第二章 对偶理论

谢秉磊

第二章 对偶理论

第四节 线性规划问题的灵敏度分析

$$
\begin{aligned}
(P)\ \min S &= CX \\
AX &= b \\
X &\geq 0
\end{aligned}
$$

已知C, A, b, 求 X^*

灵敏度分析解决以下两个问题：

1) c_j, a_{ij}, b_i 在什么范围内变化时，X^*不变。

2) 如果 X^* 发生变化，如何用最简便的方法求出新的最优解。

第二章 对偶理论

第四节 线性规划问题的灵敏度分析

- 目标函数成本系数C的灵敏度分析
- 约束右端项b的灵敏度分析
- 约束矩阵A的灵敏度分析

例2-5：

某工厂计划生产三种产品 A_1, A_2, A_3，三种产品每件的收益分别是**2,3,1**，资源总数为：人工为**1**，材料为**3**。每件产品所需人工和材料数如右表，试决定最优的生产方案使该厂收益最大。

	A_1	A_2	A_3	资源
人工	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1
材料	$1/3$	$4/3$	$7/3$	3
收益	2	3	1	

解： 设 A_1, A_2, A_3 的产量分别为 x_1, x_2, x_3

$$\max S = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \le 1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 \le 3 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{标准形}}$

$$\max S = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 = 1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

复习

$$(P_1)\ \min S = CX \quad AX = b \quad X \geq 0$$

$$(P_2)\ \max S = CX \quad AX = b \quad X \geq 0$$

(P_1) 的最优性判别定理：

对于基B，若 $B^{-1}b \geq 0$, $C - C_B B^{-1} A \geq 0$ 则 $X^* = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$是$(P_1)$的最优解。

若有某个 $y_{0j} = c_j - c_B B^{-1} p_j < 0$,

x_j进基做基变量可使目标值 ↓（非退化）

(P_2)的最优性判别定理：

对于基B，若 $B^{-1}b \geq 0$, $C - C_B B^{-1} A \leq 0$ 则 $X^* = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$是$(P_2)$的最优解。

若有某个 $y_{0j} = c_j - c_B B^{-1} p_j > 0$,

x_j进基做基变量可使目标值 ↑.（非退化）

例2-5：

$$\max S = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 = 1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j = c_j$$

$$C_B = (0, 0)$$

$$y_{00} = C_B B^{-1} b$$

初始表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1	0	0
x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
	b	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5

A

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		0	2	3	1	0	0	$y_{0j}=c_j-C_BB^{-1}p_j\le 0$
初始表	x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0	? ✗
	x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1	
		−6	0	1	−1	−6	0	$y_{0j}=c_j-C_BB^{-1}p_j\le 0$
	x_1	3	1	1	1	3	0	? ✗
	x_5	2	0	1	2	−1	1	
		−8	0	0	−3	−5	−1	$y_{0j}=c_j-C_BB^{-1}p_j\le 0$
最优表	x_1	1	1	0	−1	4	−1	? ✓
	x_2	2	0	1	2	−1	1	

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		0	2	3	1	0	0	
初始表	x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0	
	B^{-1}	b	B		p_3	E		
	x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1	
$-C_B B^{-1} b$		-8	0	0	-3	-5	-1	$c_j - C_B B^{-1} p_j$
最优表	x_1	1	1	0	-1	4	-1	
	x_2	2	0	1	2	-1	1	
		$B^{-1}b$	E		$B^{-1}p_3$	B^{-1}		

最优解：$X^* = (1,2,0,\cancel{0,0})^T, S^* = 8$

最优基：$B = (p_1, p_2) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$ $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

第二章 对偶理论

第四节 线性规划问题的灵敏度分析

- 目标函数成本系数C的灵敏度分析
- 约束右端项b的灵敏度分析
- 约束矩阵A的灵敏度分析

一、C的灵敏度分析

（1）c_j 是非基变量 x_j 的系数；

（2）c_{J_r}是第r 个方程的基变量x_{J_r} 的系数；

一、C的灵敏度分析

(1) c_j 是非基变量 x_j 的系数；

设 $c_j \to c_j + \Delta c_j$, 其他参数(C中其他分量, A, b)都不变。

改变量Δc_j只影响 x_j 的检验数 y_{0j}：

一、 C的灵敏度分析

(1) c_j 是非基变量 x_j 的系数；

设 $c_j \to c_j + \Delta c_j$, 其他参数都不变。

改变量 Δc_j 只影响 x_j 的检验数 y_{0j}：

设最优表中 x_j 的原检验数 $y_{0j} = c_j - c_B B^{-1} p_j \le 0$

新检验数 $y'_{0j} = (c_j + \Delta c_j) - c_B B^{-1} p_j$

$= y_{0j} + \Delta c_j$ 仍 ≤ 0

则最优解不变。

续例

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		0	2	3	1	0	0
初始表	x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
	x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
		−8	0	0	−3	−5	−1
最优表	x_1	1	1	0	−1	4	−1
	x_2	2	0	1	2	−1	1

$y'_{0j} = y_{0j} + \Delta c_j$

x_3的系数 $c_3 = 1$有改变量 Δc_3

1) 当$y'_{03} = y_{03} + \Delta c_3 = -3 + \Delta c_3 \le 0$时， 即 $\Delta c_3 \le 3$,

即A_3的单位收益 $\bar{c}_3 = c_3 + \Delta c_3 \le 1 + 3 = 4$ 时，原最优方案不变。

$X^* = (1,2,0,\cancel{0,0})^T$， 生产$A_3$是不经济的。

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		0	2	3	1→6	0	0
初始表	x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
	x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
		−8	0	0	−3→2	−5	−1
最优表	x_1	1	1	0	−1	4	−1
	x_2	2	0	1	2	−1	1

x_3的系数 $c_3 = 1$有改变量Δc_3 1)当$\Delta c_3 \le 3$时，X^*不变

2) 当 $\Delta c_3 > 3$, 即A_3的单位收益 $\bar{c}_3 = c_3 + \Delta c_3 > 4$, 如增加到

$6 = c_3 + \Delta c_3 \longrightarrow \Delta c_3 = 5$时，$y_{03}' = y_{03} + \Delta c_3 = -3 + 5 = 2 > 0$,

X^*不再最优。x_3进基，即生产A_3可以提高收益。

初始表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1 → 6	0	0
x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
	−8	0	0	2	−5	−1
x_1	1	1	0	−1	4	−1
x_2	2	0	1	2	−1	1
	-10	0	-1	0		
x_1	2	1	1/2	0		
x_3	1	0	1/2	1		

$$X^* = (2,0,1)^T$$

$$S^* = 10$$

一、C的灵敏度分析

（1）c_j 是非基变量 x_j 的系数；

（2）c_{J_r}是第r 个方程的基变量x_{J_r} 的系数；

一、C的灵敏度分析

(2) c_{J_r}是第r 个方程的基变量x_{J_r}的系数

当c_{J_r}有改变量Δc_{J_r}时，则C_B 发生变化：$C_B \to C_B + \Delta C_B$

$$\begin{array}{c} x_{J_1}, \cdots, x_{J_r}, \cdots, x_{J_m} \\ C_B = (c_{J_1}, \cdots, c_{J_r}, \cdots, c_{J_m}) \end{array}$$

$$C_B + \Delta C_B = (c_{J_1}, \cdots, c_{J_r} + \Delta c_{J_r}, \cdots, c_{J_m})$$

所有非基变量检验数 $y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j$ 都随之变化，

为使原最优解不变，所有非基变量的新检验数

$$y'_{0j} = c_j - (C_B + \Delta C_B) B^{-1} p_j \le 0$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	2	3	1	0	0	
初始表 x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0	
B^{-1}	b	B		p_3	E		
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0		
$-C_B B^{-1} b$	-8	0	0	-3	-5	-1	$c_j - C_B B^{-1} p_j$
最优表 x_1	1	1	0	-1	4	-1	
x_2	2	0	1	2	-1	1	
	$B^{-1}b$	E		$B^{-1}p_3$	B^{-1}		

$$y'_{0j} = c_j - (C_B + \Delta C_B) B^{-1} p_j$$

$$y'_{03} = 1 - (2 + \Delta c_1, 3)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \Delta c_1 - 3 \le 0 \rightarrow \Delta c_1 \le 3$$

$$y'_{04} = 0 - (2 + \Delta c_1, 3)\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = -4\Delta c_1 - 5 \le 0 \rightarrow \Delta c_1 \ge -5/4$$

$$y'_{05} = 0 - (2 + \Delta c_1, 3)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \Delta c_1 - 1 \le 0 \rightarrow \Delta c_1 \le 1$$

$$-5/4 \le \Delta c_1 \le 1$$

对偶理论2-4

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1	0	0
初始表 x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
	−8	0	0	−3	−5	−1
最优表 x_1	1	1	0	−1	4	−1
x_2	2	0	1	2	−1	1

$y'_{0j} = c_j - (C_B + \Delta C_B)B^{-1}p_j$

$y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \le 0$

$X^* = (1, 2, 0, 0, 0)^T$

$-5/4 \le \Delta c_1 \le 1$

$\bar{c}_1 = c_1 + \Delta c_1$ 在[2-5/4, 2+1]=[3/4, 3]内变化时，原X^*不变，

目标函数多个成本系数同时发生变化

用100%规则检查两个以上变量系数变化情况

- 已知每个系数的变化范围为：

$$L_j \le c_j \le U_j$$

- 定义比率系数 r_j ：

$$r_j = \begin{cases} \Delta c_j / (U_j - c_j) & \Delta c_j \ge 0 \\ \Delta c_j / (L_j - c_j) & \Delta c_j \le 0 \end{cases}$$

- 如果满足 ∑j rj ≤ 1，变化率之和不超过100%，则最优解保持不变；如果上式不满足，最优解可能会发生变化。

第二章 对偶理论

第四节 线性规划问题的灵敏度分析

- 目标函数成本系数C的灵敏度分析
- 约束右端项b的灵敏度分析
- 约束矩阵A的灵敏度分析

二、b的灵敏度分析

当第r个方程右端项 $b_r \to \bar{b}_r$，即 $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \to \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_r \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

而其他参数不变时，问 b_r 在什么范围内变化时，最优基B不变？

分析： 因为b的变化不影响检验数 $y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j$，

所以当 $b \to \bar{b}$ 时，在最优表中 $B^{-1}b \to B^{-1}\bar{b}$，

$\geqslant 0$ 若仍$\geqslant 0$

则最优基B不变。

但最优解和最优值都发生变化：

$$X^* = \begin{pmatrix} B^{-1}\bar{b} \\ 0 \end{pmatrix} \quad S^* = C_B B^{-1}\bar{b}$$

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		0	2	3	1	0	0	
初始表	x_4	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	
	B^{-1}	b	B		p_3	E		
	x_5	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	1	
	$-C_B B^{-1} b$	-8	0	0	-3	-5	-1	$c_j - C_B B^{-1} p_j$
最优表	x_1	1	1	0	-1	4	-1	
	x_2	2	0	1	2	-1	1	
		$B^{-1}b$	E		$B^{-1}p_3$	B^{-1}		

当 $b=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \to \bar{b}=\begin{pmatrix}\bar{b}_1\\3\end{pmatrix}$ 时，为使最优基B不变，

$$B^{-1}\bar{b}=\begin{pmatrix}4 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{b}_1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\bar{b}_1-3\\-\bar{b}_1+3\end{pmatrix}\geq 0 \rightarrow \frac{3}{4}\leq \bar{b}_1 \leq 3$$

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		0	2	3	1	0	0	
初始表	x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0	
	B^{-1}	b	B		p_3	E		
	x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1	
	$-C_BB^{-1}b$	-8	0	0	-3	-5	-1	$c_j-C_BB^{-1}p_j$
最优表	x_1	1	1	0	-1	4	-1	
	x_2	2	0	1	2	-1	1	
		$B^{-1}b$	E		$B^{-1}p_3$	B^{-1}		

当 $b=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\to\bar{b}=\begin{pmatrix}\bar{b}_1\\3\end{pmatrix}$ 时，为使最优基B不变，$\frac{3}{4}\le\bar{b}_1\le 3$

但 X^*,S^*变化为：$X^*=\begin{pmatrix}B^{-1}\bar{b}\\0\end{pmatrix}$　$S^*=C_BB^{-1}\bar{b}$

初始表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1	0	0
x_4	4	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
	-23	0	0	-3	-5	-1
x_1	13	1	0	-1	4	-1
x_2	-1	0	1	2	-1	1

B B^{-1}

$$\frac{3}{4} \le \bar{b}_1 \le 3$$

$$B = (p_1, p_2)$$

不是可行基

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

当 $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \to \bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ 时，$B^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$S = C_B B^{-1}\bar{b} = (2,3)\begin{pmatrix} 13 \\ -1 \end{pmatrix} = 23$$

初始表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1	0	0
x_4	4	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
	−23	0	0	−3	−5	−1
x_1	13	1	0	−1	4	−1
x_2	−1	0	1	2	−1	1

B（labels the x_1, x_2 columns of the x_4, x_5 rows）　B^{-1}（labels the x_4, x_5 columns of the x_1, x_2 rows）

$B=(p_1,p_2)$

不是可行基

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

当 $b=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\to\bar{b}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ 时，$B^{-1}\bar{b}=\begin{pmatrix}13\\-1\end{pmatrix}$　$S=C_B B^{-1}\bar{b}=23$

但此时所有检验数仍 ≤ 0，所以B是正则基。

可用对偶单纯形法求新的最优解。

初始表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1	0	0
x_4	4	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
	−23	0	0	−3	−5	−1
x_1	13	1	0	−1	4	−1
x_2	−1	0	1	2	−1	1

$$\max S = CX$$
$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

$$\min S = CX$$
$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

$$\varepsilon = \min\{\frac{y_{0j}}{y_{rj}} \bigg| y_{rj} < 0\} = \frac{y_{0k}}{y_{rk}} \rightarrow x_k \text{为进基变量}$$

$$\varepsilon = \min\{\frac{y_{0j}}{-y_{rj}} \bigg| y_{rj} < 0\} = \frac{y_{0k}}{y_{rk}} \rightarrow x_k \text{为进基变量}$$

初始表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1	0	0
x_4	4	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
	−23	0	0	−3	−5	−1
x_1	13	1	0	−1	4	−1
x_2	−1	0	1	2	−1	1
x_1						
x_4						

初始表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1	0	0
x_4	4	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
	−23	0	0	−3	−5	−1
x_1	13	1	0	−1	4	−1
x_2	−1	0	1	2	−1	1
x_1						
x_4	1	0	−1	−2	1	−1

初始表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1	0	0
x_4	4	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
	−23	0	0	−3	−5	−1
x_1	13	1	0	−1	4	−1
x_2	−1	0	1	2	−1	1
x_1	9	1	4	7	0	3
x_4	1	0	−1	−2	1	−1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1	0	0
初始表 x_4	4	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
	−23	0	0	−3	−5	−1
x_1	13	1	0	−1	4	−1
x_2	−1	0	1	2	−1	1
	−18	0	−5	−13	0	−6
最优表 x_1	9	1	4	7	0	3
x_4	1	0	−1	−2	1	−1

$$X^* = (9,0,0)^T$$

$$S^* = 18$$

多选题 1分

设置

此题未设置答案，请点击右侧设置按钮

关于原问题与对偶问题的解之间的关系，说法正确的是（）

A 若原问题有可行解，则其对偶问题也一定有可行解。

B 若原问题有最优解，其对偶问题也一定有最优解。

C 若原问题和对偶问题均存在可行解，则两者均存在最优解。

D 若线性规划的原问题有无穷多最优解，则其对偶问题也一定具有无穷多最优解。

提交

第二章 对偶理论

第四节 线性规划问题的灵敏度分析

- 目标函数成本系数C的灵敏度分析
- 约束右端项b的灵敏度分析
- 约束矩阵A的灵敏度分析

约束矩阵A的灵敏度分析

- 某个元素a_{ij}有改变量Δa_{ij}
- 增加新的一列(即增加一个新的变量)
- 增加新的一行(即增加一个新的约束)

三、A的灵敏度分析

(1) 某个元素 a_{ij} 有改变量 Δa_{ij}，且它是非基列 p_j 的分量：

$$p_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \rightarrow \overline{p}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} + \Delta a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

三、A的灵敏度分析

(1) 某个元素 a_{ij} 有改变量 Δa_{ij}，且它是非基列 p_j 的分量：

$$p_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \rightarrow \bar{p}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} + \Delta a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

非基变量x_j的原检验数 $y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \le 0$

非基变量x_j的新检验数 $y'_{0j} = c_j - C_B B^{-1} \bar{p}_j \le 0$

则原最优解不变。

若 $y'_{0j} = c_j - C_B B^{-1} \bar{p}_j > 0$，则原最优解不再是最优解。

让 x_j进基进行换基运算求出新的最优解。

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1	0	0
初始表 x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
B^{-1}	b	B		p_3	E	
$-C_B B^{-1} b$	-8	0	0	-3	-5	$-$
最优表 x_1	1	1	0	-1	4	-1
x_2	2	0	1	2	-1	1
	$B^{-1}b$	E		$B^{-1}p_3$	B^{-1}	

$y'_{0j} = c_j - C_B B^{-1} \bar{p}_j \le 0$

$y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \le 0$

$a_{13} = 1/3$有改变量Δa_{13}，求Δa_{13}的范围使原X^*不变。

$$p_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} \to \bar{p}_3 = \begin{pmatrix} 1/3 + \Delta a_{13} \\ 7/3 \end{pmatrix} \qquad \lambda = C_B B^{-1} = (2,3)\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (5 \quad 1)$$

$$y'_{03} = c_3 - C_B B^{-1} \bar{p}_3 = 1 - (5,1)\begin{pmatrix} 1/3 + \Delta a_{13} \\ 7/3 \end{pmatrix} = -3 - 5\Delta a_{13} \le 0 \to \Delta a_{13} \ge -3/5$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1	0	0
初始表 x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
B^{-1}	b	B		p_3	E	
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
$-C_B B^{-1} b$	-8	0	0	-3	-5	$-$
最优表 x_1	1	1	0	-1	4	-1
x_2	2	0	1	2	-1	1
	$B^{-1}b$	E		$B^{-1}p_3$	B^{-1}	

$y'_{0j} = c_j - C_B B^{-1} \bar{p}_j \le 0$

$y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \le 0$

$a_{13} = 1/3$ 有改变量 Δa_{13}，求 Δa_{13} 的范围使原 X^* 不变。

$$p_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} \to \bar{p}_3 = \begin{pmatrix} 1/3 + \Delta a_{13} \\ 7/3 \end{pmatrix} \quad y'_{03} = c_3 - C_B B^{-1} \bar{p}_3 = -3 - 5\Delta a_{13} \le 0 \quad \Delta a_{13} \ge -3/5$$

即 $\bar{a}_{13} = a_{13} + \Delta a_{13} \ge \frac{1}{3} - \frac{3}{5} = -\frac{4}{15}$，原最优解不变。

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1	0	0
初始表 x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
	−8	0	0	−3	−5	−1
最优表 x_1	1	1	0	−1	4	−1
x_2	2	0	1	2	−1	1

B　B^{-1}

$X^* = (1,2,0)^T$

$S^* = 8$

最优基

$B = (p_1, p_2)$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

注意：不去讨论基变量 x_{J_j} 的系数列 p_{J_j} 的某个元素 a_{iJ_j} 的改变对 X^* 的影响。比如：p_1 中的1/3改变，

$$p_1\text{变} \rightarrow B\text{变} \rightarrow B^{-1}\text{变} \rightarrow \begin{cases} y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \text{变} \\ B^{-1}b\text{变，} C_B B^{-1} b\text{变} \end{cases}$$

约束矩阵的A灵敏度分析

- 某个元素a_{ij}有改变量Δa_{ij}
- 增加新的一列(即增加一个新的变量)
- 增加新的一行(即增加一个新的约束)

三、A的灵敏度分析

(2) 增加新的一列(即增加一个新的变量)

设增加变量 x_{n+1} ,对应的成本系数为c_{n+1}， 系数列 p_{n+1}

即在单纯形表中新增加一列：

$$c_{n+1}$$
$$x_{n+1}$$
$$p_{n+1}$$

则在最优表中 x_{n+1} 的检验数为： $y_{0n+1}=c_{n+1}-C_B B^{-1} p_{n+1}$

若 $y_{0n+1}\leq 0$, 则原最优解不变；

若 $y_{0n+1}>0$, 则原最优解不再最优。x_{n+1} 进基， 求新的最优解。

例2-2：

$$\max S = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 = 1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

	A_1	A_2	A_3	资源	A_4 (x_6)
人工	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
材料	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	3	$\frac{1}{3}$
收益	2	3	1		c_6

问单位收益c_6为多少时，才有利于A_4的投产？

即c_6为何值时，$y_{06} > 0$？

分析：

$y_{06} > 0$ → x_6进基 → $x_6 > 0$ → A_4投产

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	0	2	3	1	0	0	c_6	$S^*=8$
初始表 x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0	$1/3$	
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1	$1/3$	
	−8	0	0	−3	−5	−1	$c_6-C_BB^{-1}p_6$	
最优表 x_1	1	1	0	−1	4	−1	$B^{-1}p_6$	
x_2	2	0	1	2	−1	1		

B　　B^{-1}

$$y_{06}=c_6-\underline{C_BB^{-1}}p_6=c_6-(5,1)\begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix}\qquad X^*=(1,2,0,0)^T$$

$$=c_6-2\begin{cases}\le 0 \rightarrow \text{当 } c_6\le 2\text{时}, x_6=0, \text{即生产}A_4\text{不利}\\ >0 \rightarrow \text{当 } c_6>2\text{时}, x_6>0, \text{即生产}A_4\text{有利}\end{cases}$$

(进基)

对偶理论2-4

约束矩阵的A灵敏度分析

- 某个元素a_{ij}有改变量Δa_{ij}
- 增加新的一列(即增加一个新的变量)
- 增加新的一行(即增加一个新的约束)

三、A的灵敏度分析

$$\min S = CX$$
$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

(3) 增加新的一行(即增加一个新的约束)

设增加新的约束为：$a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \cdots + a_{m+1,n}x_n \leq b_{m+1}$

a) 如果原最优解满足新约束，则原最优解仍是最优的。

b) 如果原最优解不满足新约束，则原最优解不再最优。

为了寻求新的最优解，在新约束中加松弛变量 x_{n+1}，

$$a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \cdots + a_{m+1,n}x_n + x_{n+1} = b_{m+1}$$

在原最优表中增加新的一行(对应新约束)，然后用对偶单纯形法求新的最优解。

例2-2：

增加一个新约束：

工时	1	2	1	b_3
	A_1	A_2	A_3	资源
人工	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1
材料	$1/3$	$4/3$	$7/3$	3
收益	2	3	1	

生产三种产品每件所需检验工时分别为1，2，1，且可供检验的时间为b_3

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le b_3$$

求 b_3 的范围使原最优解不变。

分析：

a) 将原最优解 $X^* = (1,2,0)^T$ 代入新约束：

$$5 = 1 + 2\times 2 + 0 \le b_3$$

即当 $b_3 \ge 5$ 时，原最优解不变。

例2-2：

增加一个新约束：

工时	1	2	1	b_3
	A_1	A_2	A_3	资源
人工	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1
材料	$1/3$	$4/3$	$7/3$	3
收益	2	3	1	

生产三种产品每件所需检验工时分别为1，2，1，且可供检验的时间为b_3

$$x_1+2x_2+x_3\le b_3$$

求 b_3 的范围使原最优解不变。

b) 当检验工时 $b_3<5$ 时，如 $b_3=4$，

此时新约束为 $x_1+2x_2+x_3\le 4$. 加入该约束后，原最优解已不可行。为了寻求新的最优解，在新约束中引入松弛变量 x_6，即 $x_1+2x_2+x_3+x_6=4$ 加到原最优表中的第三行进行迭代。

原最优表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	-8	0	0	-3	-5	-1	0
x_1	1	1	0	-1	4	-1	0
x_2	2	0	1	2	-1	1	0
x_6	4	1	2	1	0	0	1

$r_3 - r_1$

$r_3 - 2r_2$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 4$$

原最优表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	−8	0	0	−3	−5	−1	0
x_1	1	1	0	−1	4	−1	0
x_2	2	0	1	2	−1	1	0
x_6	4	1	2	1	0	0	1
	−8	0	0	−3	−5	−1	0
x_1	1	1	0	−1	4	−1	0
x_2	2	0	1	2	−1	1	0
x_6	−1	0	0	−2	−2	−1	1

$r_3 - r_1$

$r_3 - 2r_2$

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{-3}{-2}, \frac{-5}{-2}, \frac{-1}{-1}\right\} = 1$$

x_5为进基变量

原最优表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	-8	0	0	-3	-5	-1	0
x_1	1	1	0	-1	4	-1	0
x_2	2	0	1	2	-1	1	0
x_6	4	1	2	1	0	0	1
	-8	0	0	-3	-5	-1	0
x_1	1	1	0	-1	4	-1	0
x_2	2	0	1	2	-1	1	0
x_6	-1	0	0	-2	-2	-1	1
	-7	0	0	-1	-3	0	-1
x_1	2	1	0	1	6	0	-1
x_2	1	0	1	0	-3	0	1
x_5	1	0	0	2	2	1	-1

最优表

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{-3}{-2}, \frac{-5}{-2}, \frac{-1}{-1}\right\} = 1$$

x_5为进基变量

$$X^* = (2,1,0)^T$$

$$S^* = 7$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4$$

第二章 对偶理论

第四节 线性规划问题的灵敏度分析

- 目标函数成本系数C的灵敏度分析
- 约束右端项b的灵敏度分析
- 约束矩阵A的灵敏度分析

作业：第二章课后习题 3

选作题

三、某厂生产 I、II、III 三种产品，分别经过 A、B、C 三种设备加工。已知生产单位产品所需的设备台时、设备的现有加工能力及每件产品的预期利润见下表。

	I	II	III	设备能力/台时
A	1	1	1	100
B	10	4	5	600
C	2	2	6	300
单位产品利润/元	10	6	4	

（1）求获利最大的产品生产计划；

（2）设备 A 的生产能力如为 100+ф，确定保持最优解不变的 ф 的变化范围；

（3）如产品 III 每件利润增加到 50，求最优计划的变化；

（4）如有一种新产品，加工一件需要设备 A、B、C 的台时分别为 1、4、3，预期每件利润为 8 元，是否值得安排生产？（25 分）