自动控制理论 A—作业 6

2024/10/24

（Due: Oct. 31, 2024）

1. (20’)

给定线性时不变系统 $\dot{x}=Ax$，如果当 $x(0)=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$ 时，$x(t)=\begin{bmatrix}e^{-2t} & -e^{-2t}\end{bmatrix}^T$；当 $x(0)=\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}^T$ 时，$x(t)=\begin{bmatrix}2e^{-2t} & -e^{-2t}\end{bmatrix}^T$，试求该系统的系统矩阵 A，以及状态转移矩阵 $\phi(t,0)$ 或 $\phi(t)$。

2. (15’)

对于任意两个可交换的矩阵$A\in R^{n\times n}$ 和 $B\in R^{n\times n}$，即$AB=BA$，试证明

$$e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}=e^{Bt}e^{At}$$

3. (20’)

给定如下线性时不变系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}u,\qquad x(0)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad t\ge 0$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

请用两种方法求系统的单位阶跃响应 $y(t)$。

4. (15’)

给定矩阵$A\in R^{n\times n}$，则可由下列式子计算e^{At}，

$$e^{At}=a_0(t)I+a_1(t)A+\cdots+a_{n-1}(t)A^{n-1}$$

假设矩阵 A 的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 两两相异，试求$a_i(t)$，$i=0,1,\cdots,n-1$. （注：请写出详细的步骤）

5. (10’)

设采样周期为的$T=0.01s$，求下面连续系统所对应的离散化状态方程。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

6. (20’)

设描述线性时不变系统的差分方程为 $y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=u(k)$。

(1) 选取 $x_1(k)=y(k),\ x_2(k)=y(k+1)$ 为一组状态变量，写出该系统的状态方程。

(2) 假设系统初始值为 $y(0)=0,\ y(1)=1$，求系统的单位阶跃响应 $y(k)$。

自动控制理论 A—作业 6

（Due: Oct. 31, 2024）

1. (20′)

给定线性时不变系统 $\dot{x}=Ax$，如果当 $x(0)=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$ 时，$x(t)=\begin{bmatrix}e^{-2t} & -e^{-2t}\end{bmatrix}^T$；当 $x(0)=\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}^T$ 时，$x(t)=\begin{bmatrix}2e^{-2t} & -e^{-2t}\end{bmatrix}^T$，试求该系统的系统矩阵 A，以及状态转移矩阵 $\phi(t,0)$ 或 $\phi(t)$。

解 $\dot{x}=Ax$ 的解为 $x(t)=e^{At}x(0)$，将题中条件代入有 $x_1(t)=e^{At}x_1(0)$, $x_2(t)=e^{At}x_2(0)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{-2t} \\ -e^{-2t} & -e^{-2t}\end{pmatrix}=e^{At}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}，由 \begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-1+2=1 知 \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

故 $e^{At}=\begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{-2t} \\ -e^{-2t} & -e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-2t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{pmatrix}$ 即状态转移矩阵 $\phi(t)=e^{At}=\begin{pmatrix}e^{-2t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{pmatrix}$

$\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}=\begin{pmatrix}-2e^{-2t} & \\ & -2e^{-2t}\end{pmatrix}$，故系统矩阵 $A=\left[\frac{d}{dt}e^{At}\right]_{t=0}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

2. (15′)

对于任意两个可交换的矩阵 $A\in R^{n\times n}$ 和 $B\in R^{n\times n}$，即 $AB=BA$，试证明

$$e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}=e^{Bt}e^{At}$$

二项式定理

标量 $x\ y$ $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k y^{n-k}$

n阶方阵A.B. 当AB=BA时

$(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k A^k B^{n-k}$

定义 $e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}(At)^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(At)^n}{n!}$

证明 $e^{(A+B)t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A+B)^n t^n}{n!}$

而 $e^{At}e^{Bt}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B^l t^l}{l!}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(At)^k(Bt)^l}{k!\,l!}$ 考虑 $k+l=n$ 的情况

由 AB=BA 时有

$(At+Bt)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(At)^k(Bt)^{n-k}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(At)^k(Bt)^{n-k}}{k!(n-k)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}(At)^k(Bt)^{n-k}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A+B)^n t^n}{n!}=e^{(A+B)t}$$

又由 $A+B=B+A$，故 $e^{(A+B)t}=e^{(B+A)t}=e^{Bt}e^{At}$

故 $e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}=e^{Bt}e^{At}$ 得证

3. (20′)

给定如下线性时不变系统

状态响应

$x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

$y(t)=Cx(t)+Du(t)$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}u,\qquad x(0)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad t\geq 0$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

请用两种方法求系统的单位阶跃响应 $y(t)$。

解 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$ $C=(1\ \ 0)$ $D=0$，输入 $u(t)=u(t)$, $U(s)=\frac{1}{s}$

法一 由 $\dot{x}=Ax+Bu$ 知 $sX(s)-x(0)=AX(s)+BU(s)\Rightarrow X(s)=(sI-A)^{-1}x(0)+(sI-A)^{-1}BU(s)$

$sI-A=\begin{pmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{pmatrix}$ $|sI-A|=(s+1)(s+2)\Rightarrow(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{pmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}, & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\\ \frac{-2}{s+1}+\frac{2}{s+2}, & -\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\end{pmatrix}$

故 $(sI-A)^{-1}x(0)=\begin{pmatrix}\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}, & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\\ \frac{-2}{s+1}+\frac{2}{s+2}, & -\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\\ -\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\end{pmatrix}$

$(sI-A)^{-1}BU(s)=\begin{pmatrix}\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}, & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\\ \frac{-2}{s+1}+\frac{2}{s+2}, & -\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{2}{s}\end{pmatrix}=\frac{2}{s}\begin{pmatrix}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\\ -\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\end{pmatrix}$ $\Rightarrow X(s)=\begin{pmatrix}\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\\ \frac{1}{s+1}\end{pmatrix}$

从而 $x(t)=\mathcal{L}^{-1}[X(s)]=\begin{pmatrix}1-e^{-t}\\ e^{-t}\end{pmatrix}$ $t\geq 0$

故 $y(t)=[1\ \ 0]x(t)=1-e^{-t}$ $t\geq 0$

法二 先求 $\Phi(t)=e^{At}$ 由 $A=\begin{pmatrix}0&1\\-2&-3\end{pmatrix}$，$|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda+2)=0 \Rightarrow \lambda_1=-1,\lambda_2=-2$

当 $\lambda_1=-1$ 时，$Av_1=\lambda_1 v_1 \Rightarrow v_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 当 $\lambda_2=-2$ 时，$Av_2=\lambda_2 v_2 \Rightarrow v_2=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

令 $P=(v_1\ v_2)=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-2\end{pmatrix}$，$|P|=-2+1=-1$，$P^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-2&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&-1\end{pmatrix}$

从而 $e^{At}=Pe^{\Lambda}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-t}&\\&e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2e^{-t}-e^{-2t}&e^{-t}-e^{-2t}\\-2e^{-t}+2e^{-2t}&-e^{-t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}$

状态响应 $x(t)=e^{At}x_{0}+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$ 注意到 $u(\tau)=1$，$Bu(\tau)=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2e^{-t}-e^{-2t}&e^{-t}-e^{-2t}\\-2e^{-t}+2e^{-2t}&-e^{-t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\int_0^t e^{A(t-\tau)}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}d\tau$

$=\begin{pmatrix}e^{-t}-e^{-2t}\\-e^{-t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}+2\int_0^t\begin{pmatrix}e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\-e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)}\end{pmatrix}d\tau$

其中 $\int_0^t e^{-(t-\tau)}d\tau=e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau=1-e^{-t}$，$\int_0^t e^{-2(t-\tau)}d\tau=\frac{1}{2}(1-e^{-2t})$

从而 $2\int_0^t\begin{pmatrix}e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\-e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)}\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}1-2e^{-t}+2e^{-2t}\\2e^{-t}-2e^{-2t}\end{pmatrix}$

代入上式，有 $x(t)=\begin{pmatrix}e^{-t}-e^{-2t}\\-e^{-t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-2e^{-t}+e^{-2t}\\2e^{-t}-2e^{-2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-e^{-2t}\\e^{-t}\end{pmatrix}$ $t\geq 0$

故 $y(t)=[1\ 0]x(t)=1-e^{-t}$ $t\geq 0$

~~4.~~ (15')

给定矩阵$A\in R^{n\times n}$，则可由下列式子计算e^{At}，

$$e^{At}=a_0(t)I+a_1(t)A+\cdots+a_{n-1}(t)A^{n-1}$$

根据 Cayley–Hamilton 定理，仅有$\{I,A,A^2,\cdots,A^{n-1}\}$线性无关

假设矩阵 A 的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 两两相异，试求$a_i(t)$，$i=0,1,\cdots,n-1$.（注：请写出详细的步骤）

解. 由于A的特征根两两相异，存在矩阵P，使得 $A=P\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\ddots\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}P^{-1}$，$A^n=P\begin{bmatrix}\lambda_1^n&&\\&\lambda_2^n&\\&&\ddots\\&&&\lambda_n^n\end{bmatrix}P^{-1}$

$\therefore a_0(t)I+a_1(t)A+\cdots+a_{n-1}(t)A^{n-1}=P\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^{n-1}a_i(t)\lambda_1^i&&\\&\sum_{i=0}^{n-1}a_i(t)\lambda_2^i&\\&&\ddots\\&&&\sum_{i=0}^{n-1}a_i(t)\lambda_n^i\end{bmatrix}P^{-1}=e^{At}=P\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}&&\\&e^{\lambda_2 t}&\\&&\ddots\\&&&e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}P^{-1}$

即求$a_i(t)$，$i=0,1,2,\cdots,n-1$，使得下列方程组成立

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{n-1}a_i(t)\lambda_1^i=e^{\lambda_1 t}\\ \sum_{i=0}^{n-1}a_i(t)\lambda_2^i=e^{\lambda_2 t}\\ \vdots\\ \sum_{i=0}^{n-1}a_i(t)\lambda_n^i=e^{\lambda_n t}\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\cdots&\lambda_1^{n-1}\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\cdots&\lambda_2^{n-1}\\&&\vdots&\vdots\\1&\lambda_n&\lambda_n^2\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0(t)\\a_1(t)\\\vdots\\a_{n-1}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\\e^{\lambda_2 t}\\\vdots\\e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

故$a_i(t)$即为

$$\begin{bmatrix}a_0(t)\\a_1(t)\\\vdots\\a_{n-1}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\cdots&\lambda_1^{n-1}\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\cdots&\lambda_2^{n-1}\\&&\vdots&\vdots\\1&\lambda_n&\lambda_n^2\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\\e^{\lambda_2 t}\\\vdots\\e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}=V\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\\e^{\lambda_2 t}\\\vdots\\e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

其中 V为n阶范德蒙德方阵，$|V^{-1}|=\frac{1}{|V|}=\prod_{1\leq j<i\leq n}(\lambda_i-\lambda_j)$

有 $V^{-1}_{(i,j)}=\frac{(-1)^{n-i}\sigma_{n-i}(a_1,\cdots,a_{j-1},a_{j+1},\cdots,a_n)}{\prod_{k=1,k\neq j}^{n}(a_j-a_k)}$ 其中σ为初等对称多项式

5. (10')

设采样周期为的$T = 0.01s$，求下面连续系统所对应的离散化状态方程。

所有的T都要代入

$G=e^{AT}, H=(\int_0^T e^{A\tau}d\tau)B$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

解 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则 $G=e^{AT}=e^{At}\big|_{t=T}$, $H=\int_0^T e^{At}Bdt$, 先求e^{At}

$sI-A=\begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{pmatrix}$, $|sI-A|=s^2$, $(sI-A)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix}$, $e^{At}=\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]=\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

从而$e^{AT}=\begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $H=\int_0^T e^{At}Bdt=\begin{pmatrix} T & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}T^2 \\ T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.00005 \\ 0.01 \end{pmatrix}$

故$x(k+1)=\begin{pmatrix} 1 & 0.01 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}x(k)+\begin{pmatrix} 0.00005 \\ 0.01 \end{pmatrix}u(k)$

6. (20')

设描述线性时不变系统的差分方程为 $y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=u(k)$。

(1) 选取$x_1(k)=y(k)$, $x_2(k)=y(k+1)$为一组状态变量，写出该系统的状态方程。

(2) 假设系统初始值为$y(0)=0$, $y(1)=1$，求系统的单位阶跃响应$y(k)$。

$X(z)=\mathcal{Z}[x(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)z^{-n}$

$\mathcal{Z}[x(k-n)]=z^{-n}X(z)$

$\mathcal{Z}[x(k+n)]=z^{n}X(z)-z^{n}x(0)-$

解 (1) $x(k)=\begin{pmatrix} y(k) \\ y(k+1) \end{pmatrix}$, 故$x(k+1)=\begin{pmatrix} y(k+1) \\ y(k+2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2(k) \\ u(k)-3x_2(k)-2x_1(k) \end{pmatrix}$

故$x(k+1)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}x(k)+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}u(k)$, $G=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) 对$y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=u(k)$两边同时z变换有

$(Y(z)z^2-y(0)z^2-y(1)z^1)+3(Y(z)z-y(0)z)+2Y(z)=U(z)=\frac{z}{z-1}$

代入初始值, 有$z^2Y(z)-z+3zY(z)+2Y(z)=\frac{z}{z-1}$

$Y(z)=\frac{z^2}{(z+1)(z+2)(z-1)}$, 有极点$z_1=1, z_2=-1, z_3=-2$

从而$y(k)=\sum_i Res[Y(z)z^{k-1}, z_i]=\sum_i Res\left[\frac{z^{k+1}}{(z-1)(z+1)(z+2)}, z_i\right]$, $i=1,2,3$

$=\frac{1^{k+1}}{6}+\frac{(-1)^{k+1}}{-2}+\frac{(-2)^{k+1}}{3}=\frac{1}{6}+\frac{(-1)^k}{2}-\frac{2(-2)^k}{3}$, $k\geq 0$

或用部分分式求z反变换. 由$Y(z)=z^2\left[\frac{\frac{1}{3}}{z+2}+\frac{\frac{1}{6}}{z-1}-\frac{\frac{1}{2}}{z+1}\right]$

(都仍需进一步展开, 非常麻烦)

法二: z变换法. $X(z)=(zI-G)^{-1}zx_0+(zI-G)^{-1}HU(z)$

其中$zI-G=\begin{pmatrix} z & -1 \\ 2 & z+3 \end{pmatrix}$, $|zI-G|=z^2+3z+2=(z+1)(z+2)$

$(zI-G)^{-1}=\frac{1}{(z+1)(z+2)}\begin{pmatrix} z+3 & 1 \\ -2 & z \end{pmatrix}$

从而$X(z)=\frac{1}{(z+1)(z+2)}\begin{pmatrix} z+3 & 1 \\ -2 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}+\frac{1}{(z+1)(z+2)}\begin{pmatrix} z+3 & 1 \\ -2 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{z}{z-1}$

$=\frac{z}{(z+1)(z+2)}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}\frac{1}{z-1}\right]=\frac{z}{(z+1)(z+2)}\begin{pmatrix} \frac{z}{z-1} \\ \frac{z^2}{z-1} \end{pmatrix}=\frac{z^2}{(z+1)(z+2)(z-1)}\begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{pmatrix}$

由$x_1(k)=y(k)$得$Y(z)=X_1(z)=\frac{z^2}{(z+1)(z+2)(z-1)}$ 下面的过程同法一

$y(k)=\frac{1}{6}+\frac{(-1)^k}{2}-\frac{2(-2)^k}{3}$, $k\geq 0$