自动控制理论 A 作业 12

2024 年 12 月 13 日

1 考虑单位反馈系统，其开环传递函数如下，

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

当取 $r(t)=2\sin t$ 时，系统的稳态输出

$$c_{ss}(t)=2\sin(t-45^\circ)$$

试确定系统参数 ω_n，ζ。

2 绘制下列传递函数的对数幅频渐近特性曲线

(1) $G(s)=\dfrac{2}{(2s+1)(8s+1)}$；

(2) $G(s)=\dfrac{200}{s^2(s+1)(10s+1)}$；

(3) $G(s)=\dfrac{8\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}{s(s^2+s+1)\left(\frac{s}{2}+1\right)}$；

(4) $G(s)=\dfrac{10\left(\frac{s^2}{400}+\frac{s}{10}+1\right)}{s(s+1)\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}$。

5.1 一阶环节的传递函数为

$$G(s)=\frac{T_1 s+1}{T_2 s-1}\qquad 1>T_1>T_2>0$$

试绘制该环节的 Nyquist 图及 Bode 图。

5.3 设某系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{Ke^{-0.1s}}{s(0.1s+1)(s+1)}$$

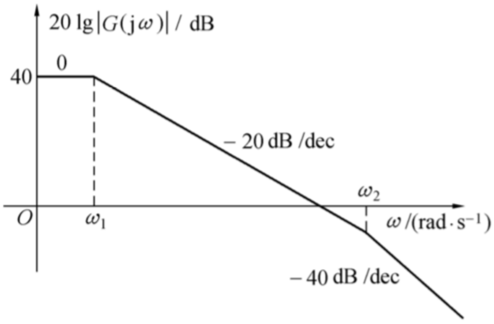
试通过该系统的频率响应确定剪切频率 $\omega_c=5$ rad/s 时的开环增益 K。

5.4 若系统的单位阶跃响应为

$$y(t)=1-1.8e^{-4t}+0.8e^{-9t}\qquad t\geqslant 0$$

试求取该系统的频率响应。

5.5 已知最小相位系统Bode图的幅频特性如题5.5图所示。试求取该系统的开环传递函数。



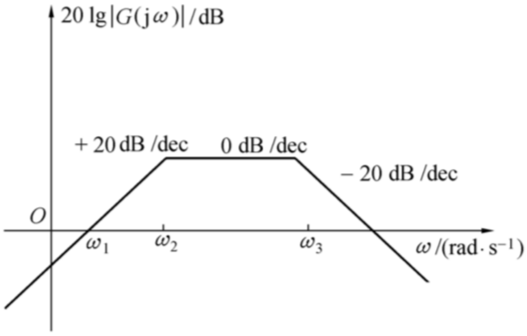
题 5.5 图　开环幅频特性

5.7　已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5.7 图所示。试求取该系统的开环传递函数。

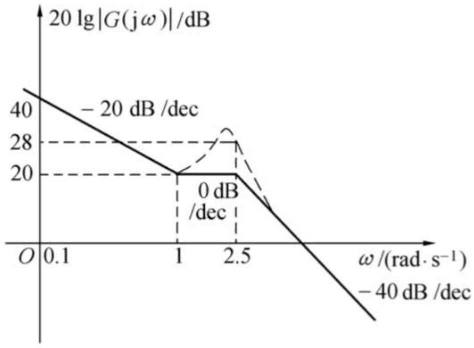
5.8　已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5.8 图所示。试求取该系统的开环传递函数。

5.9　已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5.9 图所示。试求取该系统的开环传递函数。

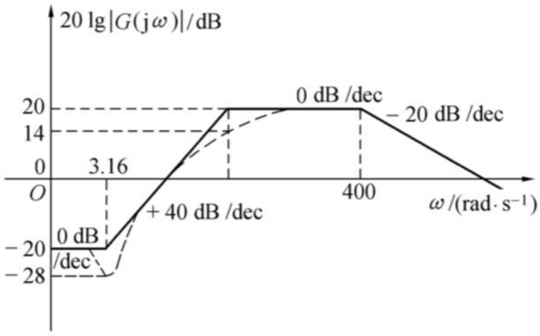
5.10　已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5.10 图所示。试求取该系统的开环传递函数。



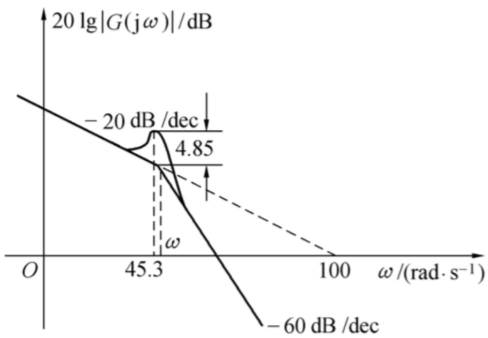
题 5.7 图　开环幅频特性图



题 5.8 图　开环幅频特性图



题 5.9 图　开环幅频特性图



题 5.10 图　开环幅频特性图

100

$\lg(AB)=\lg A+\lg B$

根轨迹形式指s前系数均为1
其它情况下,标准型为+1形式

自动控制理论 A 作业 12

2024 年 12 月 13 日

1 考虑单位反馈系统，其开环传递函数如下，

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

当取 $r(t)=2\sin t$ 时，系统的稳态输出

输入正弦信号⇒频域分析 $c_{ss}(t)=2\sin(t-45°)$

试确定系统参数 ω_n,ζ。

解. 系统的闭环传递函数为 $\Phi(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{w_n^2}{s^2+2\zeta w_n s+w_n^2}$ 为标准振荡环节

输入 $r(t)=2\sin t$，输出 $c_{ss}(t)=2\sin(t-45°)$，有 $w=1rad/s,|\Phi(w)|=1,\angle\Phi(w)=-45°$

$\Phi(jw)=\frac{w_n^2}{(w_n^2-w^2)+2j\zeta w w_n}\Rightarrow|\Phi(w)|=\frac{w_n^2}{\sqrt{(w_n^2-w^2)^2+(2\zeta w w_n)^2}},\ \angle\Phi(w)=-\arctan\frac{2\zeta w w_n}{w_n^2-w^2}$

将 $w=1rad/s$ 时 $|\Phi(w)|=1,\angle\Phi(w)=-45°$ 代入，有

$$\begin{cases}w_n^2=\sqrt{(w_n^2-1)^2+(2\zeta w_n)^2}\\2\zeta w_n=w_n^2-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(4\zeta^2-2)w_n^2+1=0\\w_n^2-2\zeta w_n-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}w_n^4-4w_n^2+2=0\\\zeta=\frac{w_n^2-1}{2w_n}\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}w_n=\sqrt{2+\sqrt2}\approx1.848\\\zeta=\frac{1+\sqrt2}{2\sqrt{2+\sqrt2}}\approx0.653\end{cases}$ 或 $\begin{cases}w_n=\sqrt{2-\sqrt2}\approx0.765\\\zeta=\frac{1-\sqrt2}{2\sqrt{2-\sqrt2}}<0\end{cases}$ 舍去

综上，$w_n\approx1.848,\ \zeta\approx0.653$

2 绘制下列传递函数的对数$\boxed{\text{幅频}}$渐近特性曲线 一定注意. $10^0=1$

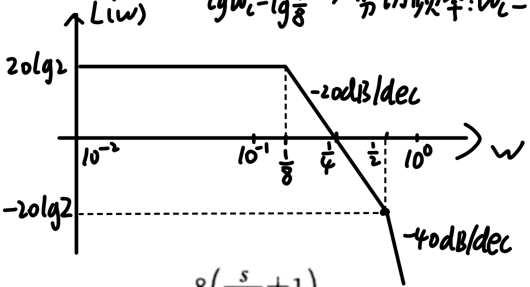
Bode图

(1) $G(s)=\frac{2}{(2s+1)(8s+1)}$;

解: 已是标准型. 转折频率 $\begin{cases}w_1=\frac18 & -20dB/dec\\w_2=\frac12 & -20dB/dec\end{cases}$

基准点. $w=1$ 时 $L(1)=20\lg k=20\lg2\approx6.02$ 斜率为0

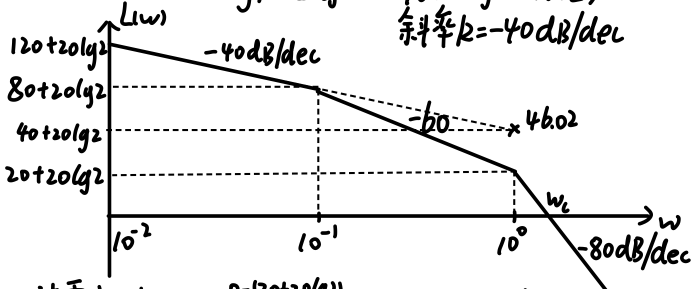
过零点 $k=-20=\frac{0-20\lg2}{\lg w_c-\lg\frac18}\Rightarrow$ 剪切频率: $w_c=\frac14 rad/s$



(2) $G(s)=\frac{200}{s^2(s+1)(10s+1)}$;

已是标准型. 转折频率. $\begin{cases}\frac{1}{10} & -20dB/dec\\1 & -20dB/dec\end{cases}$

基准点. $L(1)=20\lg k=20\lg200=40+20\lg2\approx46.02$,
斜率 $k=-40dB/dec$



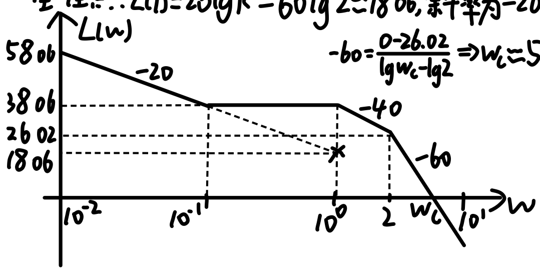
过零点. $k=-80=\frac{0-(20+20\lg2)}{\lg w_c-\lg1}\Rightarrow w_c=2.115rad/s$

(3) $G(s)=\frac{8\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}{s(s^2+s+1)\left(\frac{s}{2}+1\right)}$;

解. 转折频率 $\begin{cases}0.1 & +20dB/dec\\1 & -40dB/dec\\2 & -20dB/dec\end{cases}$

基准点. $L(1)=20\lg k=60\lg2\approx18.06$, 斜率为 $-20dB/dec$

$-60=\frac{0-26.02}{\lg w_c-\lg2}\Rightarrow w_c\approx5.429rad/s$

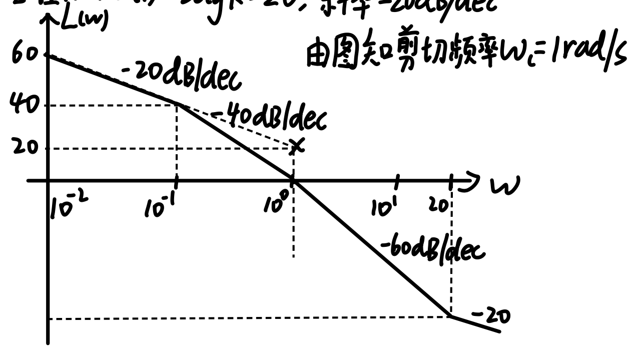


(4) $G(s)=\frac{10\left(\frac{s^2}{400}+\frac{s}{10}+1\right)}{s(s+1)\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}$

转折频率 $\begin{cases}0.1 & -20dB/dec\\1 & -20dB/dec\\20 & 40dB/dec\end{cases}$

基准点. $L(1)=20\lg k=20$, 斜率 $-20dB/dec$

由图知剪切频率 $w_c=1rad/s$



5.1　一阶环节的传递函数为

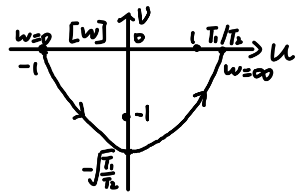
$$G(s)=\frac{T_1 s+1}{T_2 s-1}\qquad 1>T_1>T_2>0$$

试绘制该环节的 Nyquist 图及 Bode 图。

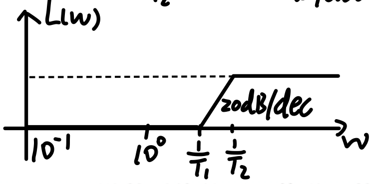
解. $G(s)=\frac{T_1s+1}{T_2s-1}$, $1>T_1>T_2>0$, $G(j\omega)=\frac{j\omega T_1+1}{j\omega T_2-1}=\frac{T_1T_2\omega^2-1}{T_2^2\omega^2+1}+j\frac{-(T_1+T_2)\omega}{T_2^2\omega^2+1}=X+jY$

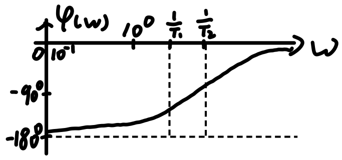
实部 $X=\frac{T_1T_2\omega^2-1}{T_2^2\omega^2+1}$, 虚部 $Y=\frac{-(T_1+T_2)\omega}{T_2^2\omega^2+1}$, 交点 · $\omega=0$ 时 $(-1,0)$, $\omega=\sqrt{\frac{1}{T_1T_2}}$ 时 $(0,-\sqrt{\frac{T_1}{T_2}})$. $\omega=\infty$ 时 $(\frac{T_1}{T_2},0)$

Nyquist 图为. 其中 $\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}>1$, $\frac{T_1}{T_2}>1$



转折频率 $\begin{cases} 1<\frac{1}{T_1}\ (\text{小})\ +20dB/dec \\ 1<\frac{1}{T_2}\ (\text{大})\ -20dB/dec \end{cases}$ 基准线斜率为0　幅角 $\omega=0$ 时为 -180°　$\omega=\infty$ 时为 0°





5.3　设某系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{Ke^{-0.1s}}{s(0.1s+1)(s+1)}$$

试通过该系统的频率响应确定剪切频率 $\omega_c=5$ rad/s 时的开环增益 K。

解. $GH(j\omega)=\frac{Ke^{-0.1j\omega}}{j\omega(0.1j\omega+1)(j\omega+1)}\Rightarrow|GH(j\omega)|=\frac{K}{\omega\sqrt{0.01\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+1}}$

$\omega_c=5rad/s$ 即 $\omega=\omega_c$ 时, $|GH(j\omega)|=1$

代入得 $K=\omega_c\sqrt{0.01\omega_c^2+1}\sqrt{\omega_c^2+1}=28.504$

5.4　若系统的单位阶跃响应为

$$y(t)=1-1.8e^{-4t}+0.8e^{-9t}\qquad t\geqslant 0$$

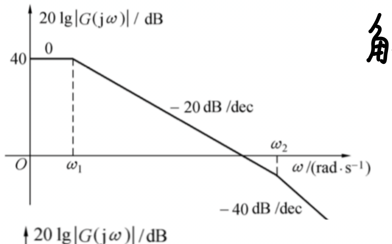
试求取该系统的频率响应。$\Phi(j\omega)=\Phi(s)|_{s=j\omega}$

解: 系统输入为 $u(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s}$, 输出 $y(0)=0$, 零状态, $Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]=\frac{1}{s}-1.8\frac{1}{s+4}+0.8\frac{1}{s+9}$

系统传函 $\Phi(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=1-\frac{1.8s}{s+4}+\frac{0.8s}{s+9}=\frac{36}{(s+4)(s+9)}=\frac{1}{(\frac{s}{4}+1)(\frac{s}{9}+1)}$

由于 $p_1=-4$, $p_2=-9$, 系统稳定, 系统的频率响应为 $\Phi(j\omega)=\Phi(s)|_{s=j\omega}=\frac{1}{(\frac{j\omega}{4}+1)(\frac{j\omega}{9}+1)}$

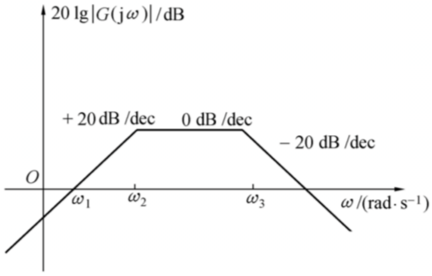
5.5　已知最小相位系统 Bode 图的幅频特性如题 5.5 图所示。试求取该系统的开环传递函数。



解. 基准线 · $L(1)=20\lg K=40\Rightarrow K=100$, 斜率为0, 无积分环节

$\omega=\omega_1$, $\omega=\omega_2$ 处有两个惯性环节, 又由题最小相位系统

开环传函为 $G(s)=\frac{100}{(\frac{s}{\omega_1}+1)(\frac{s}{\omega_2}+1)}$



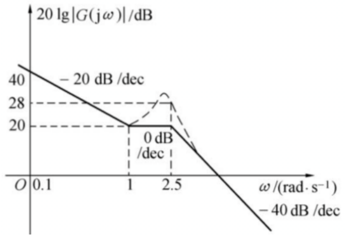
解. 有 $\omega=\omega_2$, $\omega=\omega_3$ 两个惯性环节, 基准线斜率为 +20dB/dec

设 $G(s)=\frac{Ks}{(\frac{s}{\omega_2}+1)(\frac{s}{\omega_3}+1)}$　用近似法求 K.

$\omega=\omega_1$ 时, $L(\omega_1)=20\lg(K\omega_1)=0\Rightarrow K=\frac{1}{\omega_1}\Rightarrow G(s)=\frac{\frac{s}{\omega_1}}{(\frac{s}{\omega_2}+1)(\frac{s}{\omega_3}+1)}$

修正项公式 振荡 $-20\lg(2\xi)$ dB

二阶微分 $20\lg(2\xi)$ dB

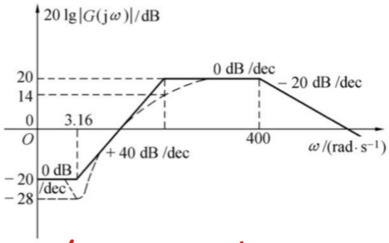


解:基准线斜率 -20dB/dec, $w=1$时, $L(1)=20\lg(k)=20 \Rightarrow K=10$

$w=1$处一阶微分环节, $w=2.5$处一振荡环节, $w_n=2.5$, 此处 $-20\lg(2\xi)=8$dB

$\Rightarrow \xi=0.199$

传函为 $G(s)=\dfrac{10(s+1)}{s\left[\left(\frac{s}{2.5}\right)^2+\frac{0.398s}{2.5}+1\right]}$



-28为真实曲线的最小值

解.基准线斜率为0, $L(1)=20\lg(k)=-20 \Rightarrow K=0.1$

$w=3.16$处有一二阶微分环节 (ξ_1), $w=31.6$处有一振荡环节 (ξ_2)

$w=400$处有一惯性环节,

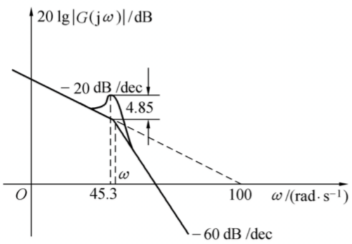
$$G(s)=\frac{\left(\frac{s}{3.16}\right)^2+\frac{2\xi_1 s}{3.16}+1}{10\left[\left(\frac{s}{31.6}\right)^2+\frac{2\xi_2 s}{31.6}+1\right]\left(\frac{s}{400}+1\right)}$$

修正 ~~ξ_1: $20\lg(2\xi_1)=8 \Rightarrow \xi_1=0.199$~~

ξ_1: $20\lg\dfrac{1}{2\xi_1\sqrt{1-\xi_1^2}}=8 \Rightarrow \xi_1=0.203$

ξ_2: $-20\lg(2\xi_2)=-6 \Rightarrow \xi_2=0.998$

$$G(s)=\frac{\left(\frac{s}{3.16}\right)^2+\frac{0.406s}{3.16}+1}{10\left[\left(\frac{s}{31.6}\right)^2+\frac{1.996s}{31.6}+1\right]\left(\frac{s}{400}+1\right)}$$



当 $0<\xi<0.707$ 时,对于无零点 $K=1$ 的标准二阶系统. $w_r=w_n\sqrt{1-2\xi^2}$

$M_r=\dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$

解.基准线斜率为-20dB/dec, $L(1)=20\lg K=40 \Rightarrow K=100$

$w=w_n$处有一振荡环节,参数为 w_n,ξ,

由 $\begin{cases} w_n\sqrt{1-2\xi^2}=45.3 \\ 20\lg\dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}=4.85 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_n \\ \xi=0.95 \end{cases}$ 错, $\begin{cases} w_n=50.02\text{ rad/s} \\ \xi=0.2999 \end{cases}$

综上, $G(s)=\dfrac{100}{s\left[\left(\frac{s}{50.02}\right)^2+\frac{0.5998s}{50.02}+1\right]}$