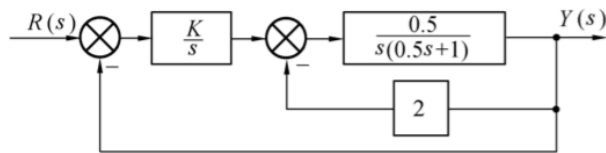


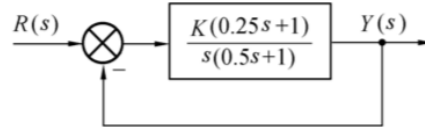
# 自动控制理论 A 作业 10 100

2024 年 11 月 19 日

- 4.1 某反馈系统的方框图如题 4.1 图所示。试绘制  $K$  从 0 变到  $\infty$  时该系统的根轨迹图。
- 4.2 试应用根轨迹法确定题 4.2 图所示系统无超调响应时的开环增益  $K$ 。

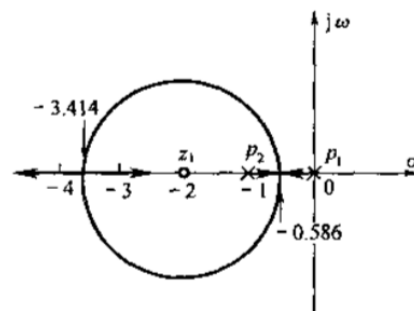


题 4.1 图 反馈系统方框图



题 4.2 图 反馈系统方框图

5. 设单位反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$ , 其根轨迹图见图。试从数学上证明: 复数根轨迹部分是以  $(-2, j0)$  为圆心, 以  $\sqrt{2}$  为半径的一个圆。



10. 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{k}{s(s+3)(s+7)}$$

试确定使系统具有欠阻尼阶跃响应特性的取值范围。

11. 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)}$$

用根轨迹法分析开环放大系数  $K$  对系统性能的影响, 计算  $K=5$  时系统动态指标  $\sigma_p, t_r, t_p, t_s$ 。

4.4 设某反馈系统的特征方程为

$$s^2(s+a) + k(s+1) = 0$$

试确定以  $k$  为参变量的根轨迹与负实轴无交点、有一个交点与有两个交点时的参量  $a$ , 并绘制相应的根轨迹图。

4.5 设某正反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{k(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

试为该系统绘制以  $k$  为参变量的根轨迹图。

渐近线  $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$   $\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$

出/入射角  $\sum_{j=1}^m \angle(s-z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s-p_i) = (2k+1)\pi$

# 自动控制理论 A 作业 10

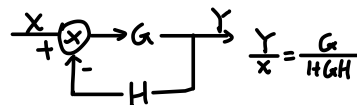
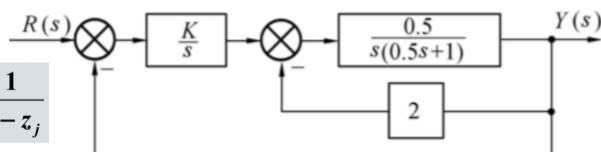
2024 年 11 月 19 日

根轨迹形式指前系数均为 1

4.1 某反馈系统的方框图如题 4.1 图所示。试绘制  $K$  从 0 变到  $\infty$  时该系统的根轨迹图。

分离点

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d-z_j}$$



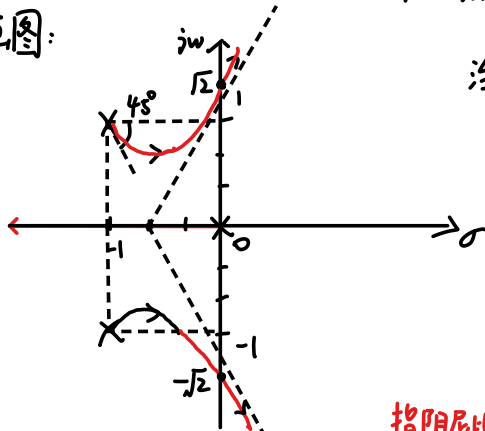
解. 先求系统的开环传递.  $G(s) = \frac{0.5}{s(0.5s+1)} \cdot \frac{K}{s} = \frac{K}{s^2+2s+2}$  根轨迹增益为  $K$

$n=3, p_1=0, p_2=-1+j, p_3=-1-j, m=0$ . 无开环零点.

渐近线.  $\sigma_a = \frac{-1-1}{2} = -1, \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{2} = 60^\circ, 180^\circ$ , 出射角  $0 - [0 + 135^\circ + 90^\circ] = (2k+1)\pi \Rightarrow \theta = -45^\circ$

与虚轴交点. 特征方程  $D(s) = s^2 + 2s + 2 + K = 0$  代入  $s = j\omega$  有  $\begin{cases} -\omega^2 + 2 = 0 \\ -2\omega + K = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \sqrt{2} \\ K = 2\sqrt{2} \end{cases}$

综上, 画图:

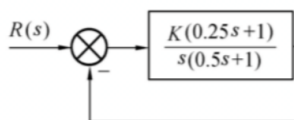


注. 求分离点.  $D'(s) = 2s + 2 = 0 \Rightarrow s = -1$

代入  $D(s) = s^2 + 2s + 2 + K = 0 \Rightarrow K = -s^2 - 2s - 2 = \frac{20}{27} - \frac{4\sqrt{2}}{27} i$   
说明不存在分离点.

指阻尼比  $\xi \geq 1$

4.2 试应用根轨迹法确定题 4.2 图所示系统无超调响应时的开环增益  $K$ 。



开环传递  $G(s) = \frac{K(0.25s+1)}{s(0.5s+1)}$  根轨迹增益  $K^* = \frac{1}{2}K$

$n=2, p_1=0, p_2=-2, m=1, z_1=-4$  实轴上根轨迹范围  $(-\infty, -4] \cup [2, 0]$

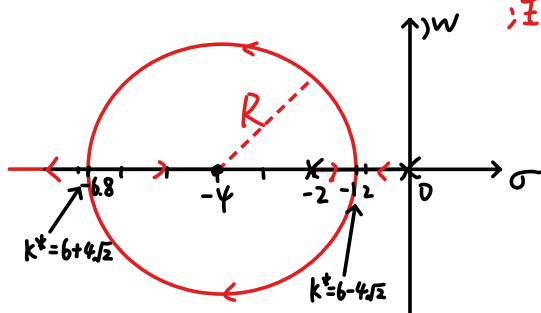
渐近线.  $\sigma_a = 2, \varphi_a = (2k+1)\pi = 180^\circ \Rightarrow$  实轴

分离点  $\frac{1}{d+2} + \frac{1}{d} = \frac{1}{d+4} \Rightarrow d^2 + 8d + 8 = 0 \Rightarrow d_1 = -4 - 2\sqrt{2} \approx -6.8, d_2 = -4 + 2\sqrt{2} \approx -1.2$  都在范围内

$D(s) = s^2 + (2+K^*)s + 4K^* = 0$  代入  $s = d_1 \Rightarrow K_{d1}^* = 6 + 4\sqrt{2}$ , 代入  $s = d_2 \Rightarrow K_{d2}^* = 6 - 4\sqrt{2}$

求与虚轴交点. 代入  $s = j\omega \Rightarrow \begin{cases} 4K^* - \omega^2 = 0 \\ (2+K^*)\omega = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ K^* = 0 \end{cases} \Rightarrow K^* > 0 \text{ 时, 系统一直为稳定}$

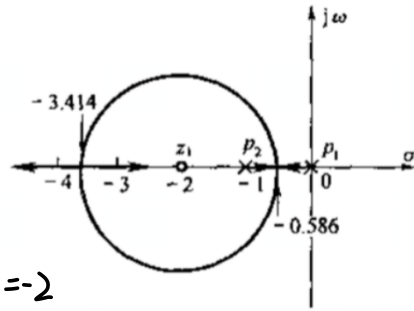
无超调响应: 阻尼比  $\xi \geq 1$ , 即极点都在负实轴上  $\Rightarrow K^* \in [0, K_{d1}^*] \cup [K_{d2}^*, +\infty)$  且  $K = 2K^*$   
 $\Rightarrow K \in [0, 12 - 8\sqrt{2}] \cup [12 + 8\sqrt{2}, +\infty)$



注. 可以证明, 复平面上的根轨迹为圆弧 (和下题一样)

## 根轨迹证明题: 令 $D(s)=0$

5. 设单位反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$ , 其根轨迹图见图。试从数学上证明: 复数根轨迹部分是以  $(-2, j0)$  为圆心, 以  $\sqrt{2}$  为半径的一个圆。



角半:  $G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$   $n=2, p_1=0, p_2=-1, m=1, z_1=-2$

实轴上的根轨迹范围:  $(-\infty, -2] \cup [-1, 0]$

特征方程  $D(s) = s^2 + (K^*+1)s + 2K^* = 0$

特征根  $s_{1,2} = \frac{-(K^*+1) \pm \sqrt{(K^*+1)^2 - 8K^*}}{2} = -\frac{K^*+1}{2} \pm j \frac{\sqrt{8K^* - (K^*+1)^2}}{2} \triangleq \sigma \pm j\omega$

$-2\sigma = K^*+1, \omega^2 = 2K^* - \frac{(K^*+1)^2}{4} = -4\sigma - 2 - \frac{4\sigma^2}{4} = -\sigma^2 - 4\sigma - 2$

$\Rightarrow \omega^2 + \sigma^2 + 4\sigma + 2 = \omega^2 + (\sigma+2)^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow$  圆心  $(-2, j0)$  半径  $R=\sqrt{2}$ , 得证

10. 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{k}{s(s+3)(s+7)}$$

$k$  为根轨迹增益,  $K = \frac{k}{21}$

试确定使系统具有欠阻尼阶跃响应特性的取值范围。

$n=3, p_1=0, p_2=-3, p_3=-7, m=0$ , 无开环零点

实轴上根轨迹:  $(-\infty, -7] \cup [-3, 0]$

渐近线:  $\sigma_a = \frac{-3-7}{3-0} = -\frac{10}{3}, \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 60^\circ, 180^\circ$

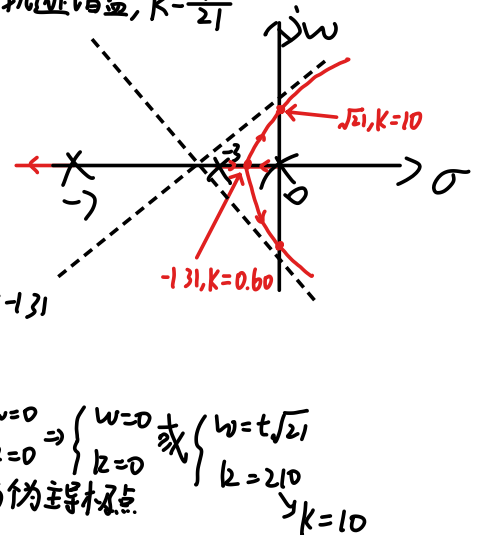
分离点  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+7} = 0 \Rightarrow 3s^2 + 20s + 21 = 0 \Rightarrow d_1 = -5.316, d_2 = -1.31$

$D(s) = s^3 + 10s^2 + 21s + k = 0$  将  $d_2 = -1.31$  代入  $\Rightarrow k_{d_2} = 12.60 \Rightarrow K_{d_2} = 0.60$

与虚轴交点: 当  $s=j\omega$  代入上式有  $-j\omega^3 - 10\omega^2 + 21j\omega + k = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\omega^3 + 21\omega = 0 \\ -10\omega^2 + k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega=0 \text{ 或 } \omega=\pm\sqrt{21} \\ k=0 \text{ 或 } k=210 \end{cases}$

由根轨迹方法可知, 欠阻尼  $0 < \zeta < 1$  时有一个极点离虚轴很远, 另两个为主导极点

根轨迹增益  $12.60 < k < 210$  开环增益  $0.60 < K < 10$



11. 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)} = \frac{K^*}{s(s+2)}$$

$\downarrow$  根轨迹增益  $K^* = 2K$

根轨迹形式指  $s$  前系数均为 1

用根轨迹法分析开环放大系数  $K$  对系统性能的影响, 计算  $K=5$  时系统动态指标

$\sigma_p, t_r, t_p, t_s$

角半:  $n=2, p_1=0, p_2=-2, m=0$  无开环零点, 实轴上根轨迹  $[-2, 0]$

渐近线:  $\sigma_a = \frac{-2-0}{2-0} = -1, \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \pm 90^\circ$

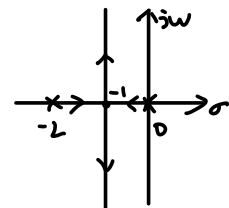
分离点  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} = 0 \Rightarrow s = -1$ , 代入  $D(s) = s^2 + 2s + K^* = 0 \Rightarrow K^*_d = 1, K_d = \frac{1}{2}$

与虚轴交点: 将  $s=j\omega$  代入, 有  $- \omega^2 + 2j\omega + K^* = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\omega^2 + K^* = 0 \\ 2\omega = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega=0 \text{ 或 } \omega=\pm\sqrt{K^*} \\ K^*=0 \end{cases} \Rightarrow K^*>0 \text{ 时系统一直稳定}$

根轨迹如右图

$k=0 \xrightarrow{\text{过阻尼 } \sigma\% = 0} k=\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{欠阻尼 } \zeta < 1 \Rightarrow \sigma\% > 0} k \rightarrow +\infty$

稳定



$k=5$  时,  $D(s) = s^2 + 2s + 10 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -1 \pm j3 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{10}, \zeta = \frac{1}{\sqrt{10}}, \zeta\omega_n = 1, \omega_d = 3$

故  $\sigma_p\% = e^{-\frac{\zeta}{1-\zeta^2}\pi} \times 100\% \approx 35.1\%, t_r = \frac{\pi - \varphi}{\omega_d} = \frac{\pi - \arccos \zeta}{\omega_d} = 0.631s$

$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 1.05s, t_s(2\%) = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 4s$

#### 4.4 设某反馈系统的特征方程为

$$s^2(s+a) + k(s+1) = 0$$

试确定以  $k$  为参变量的根轨迹与负实轴无交点、有一个交点与有两个交点时的参量  $a$ ，并绘制相应的根轨迹图。

解：由  $D(s) = s^2(s+a) + k(s+1) = 0 \Rightarrow$  等效开环传递： $G(s) = \frac{k(s+1)}{s^2(s+a)}$   $n=3, p_1=p_2=0, p_3=-a$   
 $m=1, z_1=-1$

渐近线  $\sigma_a = \frac{-a+1}{3-1} = \frac{1-a}{2}, \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \pm 90^\circ$

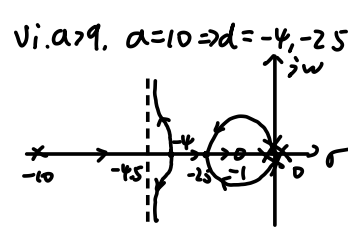
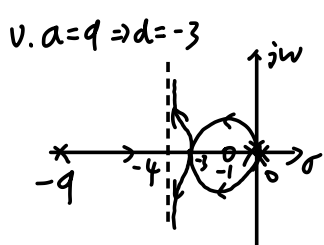
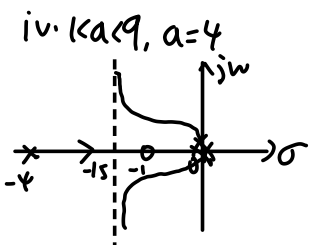
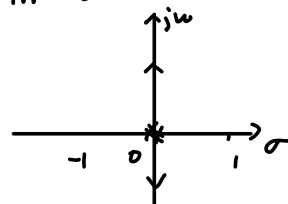
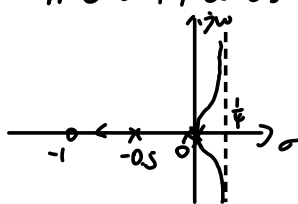
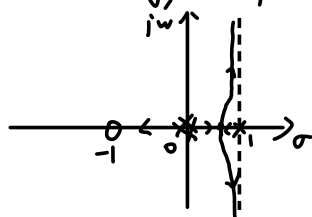
分离点  $\frac{1}{d+a} + \frac{2}{d} = \frac{1}{d+1} \Rightarrow 2d^2 + (3+a)d + 2a = 0 \Rightarrow d_{1,2} = \frac{-(3+a) \pm \sqrt{(3+a)^2 - 16a}}{4} = \frac{-(3+a) \pm \sqrt{(a-1)(a-9)}}{4}$

① 根轨迹与负实轴无交点  $d_{1,2}$  无实数解  $(a-1)(a-9) < 0 \Rightarrow a \in (1, 9)$

② 根轨迹与负实轴有1个交点  $a=1$  或  $a=9$  ( $a=1$  时开环零极点相消)

③  $2\uparrow a < 1$  或  $a > 9$

画图 i  $a \leq 0$  时,  $a=-1 \Rightarrow d=0$  或  $18$  ii  $0 < a < 1, a=0.5$  iii  $a=1$



由图可知 无交点  $a < 9$  有1个交点  $a=9$  有2个交点  $a > 9$

#### 4.5 设某正反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{k(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

试为该系统绘制以  $k$  为参变量的根轨迹图。

0° 根轨迹

1. 实轴上的根轨迹变为相反

2. 渐近线  $\sigma_a = \frac{2k\pi}{n-m}$

3. 出/入射角  $\sum \angle(s-z_j) - \sum \angle(s-p_i) = 2k\pi$

解：求零度根轨迹， $G(s)H(s) = \frac{k(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$   $n=3, p_1=-3, p_2=-1-i, p_3=-1+i$   
 $m=1, z_1=-2$

实轴上根轨迹： $(-\infty, -3] \cup [-2, +\infty)$

渐近线： $\sigma_a = \frac{-3-1-1+2}{2} = -\frac{3}{2}, \varphi_a = \frac{2k\pi}{2} = 180^\circ \Rightarrow$  为实轴

出射角  $[45^\circ] - [0 + \arctan \frac{1}{2} + 90^\circ] = 2k\pi \Rightarrow \theta = -71.6^\circ$

与虚轴交点：当  $s=j\omega$  代入  $D(s) = s^3 + 5s^2 + (8-k)s + 6-2k = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\omega^3 + 18-k = 0 \\ -5\omega^2 + 6-2k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ k = 3 \end{cases}$

$k \in [0, 3)$  时系统稳定 注：零度时由  $G(s)H(s)$  得到特征方程为  $D(s) = \text{分母} - \text{分子} = 0$

分离点(对应重根)： $\frac{1}{d+3} + \frac{1}{d-1-i} + \frac{1}{d-1+i} = \frac{1}{d+2}$

注：分离点正负求法  $D(s) = D'(s) = 0$

$D(s) = s^3 + 5s^2 + 8s + 6 - k(s+2) = 0$

$D'(s) = 3s^2 + 10s + 8 - k = 0$

$\Rightarrow s_1 = -0.80 \rightarrow k = 1.907$

$s_2 = -2.35 \pm 0.84j \rightarrow k = -1.08 - 3.5j$  (舍去)

$\Rightarrow \frac{1}{d+3} + \frac{2d+2}{d^2+d+1} = \frac{1}{d+2}$   
 $\Rightarrow \frac{3d^2+10d+8}{d^3+5d^2+8d+6} = \frac{1}{d+2}$   
 $\Rightarrow 2d^3+11d^2+20d+10=0$   
 $\Rightarrow d = -0.80$  (忽略复数根)

