信号分析与处理试题（A）

1. 线性系统是否一定是时不变系统？是否一定是因果系统？为什么？
2. 若欲使信号通过线性系统不产生失真，则该系统应具有什么特性？
3. 连续非周期信号的频谱密度是连续的还是离散的？为什么？
4. 简述离散傅里叶变换 DFT 和离散时间傅里叶变换 DTFT 的关系。

22-PSP

1、不一定，线性系统满足线性性（齐次性和叠加性），不一定满足时不变性和因果性

例如系统 输入 $x(t)$，输出 $y(t)=\int_{-\infty}^{5t} x(\tau)d\tau$

可以证明满足线性性，但不满足时不变性和因果性

2、系统的频率特性 $H(\omega)$ 应满足 $|H(\omega)|=k$，$\angle H(\omega)=-\omega t_0$

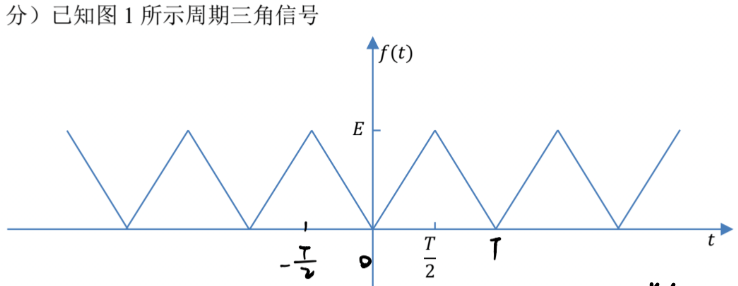
此时信号通过系统后，波形不变，只在幅度上等比例地放大或缩小，或在时间上有一固定的延迟

3、由于非周期性对应连续性，所以连续非周期信号的频谱密度是连续的（或 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ 是 ω 的连续函数）

4、离散信号的DTFT是Ω的连续周期函数，尽管在理论上有重要意义，但在计算机上实现有困难。为此，需要一种时域和频域上都是离散的傅里叶变换对，实现计算机的快速计算，即DFT

DFT是对DTFT的结果 $X(\Omega)$ 的长度为 2π 的主值区间进行N点采样得到的

二、（20 分）已知图 1 所示周期三角信号



偶函数.

图 1

1. 求 $f(t)$ 的傅里叶级数并画出频谱图；（10 分）
2. 求 $f(t)$ 的傅里叶变换并画出频谱密度图。（10 分）

1. $b_n=0$, $a_0=\frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t)dt=\frac{4E}{T_1^2}\int_0^{\frac{T_1}{2}} t\,dt=\frac{E}{2}$

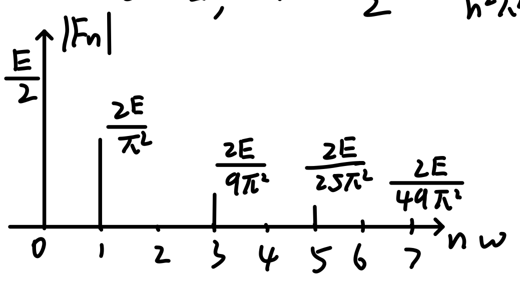
$\int t\cos n\omega_1 t\,dt=\frac{1}{n\omega_1}t\sin n\omega_1 t+\frac{1}{n^2\omega_1^2}\cos n\omega_1 t+C$

$a_n=\frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t)\cos n\omega_1 t\,dt=\frac{8E}{T_1^2}\int_0^{\frac{T_1}{2}} t\cos n\omega_1 t\,dt=\frac{8E}{T_1^2}\left[\frac{1}{n^2\omega_1^2}[(-1)^n-1]\right]=\frac{2E}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]$

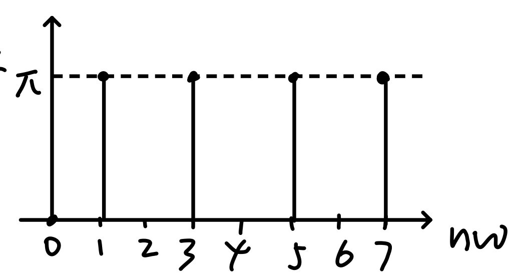
从而 $f(t)=\frac{2E}{T_1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-4E}{(2n-1)^2\pi^2}\cos[(2n-1)\omega_1 t]$ 其中 $T_1=T$, $\omega_1=\frac{2\pi}{T}$

$F_0=C_0=a_0=\frac{E}{2}$, $F_n=\frac{a_n-jb_n}{2}=\frac{E}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]$

幅度



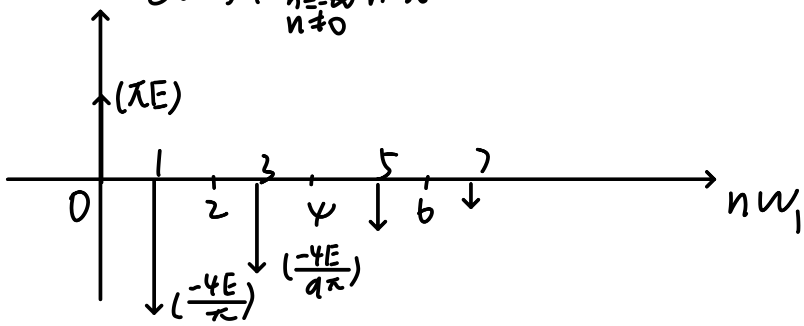
相位



2. 求f(t)的傅里叶变换F(w)　　22-PSP

$$F(w)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}2\pi F_n\delta(w-nw_1)=2\pi F_0\delta(w)+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}2\pi F_n\delta(w-nw_1)$$

$$=E\pi\delta(w)+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{2E}{n^2\pi}\left[(-1)^n-1\right]\delta(w-nw_1)$$



三、（20 分）已知三角脉冲如图 2 所示，

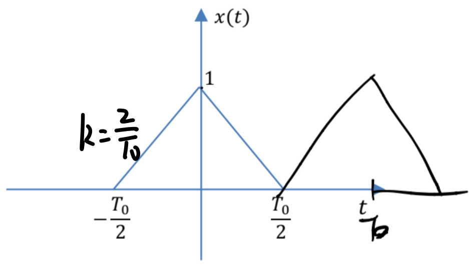


图 2

1. 求三角脉冲的频谱；（10 分）
2. 将$x(t)$以周期T_0重复，构成周期信号$x_p(t)$，画出对$x_p(t)$以$\frac{T_0}{8}$进行理想采样所构成的采样信号$x_{ps}(t)$的频谱$X_{ps}(\omega)$。（10 分）　$T_s=\frac{T_0}{8}$，$w_s=8w_0$

（常见信号的傅里叶变换：$\mathcal{F}[\delta(t)]=1,\mathcal{F}[u(t)]=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$；傅里叶变换的性质：微分性质$\mathcal{F}\left[\frac{d^nx(t)}{dt^n}\right]=(j\omega)^nX(\omega)$；积分性质$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{j\omega}X(\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$，其中$X(\omega)=\mathcal{F}[x(t)]$是$x(t)$的傅里叶变换）

1. $x'(t)=\frac{2}{T_0}\left[u(t+\frac{T_0}{2})-2u(t)+u(t-\frac{T_0}{2})\right]$　$x''(t)=\frac{2}{T_0}\left[\delta(t+\frac{T_0}{2})-2\delta(t)+\delta(t-\frac{T_0}{2})\right]$

故 $\mathcal{F}[x''(t)]=(jw)^2\mathcal{F}[x(t)]=\frac{2}{T_0}\left[e^{jw\frac{T_0}{2}}-2+e^{-jw\frac{T_0}{2}}\right]=\frac{4}{T_0}\left[\cos(\frac{wT_0}{2})-1\right]=-\frac{8}{T_0}\sin^2(\frac{wT_0}{4})$

$\mathcal{F}[x''(t)]\big|_{w=0}=0$，故 $\mathcal{F}[x'(t)]=\frac{1}{jw}\mathcal{F}[x''(t)]$

又 $\mathcal{F}[x'(t)]\big|_{w=0}=0$，故 $\mathcal{F}[x(t)]=\frac{1}{jw}\mathcal{F}[x'(t)]=\frac{8}{w^2T_0}\sin^2(\frac{wT_0}{4})=\frac{T_0}{2}Sa^2(\frac{wT_0}{4})$

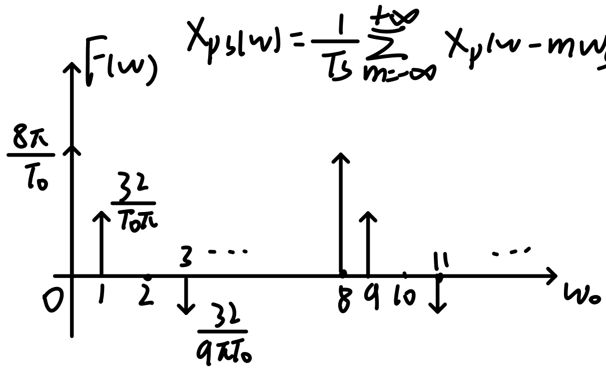
2. 先求 $X_p(w)$

$$P_n=\frac{1}{T_0}\mathcal{F}[x(t)]\Big|_{w=nw_0}=\frac{1}{2}Sa^2\left(\frac{nw_0T_0}{4}\right)=\frac{1}{2}Sa^2(\frac{n\pi}{2})$$

$$X_p(w)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}2\pi P_n\delta(w-nw_0)=\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Sa^2(\frac{n\pi}{2})\delta(w-nw_0)$$

$$X_{ps}(w)=\frac{1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}X_p(w-mw_s)=\frac{8}{T_0}\pi\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Sa^2(\frac{n\pi}{2})\delta(w-nw_0-mw_s)$$

$$=\frac{8}{T_0}\pi\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Sa^2(\frac{n\pi}{2})\delta\left[w-(n+8m)w_0\right]$$



四、(20 分) 设$X(z)=\frac{-3z^{-1}}{2-5z^{-1}+2z^{-2}}$，试问$x(n)$在以下三种收敛域下，哪一种是左边序列？哪一种是右边序列？哪一种是双边序列？并求出各对应的$x(n)$。

22-PSP

1. $|z|>2$;
2. $|z|<0.5$;
3. 0.5<|z|<2。

（常见序列的 Z 变换：$\mathcal{Z}[u(n)]=\frac{z}{z-1},1<|z|\le\infty$; $\mathcal{Z}[-u(-n-1)]=\frac{z}{z-1},0\le z<1$; $\mathcal{Z}[a^n u(n)]=\frac{z}{z-a},|a|<|z|\le\infty$, $\mathcal{Z}[-a^n u(-n-1)]=\frac{z}{z-a},0\le|z|<|a|$）

解. $X(z)=\frac{-3z}{2z^2-5z+2}=\frac{-3z}{(2z-1)(z-2)}=\frac{2z}{2z-1}-\frac{z}{z-2}=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}-\frac{z}{z-2}$

① $|z|>2$, $a=\frac{1}{2}$时, $|a|<|z|$, $\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\to 2^{-n}u(n)$

$a=2$时, $|a|<|z|$, $\frac{z}{z-2}\to 2^{n}u(n)$

故$x(n)=(2^{-n}-2^{n})u(n)$为右边序列

② $|z|<0.5$, $a=\frac{1}{2}$时, $0\le|z|<|a|$, $\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\to -2^{-n}u(-n-1)$

$a=2$时, $0\le|z|<|a|$, $\frac{z}{z-2}\to -2^{n}u(-n-1)$

故$x(n)=(2^{n}-2^{-n})u(-n-1)$为左边序列

③ $0.5<|z|<2$, $|a|=\frac{1}{2}$时 $a<|z|$, $\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\to 2^{-n}u(n)$

$a=2$时, $0\le|z|<|a|$, $\frac{z}{z-2}\to -2^{n}u(-n-1)$

故$x(n)=2^{-n}u(n)+2^{n}u(-n-1)$为双边序列

五、(20 分) 线性时不变因果离散系统的差分方程为

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$$

1. 求该系统的单位样值响应；(15 分)
2. 判断系统是是否是线性时不变系统 (5 分)。

解 单位样值序列为单位脉冲序列$\delta(n)$, $Z[\delta(n)]=1$

z变换. $Y(z)-5z^{-1}Y(z)+6z^{-2}Y(z)=X(z)-3z^{-2}X(z)$

系统函数 $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-3z^{-2}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}}=\frac{z^2-3}{z^2-5z+6}=\frac{z^2-3}{(z-2)(z-3)}$

当$x(n)=\delta(n)$时. $Y(z)=\frac{z^2-3}{(z-2)(z-3)}$, $y(n)=Z^{-1}[Y(z)]=\sum_i \mathrm{Res}\left[\frac{z^2-3}{(z-2)(z-3)}z^{n-1}\right]$

$n=0$时, 由差分方程 $y(n)=1$, $n\neq0$时. $y(n)=\lim_{z\to2}\frac{z^2-3}{z-3}z^{n-1}+\lim_{z\to3}\frac{z^2-3}{z-2}z^{n-1}=2\cdot3^n-\frac{1}{2}\cdot2^n$

综上, $y(n)=2\cdot3^n u(n)-\frac{1}{2}\cdot2^n u(n)-\frac{1}{2}\delta(n)$

2. 由题目可知是LTI (误)

① 因果性. 由差分方程可知系统满足因果性

② 线性性. 设输入$x_1(n)$, $x_2(n)$, 对应输出为$y_1(n)$, $y_2(n)$ 简写为$y(n)-2y(n-1)=x(n)$

$C_1[y_1(n)-2y_1(n-1)]=C_1y_1(n)-2C_1y_1(n-1)=C_1x_1(n)\Rightarrow$ 齐次性

$y_1(n)-2y_1(n-1)+y_2(n)-2y_2(n-1)=x_1(n)+x_2(n)$

$[y_1(n)+y_2(n)]-2[y_1(n-1)+y_2(n-1)]=x_1(n)+x_2(n)\Rightarrow$ 可加性

③ 时不变性. 已知$x(n)$与$y(n)$满足$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$

作变量替换$n\to n-n_0$ ($n_0\in Z_+$). 有$y(n-n_0)-5y(n-n_0-1)+6y(n-n_0-2)=x(n-n_0)-3x(n-n_0-2)$

令$y_1=y(n-n_0)$, $x_1=x(n-n_0)$, 可写为$y_1(n)-5y_1(n-1)+6y_1(n-2)=x_1(n)-3x_1(n-2)$

$\Rightarrow x_1, y_1$满足原系统. 即y_1是x_1的响应$\Rightarrow$输入的时移对应其输出的时移