

自动控制理论 A 作业 8

2024 年 11 月 2 日

3.35 已知系统的特征方程为

$$s^6 + 4s^5 - 4s^4 + 4s^3 - 7s^2 - 8s + 10 = 0$$

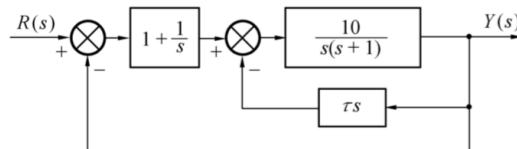
试确定在 S 平面右半部的特征根数目,并计算其共轭虚根之值。

3.36 某控制系统的开环传递函数为

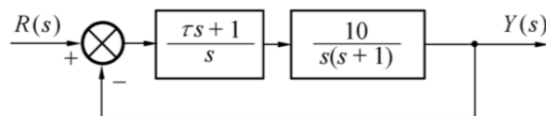
$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(Ts+1)(2s+1)}$$

试确定能使闭环系统稳定的参数 K 、 T 的取值范围。

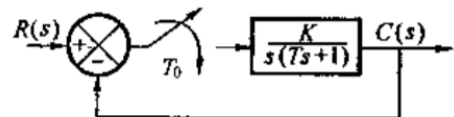
3.37 已知系统方框图如题 3.37 图所示。试应用 Routh 稳定判据确定能使系统稳定的反馈参数 τ 的取值范围。



3.38 在如题 3.38 图所示系统中, τ 取何值方能使系统稳定?



7-17 设某线性离散系统方框图如题 7-17 图所示,其中参数 $T > 0, K > 0$ 。试确定给定系统稳定时参数 K 的取值范围。



6. 设单位反馈系统的开环传递函数为:

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s^2 + 7s + 17)}$$

试确定: ①系统产生等幅振荡的 K 值及相应的振荡角频率。

②全部闭环极点位于 $s=-2$ 垂直线左侧时的 K 取值范围。

3.35 已知系统的特征方程为

$$s^6 + 4s^5 - 4s^4 + 4s^3 - 7s^2 - 8s + 10 = 0$$

试确定在 S 平面右半部的特征根数目, 并计算其共轭虚根之值。

解: $s^6 + 4s^5 - 4s^4 + 4s^3 - 7s^2 - 8s + 10 = 0$ 第一列变号次数 辅助方程的根中的虚数根

劳其表:

s^6	1	-4	-7	10
s^5	4	4	-8	
s^4	-5	-5	10	
s^3	-1	-1	2	
s^2	0	0		
	-2	-1		
s^2	$-\frac{1}{2}$	2		
	-1	4		
s^1	-9			
s^0	4			

辅助方程: $-5s^4 - 5s^2 + 10 = 0$

$\frac{d}{ds}(-5s^4 - 5s^2 + 10) = -20s^3 - 10s = 0$

系数 -2 -1

由于劳其表第一列变号两次 \Rightarrow S 平面的右半部有 2 个特征根

求解辅助方程 $s^4 + s^2 - 2 = 0 \Rightarrow (s^2 - 1)(s^2 + 2) = 0 \Rightarrow s = \pm 1, \pm j\sqrt{2}$

共轭虚根为 $\pm j\sqrt{2}$

3.36 某控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(Ts+1)(2s+1)}$$

试确定能使闭环系统稳定的参数 K, T 的取值范围。需讨论特殊情况

解: 开环传递 $G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(Ts+1)(2s+1)}$, 闭环传递函数 $\Phi(s) = \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}$

分母 $D(s) = K(s+1) + s(Ts+1)(2s+1) = 2Ts^3 + (T+2)s^2 + (K+1)s + K$

劳其表

s^3	2T	K+1
s^2	T+2	K
s^1	$\frac{2K+T-KT+2}{T+2}$	
s^0	K	

要使系统稳定, 由必要条可知 劳其表第一列不变号

必要条件: $2T > 0, T+2 > 0, K+1 > 0, K > 0$

$$\begin{cases} 2T > 0 \\ T+2 > 0 \\ 2K+T-KT+2 > 0 \\ K > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T > 0, K > 0 \\ 2K+T-KT > -2 \end{cases}$$

或者 $2T < 0, T+2 < 0, K+1 < 0, K < 0 \Rightarrow T < -2, K < -1$

且 $2K+T-KT+2 > 0$ 不可能成立

故 K, T 的范围是 $T, K > 0, 2K+T-KT > -2$, 图像如下。

分类讨论 由 $1 - K\frac{T-2}{T+2} > 0$ 知:

① $0 < T \leq 2$ 时 $K > 0$ ② $T > 2$ 时, $0 < K < \frac{T+2}{T-2}$

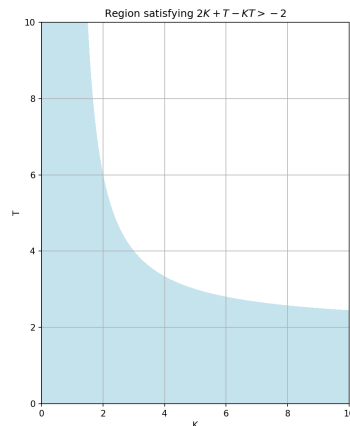
讨论特殊情况: $T=0$, 劳其表为:

$D(s) = 2s^2 + (K+1)s + K$

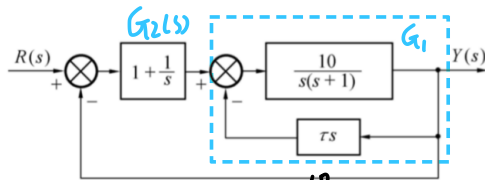
$s^2: 2 \quad K$

$s^1: K+1$ 要求 $K > 0$

$s^0: K$



3.37 已知系统方框图如题 3.37 图所示。试应用 Routh 稳定判据确定能使系统稳定的反馈参数 τ 的取值范围。



解: 先化简系统方框图 $G_1(s) = \frac{10}{s^2+1}$, $G_2(s) = \frac{10}{s(s+1)}$, $G_1(s)G_2(s) = \frac{10(s+1)}{s^2(s+10\tau+1)}$

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}, \text{ 从而 } D(s) = s^2(s+10\tau+1) + 10(s+1) = s^3 + (10\tau+1)s^2 + 10s + 10$$

要使系统稳定, 必要条件: $10\tau+1 > 0 \Rightarrow \tau > -\frac{1}{10}$

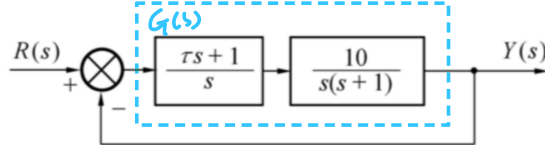
劳斯表

s^3	1	10
s^2	$10\tau+1$	10
s^1	$\frac{100\tau}{10\tau+1}$	
s^0	10	

由充要条件, $\frac{100\tau}{10\tau+1} > 0$

$\Rightarrow \tau > 0$ 时系统稳定

3.38 在如题 3.38 图所示系统中, τ 取何值方能使系统稳定?



解: $G(s) = \frac{Ts+1}{s} \cdot \frac{10}{s(s+1)} = \frac{10Ts+10}{s^2+s^2}$, 闭环传递函数 $\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$

故 $D(s) = s^3 + s^2 + 10Ts + 10$, 要使系统稳定, 必要条件: $T > 0$

劳斯表

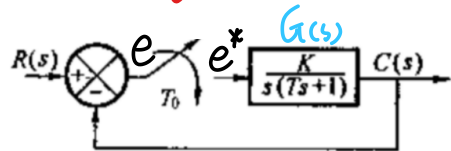
s^3	1	$10T$
s^2	1	10
s^1	$10T-10$	
s^0	10	

充要条件: $10T-10 > 0$

$\Rightarrow T > 1$ 时系统稳定

双线性变换: $z = \frac{w+1}{w-1}$

7-17 设某线性离散系统方框图如题 7-17 图所示, 其中参数 $T > 0, K > 0$ 。试确定给定系统稳定时参数 K 的取值范围。



解 $E(z) = R(z) - G(z)E(z)$, $C(z) = G(z)E(z) \Rightarrow \Phi(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)}$

由 $G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$ 知 $G(z) = \mathcal{Z} \text{Reis} \left[\frac{K}{Ts+1} \cdot \frac{z}{z-e^{TsT_0}} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{Ts+1} \cdot \frac{z}{z-e^{TsT_0}} + \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{T}} \frac{K}{Ts+1} \cdot \frac{z}{z-e^{TsT_0}} = \frac{zk}{z-1} - \frac{zk}{z-e^{-T_0/T}}$

极点: $s_1 = 0, s_2 = -\frac{1}{T}$

特征方程 $z^2 + (k - ke^{-T_0/T} - 1 - e^{-T_0/T})z + e^{-T_0/T} = 0$

代入 $z = \frac{w+1}{w-1}$, 得 $(w+1)^2 + \frac{A}{B}(w+1)(w-1) + \frac{B}{A}(w-1)^2 = 0$

$\Rightarrow D(w) = (1+A+B)w^2 + 2(1-B)w + B+A$
 $= (k - ke^{-T_0/T} + 2(1 - e^{-T_0/T}))w + (2 + 2e^{-T_0/T} + ke^{-T_0/T} - k)$

已知 $T, k > 0$ 由于二阶系统, 必要条件就是充要条件,

稳定 $\Leftrightarrow 2(1 + e^{-T_0/T}) + k(e^{-T_0/T} - 1) > 0$

$\Leftrightarrow k < 2 \frac{1 + e^{-T_0/T}}{1 - e^{-T_0/T}}$

综上: $\begin{cases} T > 0 \\ 2 \frac{1 + e^{-T_0/T}}{1 - e^{-T_0/T}} > k > 0 \end{cases}$

6. 设单位反馈系统的开环传递函数为:

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s^2 + 7s + 17)}$$

试确定: ① 系统产生等幅振荡的 K 值及相应的振荡角频率。

② 全部闭环极点位于 $s = -2$ 垂直线左侧时的 K 取值范围。

解. ① 闭环系统的分母为 $D(s) = s^3 + 7s^2 + 17s + K$

劳斯表. $\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 17 \\ s^2 & 7 & K \\ s^1 & \frac{119-K}{7} & \\ s^0 & K & \end{array}$ 要使系统产生等幅振荡, 说明系统的特征方程有一对纯虚根, 令 s^1 -行全为零, 有 $K = 119$
辅助方程 $7s^2 + K = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j\sqrt{17}$,
由二阶系统无阻尼 $\zeta = 0$ 时 $s_{1,2} = \pm j\omega_n$ 知,
振荡角频率为 $\omega_n = \sqrt{17} \text{ rad/s}$

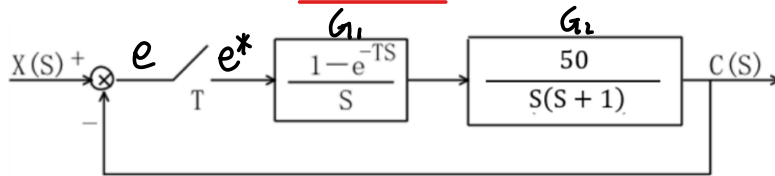
② 令 $z = s + 2$, 要求 $s < -2$, 即 $z < 0$

$$D(z) = (z-2)^3 + 7(z-2)^2 + 17(z-2) + K = z^3 + z^2 + z - 14 + K$$

劳斯表. $\begin{array}{ccc} z^3 & 1 & 1 \\ z^2 & 1 & K-14 \\ z^1 & 15-K & \\ z^0 & K-14 & \end{array}$ 由稳定的充要条件 $\begin{cases} 15-K > 0 \\ K-14 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 14 < K < 15$ 时, 满足题意

根据图 3-6 的闭环采样系统方框图, 计算闭环系统的开环脉冲传递函数、闭环脉冲传递函数, 并计算系统处于临界等幅状态时 T 的值。



解 $E(z) = X(z) - G_1 G_2(z) E(z)$, \Rightarrow 传递函数 $\Phi(z) = \frac{C(z)}{X(z)} = \frac{G_1 G_2(z)}{1 + G_1 G_2(z)}$
 $C(z) = G_1 G_2(z) E(z)$

其中 $G_1 G_2(z) = Z[G_1 G_2(s)] = (1 - z^{-1}) Z\left[-\frac{50}{s^2(s+1)}\right] = (1 - z^{-1}) \cdot \sum \text{Res}\left[-\frac{50}{s^2(s+1)} \frac{z}{z - e^{sT}}\right]$
 $= (1 - z^{-1}) 50z \left\{ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{(s+1)(z - e^{sT})} \right] + \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{s^2(z - e^{sT})} \right\}$
 $= (1 - z^{-1}) 50z \left[\frac{T}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z - e^{-T}} \right]$
 $= 50 \left[\frac{T}{z-1} - 1 + \frac{z-1}{z - e^{-T}} \right] = 50 \frac{z(T + e^{-T} - 1) + (1 - e^{-T} - Te^{-T})}{(z-1)(z - e^{-T})}$

从而 $\Phi(z)$ 的分母为

$$D(z) = 50[z(T + e^{-T} - 1) + (1 - e^{-T} - Te^{-T})] + (z-1)(z - e^{-T})$$

$$= z^2 + z(50T + 49e^{-T} - 51) + (50 - 49e^{-T} - 50Te^{-T}), \text{记为 } z^2 + Az + B = 0$$

将 $z = \frac{w+1}{w-1}$ 代入, 得 $(1+A+B)w^2 + (2-2B)w + 1 - A + B = 0$

即 $(50T - 50Te^{-T})w^2 + (100Te^{-T} + 98e^{-T} - 98)w + (102 - 98e^{-T} - 50T - 50Te^{-T}) = 0$

劳斯表为

w^2	$50T - 50Te^{-T}$	$102 - 98e^{-T} - 50T - 50Te^{-T}$
-------	-------------------	------------------------------------

w^1	$100Te^{-T} + 98e^{-T} - 98$
-------	------------------------------

w^0	$102 - 98e^{-T} - 50T - 50Te^{-T}$
-------	------------------------------------

要求等幅状态, 即系统的特征方程有一对纯虚根, 令 w^1 行为零,

$$100Te^{-T} + 98e^{-T} - 98 = 0 \Rightarrow T \approx 40.27 \text{ ms}$$