第五次作业

2025 年 5 月 23 日

1. 求下列微分方程描述的系统单位冲激响应$h(t)$和单位阶跃响应$c(t)$，方法不限，要求写出详细步骤和解释。（20 分，第一小题 6 分，后面两小题各 7 分）

(1) $\frac{d}{dt}y(t)+3y(t)=2\frac{d}{dt}x(t)$

(2) $\frac{d^2}{dt^2}y(t)+\frac{d}{dt}y(t)+y(t)=\frac{d}{dt}x(t)+x(t)$

(3) $\frac{d}{dt}y(t)+2y(t)=\frac{d^2}{dt^2}x(t)+3\frac{d}{dt}x(t)+3x(t)$

(1) 拉氏变换得 $sY(s)+3Y(s)=2sX(s)$. 则 $G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2s}{s+3}$

① $x(t)=\delta(t)$ $X(s)=1$. 则 $H(s)=G(s)X(s)=\frac{2s}{s+3}=2-\frac{6}{s+3}$

$h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]=2\delta(t)-6e^{-3t}$.

② $x(t)=u(t)$. $X(s)=\frac{1}{s}$. 则 $C(s)=G(s)X(s)=\frac{2}{s+3}$

$c(t)=\mathcal{L}^{-1}[C(s)]=2e^{-3t}$

(2) 拉氏变换得 $s^2Y(s)+sY(s)+Y(s)=sX(s)+X(s)$. 则 $G(s)=\frac{s+1}{s^2+s+1}$

① $x(t)=\delta(t)$. $H(s)=G(s)=\frac{s+1}{s^2+s+1}=\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$

$h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]=e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$

② $x(t)=u(t)$ $c(t)=\int_0^t h(\tau)d\tau=\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\tau}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\tau d\tau+\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\tau}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\tau\, d\tau=I_1+\frac{1}{\sqrt{3}}I_2$.

$I_1=-2\int_0^t\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\tau\, de^{-\frac{1}{2}\tau}=-2e^{-\frac{1}{2}t}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-1)-\sqrt{3}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\tau}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\tau\, d\tau$

$=-2e^{-\frac{1}{2}t}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-1)-\sqrt{3}I_2=-2e^{-\frac{1}{2}t}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-1)+2\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-3I_1$

得 $I_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$ $I_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}(I_1-2+2e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t)$

则 $c(t)=I_1+\frac{\sqrt{3}}{3}I_2=1-e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$

(3) 拉氏变换得 $sY(s)+2Y(s)=s^2X(s)+3sX(s)+3X(s)$，则 $G(s)=\frac{s^2+3s+3}{s+2}=s+1+\frac{1}{s+2}$

① $x(t)=\delta(t)$. $H(s)=G(s)=s+1+\frac{1}{s+2}$. $h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]=\delta'(t)+\delta(t)+e^{-2t}$

② $x(t)=u(t)$. $c(t)=\int_0^t h(\tau)d\tau=\delta(t)+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}$

2. 用计算机对测量的离散数据$x(n)$进行平均处理，当收到一个测量数据后，计算机就把这一次输入数据与前三次输入数据进行平均，要求使用时域分析、频域分析这两种方法，求解这一运算过程的频率响应$H(\Omega)$，注意每种方法都要写出详细步骤和对应的解释。（20 分，每个方法各 10 分）

时域分析：$y(n)=\frac{1}{4}[x(n)+x(n-1)+x(n-2)+x(n-3)]$

假设 $x(n)=e^{j\Omega n}$，$y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)e^{-j\Omega(n-k)}=[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)e^{-j\Omega k}]e^{j\Omega n}=H(\Omega)x(n)$

则 $H(\Omega)=\frac{y(n)}{x(n)}=\frac{1+e^{-j\Omega}+e^{-j2\Omega}+e^{-j3\Omega}}{4}=e^{-j\frac{3}{2}\Omega}\cos\Omega\cos\frac{1}{2}\Omega$

频域分析：由时移性质：$x(n-k)\xleftrightarrow{DTFT}X(\Omega)e^{-jk\Omega}$

对$y(n)$求DTFT得 $Y(\Omega)=\frac{1}{4}[X(\Omega)+e^{-j\Omega}X(\Omega)+e^{-j2\Omega}X(\Omega)+e^{-j3\Omega}X(\Omega)]=\frac{1}{4}X(\Omega)[1+e^{-j\Omega}+e^{-j2\Omega}+e^{-j3\Omega}]$

则 $H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{1+e^{-j\Omega}+e^{-j2\Omega}+e^{-j3\Omega}}{4}=e^{-j\frac{3}{2}\Omega}\cos\Omega\cos\frac{1}{2}\Omega$

3. 若系统函数$H(\omega)=H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1}$，激励为周期信号$x(t)=\sin t+\sin(3t)$，要求回答以下问题。（20 分，每小题 5 分）

(1) 求出响应$y(t)$；

(2) 分别画出$x(t)$、$y(t)$的波形；

(3) 写出信号无失真传输需要满足的条件（时域条件和频域条件）；

(4) 讨论信号经该系统传输是否引起失真。

(1) $X(\omega)=\mathcal{F}[\sin t+\sin 3t]=j\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)+\delta(\omega+3)-\delta(\omega-3)]$

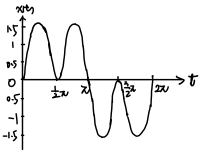
$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)=\frac{j\pi}{j\omega+1}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)+\delta(\omega+3)-\delta(\omega-3)]$

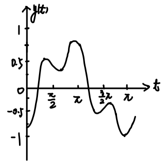
$=j\pi[\frac{\delta(\omega+1)}{1-j}-\frac{\delta(\omega-1)}{1+j}+\frac{\delta(\omega+3)}{1-3j}-\frac{\delta(\omega-3)}{1+3j}]$

则 $y(t)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]=\frac{j-1}{4}e^{-jt}-\frac{j+1}{4}e^{jt}+\frac{j-3}{20}e^{-j3t}-\frac{j+3}{20}e^{j3t}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t-45^\circ)+\frac{\sqrt{10}}{10}\sin(3t-71.565^\circ)$

(2)





(3) ①时域条件：$y(t)=Kx(t-t_0)$

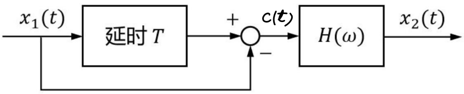
②频域条件：$H(\omega)=Ke^{-j\omega t_0}$，即$|H(\omega)|=K$，$\varphi(\omega)=-\omega t_0$

(4) 题设系统函数$H(\omega)$不满足无失真条件，由图看出信号失真。

4. 已知理想低通滤波特性 $H(\omega)$（亦可写为 $H(j\omega)$）和输入信号 $x_1(t)$ 的表达式：

$$H(\omega)=\begin{cases} e^{-j\omega t_0} & |\omega|\le 1 \\ 0 & |\omega|>1 \end{cases} \qquad\qquad x_1(t)=\frac{2\sin(t/2)}{t}=Sa(\frac{t}{2})$$

系统信号流图如下，图中 $H(\omega)$ 模块表示理想低通滤波器：



(1) 求输出信号 $x_2(t)$，要求写出 $x_2(t)$ 表达式和具体求解步骤；（10 分）

(2) 考虑以上述$H(\omega)$ 表示的理想低通滤波器，证明该滤波器对于$\pi\delta(t)$和$Sa(t)$的响应是一样的。（10 分）

(1) 由题得 $c(t)=x_1(t-T)-x_1(t)$ 则 $C(\omega)=X_1(\omega)(e^{-j\omega T}-1)$

$$X_2(\omega)=C(\omega)H(\omega)=\begin{cases} X_1(\omega)(e^{-j\omega(T+t_0)}-e^{-j\omega t_0}), & |\omega|\le 1 \\ 0, & |\omega|>1 \end{cases}$$

故 $x_2(t)=\mathcal{F}^{-1}[X_2(\omega)]=x_1(t-T-t_0)-x_1(t-t_0)=Sa(\frac{t-T-t_0}{2})-Sa(\frac{t-t_0}{2})$

(2) ① $x(t)=\pi\delta(t)$ 时. $X(\omega)=\pi$. $Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=\begin{cases} \pi e^{-j\omega t_0}, & |\omega|\le 1 \\ 0, & |\omega|>1 \end{cases}$

② $x(t)=Sa(t)$ 时 $X(\omega)=\begin{cases} \pi, & |\omega|\le 1 \\ 0, & |\omega|>1 \end{cases}$ $Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=\begin{cases} \pi e^{-j\omega t_0}, & |\omega|\le 1 \\ 0, & |\omega|>1 \end{cases}$

因此. $\pi\delta(t)$和$Sa(t)$的响应 $y(t)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]$ 是一样的.

5. 求解以下关于滤波器的问题，注意区分模拟和数字角频率。（20 分，每小题 10 分）

(1) 巴特沃思低通滤波器的频域指标为：当$\omega_1 = 1000\text{rad/s}$时，衰减不大于 3dB；当$\omega_2 = 5000\text{rad/s}$时，衰减至少为 20dB。求此滤波器的实际系统传递函数$H(s)$。

提示：需要查巴特沃思多项式的表，教材和课程讲义上都有该表格；实际系统传递函数需经过反归一化处理得到。

(2) 用双线性变换法把$H_a(s) = \frac{s}{s+a}$ $(a > 0)$变换成数字滤波器的系统函数$H(z)$；通过$H_a(s)$结合频率响应的幅频特性，判断该滤波器是否适合用冲激响应不变法转换成数字滤波器（给出分析和计算步骤）？

提示：结合$\boldsymbol{a > 0}$，将$\boldsymbol{H_a(s)}$变为$\boldsymbol{H_a(j\omega)}$判断滤波器是低通还是高通滤波器。

(1) $\omega_p = 1000\ rad/s$ 时. $\alpha_p = 3dB$. $\omega_s = 5000\ rad/s$ 时. $\alpha_s = 20dB$

则 $n \geq \dfrac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)} = 1.43$ 取 $n=2$. 查表得 $D(\bar{s}) = \bar{s}^2 + \sqrt{2}\bar{s} + 1$

$H(\bar{s}) = \dfrac{1}{D(\bar{s})} = \dfrac{1}{\bar{s}^2+\sqrt{2}\bar{s}+1}$ 反归一化得 $H(s) = \dfrac{10^6}{s^2+\sqrt{2}\times 10^3 s + 10^6}$

(2) $H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}} = \dfrac{2(1+z^{-1})}{(2+aT)+(2-aT)z^{-1}}$

$H_a(j\omega) = \dfrac{j\omega}{j\omega+a} = \dfrac{\omega}{\sqrt{a^2+\omega^2}} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega}{a}\right)}$

幅频 $|H_a(j\omega)| = \dfrac{\omega}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$ 相频 $\varphi(\omega) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\dfrac{\omega}{a}$

因此 $\omega \to 0$ 时 $H_a(j\omega) \to 0$ $\varphi(\omega) \to \frac{\pi}{2}$. $\omega \to \infty$ 时. $|H_a(j\omega)| \to 1$. $\varphi(\omega) \to 0$.

故 $H_a(s)$ 对应的滤波器为高通滤波器 HPF

由于 s 域和 z 域之间并不是一一映射. 会出现频谱混叠. 因此不能用冲激响应不变法