第一次作业

2025 年 3 月 21 日

1. 应用冲激信号的抽样特性（筛选特性），求下列表示式的函数值。

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\delta(t)dt = f(t-t_0)\big|_{t=0} = f(-t_0)$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t_0-t)\delta(t)dt = f(t_0-t)\big|_{t=0} = f(t_0)$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)u(t-2t_0)dt = u(t-2t_0)\big|_{t=t_0} = u(t_0)$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} (t+\sin t)\delta(t-\frac{\pi}{6})dt = t+\sin t\big|_{t=\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}$

(5) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}[\delta(t)-\delta(t-t_0)]dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t}\delta(t)dt - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t}\delta(t-t_0)dt = e^{-j\omega t}\big|_{t=0} - e^{-j\omega t}\big|_{t=t_0} = 1-e^{-j\omega t_0}$

2. 判断信号 $f(t) = 2\cos(10t+5) - \sin(6t-3)$ 是否为周期信号（要求写出步骤）？如是周期信号，计算$f(t)$的基波周期。

$2\cos(10t+5)$ 的周期 $T_1 = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$，$-\sin(6t-3)$ 的周期 $T_2 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

由于 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{3}{5} \in Q$，故 $f(t)$是周期信号

基波周期是 T_1 和 T_2 的最小公倍数 $T = lcm(T_1, T_2) = \pi$

3. 已知信号$f_1(t) = u(t+1) - u(t-1)$，$f_2(t) = \delta(t+5) + \delta(t-5)$，画出下列各卷积波形。

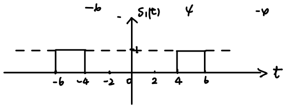
(1) $s_1(t) = f_1(t) * f_2(t)$

(2) $s_2(t) = \{[f_1(t) * f_2(t)][u(t+5) - u(t-5)]\} * f_2(t)$

(1) $s_1(t) = [u(t+1) - u(t-1)] * [\delta(t+5) + \delta(t-5)] = u(t+1) * \delta(t+5) + u(t+1) * \delta(t-5) - u(t-1) * \delta(t+5) - u(t-1) * \delta(t-5)$

$= u(t+6) + u(t-4) - u(t+4) - u(t-6)$

-6 4 -4 6



-5 5

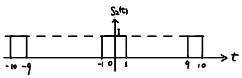
(2) $s_2(t) = \{s_1(t)[u(t+5) - u(t-5)]\} * f_2(t) = \{[s_1(t)u(t+5) - s_1(t)u(t-5)]\} * [\delta(t+5) + \delta(t-5)]$

$= [u(t+5) + u(t-4) - u(t+4) - u(t-5)] * [\delta(t+5) + \delta(t-5)]$

$= u(t+10) + u(t+1) - u(t+9) - u(t) + u(t) + u(t-9) - u(t-1) - u(t-10)$

$= u(t+10) + u(t+1) + u(t-9) - u(t+9) - u(t-1) - u(t-10)$

-10 -1 9 -9 1 10



4. 证明：$\sin(t), \sin(2t), \dots, \sin(nt)$（$n$为正整数）是在区间$(0,2\pi)$的正交函数集。然后回答：(1) 该函数集在区间$(0,2\pi)$是否为完备的正交函数集，为什么？

(2) 该函数集在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$是否为正交函数集，为什么？

（所有证明和计算都要求写出具体步骤）

只需证 $\begin{cases} \int_0^{2\pi} \sin(at)\sin(bt)\,dt = 0,\ a\neq b & ① \\ \int_0^{2\pi} \sin^2(at)\,dt = K & ② \end{cases}$

①式 $\int_0^{2\pi} \sin(at)\sin(bt)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\{\cos[(a-b)t] - \cos[(a+b)t]\}\,dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi}\cos[(a-b)t]\,dt - \int_0^{2\pi}\cos[(a+b)t]\,dt\right) = 0$

②式 $\int_0^{2\pi} \sin^2(at)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2at)}{2}\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,dt - \frac{1}{4a}\int_0^{2\pi}\cos(2at)\,d(2at) = \pi$

因此 $\{\sin(t), \sin(2t), \cdots, \sin(nt)\}$ $(n\in N^+)$ 是 $(0,2\pi)$ 的正交函数基.

(1) 不是. $\int_0^{2\pi} \sin t\cos t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2t\,dt = -\frac{1}{4}\cos 2t\Big|_0^{2\pi} = 0$

则 $\cos t$ 与 $\sin t$ 在 $(0,2\pi)$ 上正交，故 $\{\sin t, \sin 2t, \cdots, \sin nt\}$ 在 $(0,2\pi)$ 不是完备正交函数基

(2) 不是. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cdot\sin 2t\,dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3t\,dt\right) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \neq 0$

则 $\sin t$ 和 $\sin 2t$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上不正交 故 $\{\sin t, \sin 2t, \cdots, \sin nt\}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上不是正交函数基

5. 已知连续信号$f_1(t) = \begin{cases} 2, & 1<t<3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，$f_2(t) = \begin{cases} 1, & 0<t<1 \\ -1, & 1<t<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，

(1) 求卷积函数$y(t) = f_1(t) * f_2(t)$，并画出其概略图。

(2) 画出$y(0.5t-2)$的波形，注意标注横、纵坐标刻度，并附上简要的步骤说明。

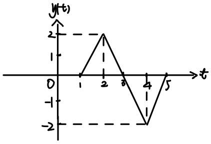
(1) ① $t<1$ 或 $t>5$ 时 $y(t)=0$

② $1<t<2$ 时 $y(t) = \int_1^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau = 2\int_1^t d\tau = 2(t-1)$

③ $2<t<3$ 时. $y(t) = \int_1^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau = -2\int_1^{t-1} d\tau + 2\int_{t-1}^{t} d\tau = 6-2t$.

④ $3<t<4$ 时 $y(t) = \int_{t-2}^{3} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau = -2\int_{t-2}^{t-1} d\tau + 2\int_{t-1}^{3} d\tau = 6-2t$

⑤ $4<t<5$ 时 $y(t) = \int_{t-2}^{3} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau = -2\int_{t-2}^{3} d\tau = 2t-10$



(2)