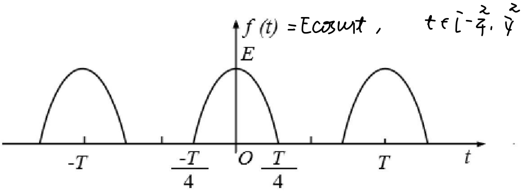
第二次作业

2025 年 4 月 1 日

1. 求题图 2-1 所示半波余弦信号的三角傅里叶级数。若 $E = 10\,\mathrm{V}$，$f = 10\,\mathrm{kHz}$，基于c_n（提示：c_n是正的，理解成$|c_n|$亦可，以后不再解释）画出该信号的幅度谱，要求横轴对应频率的单位为 Hz。（20 分）

$f(t) = E\cos\omega_1 t$， $t \in [-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}]$. $\omega_1 = 2\pi f$



题图 2-1

由于f(t)为偶函数. $b_n = 0$ $|c_n| = |a_n|$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} E\cos\omega_1 t\,dt = \frac{E}{\pi}$$

$n \geq 2$时.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_1 t\,dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} E\cos\omega_1 t\cos n\omega_1 t\,dt = \frac{E\sin\frac{n+1}{2}\pi}{(n+1)\pi} + \frac{E\sin\frac{n-1}{2}\pi}{(n-1)\pi}$$

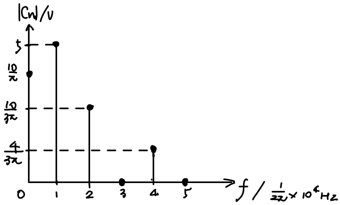
当n为奇数且 $n \neq 1$时 $a_n = 0$ 当n为偶数时. $a_n = \frac{2E}{\pi(n^2-1)}$

$n=1$时 $a_1 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} E\cos^2\omega_1 t\,dt = \frac{1}{2}E$

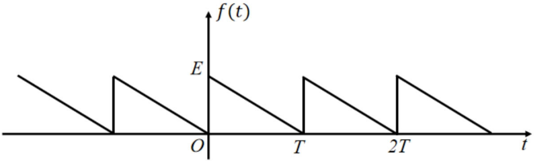
因此. $c_n = \begin{cases} \frac{E}{\pi}, & n=0 \\ \frac{E}{2}, & n=1 \\ 0, & n=2k+1,\ k\in\mathbb{Z} \\ \frac{2E}{\pi(n^2-1)}, & n=2k,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

其中. $\mathrm{rad}/10^{-4}\mathrm{s} = \frac{1}{2\pi}\times 10^4\ \mathrm{Hz}$

幅度谱如下



2. 求题图 2-2 所示的周期锯齿信号的指数形式傅里叶级数。基于复傅里叶系数，大致画出幅度谱（提示：结果如包含 j，需要画$|F_n|$）。（20 分）



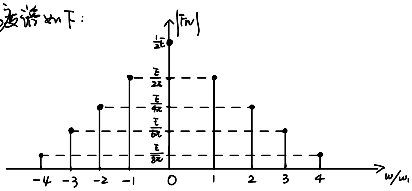
题图 2-2

$F_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{2}E.$

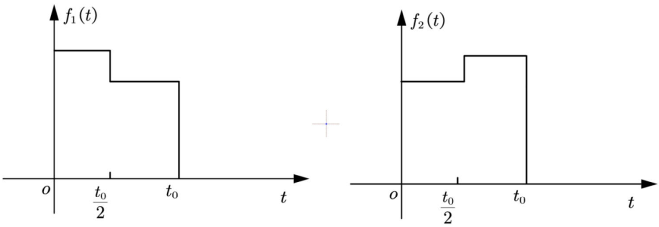
$F_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt = -\frac{jE}{2n\pi}.$

则 $f(t) = \frac{1}{2}E - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{jE}{2n\pi} e^{jn\omega_1 t} = \frac{1}{2}E + \frac{E}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_1 t$，其中 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

幅度谱如下：



3. 对题图 2-3 所示波形，若已知 $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$，利用傅里叶变换的性质，求 $f_1(t)$ 以 $\frac{t_0}{2}$ 为轴翻转后所得 $f_2(t)$ 的傅里叶变换。（20 分）



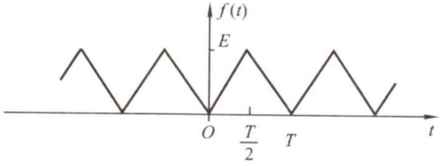
题图 2-3

由题得 $f_2(t) = f_1(t_0 - t)$

则 $F_2(\omega) = \mathcal{F}[f_2(t)] = \mathcal{F}[f_1(t_0 - t)] \xlongequal[\text{性质}]{\text{时移}} e^{j\omega t_0}\mathcal{F}[f_1(-t)]$

$\xlongequal[\text{变换}]{\text{尺度}} e^{j(-1)\cdot\omega t_0}\frac{1}{|-1|}F_1(\frac{\omega}{-1}) = e^{j\omega t_0}F_1(-\omega)$

4. 已知一个如题图 2-4 所示的周期三角波信号$f(t)$：



题图 2-4

（1）求$f(t)$的傅里叶级数系数a_0、a_n、b_n，给出步骤，写出完整的傅里叶级数表达式；

（2）基于三角傅里叶级数画出频谱图，给出步骤，频谱图包含幅频（c_n）和相频（φ_n）。（20 分）

(1) 由于 $f(t)$ 为偶函数，$b_n=0$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,dt=\frac{1}{2}E \qquad \omega_1=\frac{2\pi}{T}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega_1t\,dt=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{2E}{T}t\cos n\omega_1t\,dt=\frac{2E}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)$$

当 n 为奇数时 $a_n=-\frac{4E}{n^2\pi^2}$，当 n 为偶数时，$a_n=0$

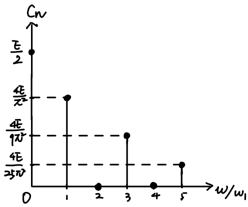
因此 $f(t)=\frac{E}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4E}{(2n-1)^2\pi^2}\cos[(2n-1)\frac{2\pi}{T}t]$

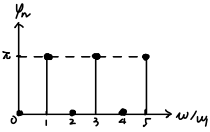
(2) $c_0=a_0=\frac{E}{2}$ $\quad\varphi_0=0$

n 为奇数时，$c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}=|a_n|=\frac{4E}{n^2\pi^2}$，$\varphi_n=\arccos\frac{a_n}{c_n}=\pi$.

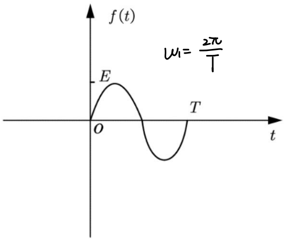
n 为偶数时，$c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}=0$、$\varphi_n=0$

频谱图如下

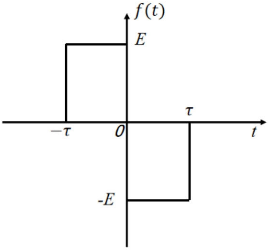




5. 利用傅里叶变换的定义或性质，求题图 2-5 (a)、(b)所示信号的傅里叶变换。（20 分）



(a) 单周正弦脉冲



(b) 矩形脉冲组合

题图 2-5

(a) $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega_1 t}dt=\int_0^T E\sin\omega_1 t\, e^{-j\omega_1 t}dt$

$=\frac{E}{2j}\int_0^T (e^{j\omega_1 t}-e^{-j\omega_1 t})e^{-j\omega t}dt=\frac{E}{2j}\int_0^T(e^{j(\omega_1-\omega)t}-e^{-j(\omega_1+\omega)t})dt$

$=\frac{E}{2j}\left(\frac{e^{j(\omega_1-\omega)t}}{j(\omega_1-\omega)}\Big|_0^T+\frac{e^{-j(\omega_1+\omega)t}}{j(\omega_1+\omega)}\Big|_0^T\right)=\frac{E}{2j}\frac{(e^{-j\omega T}-1)(\omega_1+\omega)+(e^{-j\omega T}-1)(\omega_1-\omega)}{j(\omega_1^2-\omega^2)}$

$=\frac{E\omega_1}{\omega^2-\omega_1^2}(e^{-j\omega T}-1)$

(b) $f(t)=E[u(t+\tau)-u(t)]-[u(t)-u(t-\tau)]=u(t+\tau)+u(t-\tau)-2u(t)$

由 $\mathcal{F}[u(t)]=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

和时移性质 $\mathcal{F}[f(t+t_0)]=e^{j\omega t_0}\mathcal{F}[f(t)]$ 得

$\mathcal{F}[f(t)]=\mathcal{F}[u(t+\tau)+u(t-\tau)-2u(t)]=\mathcal{F}[u(t+\tau)]+\mathcal{F}[u(t-\tau)]-2\mathcal{F}[u(t)]$

$=e^{j\omega\tau}[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)]+e^{-j\omega\tau}[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)]-2[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)]$

$=(e^{j\omega\tau}+e^{-j\omega\tau}-2)\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)(e^{j\omega\tau}+e^{-j\omega\tau}-2)$

$=\frac{2\cos\omega\tau-2}{j\omega}=2jE\tau\,Sa(\frac{\omega\tau}{2})\sin(\frac{\omega\tau}{2})$