租的租金收入}}$

影子价格的经济解释：

$$(P)\ \min S = CX \qquad (D)\ \max Z = \lambda b$$
$$AX = b \qquad\qquad \lambda A \le C$$
$$X \ge 0$$

设 X^0 是(P)的最优解，$\lambda^0 = C_B B^{-1}$ 是(D)的最优解.

且 $S = CX^0 = \lambda^0 b = \lambda_1^\circ b_1 + \lambda_2^\circ b_2 + \cdots + \lambda_i^\circ b_i + \cdots + \lambda_m^\circ b_m$

$b_1, b_2, \cdots, b_m$ ——资源拥有量

$\lambda_1^0, \lambda_2^0, \cdots, \lambda_m^0$ ——单位资源的价格(影子价格)

第 i 种资源 b_i 的影子价格

$\lambda_i^0 = \dfrac{\partial S}{\partial b_i}$ —— 可用来决定是否应增加第 i 种资源 b_i 量。

当 $\lambda_i^0 = 0$，增加 b_i 一个单位时，S 不增加，则不应增加该种资源。

当 $\lambda_i^0 > 0$，增加 b_i 一个单位时，S 增加，则 应增加该种资源。

越大 越多 越

第二章 对偶理论

第三节 对偶单纯形法

- 基本思想
- 迭代原理
- 举例求解
- 影子价格