22-PSP

自控原理 hw2 2025/5/7

1. 设系统状态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & a\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ b\end{bmatrix}u$$

设状态可控，试求a,b。

解：$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & a\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1\\ b\end{bmatrix}$，$AB=\begin{bmatrix}b\\ ab-1\end{bmatrix}$

能控性判别矩阵 $Q_c=\begin{bmatrix}1 & b\\ b & ab-1\end{bmatrix}$，$|Q_c|=ab-1-b^2$

原系统能控当且仅当 $Rank(Q_c)=2$，即 $ab-b^2-1\neq 0$

2. 已知一个线性时不变系统：

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

其中：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

请利用 **PBH 判据和 Jordan 标准型判据**判断该系统是否能控。

解：法一：PBH判据

$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & \\ & \lambda-1 & \\ & & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

A的特征根为 1, 1, 2 注：A为Jordan标准型,可直接看出.

$[I-A\ \ B]=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$ 秩为3，满足

$[2I-A\ \ B]=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 秩为3，满足

由PBH判据,原系统能控

法二：Jordan 标准型法

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

1有一个Jordan小块　1→无关

2有一个Jordan小块　1→无关

原系统能控

3. 考虑如下线性时不变系统：

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

其中：

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

请利用 **PBH 判据** 判断该系统是否能控，并说明理由。

解. $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & & \\ & \lambda & -1 & \\ & & \lambda & -1\\ & & & \lambda\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda & -1 & \\ & \lambda & -1\\ & & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^4$

A的特征值 $\lambda=0$

$[\lambda I-A\ \ B]=[-A\ \ B]=\begin{bmatrix}0 & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & 1\\ & & & 0 & 0\end{bmatrix}$ 秩为3

$3<n=4$

由PBH判据知系统不能控