

- 什么是信号？

信号是信息（消息）的物理表现形式，在数学上是一个或多个变量的函数

- 确定性信号的定义

按确定性规律变化，可用数学解析式或确定性曲线精确地描述，在相同的条件下能够重现

- 能量信号和功率信号的定义

能量信号：能量有界，功率为0

功率信号：能量无界，功率有界

- 信号分析与信号处理的定义

信号分析：通过解析法或测试法找出不同信号的特征，了解其特性，掌握它随时间或频率变化的规律

信号处理：对信号进行某种加工或变换，把一种信号变换成另一种信号的过程

- 复指数信号的意义

把直流信号、指数信号、正弦型信号，具有包络线的正弦型信号表示成统一的形式更具普遍意义

- 奇异信号的定义

函数本身或者函数导数（包括高阶导数）有不连续点

- 单位冲激偶信号的性质

(1) 若 $f'(t)$ 在0点连续，则  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)f(t)dt = -f'(0)$

(2) 若 $f'(t)$ 在 $t_0$ 点连续，则  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t - t_0)f(t)dt = -f'(t_0)$

(3) 冲激偶信号的面积为零，即  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)dt = 0$

(4) 冲激偶信号是奇函数  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(-t)f(t)dt = f'(0)$

- 与冲激信号、冲激偶信号、阶跃信号的卷积

- 与冲激信号、冲激偶信号的卷积

$$\begin{aligned}x(t) * \delta(t) &= x(t) \\x(t) * \delta(t - t_0) &= x(t - t_0) \\x(t - t_1) * \delta(t - t_2) &= x(t - t_1 - t_2) \\\delta(t) * \delta(t) &= \delta(t) \\\delta(t) * \delta(t - t_0) &= \delta(t - t_0) \\\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) &= \delta(t - t_1 - t_2) \\x(t) * \delta'(t) &= x'(t)\end{aligned}$$

- 与阶跃信号的卷积

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$$

- 卷积的微分与积分性质
- 正交函数集与完备正交函数集的概念

## 正交函数集

- 考虑两个非零函数  $f_1(t), f_2(t)$ ，若满足

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) dt = 0 \quad (\text{内积为0})$$

此处上标\*符号表示共轭，可涵盖复函数；  
若  $f_2(t)$  为实函数，则  $f_2^*(t) = f_2(t)$

则称  $f_1(t), f_2(t)$  在 **区间**  $(t_1, t_2)$  内 **正交**。

- 考虑  $n$  个非零函数  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$  构成一个函数集，且这些函数在 **区间**  $(t_1, t_2)$  内满足

$$\int_{t_1}^{t_2} f_i(t) f_j^*(t) dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ k_i & i = j \end{cases} \quad (a)$$

其中  $k_i$  为常数，则称此函数集为在 **区间**  $(t_1, t_2)$  内的 **正交函数集**。

- 上述非零函数  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$  在 **区间**  $(t_1, t_2)$  内构成 **完备正交函数集** 的条件：(a) 式成立，且不存在 **非零函数**  $\varphi(t)$  满足

$$\int_{t_1}^{t_2} f_i(t) \varphi^*(t) dt = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

- 帕斯瓦尔 (Parseval) 方程的意义

表示了信号分解的能量关系，信号  $x(t)$  的能量等于此信号在完备正交函数集中各分量的能量之和。

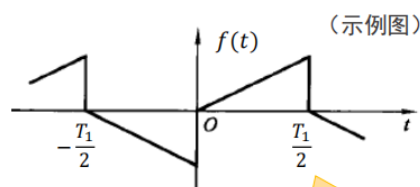
- 功率信号  $f(t)$  的帕斯瓦尔 (Parseval) 公式

$$P = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} |f(t)|^2 dt = (c_0)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} c_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

- 狄里赫利 (Dirichlet) 条件
- 为什么狄里赫利条件只是傅里叶变换存在的充分条件
- 奇谐信号的性质

- 奇谐函数 (半波对称函数)

$$f(t) = -f(t \pm \frac{T_1}{2})$$



(示例图)

波形沿时间轴平移并  
相对于该轴上下反转

- $a_0 = 0$
- $a_n = b_n = 0$  ( $n$  为偶数)
- $a_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt$  ( $n$  为奇数)
- $b_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt$  ( $n$  为奇数)

奇次谐波的正弦、余弦项

- 吉布斯现象

傅里叶有限级数的项数越多，合成的谐波的峰起越接近型号的不连续点处，当项数  $N$  比较大时，峰起值趋向于一个常数，约为总跳变值的 9%，并从不连续点处以起伏振荡的形式逐渐衰减下去

- 矩形脉冲信号、符号函数信号、单位阶跃信号的频谱密度函数

矩形脉冲信号	$F(\omega) = E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$	$f(t) = E\left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right]$
单边指数信号	$F(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$	$f(t) = e^{-at}u(t), a > 0$
双边指数信号	$F(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$	$f(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t), a > 0$
双边奇指数信号	$F(\omega) = -\frac{j2\omega}{a^2 + \omega^2}$	$f(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t), a > 0$
单位直流信号	$F(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$	$f(t) = 1$
符号函数信号	$F(\omega) = \frac{2}{j\omega}$	$f(t) = \text{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$
单位冲激信号	$F(\omega) = 1$	$f(t) = \delta(t)$
单位阶跃信号	$F(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	$f(t) = u(t)$

- 傅里叶变换的奇偶虚实性

• 若

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

则

$$f^*(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F^*(-\omega)$$

- 当 $f(t)$ 为实函数时, 有 $F(\omega) = F^*(-\omega)$
- 当 $f(t)$ 为实函数时,  $|F(\omega)|$ 是 $\omega$ 的偶函数,  $\varphi(\omega)$ 是 $\omega$ 的奇函数
- 当 $f(t)$ 为实偶函数时,  $F(\omega)$ 是 $\omega$ 的实偶函数
- 当 $f(t)$ 为实奇函数时,  $F(\omega)$ 是 $\omega$ 的虚奇函数

- 傅里叶变换的对偶性

$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
--------	-------------------

- 傅里叶变换的频域积分与微分性质
- 周期信号傅里叶级数与单脉冲傅里叶变换的关系
- 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系
- 时域采样定理与频域采样定理

对于频谱受限, 频率为 $f_m$ 的信号, 若其频谱只占据 $-w_m$ 到 $w_m$ , 则信号可以用等间隔的采样信号唯一表示, 最小采样频率为 $2f_m$

当信号频谱 $F(\omega)$ 以 $\omega_0$ 的采样间隔进行采样, 它对应的时域信号是以 $T_0$ 为周期对原信号 $f(t)$ 进行周期延拓, 信号的幅度 $\times 1/\omega$

- 工程上采样频率的实际要求
- 奈奎斯特 (Nyquist) 频率与奈奎斯特间隔
- 信号恢复的内插公式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) Sa \left[ \frac{\omega_s}{2} (t - nT_s) \right]$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} F_p(\omega) * G(\omega)$$

$$\equiv = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\omega_0) Sa \left[ \frac{T_0}{2} (\omega - k\omega_0) \right]$$

- 当信号长度截断不当时，会产生频谱泄漏现象

带限信号的采样频率选取较容易，但一般带限信号时宽无限，不符合DFT在时域对信号的要求，需要进行加窗截断，截断过程使频谱产生失真，从原有的频率受限图形扩展开来，称为“泄漏”

泄漏与混叠有着密切联系，因为泄漏导致频谱扩展，从而引起混叠

- 减少频谱泄漏的处理方法：选取形状合适的窗函数

连续周期信号是非时限信号，作DFT处理时也要加窗截断当截断长度正好是信号周期时，不会产生频谱泄漏，但当截断长度不是信号周期时，会产生频谱泄漏

处理方法：合理地选取截断长度（整周期截断）

- 连续时间正弦信号与离散时间正弦序列

离散时间正弦序列可以理解为从连续时间正弦信号经采样得到

在时移与相移上的区别：

连续时间：时移、相移——对应

离散时间：时移对应相移，反之不一定成立

关于周期性的区别：离散时间正弦序列不一定是周期序列

数字频率上可能存在的区别：两个相同的离散时间信号，其数字频率有可能是不同的

- 连续信号采样离散化后，无限频率范围映射到离散信号的有限频率范围为 $2\pi$
- 连续和离散周期信号频谱的关系

这个例子的 $|X(k\Omega_0)|$ 相当于 $|X(k\omega_0)|$ 做了周期延拓，并且频率上乘以 $T_s$ 做线性变换  
 满足采样定理的条件下， $X(k\Omega_0)$ 可以看成 $X(k\omega_0)$ 的周期重复，重复周期为  $\begin{cases} \omega_s & (\text{模拟频率}) \\ 2\pi & (\text{数字频率}) \end{cases}$

- 离散与连续周期信号的频谱

- 离散时间周期信号的频谱 $X(k\Omega_0)$ 是具有谐波性的离散周期序列
- 连续时间周期信号的频谱 $X(k\omega_0)$ 是具有谐波性的离散非周期序列
- $X(k\Omega_0)$ 可以看作是 $X(k\omega_0)$ 的近似式，近似程度与采样周期有关

- 复共轭
- 帕斯瓦尔定理

若 $x(n) \xleftrightarrow{\text{DFS}} X(k\Omega_0)$ ,  $h(n) \xleftrightarrow{\text{DFS}} H(k\Omega_0)$ , 则

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)h^*(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0)H^*(k\Omega_0)$$

特别地, 当 $x(n) = h(n)$ , 有

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |X(k\Omega_0)|^2$$

- 周期卷积, 圆周卷积, 线性卷积的形式
- 圆周卷积vs线性卷积

线性卷积在序列右移过程中, 左端依次留出为零值的空位; 而圆周卷积过程中, 同样的序列右移, 会将右移值循环回序列的左端

- 离散时间傅里叶变换 (DTFT) 的存在条件

当 $x(n)$ 为无限长序列时, 为了保证和式收敛, 要求 $x(n)$ 是绝对可和的或该序列的能量有限, 那么DTFT的式子就一定收敛

DTFT的性质		线性	$ax(n) + by(n)$	$aX(\Omega) + bY(\Omega)$
已知 $x(n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(\Omega)$ $y(n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} Y(\Omega)$	时域平移		$x(n - n_0)$	$e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$
	时间翻转		$x(-n)$	$X(-\Omega)$
	频域平移		$e^{j\Omega_0 n} x(n)$	$X(\Omega - \Omega_0)$
	时域卷积		$x(n) * y(n)$	$X(\Omega)Y(\Omega)$
	共轭对称		$x^*(n)$	$X^*(-\Omega)$
注: DTFT的其他性质 详见《信号分析与处理》 教材第138页	频域微分		$nx(n)$	$j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
	频域卷积		$x(n)y(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\lambda)Y(\Omega - \lambda)d\lambda$

- DTFT、DFS 与连续时间傅里叶变换 (CTFT) 的关系

**DTFT 与 DFS:** DTFT 是 DFS 当  $N \rightarrow \infty$  时情况

**共同点:** 时域都是离散的, 在频域频谱都是周期的。

**不同点:** 周期序列的频谱通过 DFS 求解, 是离散的、具有谐波性,  $X(k\Omega_0)$  是谐波的复振幅, 宜于计算机计算; 非周期序列的频谱通过 DTFT 求解, 是连续的、不具有谐波性,  $X(\Omega)$  表示频谱密度, 不利于计算机的计算或分析。

**DTFT 与 CTFT:**

**共同点:** 信号在时域波形均为非周期, 频域均为频谱密度函数 (连续频谱)。

**不同点:** DTFT 得到的  $X(\Omega)$  是周期性的, CTFT 得到的  $X(\omega)$  为非周期的。

- 信号与傅里叶变换对应关系

- |                  |                |
|------------------|----------------|
| • 连续时间信号的频谱是非周期的 | • 时域周期性——频域离散性 |
| • 离散时间信号的频谱是周期的  | • 时域离散性——频域周期性 |
| • 周期信号具有离散频谱     | • 时域非周期——频域连续性 |
| • 非周期信号具有连续频谱    | • 时域连续性——频域非周期 |

- DFT与DFS、DTFT的关系

- DFT 得到  $X(k)$  的本质: 有限非周期序列  $x(n)$  原来连续的、周期性的频谱密度函数  $X(\Omega)$  在其数字频域主值区间 (长度为  $2\pi$ ) 的取样

- 用 DFT 计算信号频谱的注意事项

如果从连续时间信号采样, 采样频率必须大于两倍的信号最高截止频率  
对周期信号要截取整周期

- 圆周卷积性质: 频域圆周卷积
- DFT的奇偶虚实性

- 实偶函数的 DFT 也为实偶函数
- 实奇函数的 DFT 为虚奇函数
- 虚偶函数的 DFT 是虚偶函数
- 虚奇函数的 DFT 是实奇函数

- 基 2FFT 算法的基本原理 ( $W_N$ 的性质)



# 基2FFT 算法（Cooley-Tukey算法）的基本思路

- 序列的长度是2的整数幂时, 将 $x(n)$ 分解（抽取）成较短的序列, 然后从这些序列的DFT中求得 $X(k)$ 的方法

- $x(n)$ 的 $N$ 点DFT表示为:

$$X(k) = \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2\ell)(W_N^2)^{\ell k} + W_N^k \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2\ell+1)(W_N^2)^{\ell k} = \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2\ell)W_N^{\frac{\ell k}{2}} + W_N^k \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2\ell+1)W_N^{\frac{\ell k}{2}}$$
$$= G(k) + W_N^k H(k)$$

其中  $G(k) = \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2\ell)W_N^{\frac{\ell k}{2}}$   $H(k) = \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2\ell+1)W_N^{\frac{\ell k}{2}}$

$W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{\frac{N}{2}}$

2个 $\frac{N}{2}$ 点的DFT之和

- FFT 应用中的注意事项

- 信号离散化时, 采样频率要满足奈奎斯特频率
- 在基2FFT算法中,  $N$ 一定是2的整数次幂, 若不是, 则需要给序列补上若干个零, 凑成2的整数次幂
- 频率分辨率: DFT中谱线间的最小间隔（单位为Hz或rad）, 等于信号的基波频率 $f_0$ （或 $\Omega_0$ ）,  $f_0$ 越小则频率分辨率越高
- 对于通过采样频率 $f_s$ 得到的、长度为 $N$ 的数据序列, 频率分辨率为

$$f_0 = \frac{1}{NT_s} = \frac{f_s}{N}$$

- Z变换和拉普拉斯变换的关系

序列的Z变换可以看作: 产生序列的理想冲激采样信号的拉普拉斯变换进行 $z = e^{sT}$ 映射的结果, 由复变量 $s$ 平面映射到复变量 $z$ 平面

- Z变换和DTFT、DFT之间的关系

单位圆上的Z变换就是序列的离散时间傅里叶变换 $X(\Omega)$

DFT是Z变换在单位圆上的 $N$ 点采样

前提: 单位圆包含在Z变换的收敛域内

- 系统是信号处理的工具
- 系统的数学模型

对于同一物理系统, 在不同条件下, 可以得到不同形式的数学模型。

对于不同的物理系统, 经过抽象和近似, 有可能得到形式上完全相同的数学模型。

对于较复杂的系统, 其数学模型可能是一个高阶微分方程, 规定此微分方程的阶次就是系统的阶数。

- 系统数学模型的分类

**输入输出模型:** 只反映系统输入和输出之间的关系, 或者说只反映系统的外特性, 称为输入输出模型, 通常由输入输出方程描述

**状态空间模型:** 不仅反映系统的外特性, 而且更着重反映系统的内部状态, 称为状态空间模型, 通常由状态方程和输出方程描述

- 系统分析

在给定系统的情况下，研究系统对输入信号所产生的响应，并由此获得对系统功能和特性的认识

- 系统综合

在已知系统的输入信号及对输出信号要求的情况下，通过调整系统中可变动部分的结构和参数，以保证得到所要求的输出信号

- 系统的性质

记忆性：对任意的输入信号，如果每一时刻系统的输出信号值仅仅取决于同时刻的输入信号值，而与它过去的工作状态（历史）无关，称该系统具有无记忆性，否则，该系统为有记忆的

因果性：对于任意的输入信号，如果系统在任何时刻的输出值，只取决于该时刻和该时刻以前的输入值，而与将来时刻的输入值无关，就称该系统具有因果性；否则，如果某个时刻的输出值还与将来时刻的输入值有关，则为非因果的

实际物理系统都是因果系统,在信号处理技术领域中，待处理的时间信号已被记录并保存下来，可以利用后一时刻的输入来决定前一时刻的输出，将构成非因果系统

可逆性:如果一个系统对不同的输入信号产生不同的输出信号，即系统的输入输出信号呈一一对应的关系，则称该系统是可逆的，或称为可逆系统，否则就是不可逆系统

稳定性:如果一个系统对其有界的输入信号其零状态响应也是有界的，则该系统具有稳定性，或称该系统是稳定系统，也可称为有界输入有界输出（BIBO）稳定系统

时不变性:如果系统的参数不随时间而变化，则称此系统为时不变系统（或非时变系统、定常系统）；如果系统的参量随时间改变，则称其为时变系统（或参变系统）

线性:同时满足叠加性和齐次性的系统称为线性系统，否则为非线性系统

系统输出的增量与输入增量之间呈线性关系，把这一类系统称为增量线性系统(一般为非零初始状态的线性系统),i.e.线性系统只有在零初始状态下才是线性的，否则是一个增量线性系统

- 时变、时不变系统的检验方法

- 检验一个系统的时不变性，可以从定义出发，对于 $x_1(t)$ ，有 $y_1(t)$ ，令 $x_2(t) = x_1(t - t_0)$ ，检验 $y_2(t)$ 是否等于 $y_1(t - t_0)$ 。若是，则系统是时不变的，否则系统就是时变的。

- 零输入响应和零状态响应

零输入响应：没有外加激励信号作用，只有起始状态（起始时刻系统储能）所产生的响应；相当于本次输入为零，系统由非零初始状态延续下来的输出

零状态响应：系统在零初始状态下，对本次输入激励的响应

- 连续时间 LTI 系统单位冲激响应  $h(t)$  的特点



其形式与 $n$ 、 $m$ 值的相对大小密切相关

$$\sum_{k=0}^n a_k h^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k \delta^{(k)}(t)$$

- $n > m$  时,  $h(t)$  具有形式:

$$h(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} u(t) \quad (\text{物理上可实现系统一般具有的形式})$$

- $n = m$  时,  $h(t)$  具有形式:

$$h(t) = c\delta(t) + \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

- $n < m$  时,  $h(t)$  具有形式:

$$h(t) = \sum_{j=0}^{m-n} c_j \delta^{(j)}(t) + \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

- 离散时间 LTI 系统单位样值响应  $h(n)$  的特点

$$\sum_{k=0}^N a_k h(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k \delta(n-k)$$

$$h(n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N A_i \lambda_i^n u(n) & N > M \\ \sum_{j=0}^{M-N} C_j \delta(n-j) + \sum_{i=1}^N A_i \lambda_i^n u(n) & N \leq M \end{cases}$$

- 冲激/脉冲响应和阶跃响应的关系

单位阶跃响应

$$h(t) = c'(t) \quad \leftarrow \text{连续时间} \quad c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

$$h(n) = c(n) - c(n-1) \quad \leftarrow \text{离散时间} \quad c(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) u(n-m)$$

单位冲激/脉冲响应是单位阶跃响应的微分/后向差分

- 频率响应

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

严格来讲，二者不一致；考虑到 $H(s)$ 在虚轴无极点的情况（稳定情况）更为普遍，两种符号表示一致

- 无失真传输的定义与条件

信号通过系统后，信号波形不变，而只能是幅度上对原信号按比例地放大或缩小，或者在时间上有一固定的延迟。

时域条件：  $y(t) = Kx(t - t_0)$

频域条件：

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = K e^{-j\omega t_0} = |H(\omega)| e^{j\varphi_h(\omega)}$$

幅频特性  $|H(\omega)| = K$

相频特性  $\varphi_h(\omega) = -\omega t_0$

无失真传输系统的频域条件

线性相位

- 无失真传输的线性相位关系

为了保证不产生相位失真，应使基波和二次谐波得到相同的延迟时间，即

$$\frac{\varphi_1}{\omega_1} = \frac{\varphi_2}{2\omega_1} = t_0 = \text{常数} \Rightarrow \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\omega_1}{2\omega_1} \quad (\text{谐波相移必须与其频率成正比})$$

- 系统的幅频特性是一个与频率无关的常数，即在全部频带内，系统都具有恒定的放大倍数

系统的相频特性与频率呈线性关系。信号通过系统的延迟时间 $t_0$ 就是系统相频特性 $\varphi_h(\omega)$ 的斜率的负值，即

$$\varphi_h(\omega) = -\omega t_0, \quad t_0 = -\frac{d\varphi_h(\omega)}{d\omega} \quad (\text{群延时/群时延})$$

实际中为了便于测量，常定义  $\tau = \left| \frac{d\varphi_h(\omega)}{d\omega} \right| > 0$  间接表示群延时

- 信号的无失真传输条件（频域、时域）只是理想条件。在实际中，任何带有信息的物理信号都是带限的，只需在信号占据频率范围内满足无失真传输条件。
- 时（频）域上的有限对应频（时）域的无限（证明）
- 若信号时域无限，在频域上不一定有限
- 理想低通的阶跃响应（非因果系统，物理上不可实现）

$$c(t) = \frac{1}{2} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \delta(\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{j\omega} d\omega \quad (\text{欧拉公式})$$

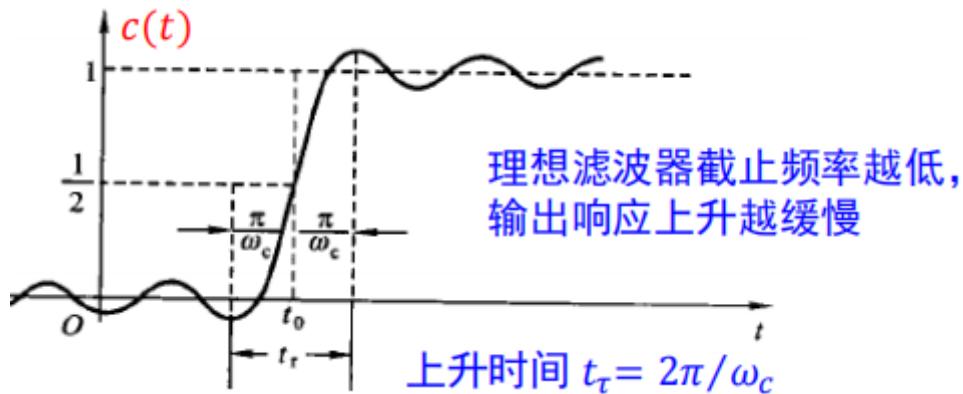
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\cos[\omega(t-t_0)]}{j\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\sin[\omega(t-t_0)]}{\omega} d\omega$$

(奇函数, 积分为0)

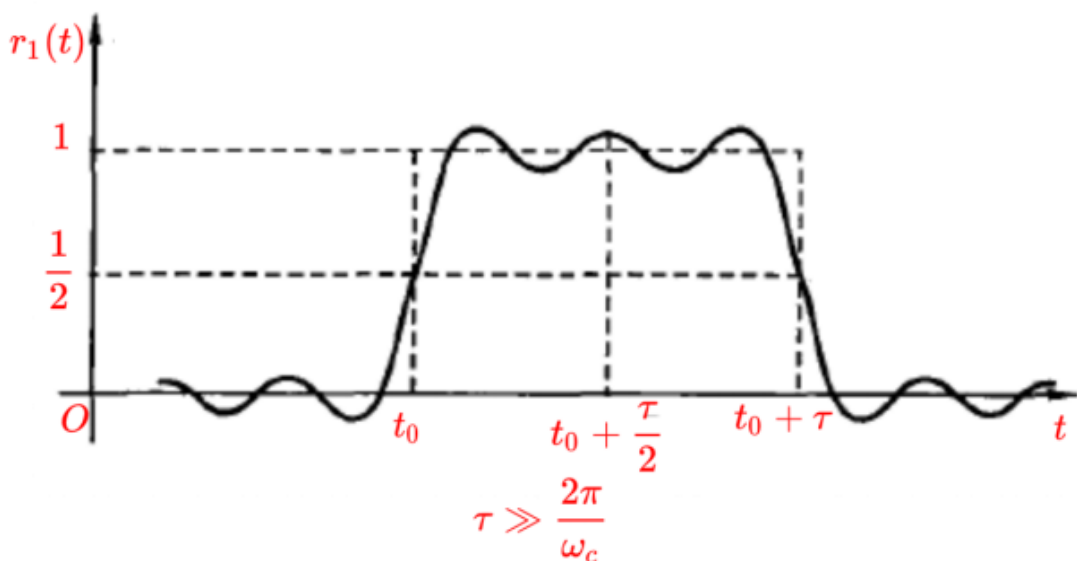
积分换元  
 $x = \omega(t - t_0)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t-t_0)]$$

阶跃响应的上升时间与低通滤波器（系统）的截止频率（带宽）成反比



矩形脉冲经理想低通传输时，必须使脉宽 $\tau$ 与滤波器的截止频率 $\omega_c$ 相适应，才能得到大体上为矩形的响应



吉布斯现象解释：加大理想低通滤波器的带宽，允许激励信号的更多高频成分通过，于是响应波形改善，但是在跳变点的上冲逼近9%。增大 $\omega_c$ 可以减小阶跃响应的上升时间，但不能改变9%上冲的强度

- 滤波的概念

传统：消除或减弱干扰噪声，提取有用信号的过程（滤除噪声）

现代：从原始信号中获取目标信息的过程（信号波形检测，参数估计等）

- 经典滤波器滤波原理

假定输入信号中的有用信号和希望去掉的信号具有不同的频带，通过设计具有合适频率特性的滤波器，去掉无用的信号，当有用信号和无用信号的频谱相互重叠时，无能为力（拍球声接近冲激信号，频谱无穷大）

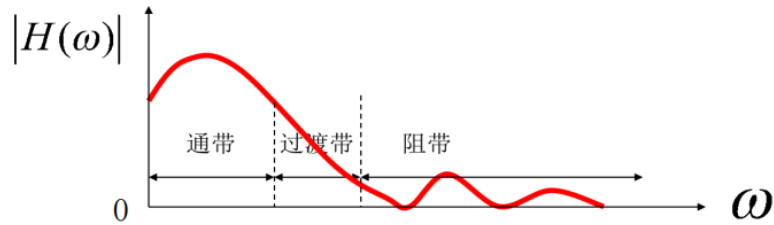
- 现代滤波器滤波原理

从含有噪声的信号（数据序列）中估计出信号的某些特征或信号本身，当信号被估计出来后，它将与原信号具有更高的信噪比，信号和噪声都视为实际信号

- 滤波器的物理可实现性

理想低通滤波器是非因果的，物理不可实现；其矩形幅频特性亦如此，实际中不能实现从一个频带到另一个频带之间的突变

允许滤波器的幅频特性在通带和阻带有一定的衰减范围，且幅频特性在这一范围内允许有起伏  
在通带和阻带之间有一定的过渡带



信号以很小的衰减通过滤波器的频率范围称为滤波器的“**通频带**”，简称**通带**

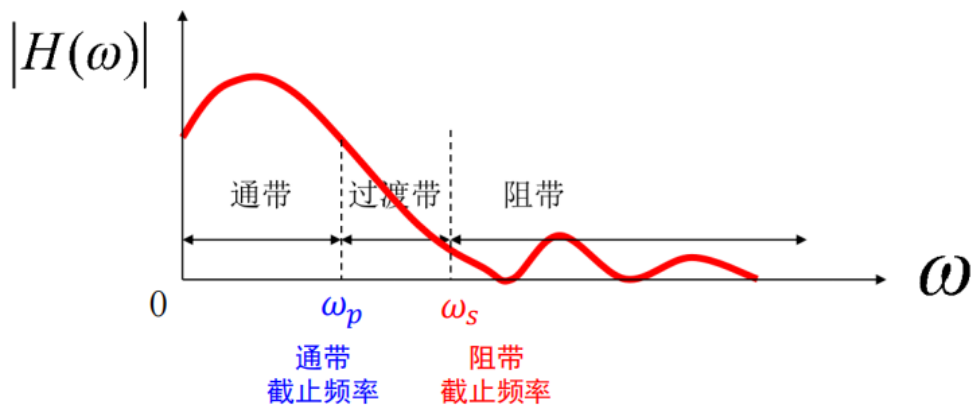
阻止信号通过滤波器的频率范围称为滤波器的“**阻频带**”，简称**阻带**

**过渡带**即为通带与阻带之间的频率范围

- 滤波器的技术指标

**中心频率**：滤波器通带、阻带截止频率的几何平均值

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_p \cdot \omega_s}$$



**通带波动** $\Delta_\alpha$ ：在滤波器的通带内，频率特性曲线的最大峰值与谷值之差

**相移** $\phi$ ：某一特定频率的信号通过滤波器时，其在滤波器的输入和输出端的相位之差。

**群延迟** $\tau_g$ ：又称为“包络延迟”，用相移 $\phi$ 对于频率的变化率来衡量，即

$$\tau_g = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$$

对于实际的滤波器， $\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$ 通常为负值，因而 $\tau_g$ 通常为正值。

# 滤波器的技术指标

$|H(0)|$  假定已被  
归一化为1

(5) 衰减函数 $\alpha$ : 又称衰耗特性或工作损耗, 单位是分贝 (dB)

$$\alpha = 20 \lg \frac{|H(0)|}{|H(\omega)|} = -20 \lg |H(\omega)| = -10 \lg |H(\omega)|^2$$

• 通带衰减函数:

$$\alpha_p = 20 \lg \frac{|H(0)|}{|H(\omega_p)|} = -20 \lg |H(\omega_p)|$$

通带截止  
频率

• 阻带衰减函数:

$$\alpha_s = 20 \lg \frac{|H(0)|}{|H(\omega_s)|} = -20 \lg |H(\omega_s)|$$

阻带截止  
频率

工程上, 设计低通滤波器时, 通常取幅值下降 3dB 时所对应的频率值作为通带截止频率

通常认为, 当信号的功率谱密度  $|H(\omega)|^2$  降到它峰值的一半时, 频率谐波对整体的影响就可以忽略  
通带即是  $|H\omega|$  从 0dB 的峰值点下降到不小于 -3dB 的频率  $\omega$  的集合

• 频率特性模平方 → 系统函数

**稳定性——模拟滤波器应当是稳定的时不变系统 (有传递函数)**

是一个具有**实系数**的**s有理函数**, **极点分布在s左半平面**

**分子多项式的阶次不大于分母多项式的阶次——符合实际系统的因果性**

根据  $H(s)$  的可实现条件和  $H(s)$ ,  $H(-s)$  的零、极点分布, 将给定的幅度平方函数以  $-s^2$  代替  $\omega^2$ , 确定  $H(s)$  与  $H(-s)$  的零、极点

•  $H(s)$  的极点必须位于  $s$  的左半平面,  $H(-s)$  的极点必须位于  $s$  的右半平面

• 零点选取取决于所设计滤波器**是否为最小相位系统**

• 零点选取取决于所设计滤波器**是否为最小相位系统**

相位最小的充要条件!

在一定的幅  
频特性下,  
相移最小的  
系统

• 若是**最小相位系统**:  $H(s)$  的**所有零点**也应分布在**左半平面或  $j\omega$  轴上**

• 若是**非最小相位系统**: **零点位置与稳定性无关**, 可任意选取

• 若有零点在  $j\omega$  轴上: 根据  $H(s)$  的系数为实数, **在  $j\omega$  轴上的零点必须是偶阶重零点**, 此时, 要把轴上的零点**平分**给  $H(s)$  与  $H(-s)$

• 巴特沃思 (Butterworth) 低通滤波器

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

$n$ ——滤波器的阶数

$\omega_c$ ——滤波器的截止频率，当 $\omega = \omega_c$ 时， $|H(\omega)|^2 = \frac{1}{2}$

•  $\omega_c$ 对应的是滤波器的-3dB点

- 巴特沃思低通滤波器的幅频特性

最大平坦性：可以证明，若阶数为 $n$ ，在 $\omega = 0$ 处，它的前 $(2n - 1)$ 阶导数都等于零。

频响曲线的单调下降特性：幅值函数无论在通带、阻带（或过渡带）都是单调递减的

## 滤波器幅频特性与阶数 $n$ 的关系：

- 阶数 $n$ 增加，通带幅频特性变平坦，阻带幅频特性衰减加快，过渡带变窄，整个幅频特性趋于理想低通特性
- 当 $\omega > \omega_c$ 后，特性曲线近似以 $20n$  dB/倍频程速度下降（虽然增加 $n$ 可以改善衰减性能，但代价是实现电路的元件数量也要增加）

巴特沃思滤波器具有良好的相频特性，在通带内没有起伏，比较接近直线

$H(s)H(-s)$ 的 $2n$ 个极点以 $\frac{\pi}{n}$ 为间隔均匀分布在半径为 $\omega_c$ 的圆上，这个圆称为巴特沃思圆；

所有极点以 $j\omega$ 轴为对称轴呈对称分布， $j\omega$ 轴上没有极点；

当 $n$ 为奇数时，有两个极点分布在 $s = \pm\omega_c$ 的实轴上； $n$ 为偶数时，实轴上没有极点。所有复数极点两两呈共轭对称分布。

- 数字滤波器相比模拟滤波器的优点
  - 精度高、可靠性高、灵活性高、便于大规模集成
- 有限冲激响应（FIR）滤波器与无限冲激响应（IIR）滤波器



若分母上的系数 $a_i = 0$ ，则有

$$H(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i}$$

$$h(n) = b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1) + \dots + b_M \delta(n-M)$$

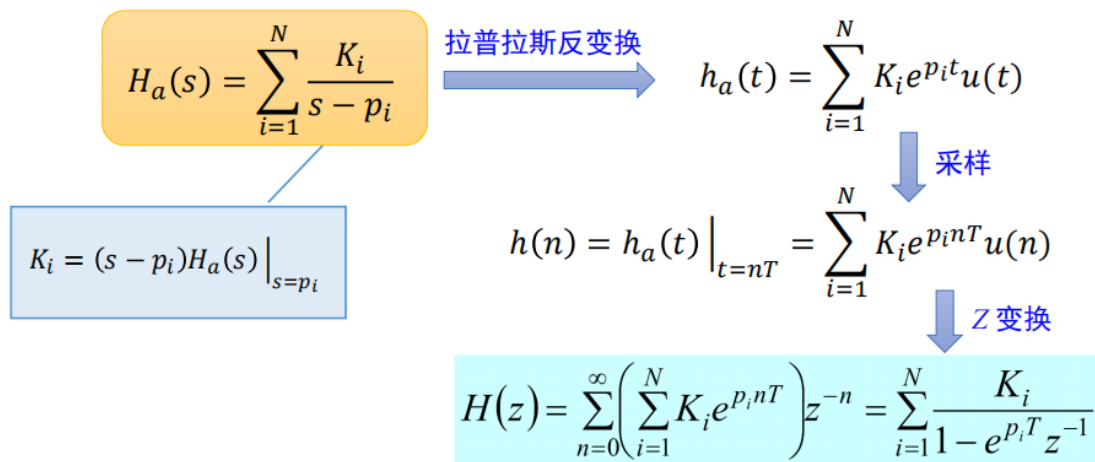
单位脉冲响应的时间长度是有限的，最多有 $(M+1)$ 项

把系统函数具有以上形式的数字滤波器称为有限冲激响应（FIR, Finite Impulse Response）滤波器

$H(z)$ 只有单极点 $z = 0$ ，在单位圆内，故FIR滤波器总是稳定的

- 冲激响应不变法（IIR）

设模拟滤波器的系统函数具有 $N$ 个单极点 $p_i, i = 1, 2, \dots, N$



- $s$ 平面的极点 $p_i$ 映射到 $z$ 平面是位于 $z = e^{p_i T}$ 的极点。

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\Omega} = e^{\sigma T} \cdot e^{j(\Omega + 2k\pi)} = e^{\sigma T} \cdot e^{j(\omega + \frac{2\pi}{T}k)T}$$

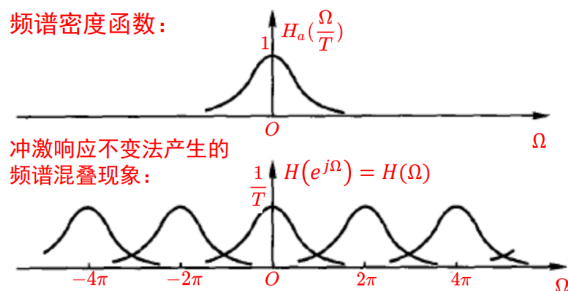
$$H(z) \big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a \left( s + j \frac{2\pi}{T} k \right)$$

## 冲激响应不变法设计 IIR 滤波器的特点

- 模拟滤波器和数字滤波器之间的频率变换是线性关系，即 $\Omega = \omega T$
- 具有较好的时域逼近特性，可以很好地逼近模拟滤波器冲激响应
- $s$ 平面与 $z$ 平面映射的多值性容易造成频谱混叠现象

由于冲激响应不变法的 $h(n)$ 是对模拟滤波器的 $h_a(t)$ 采样的结果，就频率特性而言，**存在频谱混叠**。 $s$ 平面的虚轴可以映射为 $z$ 平面的单位圆，而且

$$H(z) = H(e^{j\Omega}) = H(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\frac{\Omega}{T} + j\frac{2\pi}{T}k\right) \quad (s = j\omega, z = e^{j\Omega})$$



- 冲激响应不变法得到数字滤波器的增益与采样周期 $T$ 成反比
- 减小采样间隔，可减小混叠，但是会造成数字滤波器增益过高
- 有时， $h(n)$ 的设计值采用 $Th_a(nT)$ ，以保证转换后数字滤波器增益不变

#### • IIR 滤波器和 FIR 滤波器优缺点比较

##### IIR 滤波器

优点：含有零极点，可以利用模拟滤波器的设计，计算量小，设计简单

缺点：零极点的存在导致系统稳定性问题；相位的非线性

##### FIR 滤波器

优点：严格线性相位；滤波器总是稳定的；可以利用FFT快速处理

缺点：所需阶次要比IIR高，运算量较大

#### • 双线性变换法

原理：利用微分方程表示为差分方程

## 双线性变换法的特性

- 双线性变换是**从 $s$ 平面到 $z$ 平面一一对应的映射关系**
- 双线性变换将 $s$ 平面虚轴唯一地映射到 $z$ 平面的单位圆，保证了 $H(z)$ 的频率响应能模仿 $H_a(s)$ 的频率响应，**避免了频率响应混叠现象**
- 双线性变换将 $s$ 左半平面全部映射到 $z$ 平面单位圆内，将 $s$ 右半平面全部映射到 $z$ 平面的单位圆外，保证了 $H(z)$ 和 $H_a(s)$ 相比，其**稳定性不发生变化**

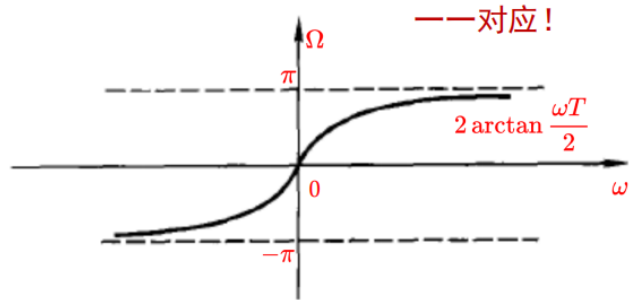
# 数字频率 $\Omega$ 和模拟频率 $\omega$ 的关系

- 在单位圆上有  $z = e^{j\Omega}$  (对应  $s = j\omega$ )

$$\bullet z = e^{j\Omega} = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} = \frac{1 + j\frac{\omega T}{2}}{1 - j\frac{\omega T}{2}}$$

$$\bullet \Omega = 2 \arctan \frac{\omega T}{2}$$

$$\bullet \omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$



- 基于频率预畸变的校正方式