By 22-PSP

自动控制理论 A—作业 3

100

1. (5′+10′+5′) 如图 1 所示，假设两个滑块都在无摩擦的表面上运动，
   (a) 请写出系统的运动方程
   (b) 选择适当的状态变量，写出系统的状态空间表达式
   (c) 假设 $r(t)$ 为系统的控制输入量， y 为系统的输出量，请根据系统的状态空间模型计算系统的传递函数 $G(s)=Y(s)/R(s)$。

状态空间 → 传递函数

$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=C(sI-A)^{-1}B+D$

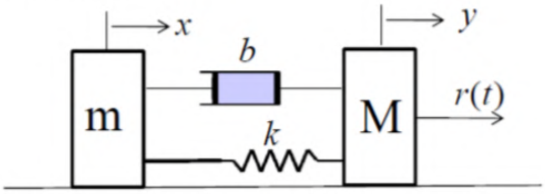

图 1. 弹簧-质量块-阻尼模型

解 (a) 系统. $r(t)=M\ddot{y}+m\ddot{x}$ …①

对于M. $r(t)-b(\dot{y}-\dot{x})-k(y-x)=M\ddot{y}$ …②

对于m: $b(\dot{y}-\dot{x})+k(y-x)=m\ddot{x}$ …③

(b) 设状态变量 $x_1=x, x_2=\dot{x}, x_3=y, x_4=\dot{y}$, 输入 $r(t)$, 输出 $y(t)$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\\ \dot{y}\\ \ddot{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ \frac{1}{m}[b(x_4-x_2)+k(x_3-x_1)]\\ x_4\\ \frac{1}{M}[r(t)-b(x_4-x_2)-k(x_3-x_1)]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\ -\frac{k}{m}&-\frac{b}{m}&\frac{k}{m}&\frac{b}{m}\\ 0&0&0&1\\ \frac{k}{M}&\frac{b}{M}&-\frac{k}{M}&-\frac{b}{M}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}r(t)$$

$y(t)=\begin{bmatrix}0&0&1&0\end{bmatrix}x$

即 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\ -\frac{k}{m}&-\frac{b}{m}&\frac{k}{m}&\frac{b}{m}\\ 0&0&0&1\\ \frac{k}{M}&\frac{b}{M}&-\frac{k}{M}&-\frac{b}{M}\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0&0&1&0\end{bmatrix}$, $D=0$

(c) 由 $\begin{cases}\dot{x}=Ax+Br\\ y=Cx+Dr\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}sX=AX+BR\\ Y=CX+DR\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}X=(sI-A)^{-1}BR\\ Y=CX+DR\end{cases} \Rightarrow G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=C(sI-A)^{-1}B+D$

其中 $sI-A=\begin{bmatrix}s&-1&0&0\\ \frac{k}{m}&s+\frac{b}{m}&-\frac{k}{m}&-\frac{b}{m}\\ 0&0&s&-1\\ -\frac{k}{M}&-\frac{b}{M}&\frac{k}{M}&s+\frac{b}{M}\end{bmatrix}$, $C[sI-A]^{-1}B=[0\ 0\ 1\ 0]\begin{bmatrix}m_{11}&&\\&\ddots&\\&&m_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}=\frac{1}{M}m_{34}$

只需要求 $[sI-A]^{-1}$ 的第[3,4]个元素 m_{34}, 由 $[sI-A]^{-1}=\frac{adj(sI-A)}{|sI-A|}$ 知,

$$adj(sI-A)_{34}=C_{43}=(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}s&-1&0\\ \frac{k}{m}&s+\frac{b}{m}&-\frac{b}{m}\\ 0&0&-1\end{vmatrix}=+\begin{vmatrix}s&-1\\ \frac{k}{m}&s+\frac{b}{m}\end{vmatrix}=s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}$$

$$|sI-A|=s\begin{vmatrix}s&-1&0\\ \frac{k}{m}&s+\frac{b}{m}&-\frac{b}{m}\\ -\frac{k}{M}&-\frac{b}{M}&s+\frac{b}{M}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}s&-1&0\\ \frac{k}{m}&s+\frac{b}{m}&-\frac{k}{m}\\ -\frac{k}{M}&-\frac{b}{M}&\frac{k}{M}\end{vmatrix}=s\left[s\begin{vmatrix}s+\frac{b}{m}&-\frac{b}{m}\\ -\frac{b}{M}&s+\frac{b}{M}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{k}{m}&-\frac{b}{m}\\ -\frac{k}{M}&s+\frac{b}{M}\end{vmatrix}\right]+s\begin{vmatrix}s+\frac{b}{m}&-\frac{k}{m}\\ -\frac{b}{M}&\frac{k}{M}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{k}{m}&-\frac{k}{m}\\ -\frac{k}{M}&\frac{k}{M}\end{vmatrix}$$

$$=s^4+\left(\frac{b}{M}+\frac{b}{m}\right)s^3+\left(\frac{k}{M}+\frac{k}{m}\right)s^2$$

$$[sI-A]^{-1}_{3,4}=\frac{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}}{s^4+\left(\frac{b}{M}+\frac{b}{m}\right)s^3+\left(\frac{k}{M}+\frac{k}{m}\right)s^2}$$

故 $G(s)=\frac{1}{M}[sI-A]^{-1}_{3,4}=\frac{ms^2+bs+k}{Mms^4+b(M+m)s^3+(M+m)ks^2}$

结果与作业一第5.2题一致

1. **余子式**:
   定义：A 关于第 i 行第 j 列的余子式（记作 M_{ij}）是去掉 A 的第 i 行第 j 列之后得到的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵的行列式。
2. **代数余子式**:
   定义：A 关于第 i 行第 j 列的代数余子式是:
   $$C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$
3. **余子矩阵**:
   定义：A 的余子矩阵是一个 $n\times n$ 的矩阵 C，使得其第 i 行第 j 列的元素是 A 关于第 i 行第 j 列的代数余子式。
4. **伴随矩阵**:
   定义：矩阵 A 的伴随矩阵是 A 的余子矩阵的转置矩阵:
   $$\mathrm{adj}(A)=C^T$$

By 22-psp

2. (10'+10') 假设以下两个系统的传递函数分别为

(a) $G(s)=\dfrac{8}{s^3+7s^2+14s+8}$

(b) $G(s)=\dfrac{s^2+2s+5}{s^3+2s^2+3s+10}$

请分别写出上述系统的状态空间表达式（能控标准型）。

$G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{Y(s)}{W(s)}\dfrac{W(s)}{U(s)}$ 分子 分母

注意B的型式

For function and derivatives all starting at zero

$\mathcal{L}[\frac{d^n}{dt^n}f(t)]=s^nF(s)$

能控标准型. $G(s)=\dfrac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} 0_{(n-1)\times 1} & I_{(n-1)\times(n-1)} \\ -a_0 & \cdots\ -a_{n-1}\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0_{(n-1)\times 1}\\ 1\end{bmatrix}$

$C=[\beta_0\ \beta_1 \cdots \beta_{n-1}]$ $D=0$

解: 设输入为 $U(s)$，输出为 $Y(s)$

(a) $G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{8}{s^3+7s^2+14s+8}=\dfrac{Y(s)}{W(s)}\dfrac{W(s)}{U(s)}$，其中 $\begin{cases}U(s)=(s^3+7s^2+14s+8)W(s) & ①\\ Y(s)=8W(s) & ②\end{cases}$

令 $x_1=w$, $x_2=w'$, $x_3=w''$，则

能控标准型. $\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{Y(s)}{W(s)}\dfrac{W(s)}{U(s)}$

$x=[w\ \ w' \cdots]$ 为系统状态.

① 反变换 $u(t)=w^{(3)}(t)+7w^{(2)}(t)+14w^{(1)}(t)+8w(t)$

$\dot{x}=\begin{bmatrix}w'\\ w''\\ w^{(3)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1\\ -8 & -14 & -7\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)$

② 反变换 $y(t)=8w(t)$

$y=[8\ \ 0\ \ 0]x+0$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1\\ -8 & -14 & -7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ $C=[8\ \ 0\ \ 0]$ $D=0$

(b) $G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{s^2+2s+5}{s^3+2s^2+3s+10}=\dfrac{Y(s)}{W(s)}\dfrac{W(s)}{U(s)}$，其中 $\begin{cases}U(s)=(s^3+2s^2+3s+10)W(s) & ①\\ Y(s)=(s^2+2s+5)W(s) & ②\end{cases}$

令 $x_1=w$, $x_2=w'$, $x_3=w''$，则

① 反变换，$u(t)=w^{(3)}(t)+2w''(t)+3w'(t)+10w(t)$

$\dot{x}=\begin{bmatrix}w'\\ w''\\ w^{(3)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -10 & -3 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)$

② 反变换 $y(t)=w^{(2)}(t)+2w'(t)+5w(t)$

故 $y=[5,2,1]x$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -10 & -3 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, $C=[5,2,1]$, $D=0$

3. (10') 什么是拉普拉斯变换、z 变换、傅里叶变换？这三者之间有什么联系？

1. 拉普拉斯变换 将实数域上的函数 $f(t)$ 变换为复平面 S 上的函数 $F(s)$

主要用于连续时间信号的分析，形式 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_{0^-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt$

其中 s 是复数，$s=\sigma+j\omega$ 拉氏变换可以将微分方程转化为代数方程

2. z 变换 将离散时间序列 $x(k)$ 映射到复平面上的函数 $X(z)$，形式 $X(z)=Z[x(k)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$

z 变换可以简化差分方程的求解

3. 傅里叶变换 将一个函数在时域的表现转换成该函数在频域的表现，可应用于连续信号和离散信号

对于连续信号，$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$

关系：拉普拉斯变换 $\xrightarrow{\sigma=0}$ 傅里叶变换

拉普拉斯变换 $\xrightarrow[\text{离散形式 } z=e^{sT}]{}$ z 变换

By 22-PSP

	初值	终值
连续	$f(0)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$	$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)$
离散	$x(0)=\lim_{z\to\infty} F(z)$	$x(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$

4. (10') 求下面函数的初值和终值

$$X(z)=\frac{0.238\,5z^{-1}+0.208\,9z^{-2}}{1-1.025\,9z^{-1}+0.473z^{-2}}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

解 ① 定理

z变换初值定理：$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$

z变换终值定理 若$(z-1)X(z)$全部极点位于单位圆内，$x(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$

② 初值 $X(z)=\dfrac{0.2385z^2+0.2089z}{(z^2-1.0259z+0.473)(z-1)}$

$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)=0$

③ 终值. $(z-1)X(z)=\dfrac{0.2385z^2+0.2089z}{z^2-1.0259z+0.473}$

极点 令 $z^2-1.0259z+0.473=0 \Rightarrow z_{1,2}=0.51295\pm 0.458i$

检验得$z_{1,2}$均在单位圆内

$x(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)\doteq 1.00067$

求z变换

① 定义法 $X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)z^{-n}$

② 部分分式+大背诵法

③ 留数法 $X(z)=\sum Res\left[X(s)\frac{z}{z-e^{sT}}\right]$

5. (10') 试求以下信号的 z 变换，并写出闭式。需给出收敛区间

1) $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ ，其中$u(n)$为单位阶跃序列。→对于序列,可以为采样周期是1

2) 单位斜坡函数 $x(t)=\begin{cases}t, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$ →对于连续函数,需设采样周期为T_s求解

记忆：$a^k \xrightarrow{z} \dfrac{z}{z-a}$

$t \xrightarrow{z} \dfrac{zT}{(z-1)^2}$

解 z变换定义：$X(z)=Z[x^*(t)]=Z[x(t)]=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}$

1) $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$，单位阶跃序列 $u(n)=\begin{cases}1 & n\ge 0\\ 0 & n<0\end{cases}$

故 $x(0)=1$，$x(1)=\frac{1}{2}$，$x(2)=\frac{1}{4}$.

$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n$ 首项为1，公比为$\frac{1}{2z}$的等比级数

等比级数收敛条件 当$\left|\frac{1}{2z}\right|<1$时，即$|z|>\frac{1}{2}$时，有

$X(z)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2z}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-\left(\frac{1}{2z}\right)^n}{1-\frac{1}{2z}}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2z}}=\dfrac{2z}{2z-1}$

2) 使用z变换方法3—留数法 $X(z)=\sum_{i=1}^{n}\text{Res}\left[X(s)\dfrac{z}{z-e^{sT}}\right]_{s=s_i}$

$X(s)=\mathcal{L}[x(t)]=\mathcal{L}[t]=-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[1]=\frac{1}{s^2}$，$X(s)$在$s=0$处有$r=2$重极点，

故 $X(z)=\dfrac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to 0}\dfrac{d}{ds}\left[\dfrac{1}{s^2}\dfrac{z}{z-e^{sT}}(s-0)^2\right]=\lim_{s\to 0}\dfrac{d}{ds}\left[\dfrac{z}{z-e^{sT}}\right]$

$=\lim_{s\to 0}\dfrac{zTe^{sT}}{(z-e^{sT})^2}=\dfrac{zT}{(z-1)^2}$

法二：$x^*(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}x(kT)\delta(t-kT)=\sum_{k=0}^{+\infty}kT\cdot\delta(t-kT)$ $\delta(t-kT)\xrightarrow{z} z^{-k}$

$X(z)=Z[x^*(t)]=\sum_{k=0}^{+\infty}kT\,Z[\delta(t-kT)]=\sum_{k=0}^{\infty}kTz^{-k}$ ←(等差×等比)数列

$X(z)=Tz^{-1}+2Tz^{-2}+\cdots+(n-1)Tz^{-(n-1)}+nTz^{-n}+\cdots$

乘一次公比 z^{-1} $z^{-1}X(z)=Tz^{-2}+2Tz^{-3}+\cdots+(n-1)Tz^{-n}+nTz^{-n+1}+\cdots$

转换为等比数列 首项z^{-1}，公比z^{-1}

$\Rightarrow (1-z^{-1})X(z)=Tz^{-1}+Tz^{-2}+\cdots+Tz^{-n}+\cdots=\lim_{n\to\infty}T(z^{-1}+\cdots+z^{-n})=T\dfrac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$

$\Rightarrow X(z)=\dfrac{\frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}}}{z^{-1}}=\dfrac{zT}{(z-1)^2}$ 收敛条件：$|z^{-1}|<1 \Rightarrow |z|>1$

By 22-psp

6. (15′) 假设连续函数 $x(t)=0,\forall t<0$，且其 z 变换为 $X(z)$。试证明

$$Z[x(t+nT)]=z^nX(z)-z^n\sum_{k=0}^{n-1}x(kT)z^{-k}$$

定义: $X(z)=Z[x(t)]=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}$, 其中 $z=e^{sT}$

证明超前定理

$$Z[x(t+nT)]=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT+nT)z^{-k}=z^n\sum_{k=0}^{\infty}x[(k+n)T]z^{-(k+n)}, \quad 令 m=k+n$$

$$=z^n\sum_{m=n}^{\infty}x(mT)z^{-m}=z^n\Big[\sum_{m=0}^{\infty}x(mT)z^{-m}-\sum_{m=0}^{n-1}x(mT)z^{-m}\Big]$$

$$=z^n\Big[X(z)-\sum_{k=0}^{n-1}x(kT)z^{-k}\Big]，得证$$

7. (15′) 用 Z 变换法求解下面的差分方程 先求 $y(k)$ 再求 $y^*(t)$

$$y(k+2)-3y(k+1)+2y(k)=u(k)$$

其中 $u(k)=1(k)$, 初始条件 $y(0)=0, y(1)=0$.

$y(k+1)\xrightarrow{z}zY(z)-zy(0)$

$y(k+2)\xrightarrow{z}z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)$

对比:

$y'(t)\xrightarrow{s}sY(s)-y(0)$

$y''(t)\xrightarrow{s}s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)$

解: 已知. $X(z)=Z[x(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)z^{-n}$.

$$Z[x(k-n)]=z^{-n}X(z)$$

$$Z[x(k+n)]=z^n\Big[X(z)-\sum_{k=0}^{n-1}x(kT)z^{-k}\Big]=z^nX(z)-z^nx(0)-z^{n-1}x(1)-\cdots-z^1x(n-1)$$

故对差分方程两边求 z 变换

左: $[z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)]-3[zY(z)-zy(0)]+2Y(z)$　右: $\dfrac{z}{z-1}$

代入 $y(0)=0, y(1)=0$, 有:

$$z^2Y(z)-3zY(z)+2Y(z)=\frac{z}{z-1}$$

$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$X(z)$
1	$\delta(t)$	1
e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$

$x(kT)=\sum\mathrm{Res}[X(z)z^{k-1}]$　即　$Y(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2(z-2)}$

法一. 使用留数计算 $y(k)$: 此时 $z=0$ 不会成为极点

$Y(z)$ 有三个极点, $z_1=1, r_1=2, z_2=2, r_2=1$

$$y(k)=\sum\mathrm{Res}[Y(z)z^{k-1}]=\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{(r_i-1)!}\frac{d^{r_i-1}}{dz^{r_i-1}}\Big[(z-z_i)^{r_i}Y(z)z^{k-1}\Big]\Big|_{z=z_i}$$

$$=\Big[(z-2)Y(z)z^{k-1}\Big]_{z=2}+\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\Big[(z-1)^2Y(z)z^{k-1}\Big]_{z=1}$$

$$=2\cdot 2^{k-1}+\frac{d}{dz}\Big[\frac{z^k}{z-2}\Big]_{z=1}=2^k-k-1$$

法二. $Y(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2(z-2)}=z\Big[\dfrac{A}{z-2}+\dfrac{B}{z-1}+\dfrac{C}{(z-1)^2}\Big]$

$\Rightarrow A=1, B=-1, C=-1$

$$Y(z)=\frac{z}{z-2}-\frac{z}{z-1}-\frac{z}{(z-1)^2}$$

由于 $t\xleftrightarrow{Z^{-1}}\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$, $\rightarrow k\xleftrightarrow{Z^{-1}}\dfrac{z}{(z-1)^2}$

$a^k\xleftrightarrow{Z^{-1}}\dfrac{z}{z-a}$

故 $y(k)=2^k-1^k-k=2^k-k-1$

故 $y^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}y(kT)\delta(t-kT)=\sum_{k=0}^{\infty}[2^k-k-1]\delta(t-kT)$