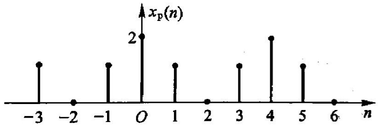
第四次作业

2025 年 5 月 12 日

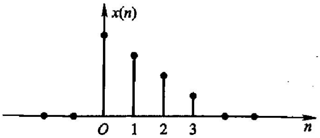
1. 根据题意，求解以下问题：（20 分，每小题 10 分）

(1) 考虑如题图 4-1 所示的周期序列$x_p(n)$，周期$N = 4$，求该序列的 DFS；



题图 4-1

(2) 考虑如题图 4-2 所示的有限长序列$x(n)$，绘出$x_1(n)$和$x_2(n)$序列，其中$x_1(n) = x\big((n-2)\big)_4 R_4(n)$，$x_2(n) = x\big((-n)\big)_4 R_4(n)$。



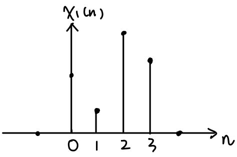
题图 4-2

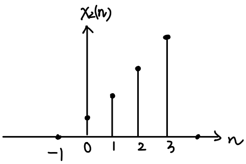
(1) $\mathrm{DFS}[x_p(n)] = X_p(k\Omega_0) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x_p(n) e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{4}\left(2 + e^{-jk\frac{\pi}{2}} + e^{-jk\frac{3}{2}\pi}\right)$

$$= \frac{1}{4}\left[2 + \cos\frac{\pi}{2}k\right] = \begin{cases} 1, & k=0 \\ \frac{1}{2}, & k=1 \\ 0, & k=2 \\ \frac{1}{2}, & k=3 \end{cases}$$

(2) 先将 $x(n)$ 以 $N=4$ 进行延拓，得到 $x((n))_4$，然后延时（翻转），得到 $x((n-2))_4$ 和 $x((-n))_4$

最后取主值区间，得 $x_1(n) = x((n-2))_4 R_4(n)$ $x_2(n) = x((-n))_4 R_4(n)$





2. 考虑一个周期为$N=10$的周期序列$x(n)$如下：

$$x(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le 7\\ 0, & 8\le n\le 9\end{cases}$$

令$g(n)=x(n)-x(n-1)$，求解以下问题：

(1) 证明$g(n)$是周期序列，周期为$N=10$；（4 分）

(2) 求解序列$x(n)$的 DFS；（8 分）

(3) 求解序列$g(n)$的 DFS。（8 分）

(1) 由题得 $x(n+N)=x(n)$

则 $g(n+N)=x(n+N)-x(n-1+N)=x(n)-x(n-1)=g(n)$

因此 $g(n)$是周期序列，且周期 $N=10$

(2) $\mathrm{DFS}[x(n)]=X(k\frac{\pi}{5})=\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9}x(n)e^{-jk\frac{\pi}{5}n}=\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{7}e^{-jk\frac{\pi}{5}n}$

$=-e^{j\frac{k}{5}\pi}-e^{j\frac{2}{5}k\pi}$

(3) $\mathrm{DFS}[g(n)]=G(k\cdot\frac{\pi}{5})=X(k\frac{\pi}{5})-X(k\frac{\pi}{5})\cdot e^{-j2k\frac{\pi}{5}}$

$=(1-e^{-j\frac{2\pi}{5}k})X(k\frac{\pi}{5})=(e^{-j\frac{2}{5}k\pi}-1)(e^{j\frac{k}{5}\pi}+e^{j\frac{2k}{5}\pi})$

$=1+e^{-j\frac{k\pi}{5}}-e^{j\frac{k\pi}{5}}-e^{j\frac{2k}{5}\pi}$

3. 已知有限长序列$x(n)$如下：

$$x(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 2, & n=1\\ -1, & n=2\\ 3, & n=3\end{cases}$$

(1) 用矩阵形式求序列$x(n)$的 DFT，并通过 IDFT 验证结果是正确的（涉及旋转因子W_N的计算，要求写出详细计算步骤）；（10 分）

(2) 基 2FFT 算法也可解释为旋转因子矩阵的分解简化，例如对$N=4$可写出

$$\begin{bmatrix}X(0)\\X(2)\\X(1)\\X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & W^0 & 0 & 0\\1 & -W^0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & W^1\\0 & 0 & 1 & -W^1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & W^0 & 0\\0 & 1 & 0 & W^0\\1 & 0 & -W^0 & 0\\0 & 1 & 0 & -W^0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\x(2)\\x(3)\end{bmatrix}$$

证明该矩阵表示式与上一问中的 DFT 表示式一致，并针对此矩阵相乘的过程使用蝶形图画出相应的 FFT 流程图。（10 分）

(1) $W_4=e^{-j\frac{2\pi}{4}}=e^{-j\frac{\pi}{2}}=-j$

$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{3}x(n)W_4^{nk}$ $\quad x(n)=IDFT[X(k)]=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}X(k)W_4^{-nk}$

其中 $W_4^0=1$ $W_4^1=-j$ $W_4^2=-1$ $W_4^3=j$

则 $$X(k)=\begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\X(2)\\X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0\\W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3\\W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6\\W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\x(2)\\x(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & -j & -1 & j\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\2+j\\-5\\2-j\end{bmatrix}$$

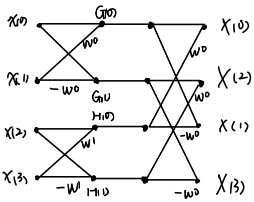
$$x(n)=\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\x(2)\\x(3)\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0\\W_4^0 & W_4^{-1} & W_4^{-2} & W_4^{-3}\\W_4^0 & W_4^{-2} & W_4^{-4} & W_4^{-6}\\W_4^0 & W_4^{-3} & W_4^{-6} & W_4^{-9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\X(2)\\X(3)\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & j & -1 & -j\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & -j & -1 & j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\2+j\\-5\\2-j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\3\end{bmatrix}$$

(2) $$\begin{bmatrix}1 & W^0 & 0 & 0\\1 & -W^0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & W^1\\0 & 0 & 1 & -W^1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & W^0 & 0\\0 & 1 & 0 & W^0\\1 & 0 & -W^0 & 0\\0 & 1 & 0 & -W^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\1 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & -j\\0 & 0 & 1 & j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & -j & -1 & j\\1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}$$

即 $$\begin{bmatrix}X(0)\\X(2)\\X(1)\\X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & -j & -1 & j\\1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\x(2)\\x(3)\end{bmatrix}$$ 即 $$\begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\X(2)\\X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & -j & -1 & j\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\x(2)\\x(3)\end{bmatrix}$$

因此该矩阵表达式与(1)中FFT一致.

蝶形运算的FFT流程图如右所示.



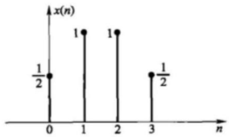
4. 考虑如题图 4-3 所示的$N = 4$有限长序列$x(n)$，求解以下卷积和，**必须写出求解过程，（若仅给出结果的序列图形而无相应的解释，则不计分）**：（20 分，每小题 5 分）

(1) $x(n)$与$x(n)$的线性卷积，画出所得序列；

(2) $x(n)$与$x(n)$的 4 点圆卷积，画出所得序列；

(3) $x(n)$与$x(n)$的 10 点圆卷积，画出所得序列；

(4) 欲使$x(n)$与$x(n)$的圆卷积和线性卷积相同，求长度 L 的最小值。



题图 4-3 有限长序列$x(n)$

$x(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \frac{1}{2}\delta(n-3)$

(1) $x(n) * x(n) = [\frac{1}{2}\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \frac{1}{2}\delta(n-3)] * [\frac{1}{2}\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \frac{1}{2}\delta(n-3)]$

$= \frac{1}{4}\delta(n) + \delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \frac{5}{2}\delta(n-3) + 2\delta(n-4) + \delta(n-5) + \frac{1}{4}\delta(n-6)$

(2) $x(n) ⊛ x(n) = \sum_{m=0}^{3} x(m)x((n-m))_4 R_4(n)$

$= \sum_{m=0}^{3} x(m)x((-m))_4\delta(n) + \sum_{m=0}^{3} x(m)x((1-m))_4\delta(n-1) + \sum_{m=0}^{3} x(m)x((2-m))_4\delta(n-2) + \sum_{m=0}^{3} x(m)x((3-m))_4\delta(n-3)$

$= [x(0)x(0) + x(1)x(3) + x(2)x(2) + x(3)x(1)]\delta(n) + [x(0)x(1) + x(1)x(0) + x(2)x(3) + x(3)x(2)]\delta(n-1)$

$+ [x(0)x(2) + x(1)x(1) + x(2)x(0) + x(3)x(3)]\delta(n-2) + [x(0)x(3) + x(1)x(2) + x(2)x(1) + x(3)x(0)]\delta(n-3)$

$= \frac{9}{4}\delta(n) + 2\delta(n-1) + \frac{9}{4}\delta(n-2) + \frac{5}{2}\delta(n-3)$

(3) $x(m) = \{\frac{1}{2}, 1, 1, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$

$x((-m))_{10}R_{10}(m) = \{\frac{1}{2}, 0, 0, 0, \cdots\}$

$x((1-m))_{10}R_{10}(m) = \{1, \frac{1}{2}, 0, 0, \cdots\}$

$x((2-m))_{10}R_{10}(m) = \{1, 1, \frac{1}{2}, 0, \cdots\}$

$x((3-m))_{10}R_{10}(m) = \{\frac{1}{2}, 1, 1, \frac{1}{2}, \cdots\}$

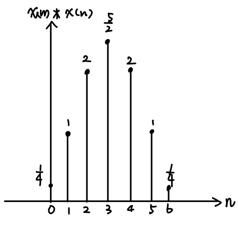
$x((4-m))_{10}R_{10}(m) = \{0, \frac{1}{2}, 1, 1, \cdots\}$

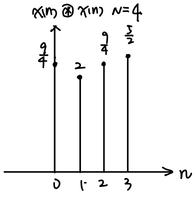
$x((5-m))_{10}R_{10}(m) = \{0, 0, \frac{1}{2}, 1, \cdots\}$

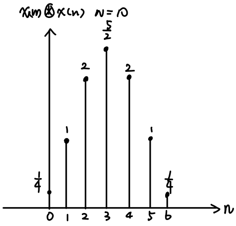
$x((6-m))_{10}R_{10}(m) = \{0, 0, 0, \frac{1}{2}, \cdots\}$

则 $x(n) ⊛ x(n) = \sum_{m=0}^{9} x(m)x((n-m))_{10}R_{10}(n) = \sum_{m=0}^{4} x(m)x((n-m))_{10}R_{10}(m)$

$= \frac{1}{4}\delta(n) + \delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \frac{5}{2}\delta(n-3) + 2\delta(n-4) + \delta(n-5) + \frac{1}{4}\delta(n-6)$







(4) 圆卷积与线性卷积相同的条件 $L \geq N+M-1 = 2N-1 = 7$

5. 已知两有限长序列：

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) R_N(n), \quad h(n) = \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right) R_N(n)$$

用直接卷积和 DFT 两种方法分别求：

(1) $y(n) = x(n) ⊛ h(n)$；（6 分）

(2) $y(n) = x(n) ⊛ x(n)$；（7 分）

(3) $y(n) = h(n) ⊛ h(n)$（圆卷积长度仍取 N 点循环）。（7 分）

直接卷积法:

(1) $x(n) ⊛ h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi m}{N}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi (n-m)}{N}\right) R_N(n)$

$= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right) R_N(n) + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{N-1} \sin\left[\frac{2\pi(n-2m)}{N}\right] R_N(n) = \frac{N}{2}\sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right) R_N(n)$

(2) $x(n) ⊛ x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi m}{N}\right) \cos\left[\frac{2\pi (n-m)}{N}\right] R_N(n)$

$= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) R_N(n) + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{N-1} \cos\left[\frac{2\pi(n-2m)}{N}\right] R_N(n) = \frac{N}{2}\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) R_N(n)$

(3) $h(n) ⊛ h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi m}{N}\right) \sin\left[\frac{2\pi (n-m)}{N}\right] R_N(n)$

$= -\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) R_N(n) + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{N-1} \cos\left[\frac{2\pi(n-2m)}{N}\right] R_N(n) = -\frac{N}{2}\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) R_N(n).$

DFT 法

$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] = \frac{N}{2}[\delta(k-1) + \delta(k-N+1)]$

$H(k) = \mathrm{DFT}[h(n)] = \frac{N}{2j}[\delta(k-1) - \delta(k-N+1)]$

(1) $Y(k) = X(k)\cdot H(k) = \frac{N^2}{4j}[\delta(k-1) - \delta(k-N+1)]$

则 $y(n) = \mathrm{IDFT}[Y(k)] = \frac{N}{2}\sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right) R_N(n)$

(2) $Y(k) = X(k)\cdot X(k) = \frac{N^2}{4}[\delta(k-1) + \delta(k-N+1)]$

则 $y(n) = \mathrm{IDFT}[Y(k)] = \frac{N}{2}\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) R_N(n)$

(3) $Y(k) = H(k) H(k) = -\frac{N^2}{4}[\delta(k-1) + \delta(k-N+1)]$

则 $y(n) = \mathrm{IDFT}[Y(k)] = -\frac{N}{2}\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) R_N(n)$