例 2.8: 已知某单位反馈系统的开环传递函数为

22-PSP

$$G(s)=\frac{48(0.1s+1)}{s(0.05s+1)(0.01s+1)}$$

求该系统的剪切频率 ω_c 和相角裕度 γ，并根据这两个指标确定系统的超调 σ_p 和调整时间 t_s。

解：转折频率：10, 20, 100

$$L(w)=\begin{cases}20(\lg\frac{48}{w}) & 0<w<10\\ 20(\lg\frac{48}{w}+\lg 0.1w) & 10<w<20\\ 20(\lg\frac{48}{w}+\lg 0.1w-\lg 0.05w) & 20<w<100\\ 20(\lg\frac{48}{w}+\lg 0.1w-\lg 0.05w-\lg 0.01w) & 100<w\end{cases}$$

$\Rightarrow w_c=96.0\ rad/s$

$\angle G_0(jw)=-90^\circ+atan(0.1w)-atan(0.05w)-atan(0.01w)$

$\Rightarrow \gamma=180^\circ+\angle G_0(jw_c)=52.0^\circ$

$M_r=\frac{1}{\sin\gamma}=1.27$

$\sigma_p=0.16+0.4(M_r-1)=0.268=26.8\%$

$t_s=\frac{\pi}{w_c}[2+1.5(M_r-1)+2.5(M_r-1)^2]=0.0847$

例 3.8: 某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{100\,(0.05s+1)}{s(0.1s+1)\,(0.01s+1)}$$

22-PSP

该系统近似对数幅频特性为

提高稳态精度到 0.002

不改变动态特性前提下提高稳态精度

$\Rightarrow \beta\frac{\tau s+1}{\beta\tau s+1}, \beta>1$

解: 转折频率: 10, 20, 100

$L(w) = 20(\lg\frac{100}{w} + \lg 0.05w - \lg 0.1w) \quad 20<w<100$

$\Rightarrow w_{c0} = 50\,rad/s$

第二迟后环节 $G_c(s) = \beta\frac{\tau s+1}{\beta\tau s+1}, \beta>1$

$\beta = \frac{500}{100} = 5, \frac{1}{\tau} = \frac{1}{10}w_c \Rightarrow \tau = \frac{10}{w_c} = 0.2$

$G_c(s) = \frac{5(0.2s+1)}{s+1}$

$G(s) = \frac{500(0.05s+1)(0.2s+1)}{s(s+1)(0.1s+1)(0.01s+1)}$

$L(w) = 20(\lg\frac{500}{w} + \lg 0.05w + \lg 0.2w - \lg 0.1w - \lg w) \quad 20<w<100$

$\Rightarrow w_c = 50.0\,rad/s$, 不变

$\angle G(jw) = -90^\circ + atan(0.05w) + atan(0.2w)$
$\quad - atan\,w - atan(0.1w) - atan(0.01w)$
$\quad = 48.38^\circ$ 不错

例 3.18: 设单位反馈系统的开环传递函数为

22-PSP

$$G_0(s) = \frac{K}{s(1+0.12s)(1+0.02s)}$$

采用期望特性校正方法设计串联校正装置，使系统满足：

(1) 速度误差系数 $K_v \geq 70\mathrm{s}^{-1}$；

(2) 调整时间 $t_s \leq 1\mathrm{s}$；

(3) 超调 $\sigma_p \leq 40\%$。

期望频率特性法

解: $G_0(s) = \frac{70}{s(1+0.12s)(1+0.02s)}$

$\sigma_p = 0.16 + 0.4(M_r - 1) \leq 40\% \Rightarrow M_r \leq 1.6$

$M_r = \frac{1}{\sin\gamma} \Rightarrow \gamma \geq 38.7^\circ$

$t_s = \frac{\pi}{\omega_c}[2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2] \leq 1s \Rightarrow \omega_c \geq 11.94\,rad/s$

选 $\omega_c = 12\,rad/s$， $h \geq \frac{1+\sin\gamma}{1-\sin\gamma} = 4.34$

$\omega_2 \leq \frac{\omega_c}{\sqrt{h}} = 5.76\,rad/s$, $\omega_3 \geq \omega_c\sqrt{h} = 25\,rad/s$

取 $\omega_2 = \frac{\omega_c}{10} = 1.2\,rad/s$, $\omega_3 = 30\,rad/s$, $h = \frac{\omega_3}{\omega_2} = 25$ 满足要求

$L(\omega) = 20(\lg\frac{70}{\omega} - \lg\frac{\omega}{\omega_1} + \lg\frac{\omega}{\omega_2})$ $\omega_2 < \omega < \omega_3$

代入 ω_c, $L(\omega_c) = 20\lg\frac{70\,\omega_1}{\omega_2\omega_c} = 0 \Rightarrow \omega_1 = \frac{\omega_2\omega_c}{70} = 0.206\,rad/s$

选 $\omega_4 = 50\,rad/s$, 有 $G(s) = \frac{70(\frac{1}{1.2}s+1)}{s(\frac{1}{0.206}s+1)(\frac{1}{30}s+1)(\frac{1}{50}s+1)}$

$L(\omega) = 20(\lg\frac{70}{\omega} - \lg\frac{\omega}{0.206} + \lg\frac{\omega}{1.2})$ $\omega_2 < \omega < \omega_3$

$\Rightarrow \omega_c = 12.0\,rad/s$ 满足要求

$\angle G(j\omega) = -90^\circ + \mathrm{atan}(\frac{\omega}{1.2}) - \mathrm{atan}(\frac{\omega}{0.206}) - \mathrm{atan}(\frac{\omega}{30}) - \mathrm{atan}(\frac{\omega}{50})$

$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 49.98^\circ$ 满足要求

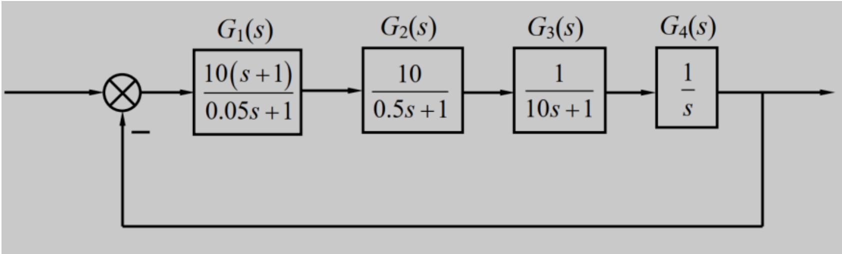
例 3.16: 控制系统的方框图如图3.25所示。要求满足下列性能指标：

(1) 在输入信号 $r(t)=t$ 作用下，稳态误差 $e_{\mathrm{ss}} \leqslant \frac{1}{150}$；

(2) 单位阶跃响应的超调量 $\sigma_{\mathrm{p}} \leqslant 30\%$；

(3) 单位阶跃响应调整时间 $t_{\mathrm{s}} \leqslant 1\mathrm{s}$；

设计反馈校正。



例 4.4: 设系统不可变部分的传递函数为

$$G_0(s) = \frac{800K_\mathrm{v}}{s\,(s+4)\,(s+10)\,(s+20)}$$

要求满足性能指标:

(1) 开环增益 $K_\mathrm{v} = 12s^{-1}$;

(2) 超调量 $\sigma_\mathrm{p} < 20\%$;

(3) 调整时间 $t_s \leqslant 2.6\mathrm{s}(\Delta = 0.05)$;

(4) 系统带宽不大于 0~5rad/s。

试确定近似 PI 控制器实现的串联迟后校正参数。

（根轨迹方式）

3. 设离散系统如上图所示，采样周期为$T = 1\mathrm{s}$, 其中

$$G_d(z) = \mathcal{Z}[H_0(s)G_0(s)] = \frac{z^{-1}(1+0.92z^{-1})(1+3z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.5z^{-1})}$$ ZZ-PSP

针对单位阶跃输入信号，设计一个最少拍数字控制器$D(z)$，并判断所设计系统采样点之间是否有振荡。

① $G_d(z)$有纯延迟环节z^{-1}，单位圆外零点 $z=-3$,

② 输入信号 $r(t)=1(t)$, $R(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$，阶数 $r=1$

③ 设 $\Phi(z)=kz^{-1}(1+3z^{-1})$, $\Phi_e(z)=(1-z^{-1})(1+bz^{-1})$

有 $\Phi_e(z)=1-\Phi(z)$，即 $kz^{-1}+3kz^{-2}=(1-b)z^{-1}+bz^{-2}$,

故 $k=\frac{1}{4}$, $b=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \Phi(z)=\frac{1}{4}z^{-1}(1+3z^{-1})$, $\Phi_e(z)=(1-z^{-1})(1+\frac{3}{4}z^{-1})$

$$D(z)=\frac{\Phi(z)}{\Phi_e(z)G(z)}=\frac{\frac{1}{4}\cancel{z^{-1}}\cancel{(1+3z^{-1})}\cancel{(1-z^{-1})}(1+0.5z^{-1})}{\cancel{(1-z^{-1})}(1+\frac{3}{4}z^{-1})\cancel{z^{-1}}(1+0.92z^{-1})\cancel{(1+3z^{-1})}}$$

$$=\frac{1+0.5z^{-1}}{4(1+0.75z^{-1})(1+0.92z^{-1})}$$

$E(z)=\Phi_e(z)R(z)=1+0.75z^{-1}$

$U(z)=D(z)E(z)=\frac{1+0.5z^{-1}}{4(1+0.92z^{-1})}=\frac{1+0.5z^{-1}}{4+3.68z^{-1}}=0.25-0.105z^{-1}+0.0966z^{-2}+\cdots$

有纹波

例 设单输入线性定常离散系统状态方程为

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\-1&1&0\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}u(k)$$

22-PSP

试判断其可控性；若初始状态 $x(0)=[2\quad 1\quad 0]^T$，确定使 $x(3)=\mathbf{0}$ 的控制序列 $u(0),u(1),u(2)$；研究使 $x(2)=\mathbf{0}$ 的可能性。

解：$G=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\-1&1&0\end{pmatrix}$ $|G|=\begin{vmatrix}2&-2\\1&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&0\\2&-2\end{vmatrix}=2\neq0$, G可逆

$H=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $GH=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ $G^2H=\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ $Q_{cd}=[H\quad GH\quad G^2H]=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&-2\\1&-1&-3\end{pmatrix}\Rightarrow R=3$

可控

$G=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\-1&1&0\end{pmatrix}$ $G^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&-4\\-1&2&-2\end{pmatrix}$ $G^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\6&0&-4\\1&2&-4\end{pmatrix}$ $G^3x(0)=\begin{pmatrix}2\\12\\4\end{pmatrix}$ $G^2x(0)=\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}$

$x(0)=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ $x(1)=Gx(0)+Hu(0)$

$x(2)=Gx(1)+Hu(1)=G^2x(0)+GHu(0)+Hu(1)$

$x(3)=Gx(2)+Hu(2)=G^3x(0)+G^2Hu(0)+GHu(1)+Hu(2)$

令 $x(3)=0$，有 $\begin{pmatrix}2\\12\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}u(0)+\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}u(1)+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}u(2)=0$

$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-2&0\\-3&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(0)\\u(1)\\u(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-12\\-4\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{pmatrix}u(0)\\u(1)\\u(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-2&0\\-3&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-2\\-12\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\11\\-8\end{pmatrix}$ 说明3步能控

② 令 $x(2)=0$ 有 $\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}u(0)+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}u(1)=0$

$\begin{pmatrix}1&1\\-2&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(0)\\u(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-6\\0\end{pmatrix}$ $Ax=\beta\Rightarrow r(A)=2, r(A\vdots\beta)=3$ $\Rightarrow$ 无解

1. 设 SISO 线性定常系统的状态方程和输出方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\lambda_1&1&0&0\\0&\lambda_1&0&0\\0&0&\lambda_2&1\\0&0&0&\lambda_2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix}u\quad \lambda_1\neq0,\lambda_2\neq0$$

$$y=\begin{bmatrix}c_1&c_2&c_3&c_4\end{bmatrix}x$$

(1) 给出使系统状态完全能控的 b_1,b_2,b_3,b_4 满足的条件；(8 分)

(2) 给出使系统状态完全能观的 c_1,c_2,c_3,c_4 满足的条件；(7 分)

① 若 $\lambda_1=\lambda_2$，则不可能能控或能观

② $\lambda_1\neq\lambda_2$ (1) 能控 $\Leftrightarrow b_2\neq0, b_4\neq0$

(2) 能观 $\Leftrightarrow c_1\neq0, c_3\neq0$

镇定题目解法：
①求出Q_c，判断原系统不能控
②$x=p\bar{x}$ 按能控性分解找出不能控特征值，判断其稳定性
③设期望极点，除不能控特征值不变外，其余任选
④直接法

例 9.3: 检验系统

22-PSP

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

是否可用状态反馈镇定。若可以，设计状态反馈阵镇定该系统。

解：$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $AB=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ $A^2B=\begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}$

$Q_c=(B\ AB\ A^2B)=\begin{pmatrix}0&-1&-3\\0&0&0\\1&2&5\end{pmatrix}$ 秩为2，不能控

$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$, $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

$x=P\bar{x}\Rightarrow\bar{A}=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$ $\bar{B}=P^{-1}B=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

不能控特征值为-2 在左半平面 ⇒ 系统可镇定

设闭环期望极点为$\lambda_1^*=-1,\lambda_2^*=-3,\lambda_3^*=-2$

$\alpha^*(s)=(s+1)(s+2)(s+3)=s^3+6s^2+11s+6$, $\alpha_2^*=6,\alpha_1^*=11,\alpha_0^*=6$

设$K=[k_1\ k_2\ k_3]$, $A+Bk=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}&&\\&&\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-2&0\\k_1-1&k_2&k_3+2\end{pmatrix}$

$|sI-(A+BK)|=\begin{vmatrix}s-1&&1\\&s+2&\\1-k_1&-k_2&s-k_3-2\end{vmatrix}=(s-1)(s+2)[s-(k_3+2)]+(s+2)(k_1-1)$

$=(s+2)[s^2-(k_3+3)s+k_3+2+k_1-1]$

$=(s+2)[s^2+(-k_3-3)s+k_1+k_3+1]$ 4 3

镇定题简化计算

$\Rightarrow\begin{cases}k_1=9\\k_3=-7\end{cases}$ $k=(9\ 0\ -7)$

10. 已知连续系统动态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1\\0&2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u,\quad y=[1\quad 0]x$$

（1）设采样周期为$T=1\mathrm{s}$，试求离散化动态方程；
（2）采样周期满足什么样的条件时，离散化动态系统能控能观？

$1\longrightarrow\frac{1}{s}$

$e^{-t}\longrightarrow\frac{1}{s+1}$

解：(1) $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $(sI-A)^{-1}=\begin{pmatrix}s&-1\\&s-2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{s(s-2)}\begin{pmatrix}s-2&1\\&s\end{pmatrix}$

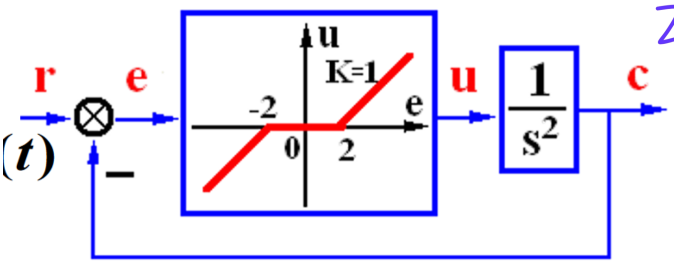
$e^{At}=\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]=\mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{s}&\frac{1}{2}(\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s})\\&\frac{1}{s-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}(e^{2t}-1)\\0&e^{2t}\end{bmatrix}$

$G=e^{AT}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}(e^2-1)\\0&e^2\end{bmatrix}$

$H=(\int_0^T e^{A\tau}d\tau)B=\begin{bmatrix}T&\frac{1}{4}(e^{2T}-1)-\frac{1}{2}T\\&\frac{1}{2}(e^{2T}-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}(e^2-1)-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}(e^2-1)\end{bmatrix}$

(2) 看作业，$T\neq0$

例2 系统如右，已知$\begin{cases} c(0)=0 \\ r(t)=4\times 1(t) \end{cases}$确定开关线方程, 奇点位置和类型, 绘制相轨迹 $(e,\dot{e})$ 图。



22-PSP

$e = 4 - c = 4 - \frac{1}{s^2}u, \Rightarrow u = -\ddot{e}$

$u = \begin{cases} e-2 & e\geq 2 \\ 0 & -2\leq e\leq 2 \\ e+2 & e\leq -2 \end{cases}$ 即 $-\ddot{e} = \begin{cases} e-2 & e\geq 2 \\ 0 & -2\leq e\leq 2 \\ e+2 & e\leq -2 \end{cases}$

	范围	方程	奇点	特征方程	
I	$e\leq -2$	$\ddot{e}+e+2=0$	$(-2,0)$	$s^2+1=0$	圆,
II	$-2\leq e\leq 2$	$\ddot{e}=0$	[$\dot{e}$ 不变,为水平线]		
III	$2\leq e$	$\dot{e}+e-2=0$	$(2,0)$	$s^2+1=0$	圆