自动控制理论 A—作业 4

2024/09/30

100

（Due: Oct. 17, 2024）

国庆节快乐！

1. (30’)　求 $X(z)=\dfrac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$ 的 z 逆变换 $x(kT)$ 以及 $x^{*}(t)$，其中 T 是采样周期，a 是常数。

2. (60’) 试分别求系统 A 和 B 的脉冲传递函数 $G(z)=\dfrac{Y(z)}{R(z)}$ 和 $\Phi(z)=\dfrac{C(z)}{R(z)}$。请写出详细步骤。

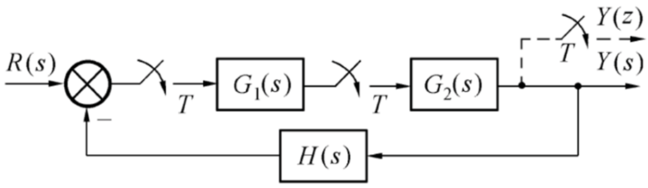

图 1. 系统 A 的方框图

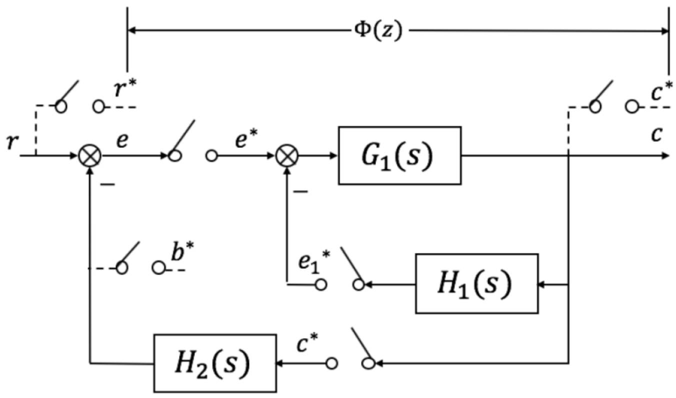

图 2. 系统 B 的方框图

3. (10’) 已知系统的单位阶跃响应为 $y(t)=1+e^{-t}-e^{-2t}\quad(t\geq 0)$，试求该系统的传递函数 $G(s)=Y(s)/R(s)$.

用部分分式法求Z反变换时，把分子中的z先提出来再设系数

自动控制理论 A—作业 4

1. (30′) 求 $X(z)=\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$ 的 z 逆变换 $x(kT)$ 以及 $x^*(t)$，其中 T 是采样周期，a 是常数。

注意X(z)逆变换结果是x(kT),不是x(t)

解: $X(z)=z\left[\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-e^{-aT}}\right]$, 其中 $A=\lim\limits_{z\to 1}\frac{(z-1)X(z)}{z}=1$, $B=\lim\limits_{z\to e^{-aT}}\frac{(z-e^{-aT})X(z)}{z}=-1$

$X(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}$

故 $x(kT)=Z^{-1}[X(z)]=Z^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right]-Z^{-1}\left[\frac{z}{z-e^{-aT}}\right]=1-e^{-akT}$

$x(0)=0,\ x(1)=1-e^{-aT},\ x(2)=1-e^{-2aT},\ \dots$

有 $x^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(1-e^{-akT})\delta(t-kT)$

变换对

$1(t)\longleftrightarrow\frac{z}{z-1}$

$e^{-at}\longleftrightarrow\frac{z}{z-e^{-aT}}$

2. (60′) 试分别求系统 A 和 B 的脉冲传递函数 $G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}$ 和 $\Phi(z)=\frac{C(z)}{R(z)}$。请写出详细步骤。

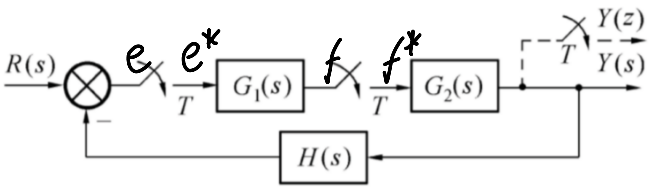

图 1. 系统 A 的方框图

解: 由图可知 $Y(z)=G_2(z)F(z)$, $F(z)=G_1(z)E(z)$, $E(z)=R(z)-HG_2(z)F(z)$

联立上式,有 $F(z)=\frac{G_1(z)R(z)}{1+G_1(z)HG_2(z)}$, $Y(z)=\frac{G_1(z)G_2(z)R(z)}{1+G_1(z)HG_2(z)}$

从而 $G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G_1(z)G_2(z)}{1+G_1(z)HG_2(z)}$

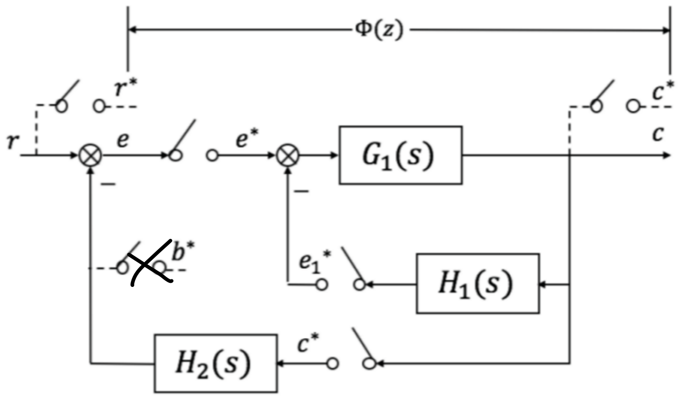

图 2. 系统 B 的方框图

注意列式时不要在不该停的地方停下

解 由图可知 $C(z)=G_1(z)[E(z)-E_1(z)]$

$E(z)=R(z)-H_2(z)C(z)$

$E_1(z)=H_1G_1(z)[E(z)-E_1(z)]$

联立上式,有 $E_1(z)=\frac{H_1G_1(z)E(z)}{1+H_1G_1(z)}$

$C(z)=G_1(z)\left[1-\frac{H_1G_1(z)}{1+H_1G_1(z)}\right]E(z)$

$=G_1(z)\frac{1}{1+H_1G_1(z)}[R(z)-H_2(z)C(z)]$

$=\frac{G_1(z)}{1+H_1G_1(z)}R(z)-\frac{G_1(z)H_2(z)}{1+H_1G_1(z)}C(z)$

$\Rightarrow \Phi(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G_1(z)}{1+H_1G_1(z)+G_1(z)H_2(z)}$

3. (10’) 已知系统的单位阶跃响应为 $y(t)=1+e^{-t}-e^{-2t} \quad (t\geq 0)$，试求该系统的传递函数 $G(s)=Y(s)/R(s)$.

解：由 $y(t)=1+e^{-t}-e^{-2t}$ $(t\geq 0)$ 知 $y(0)=1\neq 0$，为非零初始状态

由于初始状态只影响暂态分量的系数，不影响稳态分量及暂态分量的形式.

设零状态单位阶跃响应为 $y(t)=1+A_1e^{-t}-A_2e^{-2t}$

令 $\begin{cases} y(0)=1+A_1+A_2=0 \\ y'(0)=-A_1-2A_2=0 \end{cases}$ 有 $\begin{cases} A_1=-2 \\ A_2=1 \end{cases}$ $\Rightarrow y(t)=1-2e^{-t}+e^{-2t}$

$$Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]=\mathcal{L}[1-2e^{-t}+e^{-2t}]=\frac{1}{s}-\frac{2}{s+1}+\frac{1}{s+2}=\frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

$$R(s)=\mathcal{L}[u(t)]=\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{2}{(s+1)(s+2)}$$