By 22-psp

100

自动控制理论 A 作业 8

2024 年 11 月 2 日

3.35 已知系统的特征方程为

$$s^6+4s^5-4s^4+4s^3-7s^2-8s+10=0$$

试确定在 S 平面右半部的特征根数目，并计算其共轭虚根之值。

第一列变号次数　辅助方程的根中的虚数根

解. $s^6+4s^5-4s^4+4s^3-7s^2-8s+10=0$

劳斯表.

s^6	1	-4	-7	10
s^5	4	4	-8	
s^4	-5	-5	10	
	-1	-1	2	
s^3	0	0		
	-2	-1		
s^2	$-\frac{1}{2}$	2		
	-1	4		
s^1	-9			
s^0	4			

辅助方程. $-5s^4-5s^2+10=0$

$\frac{d}{ds}(-5s^4-5s^2+10)=-20s^3-10s=0$

系数 -2 -1

由于劳斯表第一列变号两次 ⇒ s平面的右半平面有 2 个特征根

求解辅助方程 $s^4+s^2-2=0 \Rightarrow (s^2-1)(s^2+2)=0 \Rightarrow s=\pm1, \pm j\sqrt{2}$

共轭虚根为 $\pm j\sqrt{2}$

3.36 某控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+1)}{s(Ts+1)(2s+1)}$$

试确定能使闭环系统稳定的参数 K、T 的取值范围。需讨论特殊情况

解 开环传函 $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+1)}{s(Ts+1)(2s+1)}$，闭环传函为 $\Phi(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$

分母 $D(s)=K(s+1)+s(Ts+1)(2s+1)=2Ts^3+(T+2)s^2+(K+1)s+K$

劳斯表

s^3	$2T$	$K+1$
s^2	$T+2$	K
s^1	$\frac{2K+T-KT+2}{T+2}$	
s^0	K	

要使系统稳定，由充要条件可知 劳斯表第一列不变号

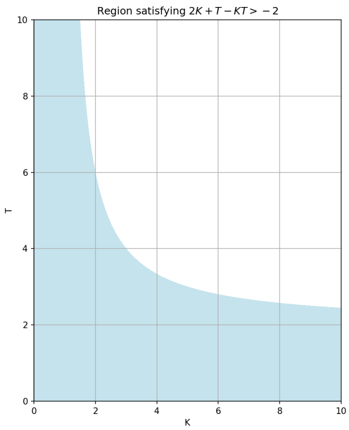
必要条件. $2T>0,\ T+2>0,\ K+1>0,\ K>0$

$$\begin{cases}2T>0\\ T+2>0\\ 2K+T-KT+2>0\\ K>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}T>0,\ K>0\\ 2K+T-KT>-2\end{cases}$$

或者 $2T<0,\ T+2<0,\ K+1<0,\ K<0 \Rightarrow T<-2, K<-1$

且 $2K+T-KT+2>0$ 不可能成立

故 $K.T$ 的范围是 $T,K>0,\ 2K+T-KT>-2$，图像如下.



分类讨论 由 $1-K\frac{T-2}{T+2}>0$ 知.

① $0<T\le2$时 $K>0$ ② $T>2$时，$0<K<\frac{T+2}{T-2}$

讨论特殊情况. $T=0$，劳斯列表为.

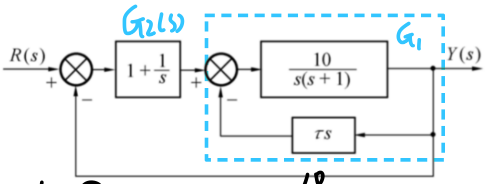
$D(s)=2s^2+(K+1)s+K$

s^2	2	K
s^1	$K+1$	
s^0	K	

要求 $K>0$

By 22-psp

3.37　已知系统方框图如题 3.37 图所示。试应用 Routh 稳定判据确定能使系统稳定的反馈参数 τ 的取值范围。



解：先化简系统方框图 $G_1(s)=\dfrac{\frac{10}{s^2+s}}{1+\frac{10}{s^2+s}\tau s}=\dfrac{10}{s(s+10\tau+1)}$，$G_1(s)G_2(s)=\dfrac{10(s+1)}{s^2(s+10\tau+1)}$

$\Phi(s)=\dfrac{Y(s)}{R(s)}=\dfrac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$，从而 $D(s)=s^2(s+10\tau+1)+10(s+1)=s^3+(10\tau+1)s^2+10s+10$

要使系统稳定，必要条件 $10\tau+1>0\Rightarrow\tau>-\frac{1}{10}$

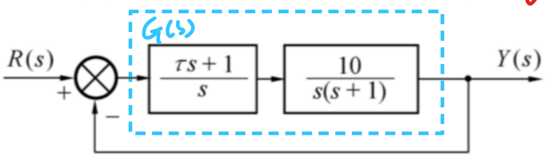
劳斯表

s^3	1	10
s^2	$10\tau+1$	10
s^1	$\frac{100\tau}{10\tau+1}$	
s^0	10	

由充要条件，$\dfrac{100\tau}{10\tau+1}>0$

$\Rightarrow\tau>0$ 时系统稳定

3.38　在如题 3.38 图所示系统中，τ 取何值方能使系统稳定？



解：$G(s)=\dfrac{\tau s+1}{s}\cdot\dfrac{10}{s(s+1)}=\dfrac{10\tau s+10}{s^3+s^2}$，闭环传函 $\Phi(s)=\dfrac{Y(s)}{R(s)}=\dfrac{G(s)}{1+G(s)}$

故 $D(s)=s^3+s^2+10\tau s+10$，要使系统稳定，必要条件：$\tau>0$

劳斯表

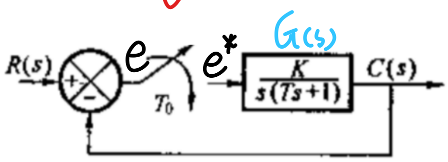
s^3	1	10τ
s^2	1	10
s^1	$10\tau-10$	
s^0	10	

充要条件 $10\tau-10>0$

$\Rightarrow\tau>1$ 时系统稳定

双线性变换：$z=\dfrac{w+1}{w-1}$

7－17　设某线性离散系统方框图如题 7－17 图所示，其中参数 $T>0$，$K>0$。试确定给定系统稳定时参数 K 的取值范围。



解　$E(z)=R(z)-G(z)E(z)$，$C(z)=G(z)E(z)\Rightarrow\Phi(z)=\dfrac{C(z)}{R(z)}=\dfrac{G(z)}{1+G(z)}$

由 $G(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}$ 知 $G(z)=\sum\limits_i \mathrm{Res}\left[\dfrac{K}{Ts^2+s}\cdot\dfrac{z}{z-e^{sT_0}}\right]=\lim\limits_{s\to0}\dfrac{K}{Ts+1}\cdot\dfrac{z}{z-e^{sT_0}}+\lim\limits_{s\to-\frac{1}{T}}\dfrac{K}{Ts}\cdot\dfrac{z}{z-e^{sT_0}}=\dfrac{zK}{z-1}-\dfrac{zK}{z-e^{-T_0/T}}$

极点 $s_1=0$，$s_2=-\frac{1}{T}$

$=\dfrac{zK(1-e^{-T_0/T})}{z^2-(1+e^{-T_0/T})z+e^{-T_0/T}}$

特征方程 $z^2+(K-Ke^{-T_0/T}-1-e^{-T_0/T})z+e^{-T_0/T}=0$

代入 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$，得 $(w+1)^2+(\underbrace{K-Ke^{-T_0/T}-1-e^{-T_0/T}}_{A})(w+1)(w-1)+\underbrace{e^{-T_0/T}}_{B}(w-1)^2=0$

$\Rightarrow D(w)=(1+A+B)w^2+2(1-B)w+B+1-A$

$=\underbrace{(K-Ke^{-T_0/T})}_{+}w^2+2\underbrace{(1-e^{-T_0/T})}_{+}w+(2+2e^{-T_0/T}+Ke^{-T_0/T}-K)$

已知 $T,K>0$ 由于二阶系统，必要条件就是充要条件，

稳定 $\Leftrightarrow 2(1+e^{-T_0/T})+K(e^{-T_0/T}-1)>0$

$\Leftrightarrow K<2\dfrac{1+e^{-T_0/T}}{1-e^{-T_0/T}}$

综上：$\begin{cases}T>0\\ 2\dfrac{1+e^{-T_0/T}}{1-e^{-T_0/T}}>K>0\end{cases}$

By 22-psp

6.设单位反馈系统的开环传递函数为：

$$G_0(s)=\frac{K}{s(s^2+7s+17)}$$

试确定：①系统产生等幅振荡的 K 值及相应的振荡角频率。

②全部闭环极点位于 s=-2 垂直线左侧时的 K 取值范围。

解. ①闭环系统的分母为 $D(s)=s^3+7s^2+17s+K$

劳斯表.

s^3	1	17
s^2	7	K
s^1	$\frac{119-K}{7}$	
s^0	K	

要使系统产生等幅振荡，说明系统的特征方程有一对纯虚根，令 s^1 一行全为零 有 $K=119$

辅助方程 $7s^2+K=0 \Rightarrow s_{1,2}=\pm j\sqrt{17}$,

由二阶系统无阻尼 $\xi=0$ 时 $s_{1,2}=\pm j\omega_n$ 知，

振荡角频率为 $\omega_n=\sqrt{17}\,rad/s$

② 令 $z=s+2$，要求 $s<-2$，即 $z<0$

$D(z)=(z-2)^3+7(z-2)^2+17(z-2)+K=z^3+z^2+z-14+K$

劳斯表.

z^3	1	1
z^2	1	K-14
z^1	15-K	
z^0	K-14	

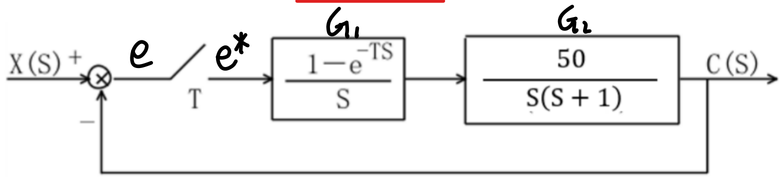
由稳定的充要条件

$$\begin{cases}15-K>0\\K-14>0\end{cases}$$

$\Rightarrow 14<K<15$ 时，满足题意。

根据图 3-6 的闭环采样系统方框图，计算闭环系统的开环脉冲传递函数、闭环脉冲传递函数，并计算系统处于临界等幅状态时 T 的值。

By 22-psp



解 $E(z)=X(z)-G_1G_2(z)E(z)$, $\Rightarrow$ 传递函数 $\Phi(z)=\frac{C(z)}{X(z)}=\frac{G_1G_2(z)}{1+G_1G_2(z)}$

$C(z)=G_1G_2(z)E(z)$

其中 $G_1G_2(z)=Z[G_1G_2(s)]=(1-z^{-1})Z\left[\frac{50}{s^2(s+1)}\right]=(1-z^{-1})\cdot\sum_i Res\left[\frac{50}{s^2(s+1)}\frac{z}{z-e^{sT}}\right]$

$$=(1-z^{-1})50z\left\{\lim_{s\to0}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(s+1)(z-e^{sT})}\right]+\lim_{s\to-1}\frac{1}{s^2(z-e^{sT})}\right\}$$

$$=(1-z^{-1})50z\left[\frac{T}{(z-1)^2}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-e^{-T}}\right]$$

$$=50\left[\frac{T}{z-1}-1+\frac{z-1}{z-e^{-T}}\right]=50\frac{z(T+e^{-T}-1)+(1-e^{-T}-Te^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

从而$\Phi(z)$的分母为

$$D(z)=50[z(T+e^{-T}-1)+(1-e^{-T}-Te^{-T})]+(z-1)(z-e^{-T})$$

$$=z^2+z(50T+49e^{-T}-51)+(50-49e^{-T}-50Te^{-T})$$，记为$z^2+Az+B=0$

将 $z=\frac{w+1}{w-1}$ 代入，得 $(1+A+B)w^2+(2-2B)w+1-A+B=0$

即 $(50T-50Te^{-T})w^2+(100Te^{-T}+98e^{-T}-98)w+(102-98e^{-T}-50T-50Te^{-T})=0$

劳斯表为

w^2	$50T-50Te^{-T}$	$102-98e^{-T}-50T-50Te^{-T}$
w^1	$100Te^{-T}+98e^{-T}-98$	
w^0	$102-98e^{-T}-50T-50Te^{-T}$	

要求等幅状态，即系统的特征方程有一对纯虚根，令w^1一行为零

$$100Te^{-T}+98e^{-T}-98=0\Rightarrow T\approx 4027ms$$