By 22-psp

轨迹线 $\frac{极-零}{极-零}$ $\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_i}{n-m}$ $\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}$

出/入射角 $\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i)=(2k+1)\pi$ 零 极

自动控制理论 A 作业 10

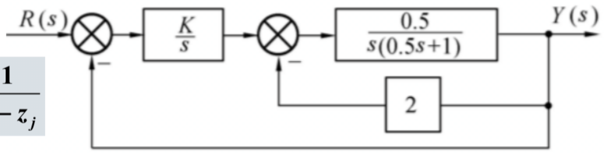
100

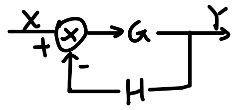
2024 年 11 月 19 日

根轨迹形式指前系数均为1

分离点 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}$

4.1 某反馈系统的方框图如题 4.1 图所示。试绘制 K 从 0 变到 ∞ 时该系统的根轨迹图。





$\frac{Y}{X}=\frac{G}{1+GH}$

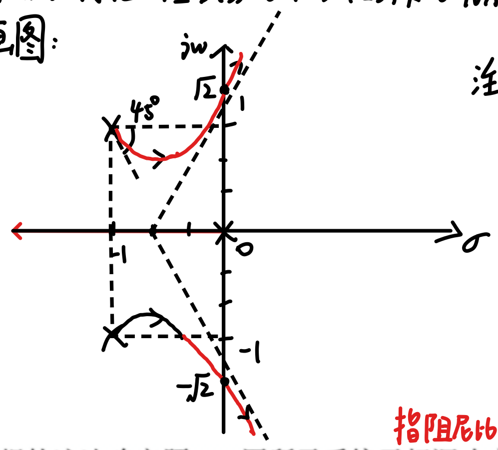
解.先求系统的开环传函. $G(s)=\frac{\frac{0.5}{s(0.5s+1)}}{1+2\frac{0.5}{s(0.5s+1)}}\cdot\frac{K}{s}=\underbrace{\frac{K}{s^3+2s^2+2s}}_{用于求特征方程}=\underbrace{\frac{K}{s(s+1-j)(s+1+j)}}_{根轨迹形式}$ 根轨迹增益为 K

$n=3$, $p_1=0$, $p_2=-1+j$, $p_3=-1-j$. $m=0$ 无开环零点.

渐近线. $\sigma_a=\frac{-1-1}{3}=-\frac{2}{3}$, $\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{3}=\pm60°, 180°$, 出射角 $0-[\theta+135°+90°]=(2k+1)\pi\Rightarrow\theta=-45°$

与虚轴交点.. 特征方程 $D(s)=s^3+2s^2+2s+K=0$ 代入 $s=j\omega$ 有 $\begin{cases}-\omega^3+2\omega=0\\-2\omega^2+K=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega=0\\K=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\omega=\pm\sqrt{2}\\K=4\end{cases}$

综上,画图:

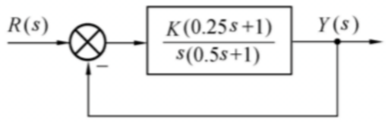


注. 求分离点. $D'(s)=3s^2+4s+2=0\Rightarrow s=\frac{-2\pm\sqrt{2}i}{3}$

代入 $D(s)=s^3+2s^2+2s+K=0\Rightarrow K=-s^3-2s^2-2s=\frac{20}{27}-\frac{4\sqrt{2}}{27}i$

说明不存在分离点.

4.2 试应用根轨迹法确定题 4.2 图所示系统无超调响应时的开环增益 K。 指阻尼比ξ≥1



开环传函 $G(s)=\frac{K^*(s+4)}{s(s+2)}=\frac{K(s/4+1)}{s(s/2+1)}$ 根轨迹增益 $K^*=\frac{1}{2}K$

$n=2$, $p_1=0$, $p_2=-2$, $m=1$, $z_1=-4$ 实轴上根轨迹范围 $(-\infty,-4], [-2,0]$

渐近线. $\sigma_a=2$, $\varphi_a=(2k+1)\pi=180°\Rightarrow$ 实轴

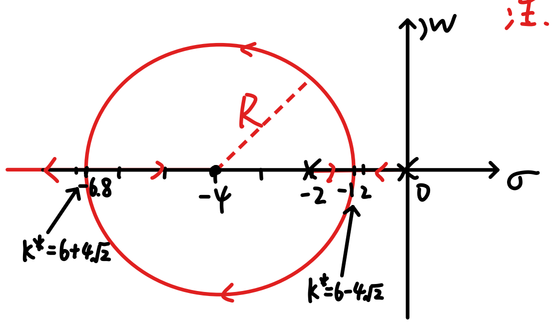
分离点. $\frac{1}{d+2}+\frac{1}{d}=\frac{1}{d+4}\Rightarrow d^2+8d+8=0\Rightarrow d_1=-4-2\sqrt{2}\approx-6.8$ $d_2=-4+2\sqrt{2}\approx-1.2$ 都在范围内

$D(s)=s^2+(2+K^*)s+4K^*=0$ 代入 $s=d_1\Rightarrow K^*_{d_1}=6+4\sqrt{2}$, 代入 $s=d_2\Rightarrow K^*_{d_2}=6-4\sqrt{2}$

求与虚轴交点.. 代入 $s=j\omega\Rightarrow\begin{cases}4K^*-\omega^2=0\\(2+K^*)\omega=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega=0\\K^*=0\end{cases}\Rightarrow K^*>0$ 时,系统一直为稳定

无超调响应:阻尼比ξ≥1,即极点都在负实轴上 $\Rightarrow K^*\in[0,K^*_{d_2}]\cup[K^*_{d_1},+\infty)$ 且 $K=2K^*$

$\Rightarrow K\in[0,12-8\sqrt{2}]\cup[12+8\sqrt{2},+\infty)$

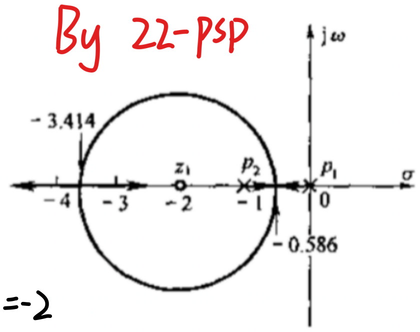


注. 可以证明,复平面上的根轨迹为圆弧
(和下一题一样)

根轨迹证明题：令$D(s)=0$

By 22-PSP

5. 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$，其根轨迹图见图。试从数学上证明：复数根轨迹部分是以$(-2,j0)$为圆心，以$\sqrt{2}$为半径的一个圆。



解. $G(s)=\dfrac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$ $n=2,\ P_1=0,\ P_2=-1,\ m=1,\ Z_1=-2$

实轴上的根轨迹范围：$(-\infty,-2]\cup[-1,0]$

特征方程 $D(s)=s^2+(K^*+1)s+2K^*=0$

特征根 $s_{1,2}=\dfrac{-(K^*+1)\pm\sqrt{(K^*+1)^2-8K^*}}{2}=-\dfrac{K^*+1}{2}\pm j\dfrac{\sqrt{8K^*-(K^*+1)^2}}{2}\triangleq\sigma\pm j\omega$

$-2\sigma=K^*+1,\ \omega^2=2K^*-\dfrac{(K^*+1)^2}{4}=-4\sigma-2-\dfrac{4\sigma^2}{4}=-\sigma^2-4\sigma-2$

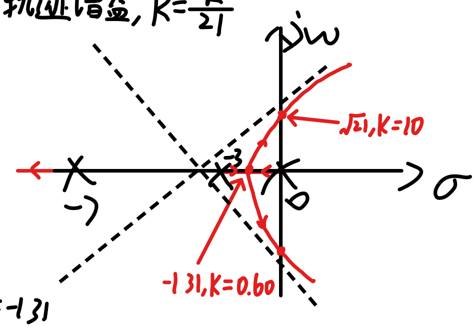
$\Rightarrow \omega^2+\sigma^2+4\sigma+2=\omega^2+(\sigma+2)^2=(\sqrt{2})^2\Rightarrow$ 圆心$(-2,j0)$ 半径$R=\sqrt{2}$，得证

10. 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{k}{s(s+3)(s+7)}$$

k为根轨迹增益，$K=\frac{k}{21}$

试确定使系统具有欠阻尼阶跃响应特性的的取值范围。



$n=3,\ P_1=0,\ P_2=-3,\ P_3=-7,\ m=0$，无开环零点

实轴上根轨迹：$(-\infty,-7]\cup[-3,0]$

渐近线：$\sigma_a=\dfrac{-3-7}{3-0}=-\dfrac{10}{3},\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3}=\pm60^\circ,180^\circ$

分离点 $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+3}+\dfrac{1}{d+7}=0\Rightarrow 3d^2+20d+21=0\Rightarrow d_1=-5.36$(舍去)，$d_2=-1.31$

$D(s)=s^3+10s^2+21s+k=0$ 将$d_2=-1.31$代入 $\Rightarrow k_{d_2}=12.60\Rightarrow K_{d_2}=0.60$

与虚轴交点，当$s=j\omega$代入上式有 $-j\omega^3-10\omega^2+21j\omega+k=0\Rightarrow\begin{cases}-\omega^3+21\omega=0\\-10\omega^2+k=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega=0\\k=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\omega=\pm\sqrt{21}\\k=210\end{cases}\to K=10$

由根轨迹方法可知，欠阻尼$(0<\zeta<1)$时有一个极点离虚轴很远，另两个为主导极点

根轨迹增益 $12.60<k<210$ 开环增益 $0.60<K<10$

11. 单位负反馈系统的开环传递函为

$$G(s)=\frac{K}{s(0.5s+1)}=\frac{K^*}{s(s+2)}$$

↓根轨迹增益 $K^*=2K$　　根轨迹形式指s前系数均为1

用根轨迹法分析开环放大系数 K 对系统性能的影响，计算 $K=5$ 时系统动态指标 σ_p,t_r,t_p,t_s。

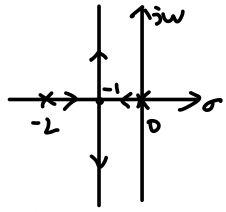
解：$n=2,\ P_1=0,\ P_2=-2,\ m=0$，无开环零点，实轴上根轨迹 $[-2,0]$

渐近线．$\sigma_a=\dfrac{-2-0}{2-0}=-1,\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{2-0}=\pm90^\circ$

分离点 $\dfrac{1}{d+0}+\dfrac{1}{d+2}=0\Rightarrow d=-1$，代入 $D(s)=s^2+2s+K^*=0\Rightarrow K^*_d=1,\ K_d=\frac{1}{2}$

与虚轴交点 将$s=j\omega$代入，有 $-\omega^2+2j\omega+K^*=0\Rightarrow\begin{cases}\omega=0\\K^*=0\end{cases}\Rightarrow K^*>0$时系统一直稳定

根轨迹如右图



$$\underbrace{K=0\xrightarrow[\sigma\%=0]{\text{过阻尼}}K=\tfrac{1}{2}\xrightarrow[\zeta\downarrow\ \Rightarrow\sigma\%\uparrow]{\text{欠阻尼}}K=+\infty}_{\text{稳定}}$$

$K=5$时，$D(s)=s^2+2s+10=0\Rightarrow s_{1,2}=-1\pm j3\Rightarrow\omega_n=\sqrt{10},\ \zeta=\dfrac{1}{\sqrt{10}},\ \zeta\omega_n=1,\ \omega_d=3$

故 $\sigma_p\%=e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi}\times100\%\approx35.1\%,\ t_r=\dfrac{\pi-\varphi}{\omega_d}=\dfrac{\pi-\arccos\zeta}{\omega_d}=0.631s$

$t_p=\dfrac{\pi}{\omega_d}=1.05s,\ t_s(2\%)=\dfrac{4}{\zeta\omega_n}=4s$

By 22-psp

4.4　设某反馈系统的特征方程为

$$s^2(s+a)+k(s+1)=0$$

试确定以 k 为参变量的根轨迹与负实轴无交点、有一个交点与有两个交点时的参量 a，并绘制相应的根轨迹图。

解. $D(s)=s^2(s+a)+k(s+1)=0 \Rightarrow$ 等效开环传函: $G(s)=\dfrac{k(s+1)}{s^2(s+a)}$　$n=3, P_{1,2}=0, P_3=-a$　$m=1, Z_1=-1$

渐近线 $\sigma_a=\dfrac{-a+1}{3-1}=\dfrac{1-a}{2}$, $\varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{2}=\pm 90°$

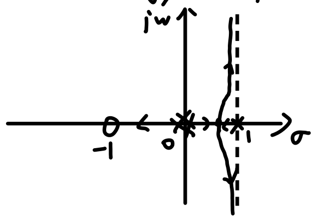
分离点. $\dfrac{1}{d+a}+\dfrac{2}{d}=\dfrac{1}{d+1} \Rightarrow 2d^2+(3+a)d+2a=0 \Rightarrow d_{1,2}=\dfrac{-(3+a)\pm\sqrt{(3+a)^2-16a}}{4}=\dfrac{-(3+a)\pm\sqrt{(a-1)(a-9)}}{4}$

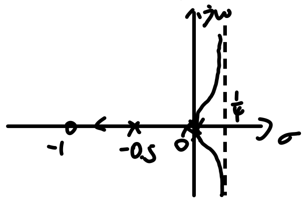
① 根轨迹与负实轴无交点 · $d_{1,2}$ 无实数解, $(a-1)(a-9)<0 \Rightarrow a\in(1,9)$

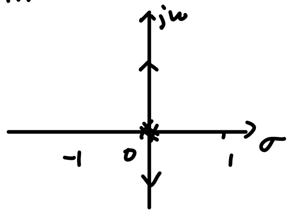
② 根轨迹与负实轴有1个交点 · $a=1$ 或 $a=9$　($a=1$ 时开环零极点相消)

③　　　　2个　　$a<1$ 或 $a>9$

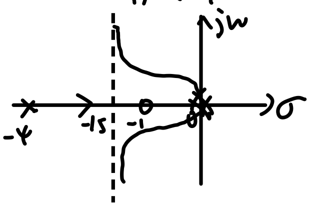
画图　i $a\le 0$ 时, $a=-1 \Rightarrow d=0.618$　　ii $0<a<1$, $a=0.5$　　iii $a=1$

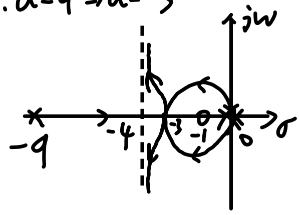


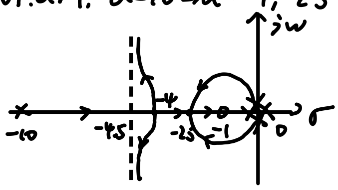




iv. $1<a<9$, $a=4$　　v. $a=9 \Rightarrow d=-3$　　vi. $a>9$. $a=10 \Rightarrow d=-4,-2.5$







由图可知　无交点. $a<9$　有1个交点 $a=9$　有2个交点. $a>9$

4.5　设某正反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{k(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

试为该系统绘制以 k 为参变量的根轨迹图。

$0°$ 根轨迹:
1. 实轴上的根轨迹要相反
2. 渐近线 $\varphi_a=\dfrac{2k\pi}{n-m}$
3. 出/入射角 $\sum_j\angle(s-z_j)-\sum_i\angle(s-p_i)=2k\pi$

解. 求零度根轨迹, $G(s)H(s)=\dfrac{k(s+2)}{(s+3)[s-(-1-i)][s-(-1+i)]}$　$n=3, P_1=-3, P_2=-1-i, P_3=-1+i$　$m=1, z_1=-2$

实轴上根轨迹: $(-\infty,-3]\cup[-2,+\infty)$

渐近线: $\sigma_a=\dfrac{-3-1-1+2}{2}=-\dfrac{3}{2}$, $\varphi_a=\dfrac{2k\pi}{2}=180° \Rightarrow$ 为实轴

出射角 $[45°]-[\theta+\arctan\frac{1}{2}+90°]=2k\pi \Rightarrow \theta=-71.6°$

与虚轴交点. 当 $s=j\omega$ 代入 $D(s)=s^3+5s^2+(8-k)s+6-2k=0 \Rightarrow \begin{cases}-\omega^3+(8-k)\omega=0\\-5\omega^2+6-2k=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\omega=0\\k=3\end{cases}$

$k\in[0,3)$ 时系统稳定　注. 零度时 由 $G(s)H(s)$ 得到特征方程为 $D(s)=$ 分母 $-$ 分子 $=0$

分离点(对应重根): $\dfrac{1}{d+3}+\dfrac{1}{d-(-1-i)}+\dfrac{1}{d-(-1+i)}=\dfrac{1}{d+2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{d+3}+\dfrac{2d+2}{d^2+2d+2}=\dfrac{1}{d+2}$

$\Rightarrow \dfrac{3d^2+10d+8}{d^3+5d^2+8d+6}=\dfrac{1}{d+2}$

$\Rightarrow 2d^3+11d^2+20d+10=0$

$\Rightarrow d=-0.80$　(忽略复数根)

注: 分离点正经求法. $D(s)=D'(s)=0$

$D(s)=s^3+5s^2+8s+6-k(s+2)=0$

$D'(s)=3s^2+10s+8-k=0$

$\Rightarrow$　$s_1=-0.80 \to k=1.907$

$s_2=-2.35\pm0.84i \to k=-1.08-3.5i$ (舍去)