22-psp

自控原理 hw3 2025/5/17

1. 设 SISO 线性定常系统的状态方程和输出方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\end{bmatrix}u \quad \lambda_1\neq 0,\lambda_2\neq 0$$

$$y=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{bmatrix}x$$

(1) 给出使系统状态完全能控的 $b_1$,$b_2$,$b_3$,$b_4$ 满足的条件；(8 分)

(2) 给出使系统状态完全能观的 $c_1$,$c_2$,$c_3$,$c_4$ 满足的条件；(7 分)

解：① 若 $\lambda_1\neq\lambda_2$

$\lambda_1$对应的Jordan小块为1个

$\lambda_2$对应的Jordan小块为1个

由Jordan标准型判据可知

(1) 能控：$b_2\neq 0$, $b_4\neq 0$, $b_1$、$b_3$ 任意 (能控为最后一行)

(2) 能观：$c_1\neq 0$、$c_3\neq 0$ $c_2$、$c_4$ 任意 (能观为第一列)

② 若 $\lambda_1=\lambda_2$，对应的Jordan小块为2个

由于2个1维向量必线性相关

⇒ 系统不能观不能控

2. 设线性定常系统为

$$\dot{x}=Ax+bu$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

而且 $\lambda\neq 0$。试问能否取合适的 $b\in\mathbb{R}^3$（SISO），使系统是状态完全能控的。若能控，给出 $b$ 的选取方法；若不能控，说明理由。

解：不能

由于 $b\in\mathbb{R}^3$，为SISO系统，$\lambda$对应的Jordan小块为2个

由于2个1维向量必线性相关

⇒ 系统不能控

3. 两个子系统 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ 串联，如图8.7 所示。$\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ 的系统矩阵、输入矩阵和输出矩阵分别为：

$$\Sigma_1: A_1=-2, B_1=1, C_1=1$$

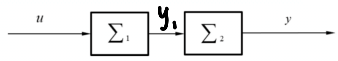
$$\Sigma_2: A_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}, C_2=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}$$

状态空间 (A,B,C) ⟶ 传函 $G=C(sI-A)^{-1}B$

(1) 求串联后的状态空间描述；(5 分)

(2) 判断 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ 串联后的状态能控性和能观性；(5 分)

(3) 求串联后的传递函数。(5 分)




解：(1) 已知 $\Sigma_1:\begin{cases}\dot{x}_1=-2x_1+u\\ y_1=x_1\end{cases}$ $\Sigma_2:\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}y_1\\ y=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ x_3\end{bmatrix}\end{cases}$

串联后，设状态为 $x_1$、$x_2$、$x_3$，有

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u \quad \text{从而：} A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix} \; B=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\end{bmatrix} \; D=0$$

(2)

$$AB=\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, \; A^2B=\begin{bmatrix}4\\ 1\\ -6\end{bmatrix}, \; CA=\begin{bmatrix}1 & -3 & -2\end{bmatrix}, \; CA^2=[-4,6,5]$$

能控性判别矩阵 $Q_c=[B\ AB\ A^2B]=\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -6\end{bmatrix}$，秩为$3=n$，能控

能观性判别矩阵 $Q_o=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -4 & 6 & 5\end{bmatrix}$，秩为$2<n$，不能观 存在零极点对消

(3) $sI-A=\begin{bmatrix}s+2 & & \\ & s & -1\\ -1 & 3 & s+4\end{bmatrix}\Rightarrow(sI-A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{s+2} & & \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} & \cdots & \\ \frac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)} & & \end{pmatrix}_{3\times 3}$ 初等行/列变换法

故 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\frac{s+2}{(s+2)(s+1)(s+3)}=\frac{1}{(s+1)(s+3)}$

22-psp

法二：先求 $\Sigma_1$ 对应的 $G_1(s)$，$G_1(s)=C_1(sI-A_1)^{-1}B_1=(s+2)^{-1}=\frac{1}{s+2}$

再求 $\Sigma_2$ 对应的 $G_2(s)$，$G_2(s)=C_2(sI-A_2)^{-1}B_2=[2\ \ 1]\begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$=[2\ \ 1]\frac{1}{(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

存在零极点对消

$=\frac{1}{(s+1)(s+3)}[2\ \ 1]\begin{bmatrix}1\\s\end{bmatrix}=\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$

从而 $G(s)=G_1(s)G_2(s)=\frac{1}{(s+1)(s+3)}$

4. $n$ 阶线性定常系统的状态方程和输出方程为：

$$\dot{x}=Ax+Bu$$
$$y=Cx$$

若用 $x=Pz$ 对系统进行线性变换，试对下面两个问题进行分析（要求给出分析过程）。

(1) 线性变换是否改变 $u$ 到 $y$ 的传递函数矩阵？(7 分)

(2) 线性变换是否改变系统的可控性？(8 分)

解：① 若 $P$ 不可逆，显然取 $P=0$，(1) (2) 都会改变，

② 若 $P$ 可逆，为可逆线性变换

$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\dot{z}=P^{-1}APz+P^{-1}Bv\\ w=CPz\end{cases}$

(1) 原系统：$G_0(s)=C(sI-A)^{-1}B$

新系统. $G_1(s)=CP(sI-P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B=CP[P^{-1}(sI-A)P]^{-1}P^{-1}B$

$=CPP^{-1}(sI-A)^{-1}PP^{-1}B=C(sI-A)^{-1}B=G_0(s)$

$\Rightarrow$ 可逆线性变换不改变传递函数

(2) 设变换前的可控性判别矩阵为 $Q_c$，

变换后：$\mathrm{rank}(Q_c')=\mathrm{rank}[P^{-1}B\ \ P^{-1}APP^{-1}B\ \ (P^{-1}AP)^2P^{-1}B\cdots(P^{-1}AP)^{n-1}P^{-1}B]$

$=\mathrm{rank}[P^{-1}B\ \ P^{-1}AB\ \ P^{-1}A^2B\cdots P^{-1}A^{n-1}B]$

$=\mathrm{rank}[P^{-1}Q_c]$

由于 $P$ 可逆，$P^{-1}$ 可逆，故 $\mathrm{rank}(Q_c')=\mathrm{rank}(P^{-1}Q_c)=\mathrm{rank}(Q_c)$

$\Rightarrow$ 可逆线性变换不改变系统可控性

5. 单输入-输出线性定常系统的状态空间表达式为：

$$\dot{X}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & 5\end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t)$$
$$Y(t)=\begin{bmatrix}-5 & 3\end{bmatrix}X(t)+u(t)$$

(1) 试将上述模型变换为对角线标准型；

(2) 求系统的传递函数。

解：(1) $A=\begin{bmatrix}0&1\\-6&5\end{bmatrix}$，$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 6 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)\Rightarrow$ 特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$

解特征向量.

二阶方阵求逆

$\left.\begin{array}{l}\lambda_1=2,\ (\lambda_1I-A)x_1=\begin{bmatrix}2&-1\\6&-3\end{bmatrix}x_1=0\Rightarrow x_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\\ \lambda_2=3,\ (\lambda_2I-A)x_2=\begin{bmatrix}3&-1\\6&-2\end{bmatrix}x_2=0\Rightarrow x_2=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\end{array}\right\}P=(x_1\ \ x_2)=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix},\ P^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}$

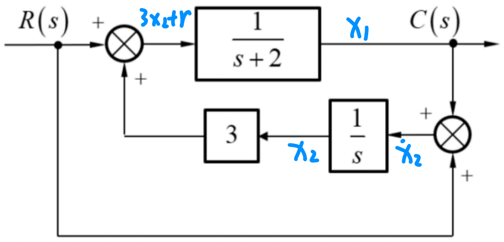
可逆线性变换 $x=P\bar{x}\Rightarrow\bar{A}=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$ $\bar{B}=P^{-1}B=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ $\bar{C}=CP=(1\ \ 4)$ $D=1$

(2) 可逆线性变换不改变系统传递函数故求对角化后的系统的传函：

$(sI-\bar{A})^{-1}=\begin{pmatrix}s-2&\\&s-3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s-2)(s-3)}\begin{pmatrix}s-3&\\&s-2\end{pmatrix}$，

$G(s)=\bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B}+\bar{D}=\frac{1}{(s-2)(s-3)}(1\ \ 4)\begin{pmatrix}s-3&\\&s-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+1=\frac{3s-5}{(s-2)(s-3)}+1=\frac{s^2-2s+1}{s^2-5s+6}$

6. 建立图8.10线性系统的状态空间描述模型，根据此模型判定系统的能控性和能观性。




22-psp

图 8.10

解 先求系统传递函数: $\frac{1}{s+2}\left[R(s)+\frac{3}{s}(R(s)+C(s))\right]=C(s)$ $\quad (1+\frac{3}{s})R(s)+\frac{3}{s}C(s)=(s+2)C(s)$

$\frac{s+3}{s}R(s)=\frac{s^2+2s-3}{s}C(s)$ $\quad G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{s+3}{s^2+2s-3}\longrightarrow\frac{1}{s-1}$

存在零极点对消,故原系统不能观 且/或 不能控

①能控但不能观

$G(s)=\frac{s+3}{s^2+2s-3}\Rightarrow \alpha_1=2,\alpha_0=-3,\ \beta_1=1,\beta_0=3$

写成能控二型 $\Rightarrow A_c=\begin{bmatrix}0&1\\3&-2\end{bmatrix}, B_c=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, C_c=[3\ \ 1]$ $\Rightarrow$ 能控

能观性 $Q_o=\begin{bmatrix}C_c\\C_cA_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\3&1\end{bmatrix}$ 秩为1<2,不能观

② 能观但不能控

状态变量如图所示. $\begin{cases}x_1=\frac{1}{s+2}(3x_2+R)\\ \dot{x}_2=x_1+r\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}_1=-2x_1+3x_2+r\\ \dot{x}_2=x_1+r\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&3\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}r,\\ y=x_1=[1\ \ 0]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\end{cases}$

$A=\begin{bmatrix}-2&3\\1&0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\quad C=[1\ \ 0],\ AB=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\quad CA=[-2\ \ 3]$

能控性: $Q_c=[B\ \ AB]=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ 秩为1<2 不能控

能观性. $Q_o=\begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-2&3\end{bmatrix}$ 秩为2=n, 能观

法二: 将①中的能控二型对偶,即可得到原传函所对应的能观二型

$A_o=\begin{bmatrix}0&3\\1&-2\end{bmatrix}\quad B_o=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\quad C_o=[0\ \ 1]$

能控性: $Q_c=[B_o\ \ A_oB_o]=\begin{bmatrix}3&3\\1&1\end{bmatrix}$ 秩为1<2 不能控

能观性. $Q_o=\begin{bmatrix}C_o\\C_oA_o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&-2\end{bmatrix}$ 秩为2=n, 能观

③ 既不能控又不能观.

$G(s)=\frac{0}{s+3}+\frac{1}{s-1}$

用约旦标准型实现.

$\dot{x}=\begin{bmatrix}-3&\\&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}r$

$y=[0\ \ 1]x$

求法: $A=\begin{bmatrix}-3&\\&1\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}_{2\times1}, c=[c_1\ \ c_2]$

$c(sI-A)^{-1}b=[c_1\ \ c_2]\begin{bmatrix}\frac{1}{s+3}&\\&\frac{1}{s-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$

$=\frac{b_1c_1}{s+3}+\frac{b_2c_2}{s-1}$

方程: $b_1c_1=0,\ b_2c_2=1\Rightarrow b_1,c_1,b_2,c_2$

能控性: $Q_c=[B\ \ AB]=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$ 秩为1<2 不能控

能观性: $Q_o=\begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$ 秩为1<2 不能观

☆ $J=\begin{bmatrix}\lambda_1&1&0&0\\0&\lambda_1&1&0\\0&0&\lambda_1&0\\0&0&0&\lambda_2\end{bmatrix}$ $\lambda_1$是三重根 $\lambda_2$是单根

这个形式要会

$(sI-J)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s-\lambda_1}&\frac{1}{(s-\lambda_1)^2}&\frac{1}{(s-\lambda_1)^3}&0\\0&\frac{1}{s-\lambda_1}&\frac{1}{(s-\lambda_1)^2}&0\\0&0&\frac{1}{s-\lambda_1}&0\\0&0&0&\frac{1}{s-\lambda_2}\end{bmatrix}$