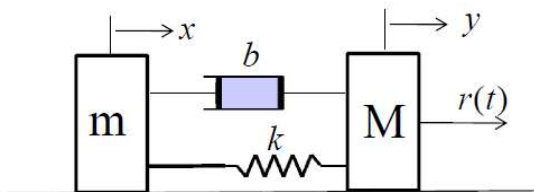


自动控制理论 A—作业 1

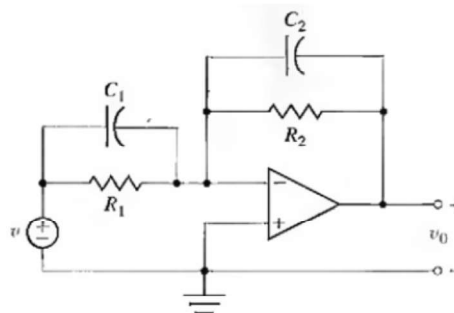
2023/09/05

(Due: Sept. 12, 2024)

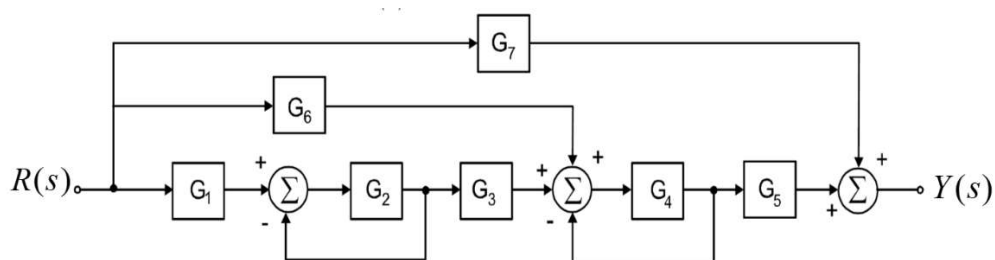
- (10') 请参考教材图 1.3 所示的控制框图，描述一个生活或工程中存在的闭环控制系统的例子。
- (10') 试求解函数 $f(t) = 5e^{-2t} - \sin 2t$, $t \geq 0$ 的 Laplace 变换 (请写出求解过程)。
- (10') 求函数 $F(s) = \frac{2s+2}{s^2+2s+5}$ 的 Laplace 逆变换。
- (10') 利用定义求 $f(t) = e^{at}$ 的 Laplace 变换，并给出成立的条件。其中 a 为实数。
- (10'+10') 如下图所示，假设两个滑块都在无摩擦的表面上运动，
 - 请写出系统的运动方程 (微分方程)。
 - 假设 $r(t)$ 为系统的控制输入量， y 为系统的输出量，请计算系统的传递函数 $G(s) = Y(s) / R(s)$ 。



- (15') 下图是一个典型的运算放大器电路。假设电路是理想放大器，且各参数为 $R_1=R_2=100\text{ k}\Omega$, $C_1=10\text{ }\mu\text{F}$, $C_2=5\text{ }\mu\text{F}$ ，请计算电路的传递函数。



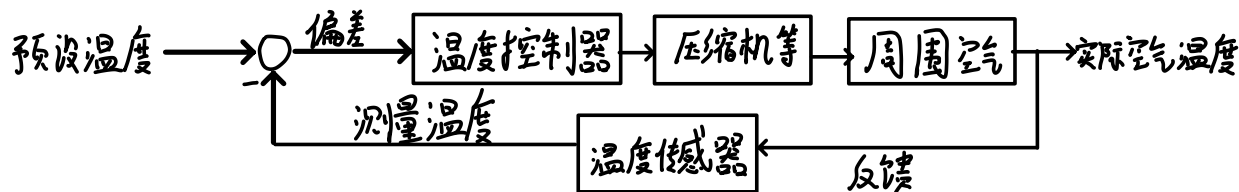
- (25) 系统方框图如下图所示，请计算系统的传递函数 $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ 。(注意：请写出详细的化简步骤)



备注：教材指 Dolf & Bishop 的《Modern Control Systems》第 12 版。

1. (10') 请参考教材图 1.3 所示的控制框图, 描述一个生活或工程中存在的闭环控制系统的例子。

生活中常用的空调是一个闭环反馈控制系统



2. (10') 试求解函数 $f(t) = 5e^{-2t} - \sin 2t$, $t \geq 0$ 的 Laplace 变换 (请写出求解过程)。

解: 由于 $1 \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}$, $\text{Res} > 0$, $e^{-2t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+2}$, $\text{Res} > -2$, $\sin wt \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{w}{s^2+w^2}$, $\text{Res} > 0$

故 $\mathcal{L}[f(t)] = 5\mathcal{L}[e^{-2t}] - \mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{5}{s+2} - \frac{2}{s^2+4}$, $\text{Res} > 0$

后面会用到

- 3 (10') 求函数 $F(s) = \frac{2s+2}{s^2+2s+5}$ 的 Laplace 逆变换。

解: $F(s) = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+2^2}$

$f(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-ts} F(s)$

$e^{-at} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s+a)$

由于 $\cos wt \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2+w^2}$, 位移 $e^{-t} \cos wt \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}$

从而 $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right] = 2e^{-t} \cos 2t$

4. (10') 利用定义求 $f(t) = e^{at}$ 的 Laplace 变换, 并给出成立的条件。其中 a 为实数。定义: $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$

解: $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_{t=0}^{t=+\infty}$

当 $a - \text{Res} < 0$ 即 $\text{Res} > a$ 时 $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{a-s} (0 - (-1)) = \frac{1}{s-a}$

当 $a - \text{Res} > 0$ 时, 积分不存在

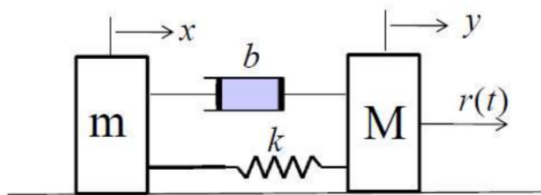
故 $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s-a}$, $\text{Res} > a$

5. (10'+10') 如下图所示, 假设两个滑块都在无摩擦的表面上运动,

(a) 请写出系统的运动方程 (微分方程)。

(b) 假设 $r(t)$ 为系统的控制输入量, y 为系统的输出量, 请计算系统的传递函数

$G(s) = Y(s)/R(s)$ 。



要写成标准形式!

分子多项式 / 分母多项式 或 零极点增益形式

(1) 系统 $r(t) = My + m\ddot{x}$... ①

对于 M: $r(t) - b(\dot{y} - \dot{x}) - k(y - x) = M\ddot{y}$... ②

对于 m: $b(\dot{y} - \dot{x}) + k(y - x) = m\ddot{x}$... ③

(2) ③ 拉氏变换: $b s Y(s) - b s X(s) + k Y(s) - k X(s) = m s^2 X(s)$

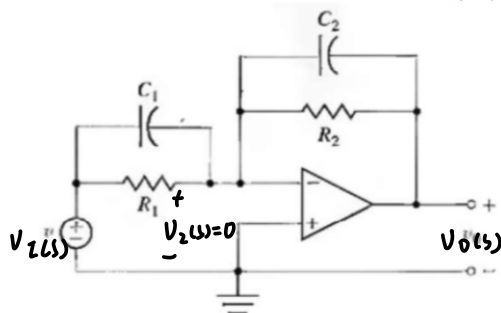
① 拉氏变换: $R(s) = M s^2 Y(s) + m s^2 X(s)$

有 $R(s) = \left[M s^2 + \frac{m s^2 (b s + k)}{m s^2 + b s + k} \right] Y(s)$

代入, 消去 X(s)

从而 $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{m s^2 + b s + k}{M m s^4 + (M + m) b s^3 + (M + m) k s^2}$

6. (15') 下图是一个典型的运算放大器电路。假设电路是理想放大器，且各参数为 $R_1=R_2=100\text{ k}\Omega$, $C_1=10\text{ }\mu\text{F}$, $C_2=5\text{ }\mu\text{F}$, 请计算电路的传递函数。 **利用虚短虚断列方程** 10^5



解: $Z_R(s) = R$, $Z_C(s) = \frac{1}{sC}$. 而 $R \parallel \frac{1}{sC} = \frac{Z_R(s)Z_C(s)}{Z_R(s)+Z_C(s)} = \frac{\frac{R}{sC}}{R+\frac{1}{sC}} = \frac{R}{1+sCR}$

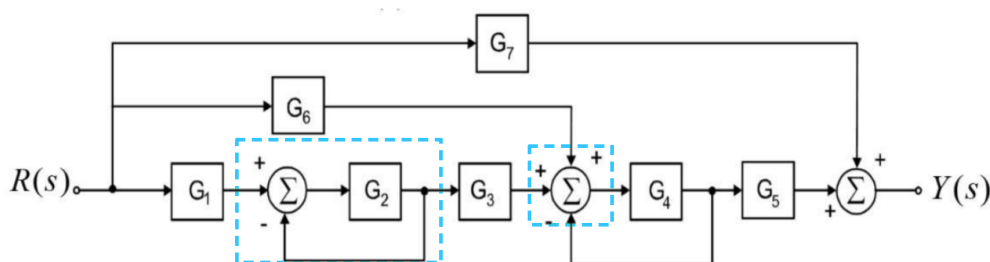
由虚短知 $V_2=0$, 虚断:

$$\frac{V_1(s)}{R_1 \parallel \frac{1}{sC_1}} = \frac{-V_0(s)}{R_2 \parallel \frac{1}{sC_2}} \Rightarrow G(s) = \frac{V_0(s)}{V_1(s)} = -\frac{R_2 \parallel \frac{1}{sC_2}}{R_1 \parallel \frac{1}{sC_1}} = -\frac{R_2(1+sC_1R_1)}{R_1(1+sC_2R_2)}$$

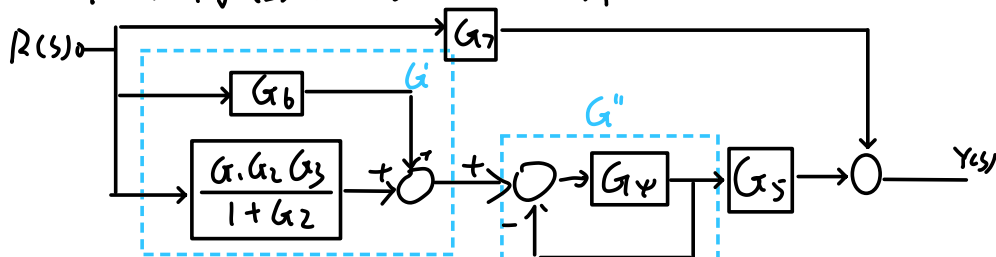
代入数据 $= -\frac{10^5(1+5 \cdot 10^{-5} \cdot 10^5)}{10^5(1+5 \cdot 0.5 \cdot 10^{-5} \cdot 10^5)} = -\frac{1+s}{1+\frac{1}{2}s} = -\frac{2s+2}{s+2}$

7. (25) 系统方框图如下图所示，请计算系统的传递函数 $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ 。(注意：请写出详细的化简步骤)

注意区分并联支路和反馈回路



Step 1 化简 G_2 反馈回路, 然后与 G_1, G_3 串联合并

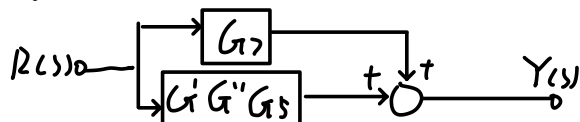


Step 2 同理, 化简 G_4, G_5 反馈回路, 再将它们与 G_5 合并

并联支路直接相加 $G' = G_6 + \frac{G_1G_2G_3}{1+G_2}$ $G'' = \frac{G_4}{1+G_4}$

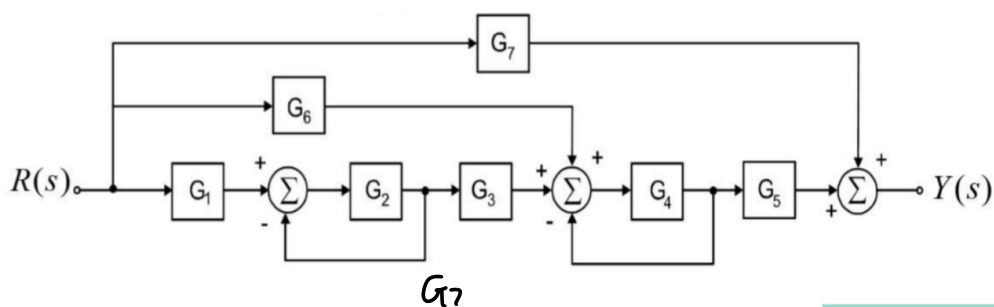
$$G'G''G_5 = (G_6 + \frac{G_1G_2G_3}{1+G_2}) \frac{G_4G_5}{1+G_4}$$

Step 3. 将 $G'G''G_5$ 与 G_7 合并



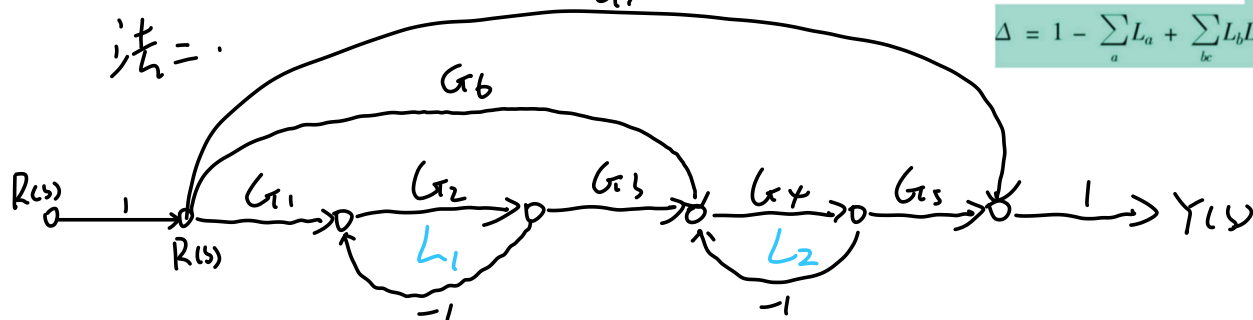
$$G(s) = G'G''G_5 + G_7 = (G_6 + \frac{G_1G_2G_3}{1+G_2}) \frac{G_4G_5}{1+G_4} + G_7$$

$$= \frac{G_1G_2G_3G_4G_5 + (1+G_2)G_6G_4G_5}{1+G_2+G_4+G_2G_4} + G_7$$



$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k$$

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{bc} L_b L_c - \sum_{def} L_d L_e L_f + \dots$$



回路 两个, 回路增益为 $L_1 = -G_2$ $L_2 = -G_4$
互不接触回路增益积. $L_1 L_2 = G_2 G_4$

信号流图的特征式为 $\Delta = 1 - (L_1 + L_2) + L_1 L_2 = 1 + G_2 + G_4 + G_2 G_4$ 作为 P 的分母
注意正负

三条前向通路

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5, P_2 = G_6 G_4 G_5, P_3 = G_7$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = 1 + G_2$$

$$\Delta_3 = 1 + G_2 + G_4 + G_2 G_4$$

正负的确切方法
和 Δ 一致

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^3 P_k \Delta_k = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 + (1 + G_2) G_6 G_4 G_5 + G_7 (1 + G_2 + G_4 + G_2 G_4)}{1 + G_2 + G_4 + G_2 G_4}$$

$$= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 + (1 + G_2) G_6 G_4 G_5}{1 + G_2 + G_4 + G_2 G_4} + G_7$$

与法一相同