第四次作业

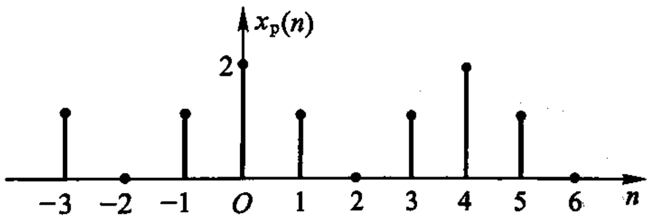
2025 年 5 月 12 日

提示：DFS 公式使用课件上的形式（1/*N* 在正变换中），即

$$\mathrm{DFS}[x(n)] = X(k\Omega_0) = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$$

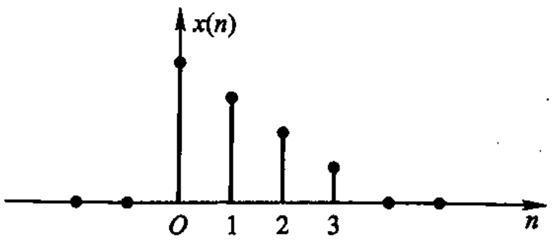
1. 根据题意，求解以下问题：（20 分，每小题 10 分）

(1) 考虑如题图 4-1 所示的周期序列$x_p(n)$，周期$N = 4$，求该序列的 DFS；



题图 4-1

(2) 考虑如题图 4-2 所示的有限长序列$x(n)$，绘出$x_1(n)$和$x_2(n)$序列，其中$x_1(n) = x\big((n-2)\big)_4 R_4(n)$，$x_2(n) = x\big((-n)\big)_4 R_4(n)$。



题图 4-2

2. 考虑一个周期为$N = 10$的周期序列$x(n)$如下：

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 7 \\ 0, & 8 \le n \le 9 \end{cases}$$

令$g(n) = x(n) - x(n-1)$，求解以下问题：

(1) 证明$g(n)$是周期序列，周期为$N = 10$；（4 分）

(2) 求解序列$x(n)$的 DFS；（8 分）

(3) 求解序列$g(n)$的 DFS。（8 分）

提示：DFS 公式使用课件上的形式，可用 DFS 时移性质。

3. 已知有限长序列$x(n)$如下：

$$x(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 2, & n=1\\ -1, & n=2\\ 3, & n=3\end{cases}$$

(1) 用矩阵形式求序列$x(n)$的 DFT，并通过 IDFT 验证结果是正确的（涉及旋转因子W_N的计算，要求写出详细计算步骤）；（10 分）

(2) 基 2FFT 算法也可解释为旋转因子矩阵的分解简化，例如对$N=4$可写出

$$\begin{bmatrix}X(0)\\X(2)\\X(1)\\X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & W^0 & 0 & 0\\ 1 & -W^0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & W^1\\ 0 & 0 & 1 & -W^1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & W^0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & W^0\\ 1 & 0 & -W^0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -W^0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\x(2)\\x(3)\end{bmatrix}$$

证明该矩阵表示式与上一问中的 DFT 表示式一致，并针对此矩阵相乘的过程使用蝶形图画出相应的 FFT 流程图。（10 分）

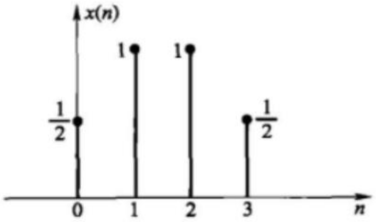
4. 考虑如题图 4-3 所示的$N=4$有限长序列$x(n)$，求解以下卷积和，**必须写出求解过程，（若仅给出结果的序列图形而无相应的解释，则不计分）**：（20 分，每小题 5 分）

(1) $x(n)$与$x(n)$的线性卷积，画出所得序列；

(2) $x(n)$与$x(n)$的 4 点圆卷积，画出所得序列；

(3) $x(n)$与$x(n)$的 10 点圆卷积，画出所得序列；

(4) 欲使$x(n)$与$x(n)$的圆卷积和线性卷积相同, 求长度 L 的最小值。



题图 4-3 有限长序列$x(n)$

提示：根据圆卷积的定义，N点圆卷积对应的就是定义式中累加项最大项数N的取值。求解 10 点圆卷积，需要为序列$x(n)$补零，注意补零的位置：替换变量后得到的$x(m)$补零位置在原序列样值之后（右侧），相应地，$x((n-m))_{10}R_{10}(m)$补零的位置在已知样值之前（左侧）。

5. 已知两有限长序列：

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) R_N(n), \quad h(n) = \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right) R_N(n)$$

用直接卷积和 DFT 两种方法分别求：

(1) $y(n) = x(n) \circledast h(n)$；（6 分）

(2) $y(n) = x(n) \circledast x(n)$；（7 分）

(3) $y(n) = h(n) \circledast h(n)$（圆卷积长度仍取 N 点循环）。（7 分）