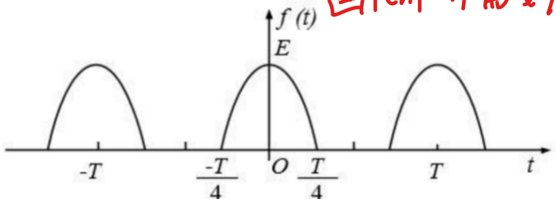
1. 求题图 2-1 所示半波余弦信号的三角傅里叶级数。若 $E = 10\,\text{V}$，$f = 10\,\text{kHz}$，基于$|c_n|$画出该信号的幅度谱，在画图时将横轴对应频率的单位转为 Hz。（20 分）

画$|c_n|$ 不需要φ_n



$f(t)=\cos\omega_1 t,\ \omega_1=\frac{2\pi}{T}=2\pi f,\ t\in[-\frac{T}{4},\frac{T}{4}]$

公式 $\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$

$\cos^2\theta=\frac{1}{2}[1+\cos2\theta]$

其中 $\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}$，$f_1=\frac{1}{T}=10\text{kHz}$

$T=10^{-4}\text{s}$

$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)dt$

$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cos n\omega_1 t\,dt$

$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\sin n\omega_1 t\,dt$

解 $f(t)$为偶函数，$b_n=0$，$|c_n|=|a_n|$，

$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}E\cos\omega_1 t\,dt=\frac{E}{\pi}$

$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega_1 t\,dt=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{4}}E\cos\omega_1 t\cos n\omega_1 t\,dt=\frac{4E}{T}\int_0^{\frac{T}{4}}\cos\omega_1 t\cos n\omega_1 t\,dt$

$=\frac{2E}{T}\int_0^{\frac{T}{4}}\cos[(n+1)\omega_1 t]dt+\frac{2E}{T}\int_0^{\frac{T}{4}}\cos[(n-1)\omega_1 t]dt=\frac{E}{\pi(n+1)}\sin[(n+1)\frac{\omega_1 T}{4}]+\frac{E}{\pi(n-1)}\sin[(n-1)\frac{\omega_1 T}{4}]$

$=\frac{E}{\pi(n+1)}\sin\frac{(n+1)}{2}\pi+\frac{E}{\pi(n-1)}\sin\frac{(n-1)}{2}\pi$

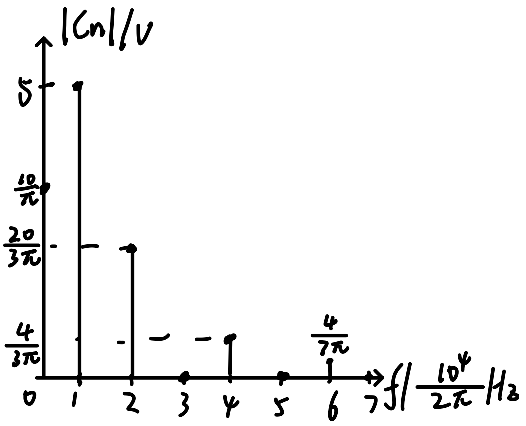
当n为奇时 $a_n=0$ $(n\neq1)$

当n为偶数时 $|a_n|=\frac{E}{\pi}[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}]=\frac{2E}{\pi(n^2-1)}$ ⇒ 只需$|a_n|$而不需a_n

特别地，$a_1=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{4}}E\cos^2\omega_1 t\,dt=\frac{E}{2}+0=\frac{E}{2}=5V$ ⇒ 注意特殊情况.

单位换算 $\text{rad}/10^{-4}\text{s}\rightarrow\frac{10^4}{2\pi}\text{Hz}$

22-PSP



综上

$$|c_n|=\begin{cases}\frac{10}{\pi}V, & n=0\\ 5V, & n=1\\ 0, & n=2k+1,k\in Z\\ \frac{20}{\pi(n^2-1)}V, & n=2k,k\in Z\end{cases}$$

2. 求解题图 2-2 (a)、(b) 所示的锯齿脉冲与单周正弦脉冲的傅里叶变换，给出频谱密度函数的表达式。（20 分）

$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$

22-PSP

已知:

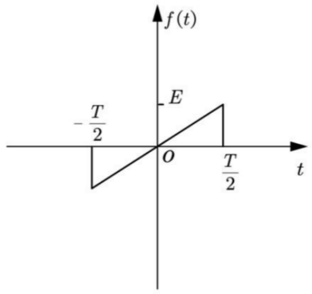
$u(t)\xrightarrow{\mathscr{F}}\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$

$\delta(t)\xrightarrow{\mathscr{F}}1$

$f(t-t_0)\xrightarrow{\mathscr{F}}e^{-j\omega t_0}F(\omega)$

$f'(t)\xrightarrow{\mathscr{F}}j\omega F(\omega)$

$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\xrightarrow{\mathscr{F}}\frac{1}{j\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$



$e^{j\theta}+e^{-j\theta}=2\cos\theta$

$e^{j\theta}-e^{-j\theta}=2j\sin\theta$

解 (a) 斜率 $k=\frac{2E}{T}$

利用 $\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau \underset{\mathscr{F}^{-1}}{\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}} \frac{1}{j\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$

单独求出

$f(t)=-E[u(t+\frac{T}{2})+u(t-\frac{T}{2})]+\frac{2E}{T}[r(t+\frac{T}{2})-r(t-\frac{T}{2})]$

$f'(t)=-E[\delta(t+\frac{T}{2})+\delta(t-\frac{T}{2})]+\frac{2E}{T}[u(t+\frac{T}{2})-u(t-\frac{T}{2})]$ 可以直接用结论 $ETSa(\frac{\omega T}{2})$

先求 $f'(t)$ 的傅氏变换: $f'(t)$ 为实偶函数, 故 $\mathscr{F}[f'(t)]$ 也为实偶函数

$\mathscr{F}[f'(t)]=-E[e^{j\omega\frac{T}{2}}+e^{-j\omega\frac{T}{2}}]+\frac{2E}{T}[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}](e^{j\omega\frac{T}{2}}-e^{-j\omega\frac{T}{2}})$

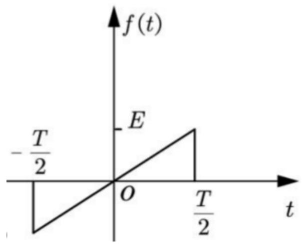
记为 $G(\omega)=-2E\cos(\frac{\omega T}{2})+\frac{4E}{\omega T}\sin(\frac{\omega T}{2})$ (虚部为零).

$G(0)=-2E+2E\lim_{\omega\to 0}\frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}}=-2E+2E=0$

从而 $F(\omega)=\mathscr{F}[\int_{-\infty}^{t}f'(\tau)]=\frac{1}{j\omega}G(\omega)+0=\frac{2E}{j\omega}[-\cos(\frac{\omega T}{2})+Sa(\frac{\omega T}{2})]$

也可写成 $=\frac{2jE}{\omega}\cos(\frac{\omega T}{2})-\frac{4jE}{\omega^2T}\sin(\frac{\omega T}{2})$

2(a) 求法二: 定义法



由图可知 $f(t)=\begin{cases}\frac{2E}{T}t & -\frac{T}{2}\le t\le\frac{T}{2}\\ 0 & 其他\end{cases}$

故 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{2E}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}te^{-j\omega t}dt$

其中 $\int te^{-j\omega t}dt=-\frac{1}{j\omega}\int t\,de^{-j\omega t}=\frac{j}{\omega}[te^{-j\omega t}+\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}]$

同时 $e^{j\theta}+e^{-j\theta}=2\cos\theta$, $e^{j\theta}-e^{-j\theta}=2j\sin\theta$

故原式 $=\frac{2E}{T}\cdot\frac{j}{\omega}[te^{-j\omega t}+\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}=\frac{2jE}{\omega T}[\frac{T}{2}e^{-j\omega\frac{T}{2}}+\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega\frac{T}{2}}+\frac{T}{2}e^{j\omega\frac{T}{2}}-\frac{1}{j\omega}e^{j\omega\frac{T}{2}}]$

$=\frac{2jE}{\omega T}[\frac{T}{2}(e^{-j\omega\frac{T}{2}}+e^{j\omega\frac{T}{2}})-\frac{1}{j\omega}(e^{j\omega\frac{T}{2}}-e^{-j\omega\frac{T}{2}})]$

$=\frac{2jE}{\omega T}[\frac{T}{2}\cdot 2\cos(\frac{\omega T}{2})-\frac{1}{j\omega}2j\sin(\frac{\omega T}{2})]$

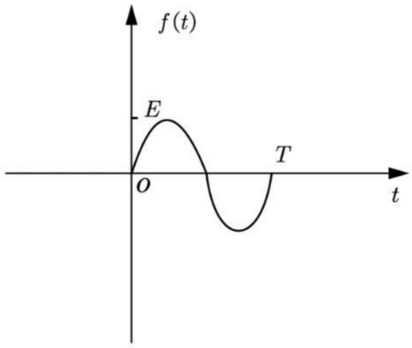
$=\frac{2jE}{\omega}\cos(\frac{\omega T}{2})-\frac{4jE}{\omega^2T}\sin(\frac{\omega T}{2})$

与法一结果一致 $\frac{2E}{j\omega}[-\cos(\frac{\omega T}{2})+Sa(\frac{\omega T}{2})]$

2. 求解题图 2-2 (a)、(b) 所示的锯齿脉冲与单周正弦脉冲的傅里叶变换，给出频谱密度函数的表达式。（20 分）

$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$

22-PSP



公式：$\sin\theta=\frac{1}{2j}[e^{j\theta}-e^{-j\theta}]$ $\quad e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$

$\Rightarrow e^{j2\pi}=1,\ e^{-j2\pi}=1$ 其中 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$

定义法

(b) $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=E\int_0^T\sin\omega_0 t\, e^{-j\omega t}dt$

$=\frac{E}{2j}\int_0^T[e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}]e^{-j\omega t}dt$

$=\frac{E}{2j}\int_0^T[e^{j(\omega_0-\omega)t}-e^{-j(\omega_0+\omega)t}]dt$

$=\frac{E}{2j}\left[\frac{1}{j(\omega_0-\omega)}e^{j(\omega_0-\omega)t}\Big|_0^T+\frac{1}{j(\omega_0+\omega)}e^{-j(\omega_0+\omega)t}\Big|_0^T\right]$

$=-\frac{E}{2}\left\{\frac{1}{\omega_0-\omega}[e^{j(\omega_0-\omega)T}-1]+\frac{1}{\omega_0+\omega}[e^{-j(\omega_0+\omega)T}-1]\right\}$

$=\frac{E}{2}\frac{(\omega+\omega_0)(e^{-j\omega T}-1)-(\omega-\omega_0)(e^{-j\omega T}-1)}{\omega^2-\omega_0^2}$

$=\frac{E}{2}\frac{2\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}(e^{-j\omega T}-1)=\frac{\omega_0 E}{\omega^2-\omega_0^2}(e^{-j\omega T}-1)$

求法二：加窗法

注意到 $1\xrightarrow{\mathcal{F}}2\pi\delta(\omega)$，$u(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$ $\quad\omega_0=\frac{2\pi}{T}$

$e^{j\omega_0 T}=e^{-j\omega_0 T}=e^{2\pi}=e^{-2\pi}=1$，$\sin(\omega_0 t)\xrightarrow{\mathcal{F}}j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$

频域卷积定理

$f(t)=g(t)h(t)$

$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}G(\omega)*H(\omega)$

记 $g(t)=E\sin(\omega_0 t)$，$t\in(-\infty,+\infty)$，$h(t)=u(t)-u(t-T)$，$f(t)=g(t)h(t)$

$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}[G(\omega)*H(\omega)]=\frac{1}{2\pi}[jE\pi(\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0))]*[(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega})(1-e^{-j\omega T})]$

$=\frac{jE}{2}\left\{[\pi\delta(\omega+\omega_0)+\frac{1}{j(\omega+\omega_0)}][1-e^{-j(\omega+\omega_0)T}]-[\pi\delta(\omega-\omega_0)+\frac{1}{j(\omega-\omega_0)}][1-e^{-j(\omega-\omega_0)T}]\right\}$

$=\pi\delta(\omega+\omega_0)[1-1]=0$ $\qquad =0$

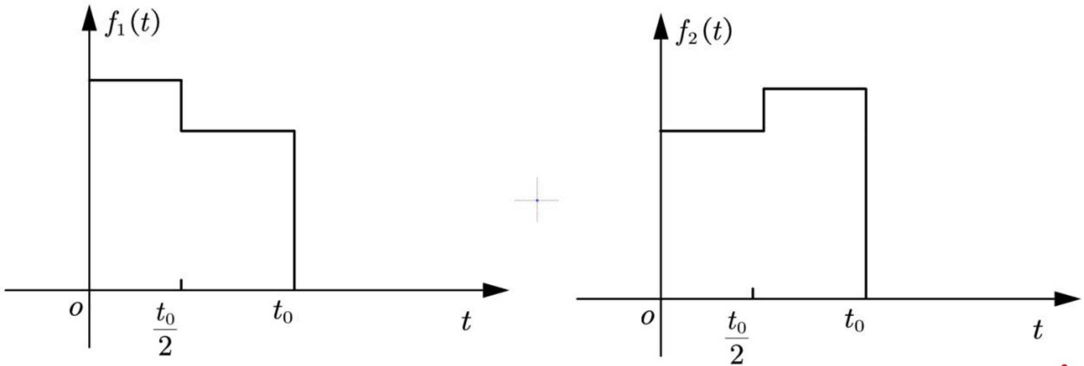
$=\frac{E}{2}\left[\frac{1-e^{-j\omega T}}{\omega+\omega_0}-\frac{1-e^{-j\omega T}}{\omega-\omega_0}\right]=\frac{E}{2}\frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}[-2\omega_0+2\omega_0 e^{-j\omega T}]$

$=\frac{\omega_0 E}{\omega^2-\omega_0^2}(e^{-j\omega T}-1)=\frac{-2j\omega_0 E}{\omega^2-\omega_0^2}\sin(\frac{\omega T}{2})e^{-j\omega\frac{T}{2}}$

说明可以先求以原点为中心的频谱 最后再平移$\frac{T}{2}$

22-PSP

3. 对题图 2-3 所示波形，若已知 $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$，利用傅里叶变换的性质，求 $f_1(t)$ 以 $\frac{t_0}{2}$ 为轴翻转后所得 $f_2(t)$ 的傅里叶变换。（20 分）



题图 2-3

解. $f_2(t)=f_1(-t+t_0)$

由傅氏变换的性质 $f_1(t)\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega)$

$f_1(t+t_0)\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{j\omega t_0}F_1(\omega)$

$f_1(-t+t_0)\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{j(-\omega)t_0}F_1(-\omega)$

从而. $\mathcal{F}[f_2(t)]=e^{-j\omega t_0}F_1(-\omega)$

$f(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}F(\omega)$

$\Rightarrow f(-t)\xrightarrow{\mathcal{F}}F(-\omega)$

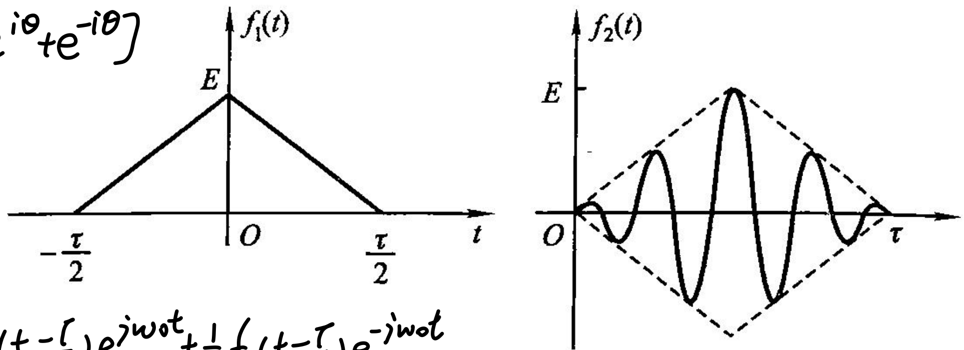
4. 已知三角脉冲 $f_1(t)$ 的傅里叶变换为：

$$F_1(\omega) = \frac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

求 $f_2(t) = f_1\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\cos(\omega_0 t)$ 的傅里叶变换$F_2(\omega)$。$f_1(t)$，$f_2(t)$的波形如题图 2-4 所示。（20 分）

时移+频移

公式. $\cos\theta=\frac{1}{2}[e^{i\theta}+e^{-i\theta}]$



题图 2-4

解. $f_2(t)=\frac{1}{2}f_1(t-\frac{\tau}{2})e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}f_1(t-\frac{\tau}{2})e^{-j\omega_0 t}$

其中. $f_1(t-\frac{\tau}{2})\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}F_1(\omega)$

$f_1(t-\frac{\tau}{2})e^{j\omega_0 t}\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j(\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}}F_1(\omega-\omega_0)$

$f_1(t-\frac{\tau}{2})e^{-j\omega_0 t}\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{j(\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}}F_1(\omega+\omega_0)$

注意符号

从而. $F_2(\omega)=\mathcal{F}[f_2(t)]$

$=\frac{1}{2}\left[e^{-j(\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}}F_1(\omega-\omega_0)+e^{-j(\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}}F_1(\omega+\omega_0)\right]$

$=\frac{E\tau}{4}e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}\left[Sa^2(\frac{\omega-\omega_0}{4}\tau)e^{j\omega_0\frac{\tau}{2}}+Sa^2(\frac{\omega+\omega_0}{4}\tau)e^{-j\omega_0\frac{\tau}{2}}\right]$

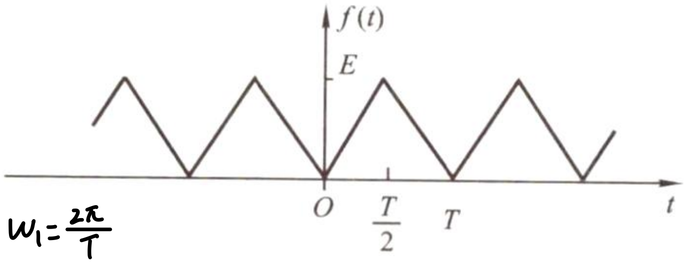
22-PSP

5. 已知一个如下图所示的周期三角波信号$f(t)$：

$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)dt$$

$$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\cos n\omega_1 t\, dt$$

$$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\sin n\omega_1 t\, dt$$



$\omega_1=\frac{2\pi}{T}$

题图 2-5

（1）求$f(t)$的傅里叶级数系数a_0、a_n、b_n，写出完整的傅里叶级数表达式；

（2）用一个幅值为 E、脉宽为 T 的矩形脉冲为$f(t)$加窗取 $t\in[0,T]$ 的部分，记为信号$g(t)$，求$g(t)$的傅里叶变换$G(\omega)$；

时域采样（3）对$g(t)$以等间隔 $T/10$ 进行理想采样（冲激采样），求所得采样信号的频谱$G_s(\omega)$。（20 分）

解. (1) $f(t)$为偶函数, $b_n=0$, $a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{2E}{T}t\,dt=\frac{4E}{2T^2}t^2\Big|_0^{\frac{T}{2}}=\frac{E}{2}$

$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_1 t\,dt=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{2E}{T}t\cos n\omega_1 t\,dt=\frac{8E}{T^2}\int_0^{\frac{T}{2}} t\cos n\omega_1 t\,dt$

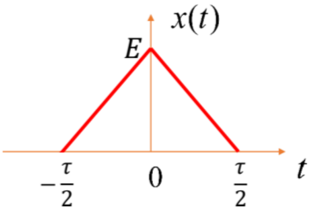
由于$\int t\cos n\omega_1 t\,dt=\frac{1}{n\omega_1}\int t\,d\sin n\omega_1 t=\frac{1}{n\omega_1}[t\sin n\omega_1 t-\int\sin n\omega_1 t\,dt]=\frac{1}{n\omega_1}t\sin n\omega_1 t+\frac{1}{n^2\omega_1^2}\cos n\omega_1 t+C$, 代入, 得

$a_n=\frac{8E}{T^2}\left[\frac{1}{n\omega_1}t\sin n\omega_1 t\Big|_0^{\frac{T}{2}}+\frac{1}{n^2\omega_1^2}\cos n\omega_1 t\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right]=\frac{8E}{T^2}\left[0+\frac{1}{n^2\omega_1^2}(\cos n\pi-1)\right]=\frac{2E}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\frac{-4E}{n^2\pi^2}$ $(n=2k+1)$

从而 $f(t)=\frac{E}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4E}{(2k-1)^2\pi^2}\cos\left[(2k-1)\frac{2\pi}{T_1}t\right]$

(2) 已有三角形脉冲信号频谱为 $X(\omega)=\frac{E\tau}{2}Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$

三角形脉冲信号



$g(t)$相比$x(t)$幅值$\times E$倍, $\tau=T$, 向右平移$\frac{T}{2}$单位

由傅里叶变换的线性与时域移位定理.

$G(\omega)=\frac{E^2T}{2}Sa^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)e^{-j\omega\frac{T}{2}}$

(3) 第二章理想采样公式 $F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)$

此处 $T_s=\frac{T}{10}$, $\omega_s=\frac{2\pi}{T_s}=\frac{20\pi}{T}$

$G_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}G(\omega-n\omega_s)=5E^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa^2\left(\frac{\omega-n\omega_s}{4}T\right)e^{-j(\omega-n\omega_s)\frac{T}{2}}$

$=5E^2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Sa^2\left(\frac{\omega T}{4}-5n\pi\right)e^{-j(\frac{\omega T}{2}-10n\pi)}$ 由于复指数函数周期为$2k\pi$

$=5E^2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Sa^2\left(\frac{\omega T}{4}-5n\pi\right)e^{-j\frac{\omega T}{2}}$