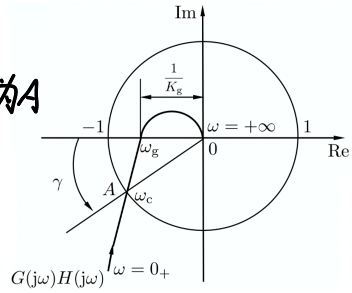
22-PSP

自控原理B 作业一

1. 相位裕度和幅值裕度的几何意义和物理意义。

答：一、相位裕度

1. 几何意义 系统开环频率特性曲线与单位圆的交点记为A，γ为负实轴与OA的夹角，逆时针为正



2. 物理意义 γ表示开环极坐标图与单位圆的交点沿单位圆与(-1,j0)的远近程度

若系统在ω_c处的相位再减小γ，则$\varphi(\omega_c)=-180°$，曲线过(-1,j0)点，系统临界稳定 $\rightarrow 57.3\tau\omega_c=\gamma$

二、幅值裕度

1. 几何意义 系统开环频率特性曲线与负实轴交点到原点的距离的倒数

2. 物理意义 K_g表示开环极坐标图与负实轴的交点离(-1,j0)的远近程度。

若系统的开环增益增大到原来的K_g倍，则$A(\omega_g)=1$，曲线过(-1,j0)，系统临界稳定

2. 具有正相位裕度的负反馈系统一定是稳定的吗？

答：不一定，对于包含不稳定惯性环节的非最小相位系统，只有当相位裕度为正，幅值裕度为负时，闭环系统才是稳定的

3. 欠阻尼二阶反馈系统一定存在谐振峰值吗？如果存在，试给出欠阻尼二阶系统闭环幅频特性的最大值。 $0<\xi<1$

答：不一定 ① $0<\xi<\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$M_r=\frac{A(\omega_r)}{A(0)}=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$，$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$

② $\frac{\sqrt{2}}{2}<\xi<1$ 时，没有谐振峰值

4. 设某单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K(1-\tau s)}{1+Ts}$$

$P_1=-\frac{1}{T}$，$P=0$ $Z=P-2N$（待求）

其中$K>1$，$T>\tau>0$，试绘制该系统 Nyquist 曲线概略图，并分析相角裕度和幅值裕度与稳定性的关系。

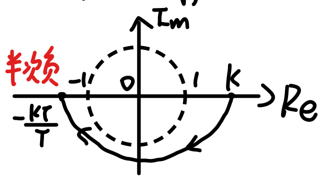
$$G(j\omega)=\frac{K-j\tau K\omega}{1+j\omega T}=\frac{K(1-\omega^2\tau T)}{1+\omega^2T^2}-j\frac{\omega K(\tau+T)}{1+\omega^2T^2}$$

$G(0)=K-j0=(K,0)$，$G(+\infty)=-\frac{K\tau}{T}-j0=(-\frac{K\tau}{T},0)$ 始于实轴，终于实轴

直接用$G(j\omega)$求 不要用$X+jY$求

$|G(j\omega)|=\frac{K\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$ 令$|G(j\omega_c)|=1 \Rightarrow \omega_c^2=\frac{K^2-1}{T^2-K^2\tau^2}$

① $\frac{K\tau}{T}>1$时，$T^2-K^2\tau^2<0$，ω_c不存在，如图。

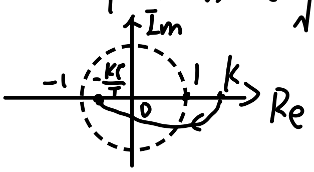


$P=0$，$N=N^+-N^-=-\frac{1}{2}$

$Z=P-2N=1$，闭环系统不稳定

无相角裕度γ，幅值裕度K_g为负

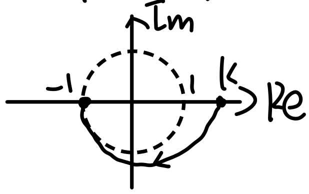
② $0<\frac{K\tau}{T}<1$时，$\omega_c=\sqrt{\frac{K^2-1}{T^2-K^2\tau^2}}$，如图：



$P=0$，$N=0 \Rightarrow Z=P-2N=0$，闭环系统稳定

相角裕度为正，幅值裕度为正

③ $\frac{K\tau}{T}=1$时, $\omega_c=+\infty$, 系统临界稳定, $\gamma=0$, $K_g=1$



5. 某非最小相位负反馈系统的开环传递函数为 22-PSP

$$G(s)H(s)=\frac{K(-\tau s+1)}{s(Ts+1)}$$

其中$K>0$，$\tau>0$，$T>0$。分析该系统稳定裕度与稳定性的关系。

解. $P_1=0$, $P_2=-\frac{1}{T}$, I型系统, $P=0$

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K(1-j\omega\tau)}{-\omega^2T+j\omega}=-\frac{K}{\omega}\left[\frac{\omega(\tau+T)+j(1-\omega^2\tau T)}{\omega^2T^2+1}\right]=-\frac{K(\tau+T)}{\omega^2T^2+1}-j\frac{K(1-\omega^2\tau T)}{\omega(\omega^2T^2+1)}$$

$|GH|=\frac{K\sqrt{\omega^2\tau^2+1}}{\omega\sqrt{\omega^2T^2+1}}$, $\angle GH=-\arctan\tau\omega-90^\circ-\arctan T\omega$

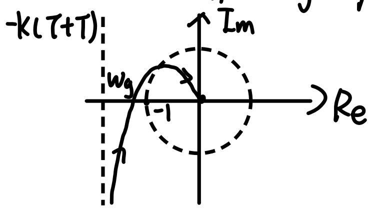
$G(0)H(0)=(-K(\tau+T),-\infty)$ -90°

$G(+\infty)H(+\infty)=(0,0)$ -270°

$-\tau\omega$ 注意非最小相位系统会导致角不在第一象限, 需注意处理

求ω_g. 令 $\operatorname{Im}[G(j\omega_g)H(j\omega_g)]=0\Rightarrow\omega_g=\frac{1}{\sqrt{\tau T}}$, $G(j\omega_g)H(j\omega_g)=-K\tau$

① $K\tau>1$时, $G(j\omega_g)H(j\omega_g)<-1$, 如下图所示:

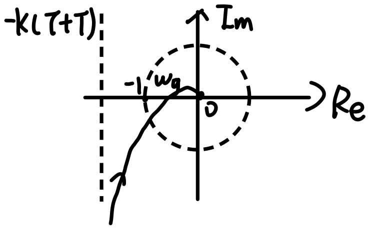


$N^+=0$, $N^-=1$, $P=0$ $Z=P-2N=2$, 系统不稳定

$\gamma<0$, $K_g<0$

② $K\tau=1$时, $G(j\omega_g)H(j\omega_g)=-1$, $\gamma=0$, $K_g=0$. 系统临界稳定

③ $K\tau<1$时, $G(j\omega_g)H(j\omega_g)>-1$



$N^+=N^-=0$ $Z=P-2N=0$, 系统稳定

$\gamma>0$, $K_g>0$

6. 设某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{\tau s+1}{s^2}$$

试确定使系统的相角裕度$\gamma=+45^\circ$时τ的值。

解. $G(j\omega)=\frac{j\omega\tau+1}{-\omega^2}$, $|G(j\omega)|=\frac{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}{|\omega|^2}$, 令$|G(j\omega_c)|=1\Rightarrow\omega_c^4-\tau^2\omega_c^2-1=0$

解得 $\omega_c=\sqrt{\frac{\tau^2+\sqrt{\tau^4+4}}{2}}$

$\angle G(j\omega)=\arctan\omega\tau-180^\circ$.

由相角裕度的公式, 有. $\gamma=180^\circ+\angle G(j\omega_c)=\arctan\omega_c\tau=+45^\circ$

$\Rightarrow\omega_c\tau=\tau\sqrt{\frac{\tau^2+\sqrt{\tau^4+4}}{2}}=1\Rightarrow\tau=0.841$

7. 设某负反馈系统的开环传递函数为 22-psp

$$G(s)H(s)=\frac{Ke^{-0.1s}}{s(0.1s+1)(s+1)}$$

试通过该系统的频率响应确定剪切频率$\omega_c=5\text{rad/s}$ 时的开环增益K。

解: $G(jw)H(jw)=\dfrac{Ke^{-0.1jw}}{jw(0.1jw+1)(jw+1)}$

$|G(jw)H(jw)|=\dfrac{K}{w\sqrt{0.01w^2+1}\sqrt{w^2+1}}$

已知 $|G(jw_c)H(jw_c)|=1$, 即 $\dfrac{K}{5\sqrt{1+0.25}\sqrt{1+25}}=1 \Rightarrow K=28.50$

8. 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(1+s)(1+3s)}$$

试用 Bode 图方法确定系统稳定的临界增益K值。

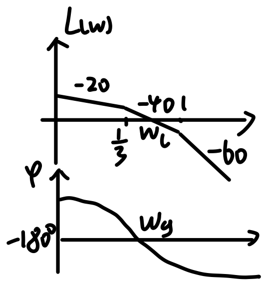
解: $G(jw)H(jw)=\dfrac{K}{jw(jw+1)(3jw+1)}$, $\angle G(jw)H(jw)=-90^\circ-\arctan 3w-\arctan w$

基准线: $\begin{cases}k=-20\\ L(1)=20\lg K\end{cases}$ 转折点: $\begin{cases}w=\frac{1}{3} & -20\text{dB/s}\\ w=1 & -20\text{dB/s}\end{cases}$

求穿越频率 w_g: $-90^\circ-\arctan 3w_g-\arctan w_g=-180^\circ$

$90^\circ=\arctan 3w_g+\arctan w_g=\arctan\dfrac{4w_g}{1-3w_g^2}\Rightarrow w_g=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

临界稳定即 $w_c=w_g$.



由于 $L(w)=\begin{cases}20(\lg K-\lg w), & w<\frac{1}{3}\\ 20(\lg K-\lg w-\lg 3w), & \frac{1}{3}<w<1\\ 20(\lg K-\lg w-\lg 3w-\lg w), & 1<w\end{cases}$

$\Rightarrow 20(\lg K-\lg w_c-\lg 3w_c)=0$

$\Rightarrow \dfrac{K}{3w_g^2}=1 \Rightarrow K=3w_g^2=1$ (折线近似)

精确解法

$|G(jw_c)H(jw_c)|=1 \Rightarrow \dfrac{K}{w_g\sqrt{1+w_g^2}\sqrt{1+9w_g^2}}=1$

$\Rightarrow K=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot 2=\dfrac{4}{3}$