第五次作业

2025 年 5 月 23 日

1. 求下列微分方程描述的系统单位冲激响应$h(t)$和单位阶跃响应$c(t)$，方法不限，要求写出详细步骤和解释。（20 分，第一小题 6 分，后面两小题各 7 分）

(1) $\frac{d}{dt}y(t)+3y(t)=2\frac{d}{dt}x(t)$

(2) $\frac{d^2}{dt^2}y(t)+\frac{d}{dt}y(t)+y(t)=\frac{d}{dt}x(t)+x(t)$

(3) $\frac{d}{dt}y(t)+2y(t)=\frac{d^2}{dt^2}x(t)+3\frac{d}{dt}x(t)+3x(t)$

提示：冲激响应$\boldsymbol{h(t)}$和阶跃响应$\boldsymbol{c(t)}$定义为零状态条件下，分别以单位冲激信号$\boldsymbol{\delta(t)}$和单位阶跃信号$\boldsymbol{u(t)}$激励系统得到的输出。根据$\boldsymbol{\delta(t)}$的定义可知，$\boldsymbol{\delta(t)=0, t>0}$，因而$\boldsymbol{h(t)}$的特解为零，齐次解即完全解，基于系统特征方程求解即可，也可以使用傅里叶变换等方法求解。

2. 用计算机对测量的离散数据$x(n)$进行平均处理，当收到一个测量数据后，计算机就把这一次输入数据与前三次输入数据进行平均，要求使用时域分析、频域分析这两种方法，求解这一运算过程的频率响应$H(\Omega)$，注意每种方法都要写出详细步骤和对应的解释。（20 分，每个方法各 10 分）

提示：前三次数据意味着$\boldsymbol{x(n-1)}$、$\boldsymbol{x(n-2)}$和$\boldsymbol{x(n-3)}$，四个数据平均后得到输出$\boldsymbol{y(n)}$。时域分析法令 $\boldsymbol{x(n)=e^{j\Omega n}}$可求 $\boldsymbol{y(n)}$；频域分析法通过对系统差分方程求 Z 变换的方式，代入$\boldsymbol{z=e^{j\Omega}}$得到频率响应。

3. 若系统函数$H(\omega)=H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1}$，激励为周期信号$x(t)=\sin t+\sin(3t)$，要求回答以下问题。（20 分，每小题 5 分）

(1) 求出响应$y(t)$；

(2) 分别画出$x(t)$、$y(t)$的波形；

(3) 写出信号无失真传输需要满足的条件（时域条件和频域条件）；

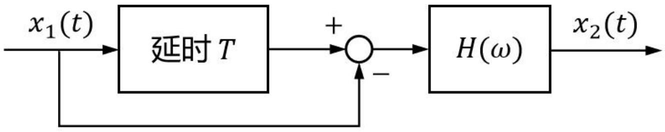
(4) 讨论信号经该系统传输是否引起失真。

提示：基于傅里叶变换、频率响应和无失真传输的相应知识求解。

4. 已知理想低通滤波特性 $H(\omega)$ （亦可写为 $H(j\omega)$）和输入信号 $x_1(t)$ 的表达式：

$$H(\omega)=\begin{cases} e^{-j\omega t_0} & |\omega|\le 1 \\ 0 & |\omega|>1 \end{cases} \qquad\qquad x_1(t)=\frac{2\sin(t/2)}{t}$$

系统信号流图如下，图中 $H(\omega)$ 模块表示理想低通滤波器：



(1) 求输出信号 $x_2(t)$，要求写出 $x_2(t)$ 表达式和具体求解步骤；（10 分）

(2) 考虑以上述$H(\omega)$ 表示的理想低通滤波器，证明该滤波器对于$\pi\delta(t)$和$Sa(t)$的响应是一样的。（10 分）

提示：利用理想低通滤波器的结论求解，注意线性相位对应的延时。

5. 求解以下关于滤波器的问题，注意区分模拟和数字角频率。（20 分，每小题 10 分）

(1) 巴特沃思低通滤波器的频域指标为：当$\omega_1=1000\text{rad/s}$ 时，衰减不大于 3dB；当$\omega_2=5000\text{rad/s}$ 时，衰减至少为 20dB。求此滤波器的实际系统传递函数$H(s)$。

提示：需要查巴特沃思多项式的表，教材和课程讲义上都有该表格；实际系统传递函数需经过反归一化处理得到。

(2) 用双线性变换法把$H_a(s)=\frac{s}{s+a}$ $(a>0)$变换成数字滤波器的系统函数$H(z)$；通过$H_a(s)$结合频率响应的幅频特性，判断该滤波器是否适合用冲激响应不变法转换成数字滤波器（给出分析和计算步骤）？

提示：结合$a>0$，将$H_a(s)$变为$H_a(j\omega)$判断滤波器是低通还是高通滤波器。