22-PSP

1. 二阶非线性系统 $\ddot{x}-(2-x^2)\dot{x}+3x=0$ 相轨迹上切线斜率为 1 的所有点构成的曲线方程为 $(1-x^2)\dot{x}=3x$。

2. 给定一个连续时间线性系统，若它是能控的，则其离散化状态空间模型 不一定是（是/不是）能控的；若它是不能观的，则其离散化状态空间模 不是（是/不是/不一定是）能观的。

3. 在频域设计中，一般地说，开环频率特性的 低 频段表征了闭环系统的稳态性能；开环频率特性的 中 频段表征了闭环系统的动态特性；开环频率特性的 高 频段表征了闭环系统的抗干扰能力。

4. 对于单位反馈连续系统，增加开环 零点 会使系统的根轨迹向左移动；增加开环 极点 会使根轨迹向右移动。

5. 开环频域性能指标与闭环频域性能指标有着对应关系，开环频域性能指标中的 ω_c 对应闭环频域性能指标闭环带宽 ω_b，它们反映了系统动态过程的 快速性 开环频域性能指标中的 γ 对应闭环频域性能指标相对谐振峰值 M_r，它们反映了系统动态过程的 稳定性

1. $\ddot{x}-(2-x^2)\dot{x}+3x=0$，$f(x,\dot{x})=-(2-x^2)\dot{x}+3x$

相轨迹斜率 $k=\dfrac{-f(x,\dot{x})}{\dot{x}}=\dfrac{(2-x^2)\dot{x}-3x}{\dot{x}}=1 \Rightarrow (1-x^2)\dot{x}=3x$

2.

命题 8.8

如果连续系统是不完全可控的（不完全可观的），则其离散化系统也是不能控的（不能观的）。

3. ①低频段：稳态误差，稳态性能

②中频段：中频段越宽，稳定裕度越大，动态特性越好

γ：相角裕度，

M_r：相对谐振峰值　σ_p：超调量，t_s：调整时间

$h=\dfrac{\omega_3}{\omega_2}=\dfrac{1+\sin\gamma}{1-\sin\gamma}$

$$\begin{cases} M_r=\dfrac{1}{\sin\gamma} \\ \gamma=\arcsin\dfrac{1}{M_r} \end{cases}\qquad \begin{cases} \sigma_p=0.16+0.4(M_r-1) \\ t_s=\dfrac{\pi}{\omega_c}\left[2+1.5(M_r-1)+2.5(M_r-1)^2\right] \end{cases}$$

4.

增加开环极点,将导致系统根轨迹向右移动,使系统稳定性变差;

增加开环零点,会让系统的根轨迹相左边移动,系统的稳定性变好。

二、简答题

1. (3 分) 怎样的单输入单输出连续时间系统的状态空间实现是能控且能观的？
2. (4 分) 谈一谈对描述函数的理解？
3. (4 分) 在基于频率特性的校正方法有哪几种？它们的特点是什么？
4. (5 分) 给定如下二阶线性系统

$$\ddot{x}+5\dot{x}+4x=0$$

该系统存在两条特殊的相轨迹：这两条相轨迹也是该系统的等倾线。请求出这两条特殊相轨迹的方程，并在相平面上画出这两条相轨迹。

1. SISO LTI 系统的传递函数 $G(s)$ 没有零极点对消 $\Rightarrow$ 状态空间实现能控能观

2. ①描述函数是非线性系统中，非线性环节基于奇对称和低通滤波特性良好的假设下，忽略常值分量和高次谐波，正弦输入下输出也为同频率正弦信号，所推导出来的非线性环节的特性

②在分析非线性系统稳定性时，描述函数可作为一个具有复变增益的比例环节

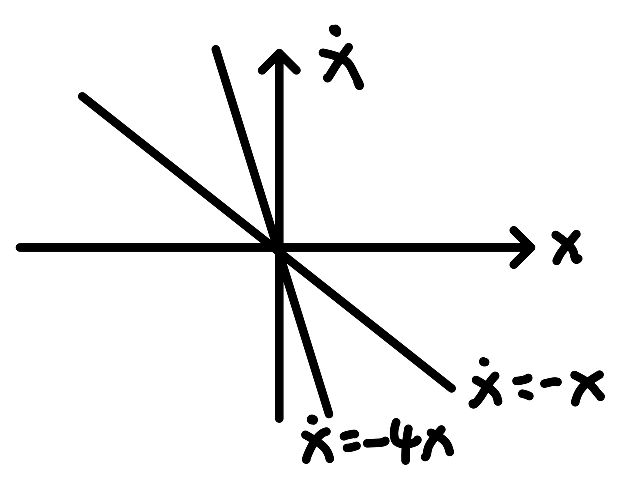
3. 基于频率特性的校正方法

串联超前校正	超前环节具有正相角，提高稳定性、提高快速性，但是无助于稳态精度
串联迟后校正	迟后环节具有负相角可以提高稳定性和稳态精度，但是快速性较低
串联迟后-超前校正	可全面提高系统的控制性能
期望频率特性法	简单、直观,可适合任何形式的校正装置

4. $\ddot{x}+5\dot{x}+4x=0$　设相轨迹切线斜率为 α

等倾线方程：$(\alpha+5)\dot{x}+4x=0$　等倾线斜率 $k=\dfrac{\ddot{x}}{\dot{x}}=\dfrac{-4}{\alpha+5}=\alpha \Rightarrow \alpha^2+5\alpha+4=0$

解得 $\alpha_1=-1,\ \alpha_2=-4$ 时，$k=\alpha$



三、(10 分) 某控制系统的状态空间描述如下

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u=Ax+bu$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}x=cx$$

判断系统的能控性和能观性。

22-PSP

解: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ $C=[1\ \ -1\ \ 1]$

$AB=\begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix}$, $A^2B=\begin{bmatrix}-4\\0\\8\end{bmatrix}$, $CA=[2\ \ -3\ \ 2]$ $CA^2=[4\ \ -7\ \ 4]$

$Q_c=[B\ \ AB\ \ A^2B]=\begin{bmatrix}0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 8\end{bmatrix}$ $r<3$, 不能控

$Q_o=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 4 & -7 & 4\end{bmatrix}\rightarrow r<3$, 不能观

四、(8 分) 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s)=\frac{10}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$$

要求校正后系统相角裕度$\gamma>45^{c}$，幅值裕度不小于 6dB，试确定串联校正的类型，并进行设计。

解: 转折频率: 2rad/s, 5rad/s

$$L(\omega)=\begin{cases}20\lg\frac{10}{\omega} & 0<\omega<2\\ 20(\lg\frac{10}{\omega}-\lg 0.5\omega) & 2<\omega<5\\ 20(\lg\frac{10}{\omega}-\lg0.5\omega-\lg0.2\omega) & 5<\omega\end{cases}$$ $\omega_{c0}=4.47$

$\angle G_0(j\omega)=-90^\circ-\mathrm{atan}\,0.2\omega-\mathrm{atan}\,0.5\omega$

$\gamma_0=180^\circ+\angle G_0(j\omega_{c0})=-17.7^\circ$

若为1rad/s, $\gamma_0(1rad/s)=180^\circ+\angle G_0(j1rad/s)=52^\circ>45^\circ+\Delta_2$, 其中$\Delta_2=6^\circ$

故选迟后环节 $G_c(s)=\frac{\tau s+1}{\beta\tau s+1}$, $\beta>1$, $\omega_c=1rad/s$

$20\lg|G_0(j\omega_c)|=20\lg\beta\Rightarrow\beta=|G_0(j\omega_c)|=\frac{10}{\omega_c}=10$

$\frac{1}{\tau}=(\frac{1}{10}\sim\frac{1}{5})\omega_c\Rightarrow\tau=\frac{10}{\omega_c}=10$, $\beta\tau=100\Rightarrow G_c(s)=\frac{10s+1}{100s+1}$

$G(s)=\frac{10(10s+1)}{s(0.2s+1)(0.5s+1)(100s+1)}$

检验: $L(\omega)=20(\lg\frac{10}{\omega}+\lg10\omega-\lg100\omega)$ $0.1<\omega<2$

$\Rightarrow\omega_c=1.00rad/s$

$\angle G(j\omega)=-90^\circ+\mathrm{atan}(10\omega)-\mathrm{atan}(0.2\omega)-\mathrm{atan}(0.5\omega)-\mathrm{atan}(100\omega)$

$\Rightarrow\gamma=180^\circ+\angle G(j\omega_c)=46.94^\circ>45^\circ$ 满足要求

求ω_g: $-180^\circ=\angle G(j\omega_g)\Rightarrow\omega_g=3.06rad/s$

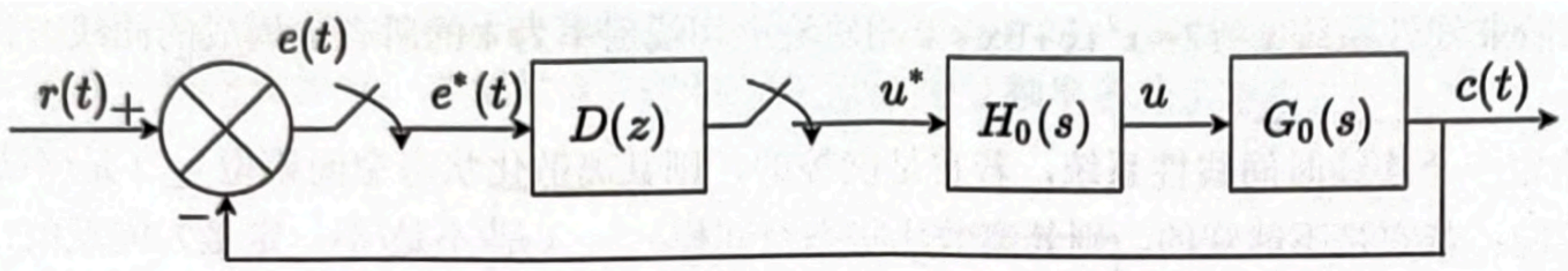
$20\lg k_g=-20\lg|G(j\omega_g)|=-20\lg\frac{10\sqrt{\ }}{\omega_g\sqrt{\ }\sqrt{\ }\sqrt{\ }}=16.3dB$ 满足要求

五、(10 分) 设离散系统如下图所示，其中 $H_0(s)$ 为零阶保持器，采样周期为 T=1s，

$$G_0(s)=\frac{K}{s}$$

22-PSP

试求当 $r(t)=R_1 1(t)+R_1 t$ 时，系统无稳态误差，过渡过程在最小拍内结束的 D(z)。



【提示: $Z\left[\frac{1}{s}\right]=\frac{1}{1-z^{-1}}$, $Z\left[\frac{1}{s^2}\right]=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$, $Z\left[\frac{1}{s+a}\right]=\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$】

解: 输入 $r(t)=R_1[1+t]$, $R(z)=R_1\left[\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right]=\frac{R_1}{(1-z^{-1})^2}$ 阶数 $r=2$

$H_0(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}$, 下求广义脉冲传函:

$G(z)=Z[H_0(s)G_0(s)]=(1-z^{-1})Z\left[\frac{K}{s^2}\right]=\frac{KTz^{-1}}{1-z^{-1}}=\frac{Kz^{-1}}{1-z^{-1}}$, 有1个纯延迟环节

$\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^2$, $\Phi(z)=1-\Phi_e(z)=z^{-1}(2-z^{-1})$ 有1个纯延迟环节, 满足

$\Rightarrow D(z)=\frac{\Phi(z)}{\Phi_e(z)G(z)}=\frac{z^{-1}(2-z^{-1})(1-z^{-1})}{(1-z^{-1})^2(Kz^{-1})}=\frac{2-z^{-1}}{K(1-z^{-1})}$

六、(10 分) 设某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s)=\frac{K}{s(0.12s+1)(0.02s+1)}$$

要求校正后系统静态速度误差系数大于等于 70 s^{-1}，最大超调小于等于 40%，调节时间小于 1s。试采用期望频率特性法设计串联校正网络。

解: 低频段 $G_1(s)=\frac{70}{s}$,

$\sigma_p=0.16+0.4(M_r-1)\le 40\% \Rightarrow M_r\le 1.6$

$M_r=\frac{1}{\sin\gamma}\Rightarrow \gamma\ge 38.7^\circ$

$t_s=\frac{\pi}{\omega_c}[2+1.5(M_r-1)+2.5(M_r-1)^2]\Rightarrow \omega_c\ge 11.94\,rad/s$

取 $\omega_c=12\,rad/s$, $h=\frac{1+\sin\gamma}{1-\sin\gamma}=4.34$,

$\omega_2\le\frac{\omega_c}{\sqrt{h}}=5.76\,rad/s$, $\omega_3\ge\omega_c\sqrt{h}=25\,rad/s$

选 $\omega_2=\frac{1}{10}\omega_c=1.2\,rad/s$, $\omega_3=50\,rad/s$, 故 $h=\frac{\omega_3}{\omega_2}=41.6\gg h$, 满足

为了高频斜率一致, 简单取 $\omega_4=50\,rad/s$, 下求 ω_1

$L(\omega)=20\left(\lg\frac{70}{\omega}-\lg\frac{\omega}{\omega_1}+\lg\frac{\omega}{\omega_2}\right)$ $\omega_2<\omega<\omega_3$

代入 $\omega_c\Rightarrow \frac{70}{\omega_c}\frac{\omega_1}{\omega_c}\frac{\omega_c}{\omega_2}=1\Rightarrow \omega_1=\frac{\omega_c\omega_2}{70}=0.206\,rad/s$

综上, $G(s)=\frac{70(\frac{s}{1.2}+1)}{s(\frac{s}{0.206}+1)(\frac{s}{50}+1)^2}$

检验, $L(\omega)=20\left(\lg\frac{70}{\omega}-\lg\frac{\omega}{0.206}+\lg\frac{\omega}{1.2}\right)$ $1.2<\omega<12$

$\Rightarrow \omega_c=12.0\,rad/s$ 满足要求, $\angle G(j\omega)=-90^\circ+\operatorname{atan}(\frac{\omega}{1.2})-\operatorname{atan}(\frac{\omega}{0.206})-2\operatorname{atan}(\frac{\omega}{50})$

$\gamma=180^\circ+\angle G(j\omega_c)=58.3^\circ$; 满足要求,

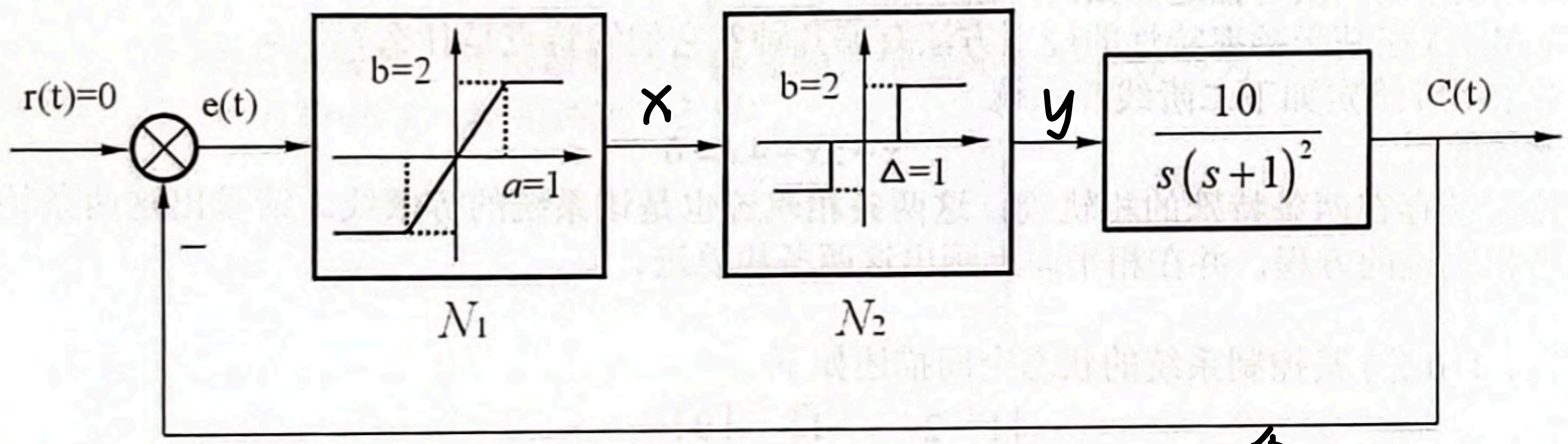
综上, $G_c(s)=\frac{G(s)}{G_0(s)}=\frac{70(\frac{s}{1.2}+1)\,s(0.02s+1)(0.12s+1)}{s(\frac{s}{0.206}+1)(\frac{s}{50}+1)^2K}=\frac{(0.12s+1)(\frac{s}{1.2}+1)}{(\frac{s}{0.206}+1)(\frac{s}{50}+1)}$, $K=70$

七、(10 分) 已知某非线性系统的结构图如图 2 所示，试用描述函数法分析系统的稳定性。若系统存在自激振荡，则求出自激振荡的频率和振幅。

22-PSP

已知：$N_1=\frac{2K}{\pi}[\arcsin\frac{a}{A}+\frac{a}{A}\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}], A\ge a$

$N_2=\frac{4b}{\pi A}\sqrt{1-(\frac{\Delta}{A})^2}, A\ge\Delta$

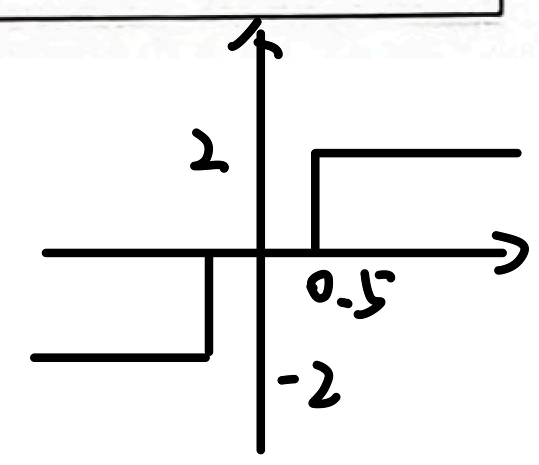


解：① $-0.5<e<0.5$时，$x=2e\in(-1,1)$，$y=0$

② $e<-0.5$时，$x<-1$，$y=-2$，

③ $e>0.5$时，$x>1$，$y=2$

$\Rightarrow$



相当于$\Delta=0.5$，$b=2$的带死区继电，

$N(A)=\frac{8}{\pi A}\sqrt{1-(\frac{1}{2A})^2}=\frac{16}{\pi}\cdot\frac{1}{2A}\sqrt{1-(\frac{1}{2A})^2}\le\frac{8}{\pi}$，当且仅当$A=\frac{\sqrt{2}}{2}$等号成立

故 $A\to0.5$时，$-\frac{1}{N(A)}\to-\infty$，$A\to\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$-\frac{1}{N(A)}\to-\frac{\pi}{8}$，$A\to+\infty$时，$-\frac{1}{N(A)}\to-\infty$

线性部分：

$G(s)=\frac{10}{s(s+1)^2}$，$G(j\omega)=\frac{10}{-2\omega^2+j(\omega-\omega^3)}=\frac{10[-2\omega^2-j(\omega-\omega^3)]}{4\omega^4+\omega^6-2\omega^4+\omega^2}=\frac{10[-2\omega^2-j(\omega-\omega^3)]}{\omega^6+2\omega^4+\omega^2}$

$Re=\frac{-20}{\omega^4+2\omega^2+1}$，$Im=\frac{-10(1-\omega^2)}{\omega^5+2\omega^3+\omega}$

令 $Im=0\Rightarrow\omega=1rad/s$，$Re=-5<-\frac{\pi}{8}$，即$G(j\omega)$与$-\frac{1}{N(A)}$有交点，

$-5=-\frac{1}{\frac{8}{\pi A}\sqrt{1-(\frac{1}{2A})^2}}\Rightarrow A=12.72$，由于$A_1>\frac{\sqrt{2}}{2}$，是上面的交点，是稳定的

会产生自激振荡，振幅12.72，频率1rad/s

八、(10 分) n阶线性定常系统的状态方程和输出方程为：

$$\dot{x}=Ax+Bu$$
$$y=cx$$

若用$x=Pz$对系统进行线性变换，试对下面两个问题进行分析（要求给出分析过程）。

(1) 线性变换是否改变u到y的传递函数矩阵？（5 分）

(2)线性变换是否改变系统的可控性？（5 分）

解：① 若P不可逆，显然取$P=0$，(1) (2)都会改变，

② 若P可逆，为可逆线性变换

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\dot{z}=P^{-1}APz+P^{-1}Bu\\ w=CPz\end{cases}$$

(1) 原系统：$G_0(s)=C(sI-A)^{-1}B$

新系统. $G_1(s)=CP(sI-P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B=CP[P^{-1}(sI-A)P]^{-1}P^{-1}B$

$=CPP^{-1}(sI-A)^{-1}PP^{-1}B=C(sI-A)^{-1}B=G_0(s)$

$\Rightarrow$可逆线性变换不改变传递函数

(2) 设变换前的可控性判别矩阵为Q_c，

变换后：$rank(Q_c')=rank[P^{-1}B\quad P^{-1}APP^{-1}B\quad (P^{-1}AP)^2P^{-1}B\cdots(P^{-1}AP)^{n-1}P^{-1}B]$

$=rank[P^{-1}B\quad P^{-1}AB\quad P^{-1}A^2B\cdots P^{-1}A^{n-1}B]$

$=rank[P^{-1}Q_c]$

由于P可逆，P^{-1}可逆，故$rank(Q_c')=rank(P^{-1}Q_c)=rank(Q_c)$

$\Rightarrow$可逆线性变换不改变系统可控性

九、(14分)某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s)=\frac{K}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

采用频率校正法设计串联校正装置，使得系统开环增益 K=30s^{-1}，系统截止频率 $\omega_b=12rad/s$，相角裕度$\gamma\geq 40^{\circ}$。不要采用期望频率校正方法。

22-PSP

解. $G_0(s)=\dfrac{30}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$

要求 $w_c=12rad/s,\ r\geq 40^{\circ}$,

已知: 转折频率 5rad/s, 10rad/s,

$$L(w)=\begin{cases}20\lg(\frac{30}{w}) & 0<w\\ 20(\lg\frac{30}{w}-\lg 0.2w) & 5<w<10\\ 20(\lg\frac{30}{w}-\lg 0.2w-\lg 0.1w) & 10<w\end{cases}\Rightarrow W_{c0}=\sqrt[3]{1500}=11.45$$

$\angle G_0(jw)=-90^{\circ}-atan(0.1w)-atan(0.2w)$

$r_0(jw_{c0})=180^{\circ}+\angle G_0(jw_{c0})=-25.3^{\circ}$

$r_0(jw_c)=180^{\circ}+\angle G_0(jw_c)=-27.6^{\circ}$ 先两级超前

① 给50°, $G_{c1}(s)=\dfrac{\alpha_1T_1s+1}{T_1s+1}$, $\alpha_1>1$, $\varphi_m=50^{\circ}$

$\alpha_1=\dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}=7.55$, $T_1=\dfrac{1}{w_m\sqrt{\alpha_1}}=\dfrac{1}{w_c\sqrt{\alpha_1}}=\dfrac{1}{12\sqrt{7.55}}=0.03$

$T_1\alpha_1=0.229\Rightarrow G_{c1}(s)=\dfrac{0.229s+1}{0.03s+1}$

② 给30°, $G_{c2}(s)=\dfrac{\alpha_2T_2s+1}{T_2s+1}$, $\alpha_2>1$, $\varphi_{m2}=30^{\circ}$

$\alpha_2=\dfrac{1+\sin\varphi_{m2}}{1-\sin\varphi_{m2}}=3$. $T_2=\dfrac{1}{w_c\sqrt{\alpha_2}}=\dfrac{1}{12\sqrt{3}}=0.048$, $\alpha_2T_2=0.144$

$\Rightarrow G_{c2}(s)=\dfrac{0.144s+1}{0.048s+1}\Rightarrow G_1(s)=\dfrac{30}{s(\underset{10}{0.1s+1})(\underset{5}{0.2s+1})}\dfrac{\overset{4.37}{0.229s+1}}{\underset{33}{0.03s+1}}\dfrac{\overset{6.94}{0.144s+1}}{\underset{20}{0.048s+1}}$

③ 迟后, $G_{c3}(s)=\dfrac{\tau s+1}{\beta\tau s+1}$, $\beta>1$,

$L(w)=20(\lg\frac{30}{w}-\lg 0.1w-\lg 0.2w+\lg 0.229w+\lg 0.144w)\quad 10<w<20$

要求 $w_c=12rad/s$. $\beta=|G_1(jw_c)|=\dfrac{30}{w_c}\dfrac{0.229w_c\cdot 0.144w_c}{0.1w_c\cdot 0.2w_c}=4.122$

$\frac{1}{\tau}=(\frac{1}{10}\sim\frac{1}{5})w_c\Rightarrow\tau=\frac{10}{w_c}=0.83$, $\beta\tau=3.42\Rightarrow G_{c3}(s)=\dfrac{0.83s+1}{3.42s+1}$

$$G(s)=\frac{30}{s(\underset{10}{0.1s+1})(\underset{5}{0.2s+1})}\frac{\overset{4.37}{0.229s+1}}{\underset{33}{0.03s+1}}\frac{\overset{6.94}{0.144s+1}}{\underset{20}{0.048s+1}}\frac{\overset{1.205}{0.83s+1}}{\underset{0.29}{3.42s+1}}$$

检验: $L(w)=20(\lg\frac{30}{w}-\lg 0.1w-\lg 0.2w-\lg 3.42w+\lg 0.229w+\lg 0.144w+\lg 0.83w)\quad 10<w<20$

$\Rightarrow\dfrac{30\cdot 0.229\cdot 0.144\cdot 0.83}{0.1\cdot 0.2\cdot 3.42w_c}=1\Rightarrow w_c=12.00rad/s$, 满足要求

$r=180^{\circ}+\angle G(jw_c)=90^{\circ}+atan(0.229w_c)+atan(0.144w_c)+atan(0.83w_c)$
$-atan(0.1w_c)-atan(0.2w_c)-atan(0.03w_c)-atan(0.048w_c)$
$-atan(3.42w_c)$

$=48.3^{\circ}>40^{\circ}$, 满足要求.