自动控制理论B

状态空间综合

哈尔滨工业大学（深圳）
许鋆

提纲

- 状态反馈
- 输出反馈
- 状态观测器
- 基于观测器的状态反馈

提纲

- 状态反馈
- 输出反馈
- 状态观测器
- 基于观测器的状态反馈

状态反馈极点配置

被控对象 $\dot{x} = Ax + Bu$ (9.1.1)

状态反馈 $u = Kx + v$

闭环系统 $\dot{x} = (A + BK)x + Bv$ (9.1.2)

状态反馈极点配置问题 给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$B \in \mathbb{R}^{n\times r}$，及一组共轭封闭的复数 $s_i, i \in \mathbb{I}[1, n]$，求取矩阵 $K \in \mathbb{R}^{r\times n}$，使得矩阵 $A + BK$ 的所有特征值为 s_i，$i \in \mathbb{I}[1, n]$。

引理 9.1

给定定常线性系统 (9.1.1)，如果对任意给定的一组共轭封闭的复数 $s_i, i \in \mathbb{I}[1, n]$ 都存在反馈增益矩阵 $K \in \mathbb{R}^{r\times n}$，使得闭环系统矩阵 $A + BK$ 的所有特征值为 $s_i, i \in \mathbb{I}[1, n]$，则系统 (9.1.1) 是能控的。

证明： 采用反证法。假设系统 (9.1.1) 不能控，则必可通过结构分解在非奇异状态变换 $x = P\bar{x}$ 得到如下系统

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \tag{9.1.3}$$

其中

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.1.4}$$

对系统 (9.1.1) 的任一状态反馈增益矩阵 K，令

$$\bar{K} = KP = \begin{bmatrix} \bar{K}_1 & \bar{K}_2 \end{bmatrix}$$

且其分块与矩阵 $\bar{A}$ 的分块相容。则有

$$\begin{aligned} & \det(sI - A - BK) \\ = \ & \det\left(sI - \bar{A} - \bar{B}KP\right) \\ = \ & \det\begin{bmatrix} sI - \bar{A}_c - \bar{B}_c\bar{K}_1 & -\bar{A}_{12} - \bar{B}_c\bar{K}_2 \\ 0 & (sI - \bar{A}_{\bar{c}}) \end{bmatrix} \\ = \ & \det\left(sI - \bar{A}_c - \bar{B}_c\bar{K}_1\right)\det\left(sI - \bar{A}_c\right) \end{aligned}$$

这表明，状态反馈不能改变系统不能控部分的特征值，也即此种情况不可能任意配置全部极点。这显然是和已知前提相矛盾的，故假设不成立，也就是系统 (9.1.1) 一定是能控的。 □

9.1.1 单输入系统的极点配置

考虑单输入系统

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{9.1.5}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态变量，$u \in \mathbb{R}$ 是系统的控制输入，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ 分别为系统矩阵和输入矩阵。在状态反馈

$$u = kx + v \tag{9.1.6}$$

的作用下，闭环系统为

$$\dot{x} = (A + bk)x + bv$$

定理 9.1

给定单输入定常线性系统 (9.1.5)，对任意给定的一组共轭封闭的复数 $s_i, i \in \mathbb{I}[1,\ n]$ 都存在反馈增益矩阵 $k \in \mathbb{R}^{1\times n}$，使得闭环系统矩阵 $A + bk$ 的所有特征值为 $s_i, i \in \mathbb{I}[1,\ n]$，当且仅当系统 (9.1.5) 是能控的。

证明： 必要性已由引理9.1给出，以下证明充分性。

由于系统 (9.1.5)，则其能控性矩阵

$$Q_c = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

是可逆的。另外，令系统 (9.1.5) 的特征多项式为

$$\det(sI - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

并构造如下矩阵 H_A

$$H_A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & 1 & \\ \vdots & & \iddots & & \\ \alpha_{n-1} & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}$$

显然，矩阵 H_A 是可逆的。令 $P = Q_cH_A$，则矩阵 P 是可逆的。

对系统 (9.1.5) 进行非奇异线性变换 $x = P\bar{x}$，则由定理8.6.1可知，该系统变换为能控规范型

$$\dot{\bar{x}} = A_c\bar{x} + b_c u \tag{9.1.7}$$

式中

$$A_c = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b_c = Pb = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9.1.8}$$

对状态反馈式 (9.1.6)，有

$$u = kx + v = kP\bar{x} + v = \bar{k}\bar{x} + v$$

式中

$$\bar{k} = kP = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & \bar{k}_2 & \cdots & \bar{k}_n \end{bmatrix}$$

系统 (9.1.5) 引入状态反馈后的闭环系统矩阵为 $A+bk$。在状态变换 $x=P\bar{x}$ 下的系统矩阵为

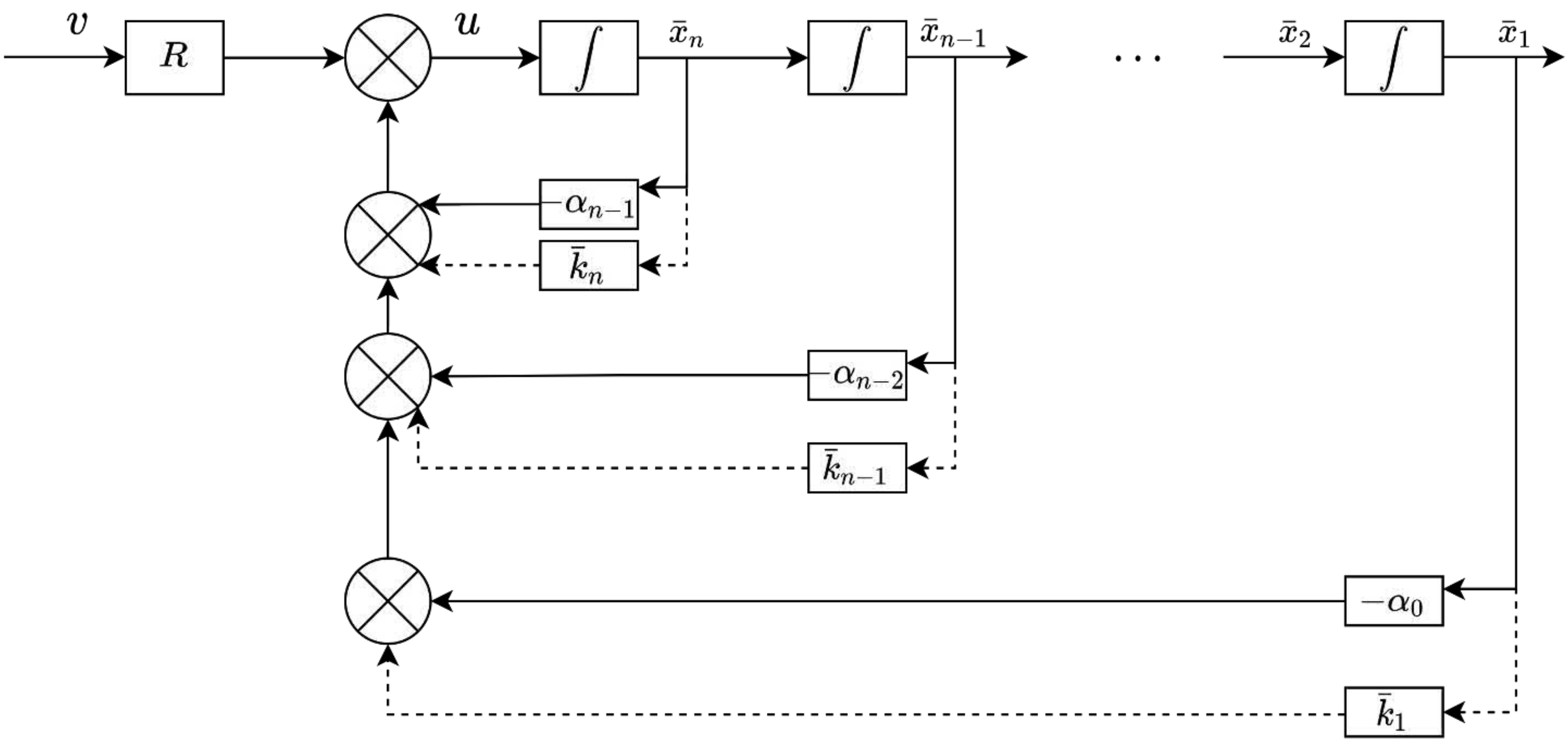
$$\begin{aligned}
& P^{-1}(A+bk)P \\
= \ & A_c + b_c\bar{k} \\
= \ & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0+\bar{k}_1 & -a_1+\bar{k}_2 & -a_2+\bar{k}_3 & \cdots & -a_{n-1}+\bar{k}_n \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{9.1.9}$$

对于式 (9.1.9) 这种特殊形式的矩阵，其闭环特征方程为

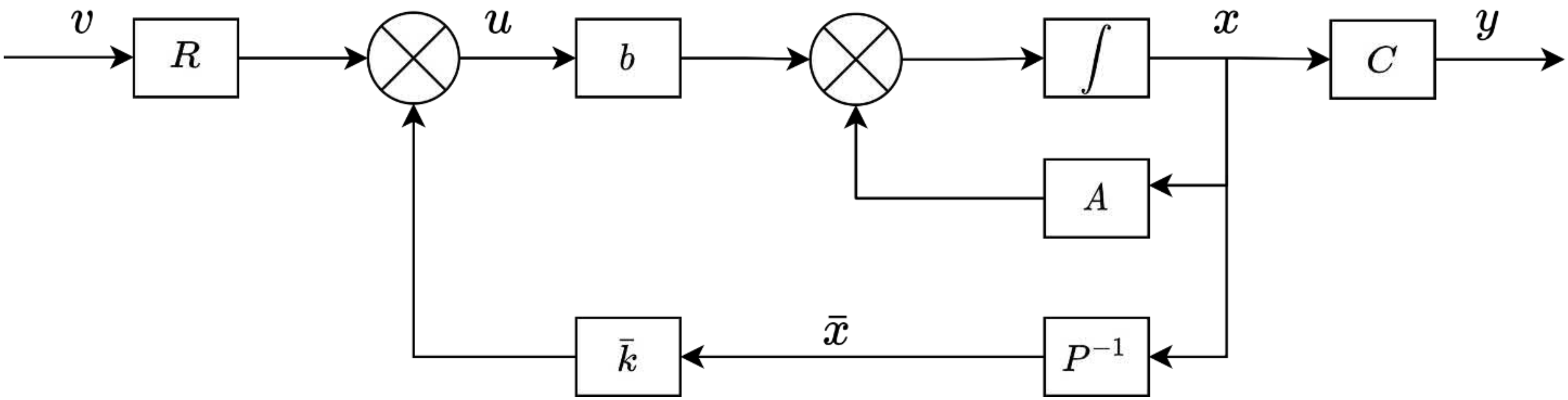
$$\begin{aligned}
& \det\left[sI-\left(A_c+b_c\bar{k}\right)\right] \\
= \ & s^n+\left(a_{n-1}-\bar{k}_n\right)s^{n-1}+\cdots+\left(a_1-\bar{k}_2\right)s+\left(a_0-\bar{k}_1\right)=0
\end{aligned}$$

显然，该 n 阶特征方程中的 n 个系数，可以通过 $\bar{k}_1$，$\bar{k}_2,\cdots,\bar{k}_n$ 独立设置，也就意味着 $A_c+b_c\bar{k}$ 的特征值可以任意选择，即闭环系统的极点可以任意配置。 □

状态反馈极点配置



v
R
u
$\int$
$\bar{x}_n$
$\int$
$\bar{x}_{n-1}$
$\cdots$
$\bar{x}_2$
$\int$
$\bar{x}_1$
$-\alpha_{n-1}$
$\bar{k}_n$
$-\alpha_{n-2}$
$\bar{k}_{n-1}$
$-\alpha_0$
$\bar{k}_1$


v
R
u
b
$\int$
x
C
y
A
$\bar{x}$
$\bar{k}$
P^{-1}

设计方法 9.1: 基于第二能控规范型的状态反馈极点配置

第 1 步. 计算系统矩阵 A 的特征多项式，即

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{9.1.10}$$

第 2 步. 根据期望闭环特征值 $\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$，确定闭环特征多项式，即

$$a^*(s) = (s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_n) = s^n + a_{n-1}^* s^{n-1} + \cdots + a_1^* s + a_0^* \tag{9.1.11}$$

第 3 步. 计算

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} a_0 - a_0^* & a_1 - a_1^* & \cdots & a_{n-1} - a_{n-1}^* \end{bmatrix} \tag{9.1.12}$$

第 4 步. 计算变换阵

$$P = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots A^{n-1}b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & 1 & \\ \vdots & & \iddots & & \\ \alpha_{n-1} & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \tag{9.1.13}$$

第 5 步. 求出增益阵 $k = \bar{k}P^{-1}$

例 9.1: 给定单输入线性定常系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{9.1.14}$$

再给定期望的一组闭环特征值为

$$s_1 = -2, \quad s_2 = -1 + \mathrm{j}, \quad s_3 = -1 - \mathrm{j}$$

易知系统为完全能控，故满足状态反馈闭环极点可任意配置的条件。开环系统的特征多项式

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ -1 & s+6 & 0 \\ 0 & -1 & s+12 \end{bmatrix} = s^3 + 18s^2 + 72s$$

再由指定闭环极点可得希望的闭环特征多项式为

$$a^*(s) = \prod_{i=1}^{3}(s - s_i) = (s+2)(s+1-\mathrm{j})(s+1+\mathrm{j}) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$$

于是可求得

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} a_0 - a_0^* & a_1 - a_1^* & a_2 - a_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 66 & 14 \end{bmatrix}$$

变换矩阵 P 为

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-6\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}72&18&1\\18&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}72&18&1\\12&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

其逆矩阵为

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-12\\1&-18&144\end{bmatrix}$$

从而所要确定的状态反馈增益阵 k 即为

$$k=\bar{k}P^{-1}=\begin{bmatrix}-4&66&14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-12\\1&-18&144\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&-186&1220\end{bmatrix}$$

直接法

例 9.2: 设某伺服系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s(s+6)(s+12)}$$

试设计状态反馈，使闭环系统满足如下性能指标：

(1) 输出超调量 $\sigma_p \leqslant 5\%$;

(2) 峰值时间 $t_p \leqslant 0.5s$;

(3) 稳态位置误差 $e_p = 0$。

直接法

第 1 步. 确定期望极点的位置。

这是一个三阶系统。如果让系统的一个极点远离虚轴，而另外一对复极点相对靠近虚轴，则这一对共轭复极点就成为系统的主导极点。系统的瞬态性能主要由主导极点决定，设主导极点为

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_{\mathrm{n}} \pm \mathrm{j}\sqrt{1-\xi^2}\omega_{\mathrm{n}}$$

由典型二阶振荡环节的瞬态性能指标公式可知：

$$\sigma_{\mathrm{p}} = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% \leqslant 5\%$$
$$t_{\mathrm{p}} = \pi/(\omega_{\mathrm{n}}\sqrt{1-\xi^2}) \leqslant 0.5$$

于是，只要 $\xi \geqslant 0.707$，$\omega_{\mathrm{n}} \geqslant 9$ 则动态性能得到满足。取 $\xi = 0.707$，$\omega_{\mathrm{n}} = 10$，则主导极点为

$$s_{1,2} = -7.07 \pm \mathrm{j}7.07$$

取第三个极点为 $s_3 = -100$，远离虚轴。于是闭环系统的期望特征多项式为

$$\begin{aligned}\alpha^* &= (s+100)(s+7.07-\mathrm{j}7.07)(s+7.07+\mathrm{j}7.07) \qquad (9.1.15)\\ &= s^3 + 114.1s^2 + 1510s + 10000\end{aligned}$$

第 2 步. 确定反馈增益 K。

先将原系统写成状态空间形式。为此，可取

$$
\begin{aligned}
X_3(s) &= \frac{1}{s+6}U(s) \\
X_2(s) &= \frac{1}{s+12}X_3(s) \\
X_1(s) &= Y(s) = \frac{1}{s}X_2(s)
\end{aligned}
\tag{9.1.16}
$$

于是得到系统的状态空间模型为

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 \\
\dot{x}_2 = -12x_2 + x_3 \\
\dot{x}_3 = -6x_3 + u \\
y = x_1
\end{cases}
$$

对于该系统，其系统矩阵为

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

设状态反馈增益为

直接求解

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

系统在状态反馈下的结构图如图9.1所示。

系统在状态反馈下的闭环形式为

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - bK)x + bRv \\ y = cx \end{cases}$$

因此，闭环特征方程为

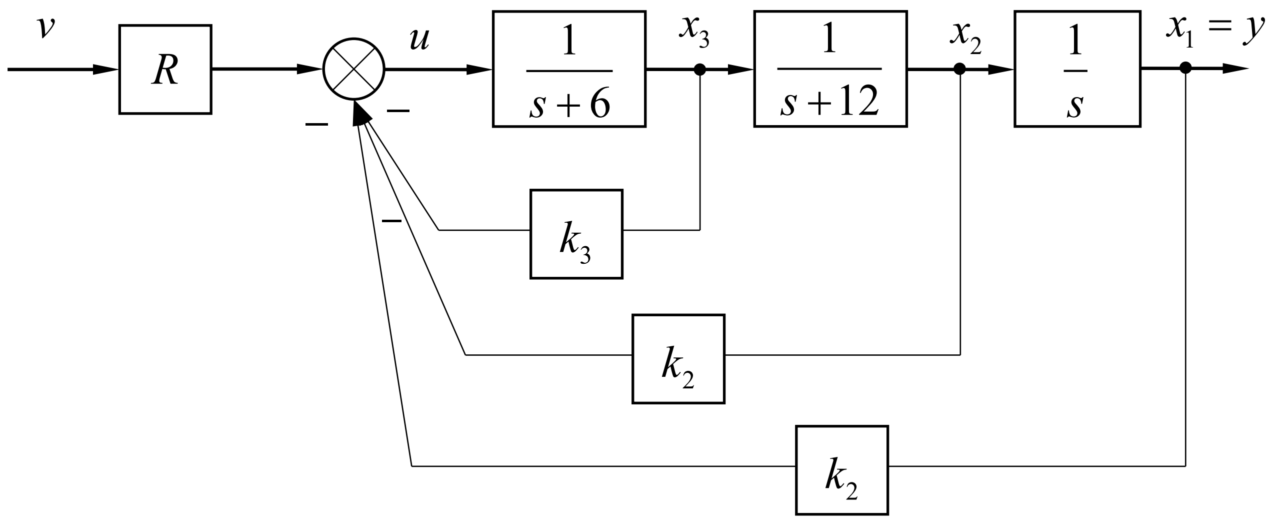
$$\begin{aligned} &\det(sI - A + bK) \\ &= \det\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+12 & -1 \\ k_1 & k_2 & s+6+k_3 \end{bmatrix} \\ &= s^3 + (18+k_3)s^2 + [12(6+k_3)+k_2]s + k_1 \end{aligned}$$

与式 (9.1.15) 比较系数可得

$$\begin{cases} 18 + k_3 = 114.1 \\ 12(6+k_3) + k_2 = 1510 \\ k_1 = 10000 \end{cases}$$

于是解得 $k_1 = 10000$，$k_2 = 284.8$，$k_3 = 96.1$。因此状态反馈增益为

$$K = \begin{bmatrix} 10000 & 284.8 & 96.1 \end{bmatrix}$$



v
R
u
$-$
$-$
$-$
$\frac{1}{s+6}$
x_3
$\frac{1}{s+12}$
x_2
$\frac{1}{s}$
$x_1 = y$
k_3
k_2
k_2

第2步：确定反馈增益k

采用Jordan标准型实现（亦可直接用能控标准型实现）

$$A=\begin{bmatrix}0 & & \\ & -6 & \\ & & -12\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},c=\begin{bmatrix}\frac{1}{72} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{72}\end{bmatrix}$$

原闭环系统特征多项式：s^3+18s^2+72s

比较可得：

$$\bar{k}=\begin{bmatrix}-1000 & 1442 & 96.1\end{bmatrix}$$

根据变换：

$$P=Q_cH_A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & -6 & 36\\1 & -12 & 144\end{bmatrix}\begin{bmatrix}72 & 18 & 1\\18 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}72 & 18 & 1\\0 & 12 & 1\\0 & 6 & 1\end{bmatrix}$$

则：

$$k=\bar{k}P^{-1}=\begin{bmatrix}-138.89 & 422.01 & -187.02\end{bmatrix}$$

第 3 步. 确定前馈增益 R。

状态反馈后系统的闭环传递函数为

$$G(s)=\frac{R}{\alpha^*(s)}$$

按要求稳态位置误差 $e_{\mathrm{p}}=0$，即闭环系统稳态放大倍数应为 1，即 $\lim\limits_{s\to 0}\frac{R}{\alpha^*(s)}=1$，于是可得 $R=10000$。

设计方法 9.2: 状态反馈极点配置直接法

第 1 步. 由给定的期望闭环极点 s_i, $i=1, 2, \cdots, n$ 写出期望的闭环特征多项式

$$\begin{aligned}\alpha^*(s) &= (s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)\\ &= s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0\end{aligned}$$

第 2 步. 由等式

$$\det(sI-A+BK)=\alpha^*(s)$$

比较系数，解联方程即可确定 $k_1,\cdots,k_n$。

多输入系统的极点配置

定理 9.2: 状态反馈不改变能控性

如果系统 (9.1.1) 是能控的，则对任意反馈增益 K，闭环系统 (9.1.2) 也是能控的。

方法二. 由于系统 (9.1.1) 是能控的，则根据 PBH 判据，对任意 $s \in \mathbb{C}$ 下式成立

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} = n$$

其中 n 为系统矩阵的维数。通过简单的代数运算有

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} sI - A - BK & B \end{bmatrix} \\ = &\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -K & I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由此可得

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI - A - BK & B \end{bmatrix} = n$$

由此，根据 PBH 判据可知闭环系统 (9.1.2) 也是能控的。 □

状态反馈镇定

镇定：设计反馈控制律使得闭环系统是稳定的。

定义 9.1

给定系统 (9.3.1)，如果存在状态反馈增益 K 使得闭环系统 (9.3.3) 是稳定的，则称系统 (9.3.1) 或者矩阵对 $(A,\ B)$ 是可稳的。♣

如果系统能控，则不论其原先的极点位置在哪儿，都一定可以通过状态反馈将其镇定。如果系统 (9.3.1) 不能控，用状态变换可以将它变成如下按能控性分解的形式：

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{9.3.4}$$

令

$$u = -\bar{K}\bar{x} = [-\bar{K}_1 \quad -\bar{K}_2]\bar{x} \tag{9.3.5}$$

代入式 (9.3.4) 得

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c - \bar{B}_c\bar{K}_1 & \bar{A}_{12} - \bar{B}_c\bar{K}_2 \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \bar{x}$$

因此，闭环系统的特征多项式为

$$\alpha(s) = \det(sI - \bar{A}_c + \bar{B}_c\bar{K}_1)\det(sI - \bar{A}_{\bar{c}})$$

原系统中能控部分的极点可以由状态反馈任意配置，但不能控部分的极点，即$\bar{A}_{\bar{c}}$的特征值，不能被状态反馈所改变。

定理 9.3

线性连续时间定常系统可稳的充要条件是其不能控振型都在复平面的左半平面。

例 9.3: 检验系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{9.3.3}$$

是否可用状态反馈镇定。若可以，设计状态反馈阵镇定该系统。

利用定理8.7.1可以构造出状态变换矩阵如下：

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $\hat{x} = P^{-1}x$，可将系统转化成如下按能控性分解的形式：

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{9.3.4}$$

由上式可以看出，系统不能控子系统的特征值为 $\lambda = -2$，它在左半平面，因此系统是可以用状态反馈镇定的。

为了用极点配置的方法进行镇定，设期望极点为 $\lambda_1^* = -1, \lambda_2^* = -3, \lambda_3^* = -2$。注意，这里 $\lambda_3^* = -2$ 实际上是原系统不能控子系统的极点，是不能用状态反馈改变的，即无论状态反馈阵如何设计，该极点都是闭环极点。另外两个极点 λ_1^* 和 λ_2^* 是可以根据系统的其他性能要求调整的。由于这里只考虑镇定问题，λ_1^* 和 λ_2^* 只要安排在复平面的左半平面即可。

为求状态反馈阵，可以利用算法 1 直接对原系统 (9.3.3) 来设计。也可以先对变换后的系统 (9.3.4) 来设计，然后再求出原系统相应的状态反馈阵。这里采用后一种办法。

设系统 (9.3.4) 的状态反馈阵为

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \hat{k}_1 & \hat{k}_2 & \hat{k}_3 \end{bmatrix} \tag{9.3.5}$$

则闭环系统特征方程为

$$\begin{aligned} \alpha^*(s) &= \det[s\boldsymbol{I} - \hat{A} + \hat{B}\hat{K}] \\ &= \det \begin{bmatrix} s-2+\hat{k}_1 & 1+\hat{k}_2 & \hat{k}_3 \\ 1 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & s+2 \end{bmatrix} \\ &= (s^2 + (\hat{k}_1 - 3)s + (1 - \hat{k}_1 - \hat{k}_2))(s+2) \end{aligned} \tag{9.3.6}$$

根据期望极点的要求应有

$$\begin{aligned} \alpha^*(s) &= (s+1)(s+3)(s+2) \\ &= (s^2 + 4s + 3)(s+2) \end{aligned} \tag{9.3.7}$$

比较式 (9.3.6) 和式 (9.3.7) 可得

$$\hat{k}_1 - 3 = 4$$
$$1 - \hat{k}_1 - \hat{k}_2 = 3$$

于是解得

$$\hat{k}_1 = 7$$
$$\hat{k}_2 = -9$$

因此系统 (9.3.4) 的状态反馈阵为

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 7 & -9 & \hat{k}_3 \end{bmatrix}$$

其中，$\hat{k}_3$ 为任意值，可取 $\hat{k}_3 = 0$。再利用状态变换阵求出原系统 (9.3.3) 所需的状态反馈阵为

$$K = \hat{K}P^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

提纲

- 状态反馈
- 输出反馈
- 状态观测器
- 基于观测器的状态反馈

输出反馈（SISO系统）

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx \end{cases} \tag{9.2.1}$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^{n\times 1}, c \in \mathbb{R}^{1\times n}$ 。输出反馈具有如下形式:

$$u = fy + v \tag{9.2.2}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + bfc)x + bv \\ y = cx \end{cases} \tag{9.2.3}$$

该系统的传递函数为

$$G_{\mathrm{f}}(s) = c(sI - A - bfc)^{-1}b$$

闭环特征多项式为

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathrm{f}}(s) &= \det(sI - A - bfc) \\ &= \det[(sI - A)(I - (sI - A)^{-1}bfc)] \\ &= \det(sI - A)\det(I - (sI - A)^{-1}bfc) \\ &= \det(sI - A)\det(I - fc(sI - A)^{-1}b) \end{aligned} \tag{9.2.4}$$

由于 $I - fc(sI - A)^{-1}b$ 实际上是一个标量函数，因此有

$$\det(I - fc(sI - A)^{-1}b) = 1 - fc(sI - A)^{-1}b \tag{9.2.5}$$

记开环系统的传递函数为

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}b \triangleq \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} \tag{9.2.6}$$

其中，$\alpha(s)$ 是开环系统的特征多项式，即

$$\det(sI - A) = \alpha(s) \tag{9.2.7}$$

由式 (9.2.4) 和式 (9.2.6) 得

$$\alpha_{\mathrm{f}}(s) = \alpha(s) - f\beta(s) \tag{9.2.8}$$

即

$$1 - \frac{f\beta(s)}{\alpha(s)} = 0 \tag{9.2.9}$$

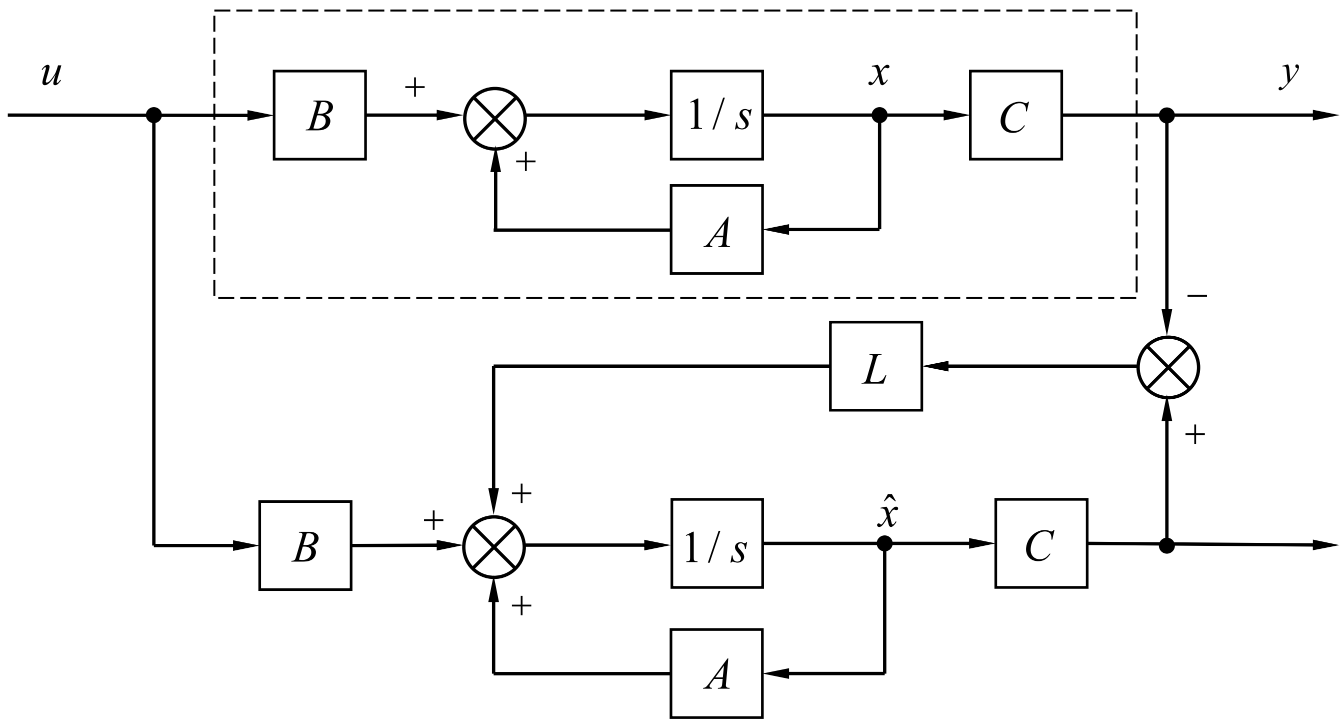
将 $-f$ 看成根轨迹常数，则可以得出如下结论：输出反馈只能将闭环系统的极点配置在系统根轨迹上，而不能做到任意配置。

提纲

- 状态反馈
- 输出反馈
- 状态观测器
- 基于观测器的状态反馈

全维状态观测器

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0)x_0, \quad t \geq 0 \\ y = Cx \end{cases}$$



$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L\left(C\hat{x} - y\right)$$

$$\lim_{t \to \infty} \hat{x}(t) = \lim_{t \to \infty} x(t)$$

定义 9.1

已知 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$C \in R^{m\times n}$，矩阵对 (A, C) 或系统 (10.1.1) 称为是可检测的，如果存在实矩阵 L，使得矩阵 $(A + LC)$ 稳定。 ♣

显然，可检测性和可稳性具有下述关系。

命题 9.1

线性定常系统 (9.4.1) 可检测的充要条件是其对偶系统可稳，也即矩阵对 (A, C) 可检测的充分必要条件是矩阵对 $(A^{\mathrm{T}}, C^{\mathrm{T}})$ 可稳。 ♠

利用上述命题我们还容易得到下述结论：

命题 9.2

线性定常系统 (9.4.1) 或矩阵对 (A, C) 可检测的充要条件是其全部不能观振型为稳定的。 ♠

基于上述可检测性的概念，我们可以建立线性系统的全维状态观测器的下述存在条件。

定理 9.3

存在矩阵 L 使得系统 (9.4.2) 构成系统 (9.4.1) 的一个全维状态观测器的充要条件是矩阵对 (A, C) 可检测，而此时只需选取 L 使得 $(A + LC)$ 稳定即可。 ♡

证明： 考虑到 $y = Cx$，并将其代入 (9.4.2)，则此种全维状态观测器的动态方程可表示为

$$\dot{\hat{x}} = (A + LC)\hat{x} - LCx + Bu, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \tag{9.4.3}$$

再令 $\tilde{x} = x - \hat{x}$ 为真实状态和估计状态间的误差，那么利用 (9.4.1) 和 (9.4.3) 就可导出 $\tilde{x}$ 所应满足的动态方程为

$$\dot{\tilde{x}} = (A + LC)\tilde{x}, \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 = x_0 - \hat{x}_0$$

这表明，不管初始误差为多大，要使得

$$\lim_{t\to\infty} \hat{x}(t) = \lim_{t\to\infty} x(t)$$

其充要条件是存在矩阵 L 使矩阵 $(A + LC)$ 的特征值 $\lambda_i(A + LC)(i = 1, 2, ..., n)$ 均具有负实部，也即 (A, C) 矩阵对可检测。证毕。 □

定理 9.4

线性定常系统 (9.4.1) 的全维状态观测器 (9.4.3) 存在且可以任意配置极点，即可通过选择增益阵 L 任意配置 $(A+LC)$ 的全部特征值的充要条件是矩阵对 (A, C) 能观。

证明： 利用对偶原理，(A, C) 能观测意味着 $(A^{\mathrm{T}},\ C^{\mathrm{T}})$ 能控。再利用极点配置问题的基本结论可知，对任意给定的 n 个实数或共轭复数特征值 $\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_n^*\}$，必可找到一个实常阵 K，使

$$\lambda_i\left(A^{\mathrm{T}}+C^{\mathrm{T}} K\right)=\lambda_i^*, i=1,2, \cdots, n$$

由于 $(A^{\mathrm{T}}+C^{\mathrm{T}} K)$ 与其转置矩阵 $(A^{\mathrm{T}}+C^{\mathrm{T}} K)^T=(A+K^{\mathrm{T}} C)$ 具有等同的特征值，故当取 $L=K^{\mathrm{T}}$ 时，有

$$\lambda_i(A+LC)=\lambda_i^*, \quad i=1,2, \cdots, n$$

也即可任意配置 $(A+LC)$ 的全部特征值。于是充分性得证。逆推上述过程可证得必要性。 □

设计方法 9.3: (A, C) 可检测条件下的全维状态观测器设计

第 1 步. 导出对偶系统 (A^T, C^T, B^T)。

第 2 步. 指定所要设计的全维观测器的一组期望极点 $\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_n^*\}$，利用极点配置问题的算法，对矩阵 (A^T, C^T) 来确定使

$$\lambda_i\left(A^{\mathrm{T}}+C^{\mathrm{T}} K\right)=\lambda_i^*, \quad i=1,2, \cdots, n$$

成立的反馈增益阵 K。

第 3 步. 取 $L=K^{\mathrm{T}}$，并计算 $(A+LC)$，则所要设计的全维状态观测器就为

$$\dot{\hat{x}}=(A+LC)\hat{x}+Bu-Ly$$

而 $\hat{x}$ 即为 x 的估计状态。

例 9.3: 已知线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

设计其全维状态观测器，使得观测器的极点位于 $-\alpha \pm j\beta, \quad \alpha, \beta > 0$。

由

$$\begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可知该系统完全能观，因此我们可以利用算法9.4.3求解该系统的状态观测器。

第 1 步. 导出其对偶系统

$$(A', b', C') = \left(A^{\mathrm{T}}, c^{\mathrm{T}}, B^{\mathrm{T}}\right) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

第 2 步. 利用设计方法9.1.1求解矩阵 k，使得矩阵 $A' + b'k$ 以 $-\alpha \pm j\beta$ 为特征值。
矩阵的特征多项式为

$$\det(sI - A') = s^2 - 1$$

由指定极点可得观测器的特征多项式为

$$(s + \alpha - \mathrm{j}\beta)(s + \alpha + \mathrm{j}\beta) = s^2 + 2\alpha s + (\alpha^2 + \beta^2)$$

从而

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} \alpha_0 - \alpha_0^* & \alpha_1 - \alpha_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - \alpha^2 - \beta^2 & -2\alpha \end{bmatrix}$$

又

$$P = \begin{bmatrix} b' & A'b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

故所求矩阵 k 为

$$k = \bar{k}P^{-1} = \begin{bmatrix} -2\alpha & -1 - \alpha^2 - \beta^2 \end{bmatrix}$$

第 3 步. 取

$$L = k^T = \begin{bmatrix} -2\alpha \\ -1-\alpha^2-\beta^2 \end{bmatrix}$$

则

$$A + Lc = \begin{bmatrix} -2\alpha & 1 \\ -\alpha^2-\beta^2 & 0 \end{bmatrix}$$

从而所求全维状态观测器为

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -2\alpha & 1 \\ -\alpha^2-\beta^2 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 1+\alpha^2+\beta^2 \end{bmatrix} y$$

降维状态观测器

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \tag{9.5.1}$$

引理 9.2

给定被估计系统 (10.2.1)，任取 $(n-m)\times n$ 阶常阵 R，使 $n\times n$ 矩阵

$$P = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix} \tag{9.5.2}$$

非奇异，则有

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix},\quad \bar{B} = PB = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}, \bar{C} = CP^{-1} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix} \tag{9.5.3}$$

其中，$\bar{A}_{11}$、$\bar{A}_{12}$、$\bar{A}_{21}$ 和 $\bar{A}_{22}$ 分别为 $m\times m$、$m\times(n-m)$、$(n-m)\times m$ 和 $(n-m)\times(n-m)$ 阶矩阵；$\bar{B}_1$ 和 $\bar{B}_2$ 分别为 $m\times r$ 和 $(n-m)\times r$ 阶矩阵，并且 $(\bar{A}_{22},\ \bar{A}_{12})$ 能观的充分必要条件是 $(A,\ C)$ 能观测。

$$x = P^{-1}\bar{x}$$

证明： 令

$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \tag{9.5.4}$$

其中 Q_1 和 Q_2 分别为 $n \times m$ 和 $n \times (n-m)$ 阶矩阵，则有

$$I_n = PQ = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CQ_1 & CQ_2 \\ RQ_1 & RQ_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix}$$

也即下式成立

$$CQ_1 = I_m, \quad CQ_2 = 0$$

由此可得

$$\bar{C} = CP^{-1} = \begin{bmatrix} CQ_1 & CQ_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix}$$

代数等价的系统具有相同的能控性和能观性，因而 $(A,\ C)$ 能观的充分必要条件是 $(\bar{A},\ \bar{C})$ 能观测。由 PBH 判据知，$(\bar{A}, \bar{C})$ 能观测等价于

$$n = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} sI - \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} sI - \bar{A}_{11} & -\bar{A}_{12} \\ -\bar{A}_{21} & sI - \bar{A}_{22} \\ I_m & 0 \end{bmatrix} = m + \operatorname{rank} \begin{bmatrix} sI - \bar{A}_{22} \\ \bar{A}_{12} \end{bmatrix}$$

也即

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} sI - \bar{A}_{22} \\ \bar{A}_{12} \end{bmatrix} = n - m$$

再由 PBH 判据知，上式等价于 $(\bar{A}_{22}, \bar{A}_{12})$ 能观。这样结论成立。 □

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u \\
y = \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \bar{x}_1
\end{cases}
\tag{9.5.5}
$$

引理 9.3

设 $(\bar{A}_{22}, \bar{A}_{12})$ 能观测，$\bar{L}$ 为使得矩阵 $(\bar{A}_{22} + \bar{L}\bar{A}_{12})$ 稳定的任一矩阵，则下述系统

$$
\begin{cases}
\dot{z} = (\bar{A}_{22} + \bar{L}\bar{A}_{12})z + [(\bar{A}_{21} + \bar{L}\bar{A}_{11}) - (\bar{A}_{22} + \bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L}]y + (\bar{B}_2 + \bar{L}\bar{B}_1)u \\
\hat{\bar{x}}_2 = z - \bar{L}y
\end{cases}
\tag{9.5.6}
$$

构成系统 (9.5.5) 的状态分量 $\bar{x}_2$ 的一个观测器，即对于任何的 $\bar{x}(0)$、$z(0)$ 和 $u(t)$ 均有

$$
\lim_{t \to \infty} \left[\bar{x}_2(t) - \hat{\bar{x}}_2(t) \right] = 0
$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \bar{x}_1 \end{cases} \tag{9.5.5}$$

证明： 由式 (9.5.5) 导出相对于 $\bar{x}_2$ 的状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_2 = \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + (\bar{A}_{21}y + \bar{B}_2 u) \\ \dot{y} - \bar{A}_{11}y - \bar{B}_1 u = \bar{A}_{12}\bar{x}_2 \end{cases} \tag{9.5.7}$$

如果定义

$$\bar{u} = (\bar{A}_{21}y + \bar{B}_2 u), \quad w = \dot{y} - \bar{A}_{11}y - \bar{B}_1 u$$

还可把式 (9.5.7) 表示为规范型式

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_2 = \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + \bar{u} \\ w = \bar{A}_{12}\bar{x}_2 \end{cases} \tag{9.5.8}$$

由于 $(\bar{A}_{22}, \bar{A}_{12})$ 能观测，故 $(n-m)$ 维子系统 (9.5.8) 的全维也即 $(n-m)$ 维状态观测器存在，其形式为

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_2 = (\bar{A}_{22} + \bar{L}\bar{A}_{12})\,\hat{\bar{x}}_2 - \bar{L}w + \bar{u} \tag{9.5.9}$$

并且可通过选取 $\bar{L}$ 而任意配置 $(\bar{A}_{22} + \bar{L}\bar{A}_{12})$ 的全部特征值。再将 $\bar{u}$ 和 w 的定义式代入式 (9.5.9) 可得

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_2 = (\bar{A}_{22} + \bar{L}\bar{A}_{12})\hat{\bar{x}}_2 - \bar{L}\,(\dot{y} - \bar{A}_{11}y - \bar{B}_1 u) + (\bar{A}_{21}y + \bar{B}_2 u) \tag{9.5.10}$$

易见上式中包含输出的导数 $\dot{y}$，从抗扰动性的角度而言这是不希望的。为此，引入

$$z = \hat{\bar{x}}_2 + \bar{L}y \tag{9.5.11}$$

消去观测器方程中的 $\dot{y}$，由式 (9.5.10) 和式 (10.2.12) 就可导出

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \dot{\hat{\bar{x}}}_2 + \bar{L}\dot{y} \\
&= (\bar{A}_{22} + \bar{L}\bar{A}_{12})\,\hat{\bar{x}}_2 + (\bar{A}_{21} + \bar{L}\bar{A}_{11})\,y + (\bar{B}_2 + \bar{L}\bar{B}_1)\,u \\
&= (\bar{A}_{22} + \bar{L}\bar{A}_{12})\,z + [(\bar{A}_{21} + \bar{L}\bar{A}_{11}) - (\bar{A}_{22} + \bar{L}\bar{A}_{12})\,\bar{L}]y + (\bar{B}_2 + \bar{L}\bar{B}_1)u
\end{aligned} \tag{9.5.12}$$

由上式和式 (9.5.11) 即得观测器 (9.5.6)。 □

可以看出，观测器 (9.5.6) 是一个以 u 和 y 为输入的 $n-m$ 维动态系统，且在 (A,C) 能观的条件下 $(\bar{A}_{22}+\bar{L}\bar{A}_{12})$ 的特征值是可以任意配置的，而且 $\bar{x}_2$ 的重构状态为

$$\hat{\bar{x}}_2 = z - \bar{L}y$$

从而可导出变换状态 $\bar{x}$ 的重构状态 $\hat{\bar{x}}$ 为

$$\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z - \bar{L}y \end{bmatrix}$$

再考虑到 $x = P^{-1}\bar{x} = Q\bar{x}$，相应地也有$\hat{x} = Q\,\hat{\bar{x}}$，于是可定出系统状态 x 的重构状态 $\hat{x}$ 为

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z - \bar{L}y \end{bmatrix} = Q_1 y + Q_2(z - \bar{L}y)$$

定理 9.5

设 (A,C) 能观测，矩阵 $\bar{A}_{ij}$、$\bar{B}_i$、Q_i，$i=1,2$，$j=1$，2，由式 (9.5.2)~(9.5.4) 所定义，$\bar{L}$ 为使得矩阵 $(\bar{A}_{22}+\bar{L}\bar{A}_{12})$ 稳定的任一矩阵，则下述系统

$$\begin{cases} \dot{z} = (\bar{A}_{22}+\bar{L}\bar{A}_{12})\,z + [(\bar{A}_{21}+\bar{L}\bar{A}_{11}) - (\bar{A}_{22}+\bar{L}\bar{A}_{12})\,\bar{L}]\,\boldsymbol{y} + (\bar{B}_2+\bar{L}\bar{B}_1)\,\boldsymbol{u} \\ \hat{x} = Q_1 y + Q_2(z-\bar{L}y) = Q_2 z + (Q_1 - Q_2\bar{L})\,y \end{cases} \tag{9.5.13}$$

构成系统 (9.5.1) 的一个 $n-m$ 维状态观测器，即对于任何的 $x(0)$、$z(0)$ 和 $u(t)$，由式 (9.5.1) 和式 (9.5.13) 构成的复合系统均满足下述关系

$$\lim_{t\to\infty}[x(t)-\hat{x}(t)] = 0$$

♡

$$\dot{z} = (\bar{A}_{22}+\bar{L}\bar{A}_{12})(z-\bar{L}y) + (\bar{B}_2+\bar{L}\bar{B}_1)u + (\bar{A}_{21}+\bar{L}\bar{A}_{11})y$$

设计方法 9.4: 线性系统的降维状态观测器设计

第 1 步. 选取 $(n-m)\times n$ 阶常阵 R，使得 $n\times n$ 阶矩阵 $P=\begin{bmatrix} c \\ R \end{bmatrix}$ 非奇异。

第 2 步. 计算

$$Q=P^{-1}=\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}$$

其中 Q_1 和 Q_2 分别为 $n\times m$ 和 $n\times(n-m)$ 阶矩阵。

第 3 步. 计算

$$\bar{A}=PAP^{-1}=\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix},\quad \bar{B}=PB=\begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}$$

其中，$\bar{A}_{11}$、$\bar{A}_{12}$、$\bar{A}_{21}$、$\bar{A}_{22}$ 和分别为 $m\times m$、$m\times(n-m)$、$(n-m)\times m$ 和 $(n-m)\times(n-m)$ 阶矩阵；$\bar{B}_1$ 和 $\bar{B}_2$ 分别为 $m\times r$ 和 $(n-m)\times r$ 阶矩阵。

第 4 步. 选取 $\bar{L}$ 使得矩阵 $(\bar{A}_{22}+\bar{L}\bar{A}_{12})$ 稳定或具有希望的稳定特征值。

第 5 步. 按照式 (9.5.13) 构成系统的降维状态观测器。

例 9.5: 给定受控系统 (A, B, C) 为

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -11 & -12 & -12 \\ 13 & 14 & 13 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

确定它的降维状态观测器。

对于该系统，有 $n=3$、$m=r=1$。由于可观测性矩阵

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 5 \\ 23 & 22 & 17 \end{bmatrix}$$

的秩为 3。从而系统是完全能观测的，从而可以构造 2 维降维观测器。

第 1 步. 选取

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则有

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第 2 步. 经计算有

$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从而

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第 3 步. 计算得

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 \\ -11 & -1 & -1 \\ 13 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = PB = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

从而有

$$\bar{A}_{22} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$$

第 4 步. 选择观测器的极点为 -3 和 -4，则希望的观测器特征多项式为

$$\psi^*(s) = (s+3)(s+4) = s^2 + 7s + 12$$

令 $\bar{L} = [l_1 \quad l_2]^{\mathrm{T}}$，则容易求得 $\bar{A}_{22} + \bar{L}\bar{A}_{12}$ 的特征多项式为

$$\psi_{\mathrm{g}}(s) = \det\begin{bmatrix} s+1 & 1+l_1 \\ -1 & s+l_2 \end{bmatrix} = s^2 + (1+l_2)\,s + (1+l_1+l_2)$$

令 $\psi_{\mathrm{g}}(s) = \psi^*(s)$ 可以解出

$$\begin{cases} l_1 = 5 \\ l_2 = 6 \end{cases}$$

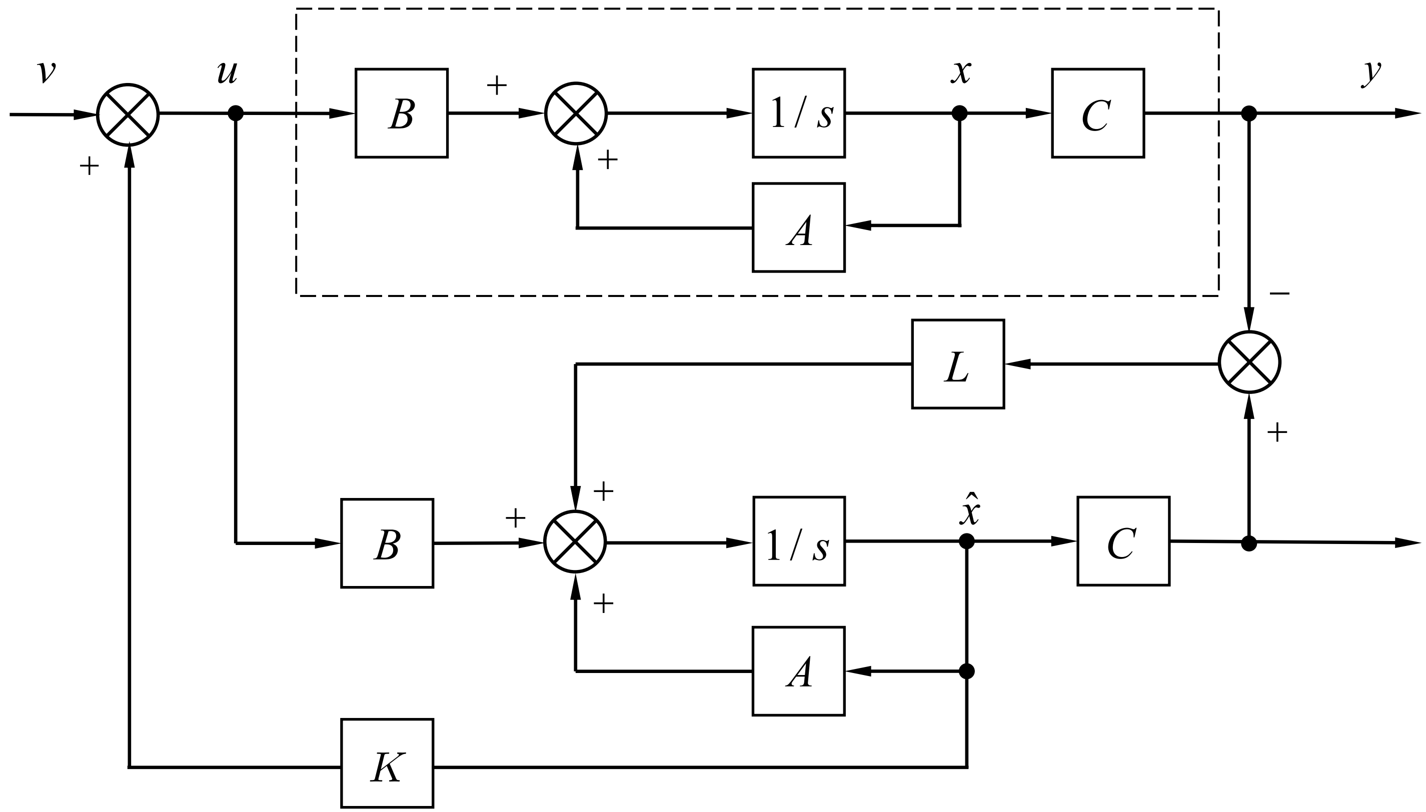
第 5 步. 降维观测器为

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 60 \\ 80 \end{bmatrix} y \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 12 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix} y \end{cases}$$

提纲

- 状态反馈
- 输出反馈
- 状态观测器
- 基于观测器的状态反馈

基于观测器的状态反馈



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\hat{x} + Bv \\ \dot{\hat{x}} = -LCx + (A + LC + BK)\hat{x} + Bv \end{cases}$$
$$y = Cx$$

$$z = \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} A & BK \\ -LC & A + LC + BK \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} z \end{cases}$$

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= P^{-1}z \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ x-\hat{x} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\dot{\bar{z}} = \bar{A}\bar{z} + \bar{B}v$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= P^{-1}\begin{bmatrix} A & BK \\ -LC & A+LC+BK \end{bmatrix}P \\ &= \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A+LC \end{bmatrix} \\ \bar{B} &= P^{-1}B = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{C} &= CP = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} A & BK \\ -LC & A+LC+BK \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} z \end{cases}$$

分离原理

$$\tilde{x} = x - \hat{x}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A+LC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} \end{cases}$$

复合系统与状态反馈子系统具有相同的传递函数阵，与观测器部分无关

$$[C \quad 0]\left(sI-\begin{bmatrix}A+BK & -BK\\ 0 & A+LC\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix}=C(sI-A-BK)^{-1}B$$

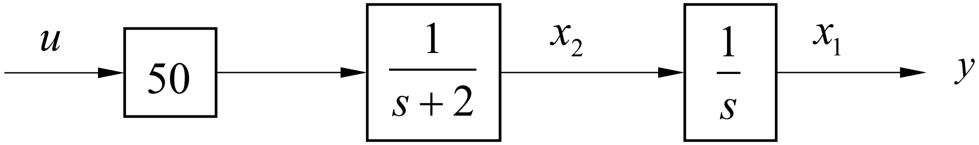
复合系统特征值

$$\begin{vmatrix}sI-A-BK & BK\\ 0 & sI-A-LC\end{vmatrix}=|sI-A-BK|\cdot|sI-A-LC|$$

即复合系统特征值由状态反馈子系统和全维状态观测器的特征值组合而成，两部分特征值相互独立，彼此不受影响。因此状态反馈矩阵K和输出反馈矩阵L可根据各自的要求来独立进行设计。

分离定理

若被控系统(A,B,C)可控可观测，基于状态观测器设计状态反馈时，其系统的极点配置和观测器设计可以分别独立进行，即K和L的设计可分别独立进行。

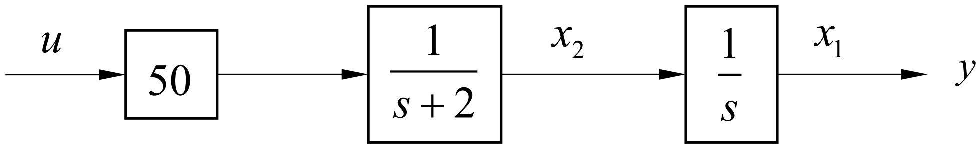


例 9.6:伺服电机的结构框图如图9.4所示

(1) 采用降维观测器重构速度值，要求观测器极点为 -15；

(2) 采用基于观测器的状态反馈使闭环系统位置稳态误差为 0，并且具有最佳阻尼比 $\zeta = 0.707$；

(3) 画出整个闭环系统的方框图。



首先写出对象的状态方程和输出方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + 50u \\ y = x_1 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

显然，系统是完全能观的。由于 $y = x_1$，因此只需构造观测器观测状态 $x_2 = \dot{x}_1$，即电机转速值。

将 A 写成分块矩阵形式

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

由于要求降维观测器的极点为 -15，因此有

$$\det(sI-A_{22}-LA_{12})=s+15 \tag{9.6.12}$$

即

$$s+2-L=s+15$$

于是得到降维观测器观测误差反馈系数为

$$L=-13 \tag{9.6.13}$$

状态 x_2 由如下观测器给出重构值

$$\begin{cases}\dot{z}=(A_{22}+LA_{12})(z-Ly)+B_2u\\ \hat{x}_2=z-Ly\end{cases}$$

其中，$\hat{x}_2$ 为 x_2 的重构值，代入相应数据得到

$$\begin{cases}\dot{z}=-15\hat{x}_2+50u\\ \hat{x}_2=z+13y\end{cases}$$

(2) 设计状态反馈 $u = Rv - K\hat{x}$

开环对象的传递函数为 $\frac{50}{\alpha(s)}$。不考虑状态观测器，原对象在状态反馈下仍是一个形如 $\frac{50}{\alpha^*(s)}$ 的二阶系统，这里 $\alpha^*(s)$ 表示期望特征多项式。由于要求位置稳态一个形如 $\frac{50R}{\alpha^*(s)}$ 的二阶系统，这里 $\alpha^*(s)$ 表示期望特征多项式。由于要求位置稳态误差为零，因此闭环稳态放大倍数应为 1。于是可设

$$\frac{50R}{\alpha^*(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

其中，ω_n 是自然振荡频率；ζ 是阻尼比。

取 $R = 1$，得 $\omega_\mathrm{n}^2 = 50$。另据要求 $\zeta = 0.707$，因此期望特征多项式为

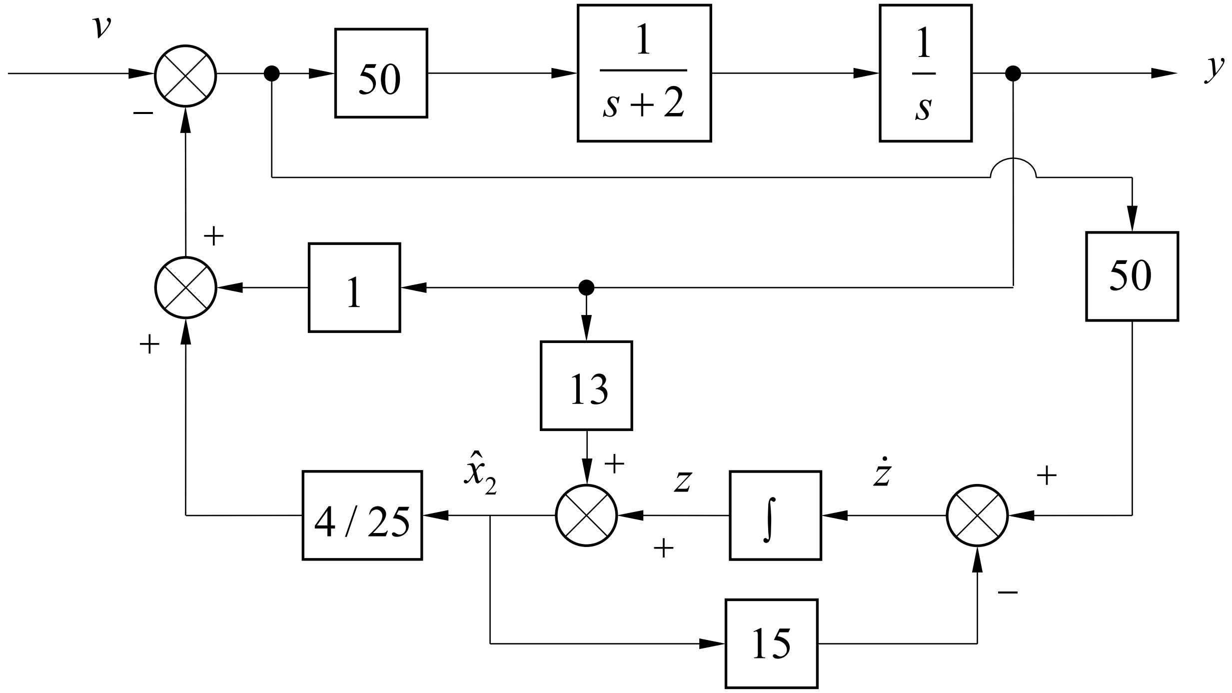
$$\begin{aligned}\alpha^*(s) &= s^2 + 2 \times 0.707 \times \sqrt{50}s + 50 \\ &= s^2 + 10s + 50\end{aligned}$$

记 $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$，则

$$\begin{aligned} & \det(sI - (A - BK)) \\ = & \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ 50k_1 & s + 2 + 50k_2 \end{bmatrix} \\ = & s^2 + (2 + 50k_2)s + 50k_1 \\ = & s^2 + 10s + 50 \end{aligned}$$

于是得到 $k_1 = 1, k_2 = 4/25$，即

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 4/25 \end{bmatrix}$$



v
−
50
1
s+2
1
s
y
+
+
1
50
13
+
z
ż
+
4/25
x̂2
+
∫
−
15