22-PSP

100

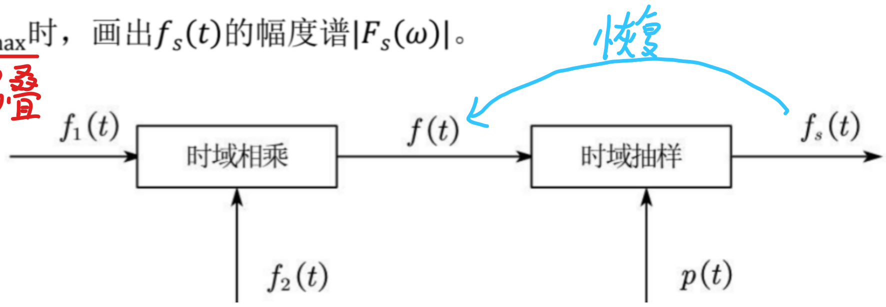
第三次作业

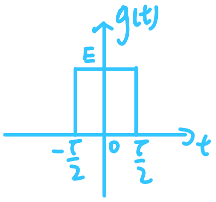
1. 系统如图 3-1 所示，已知信号 $f_1(t)=Sa(1000\pi t)$，$f_2(t)=Sa(2000\pi t)$，$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$，$f(t)=f_1(t)f_2(t)$，$f_s(t)=f(t)p(t)$。（20 分）

(1) 为从$f_s(t)$无失真恢复$f(t)$，求最大采样间隔$T_{\max}$； 时域抽样 采样间隔的限制在频域

(2) 当$T=T_{\max}$时，画出$f_s(t)$的幅度谱$|F_s(\omega)|$。

恰好不混叠





提示：根据频域卷积定理求出$f(t)$的频谱，在此基础上根据采样定理，求最大采样间隔与采样信号的幅度谱。

解：记单矩形脉冲信号$g(t)$，$G(\omega)=E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$ 由傅氏变换的对偶性质，有$\mathscr{F}[Sa(t)]=\begin{cases}\pi, & |\omega|<1\\ 0, & |\omega|>1\end{cases}$

由尺度变换特性得 $\mathscr{F}[f_1(t)]=\begin{cases}\frac{1}{1000}, & |\omega|<1000\pi\\ 0, & 其它\end{cases}$ $\mathscr{F}[f_2(t)]=\begin{cases}\frac{1}{2000}, & |\omega|<2000\pi\\ 0, & 其它\end{cases}$

由$f(t)=f_1(t)f_2(t)$知 $F(\omega)=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\omega}F_1(\Omega)d\Omega*\frac{d}{d\omega}F_2(\omega)$

$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1000}\frac{1}{2000}[r(t+1000\pi)-r(t-1000\pi)]*[\delta(t+2000\pi)-\delta(t-2000\pi)]$

$=\frac{1}{4\times10^6\pi}[r(t+3000\pi)-r(t+1000\pi)-r(t-1000\pi)+r(t-3000\pi)]$ ⇒最大值为$\frac{2000\pi}{4\times10^6\pi}$

-3 -1 1 3

可知$F(\omega)$只占据-3000π～$+3000\pi$范围，$\omega_m=3000\pi\ rad/s$，$f_m=1500Hz$

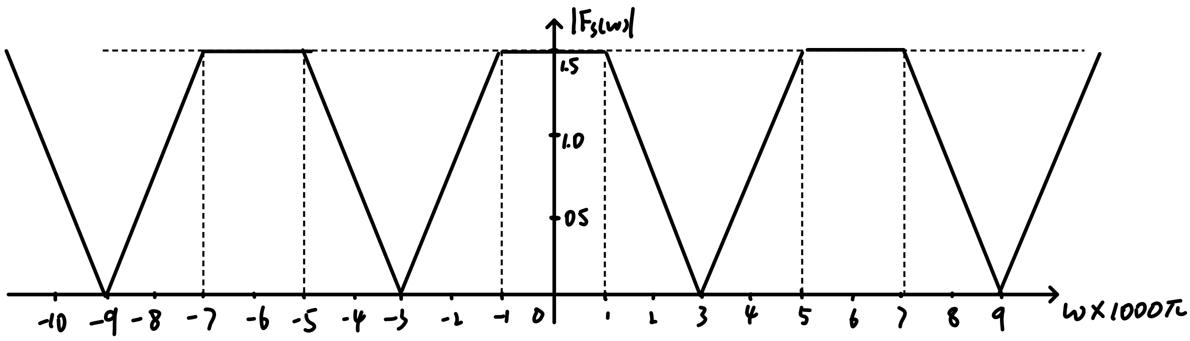
最大采样间隔 $T_{\max}=\frac{1}{2f_m}=\frac{1}{3000}s$

(2)

$p(t)=\delta_T(t)$ 为周期单位冲激序列，其复傅里叶系数 $P_n=\frac{1}{T_s}\mathscr{F}[\delta(t)]\Big|_{\omega=n\omega_s}=\frac{1}{T_s}$

故冲激采样信号 $F_s(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_nF(\omega-n\omega_s)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)$ 代入 $\frac{1}{T_s}=3000\ Hz$，$\omega_s=6000\pi\ rad/s$

⇒ $F_s(\omega)=3000F(\omega-6000\pi n)$，最大值为 $\frac{1}{4\times10^6\pi}\times3000\times2000\pi=1.5$，图如下.



22-PSP

2. 根据以下给出的序列，判断：序列是否是周期性的？如果是周期序列，试确定其周期，并按照课件上的 DFS 公式写出该离散周期序列的 DFS 数学表达式。（20 分）

(1) $x(n) = A\cos\left(\frac{3\pi}{7}n - \frac{\pi}{8}\right)$

(2) $x(n) = e^{j\left(\frac{n}{8} - \pi\right)}$

离散周期序列 $x(n) \longrightarrow$ DFS系数 $X(k\Omega_0)$

$DFS[x(n)] = X(k\Omega_0) = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x(n) e^{-jk\Omega_0 n}, \ k=1,2,\cdots,N$

$IDFS[X(k\Omega_0)] = x(n) = \sum_{k=\langle N\rangle} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n}$

提示：对复指数序列，可以自行假设一个整数周期，代入周期序列需要满足的公式，去判断是否存在合适的整数。

解：(1) $x(n) = A\cos(\frac{3\pi}{7}n - \frac{\pi}{8})$，$\Omega_0 = \frac{3\pi}{7}$，$\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{14}{3}$ 为有理数，故 $x(n)$ 为周期序列

$N = k\frac{2\pi}{\Omega} \in Z \Rightarrow k=3, N=14$，真正的 $\frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{7}$

$DFS[x(n)] = X(k\Omega_0) = \frac{1}{14}\sum_{n=0}^{13} A\cos(\frac{3\pi}{7}n - \frac{\pi}{8}) e^{-jk\cancel{\frac{3\pi}{7}}\frac{\pi}{7}n}, \ k=0,1,2,\cdots,13$

DFS公式中的 N 与 Ω_0 满足 $N\Omega_0 = 2\pi$

类比：$T_s\omega_s = 2\pi$

(2) $x(n) = e^{j(\frac{n}{8}-\pi)}$，假设其为周期 N 的序列，$x(n+N) = x(n)$

有 $e^{j(\frac{n}{8}-\pi) + j\frac{N}{8}} = e^{j(\frac{n}{8}-\pi)} \Rightarrow e^{j\frac{N}{8}} = 1$ 由于 $e^{j\theta}$ 周期为 $2k\pi$，

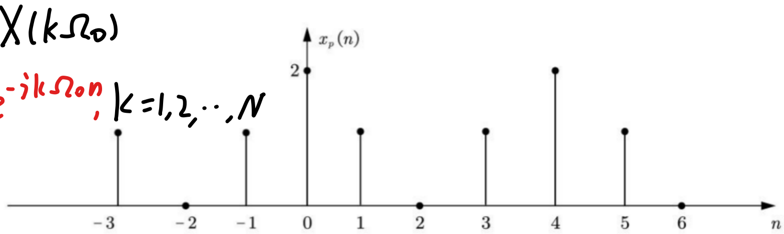
故 $N = 16k\pi$，不存在正整数 N，假设不成立 $\Rightarrow x(n)$ 为非周期序列

3. 题图 3-2 所示周期序列 $x_p(n)$，周期 $N=4$，求 $DFS[x_p(n)]$。（20 分）

周期序列 $x(n) \longrightarrow$ DFS系数 $X(k\Omega_0)$

$DFS[x(n)] = X(k\Omega_0) = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x(n) e^{-jk\Omega_0 n}, \ k=1,2,\cdots,N$

$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$



题图 3-2

提示：根据 DFS 定义求解（注意按照课件上给出的 DFS 形式），$x_p(1) = 1$。

解：$DFS[x_p(n)] = X(k\Omega_0) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x_p(n) e^{-jk\frac{\pi}{2}n}, \quad k=0,1,2,3$

$= \frac{1}{4}[2\times1 + 1\times e^{-jk\frac{\pi}{2}} + 0 + 1\times e^{-jk\frac{3\pi}{2}}]$

$= \frac{1}{4}[2 + e^{-jk\frac{\pi}{2}} + e^{jk\frac{\pi}{2}}] = \frac{1}{4}[2 + 2\cos\frac{k}{2}\pi]$

$= \frac{1}{2}[1 + \cos(\frac{k}{2}\pi)] \quad k=0,1,2,3$

先对 n 累加求和

后对 k 分类讨论

$= \begin{cases} 1, & k=0 \\ \frac{1}{2}, & k=1 \\ 0, & k=2 \\ \frac{1}{2}, & k=3 \end{cases}$

22-PSP

4. 若已知有限长序列 $x(n)$ 如下式

DFT: $X(k) = W_N^{nk} x(n)$

IDFT: $x(n) = W_N^{-nk} X(k)$

$$x(n) = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ -1 & (n=1) \\ 1 & (n=2) \\ 2 & (n=3) \end{cases}$$

$W^1 = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

用 **DFT 的矩阵形式**求 DFT$[\boldsymbol{x}(n)] = \boldsymbol{X}(k)$，再由所得结果求 IDFT$[\boldsymbol{X}(k)] = \boldsymbol{x}(n)$，验证你的计算是正确的（**须有详细的求解过程，写出矩阵中每个元素的取值**）。（20 分）

记忆：$W_2 = -1$，$W_4 = -j$

解：记 $x(n)$ 为长度 $N=4$ 的序列，$W_4 = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = -i$

公式：$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{3} x(n) W_N^{nk}$，$k = 0,1,2,3$

$x(n) = \mathrm{IDFT}[X(k)] = \boxed{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{3} X(k) W_N^{-nk}$，$k=0,1,2,3$

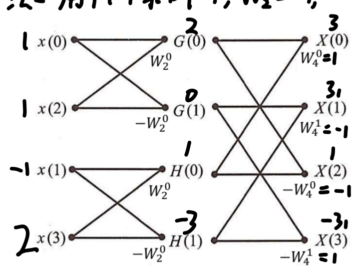
先计算 $X(k)$

$$X(k) = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3i \\ 1 \\ -3i \end{bmatrix}$$

再计算 $x(n)$

$$x(n) = \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \end{bmatrix} = \boxed{\frac{1}{4}} \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^{-1} & W^{-2} & W^{-3} \\ W^0 & W^{-2} & W^{-4} & W^{-6} \\ W^0 & W^{-3} & W^{-6} & W^{-9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3i \\ 1 \\ -3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

法二：用 FFT 求 DFT，$W_2 = -1$，



$\Rightarrow X(k) = \{3, 3i, 1, -3i\}$

结果相同

5. 考虑如题图 3-3 所示的$N = 4$ 有限长序列$x(n)$，求解以下卷积和，**要求写出求解过程**，（**若仅给出结果的序列图形而无相应的解释，则不计分**）：（20 分）

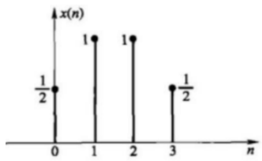
(1) $x(n)$与$x(n)$的线性卷积，画出所得序列；

(2) $x(n)$与$x(n)$的 4 点圆卷积，画出所得序列；

(3) $x(n)$与$x(n)$的 10 点圆卷积，画出所得序列；

提示：根据圆卷积的定义，N点圆卷积对应的就是定义式中累加项最大项数N的取值。求解 10 点圆卷积，需要为序列$x(n)$补 6 个零，替换变量后得到的$x(m)$补零位置在原序列样值之后（右侧），相应地，$x((n-m))_{10}R_{10}(m)$补零的位置在已知样值之前（左侧）。

(4) 欲使$x(n)$与$x(n)$的圆卷积和线性卷积相同，求长度 L 的最小值。



题图 3-3 有限长序列$x(n)$

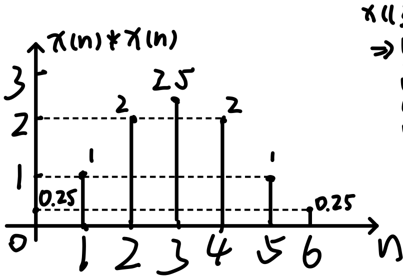
有限长序列 { 线性卷积 $x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m)$ (N_1, N_2, $N_1 + N_2 - 1$)；圆周卷积 $x(n) ⊛ h(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m) h((n-m))_N\right] R_N(n)$ }

解：已知 $x(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \frac{1}{2}\delta(n-3)$

(1) 由卷积和的分配律知

$x(n)$				$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
$x(n)$				$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
				$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
			$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	
		$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$		
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$			

$\Rightarrow x(n) * x(n) = \{0.25, 1, 2, 2.5, 2, 1, 0.25\}$



(2) $x(m) = \{\frac{1}{2}, 1, 1, \frac{1}{2}\}$

$x((0-m))_4 R_4(m) = \{\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 1\ 1\}$

$x((1-m))_4 R_4(m) = \{1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 1\}$

$x((2-m))_4 R_4(m) = \{1\ 1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\}$

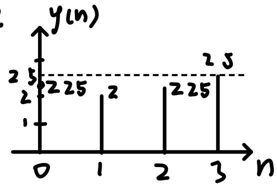
$x((3-m))_4 R_4(m) = \{\frac{1}{2}\ 1\ 1\ \frac{1}{2}\}$

$\Rightarrow y(0) = 0.25 + 0.5 + 1 + 0.5 = 2.25$

$y(1) = 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 = 2$

$y(2) = 0.5 + 1 + 0.5 + 0.25 = 2.25$

$y(3) = 0.25 + 1 + 1 + 0.25 = 2.5$



22-PSP

(3) $x(m)=\{\frac{1}{2},1,1,\frac{1}{2},0,0,0,0,0,0\}$

$x((0-m))_{10}R_{10}(m)=\{\frac{1}{2},0,0,0,0,0,0,\frac{1}{2},1,1\}$

$x((1-m))_{10}R_{10}(m)=\{1,\frac{1}{2},\cdots$

$x((2-m))_{10}R_{10}(m)=\{1,1,\frac{1}{2},\cdots$

$x((3-m))_{10}R_{10}(m)=\{\frac{1}{2},1,1,\frac{1}{2},\cdots$

$x((4-m))_{10}R_{10}(m)=\{0,\frac{1}{2},1,1,\cdots$

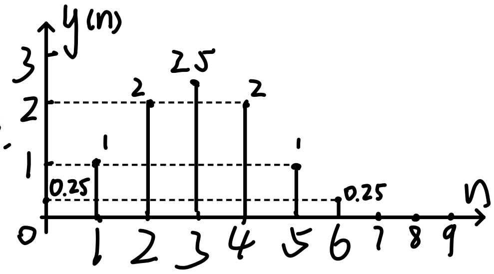
$x((5-m))_{10}R_{10}(m)=\{0,0,\frac{1}{2},1,\cdots$

$x((6-m))_{10}R_{10}(m)=\{0,0,0,\frac{1}{2},\cdots$

$y(0)=\frac{1}{4},\ y(1)=1,\ y(2)=2,\ y(3)=2.5,\ y(4)=2,\ y(5)=1,\ y(6)=\frac{1}{4},$

$y(7)=y(8)=y(9)=0$

$\Rightarrow y=\{0.25,1,2,2.5,2,1,0.25,0,0,0\}$



观察得x(n)与x(n)的10点圆卷积和线性卷积相同

(4) 观察(3)中y的求解过程，要L点圆卷积与线性卷积相同，

只需保证$y(0)=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ 至少添3个0, L=7, 下验证

$x(m)=\{\frac{1}{2},1,1,\frac{1}{2},0,0,0\}$

$x((0-m))_7R_7(m)=\{\frac{1}{2},0,0,0,\frac{1}{2},1,1\}$

$x((1-m))_7R_7(m)=\{1,\frac{1}{2},0,0,0,\frac{1}{2},1\}$

$x((2-m))_7R_7(m)=\{1,1,\frac{1}{2},0,\cdots$

$x((3-m))_7R_7(m)=\{\frac{1}{2},1,1,\frac{1}{2},\cdots$

$x((4-m))_7R_7(m)=\{0,\frac{1}{2},1,1,\cdots$

$x((5-m))_7R_7(m)=\{0,0,\frac{1}{2},1,\cdots$

$x((6-m))_7R_7(m)=\{0,0,0,\frac{1}{2},1,1,\frac{1}{2}\}$

显然，y的表达式与(1)中一致，

$y=\{0.25,1,2,2.5,2,1,0.25\}$

综上，$L\geq 7$

法二 由性质可知，当L满足$L\geq N+N-1$时，

x(n)与x(n)的L点圆卷积和线性卷积相同

解得$L\geq 7$