**例 2.6:** 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$$

22-PSP

若已知单位速度信号输入下系统的稳态误差 $e_{ss} = 1/9$，相角裕度 $\gamma = 60°$，试确定系统的超调 $\sigma\%$ 和调节时间 $t_s$。

解: $e_{ss} = \frac{1}{K} = \frac{1}{9}$，故 $G(s) = \frac{9}{s(Ts+1)}$ $\quad G(j\omega) = \frac{9}{j\omega(j\omega T+1)}$

$\Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{9}{\omega\sqrt{\omega^2T^2+1}}$，令 $|G(j\omega)| = 1 \Rightarrow T^2\omega_c^4 + \omega_c^2 - 81 = 0$

$\Rightarrow \omega_c^2 = \frac{\sqrt{324T^2+1}-1}{2T^2}$，$\omega_c = \sqrt{\frac{\sqrt{324T^2+1}-1}{2T^2}}$

$\angle G(j\omega) = -90° - \mathrm{atan}(T\omega)$

$\gamma = 180° + \angle G(j\omega_c) = 90° - \mathrm{atan}(T\omega_c) = 60°$

即 $\mathrm{atan}(T\omega_c) = 30° \Rightarrow T\omega_c = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \underline{T = 0.074 \mathrm{rad/s}}$

$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{3}T} = 7.8 \mathrm{rad/s}$

二阶系统

$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s} \Rightarrow \omega_n, \xi$

$M_r = \frac{1}{\sin\gamma} = 1.155$

$\sigma_p = 0.16 + 0.4(M_r - 1) = 0.222 = 22.2\%$ $\quad \sigma_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

$t_s = \frac{\pi}{\omega_c}[2 + 1.5(M_r-1) + 2.5(M_r-1)^2] = 0.925$ $\quad t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n}$

不要用经验公式

**例 3.3:** 设某控制系统不可变部分的开环传递函数为

$$G_0(s)=\frac{K}{s(0.001s+1)(0.1s+1)}$$

22-PSP

要求该系统具有如下性能指标

(1) 响应匀速信号 $r(t)=R_1t$ 的稳态误差不大于 $0.001R_1$，其中 $R_1$ 为常量；

(2) 剪切频率 $\omega_c>165\mathrm{rad/s}$；

(3) 相角裕度 $\gamma>45°$；

(4) 幅值裕度 $20\lg K_g\geqslant 15\ \mathrm{dB}$。

试应用频率响应法确定串联超前校正参数。

解：

$$G_0(s)=\frac{1000}{s(0.001s+1)(0.1s+1)}$$

转折频率 10rad/s, 1000 rad/s

$$L(\omega)=\begin{cases}20(\lg\frac{1000}{\omega}) & 0<\omega<10\\ 20(\lg\frac{1000}{\omega}-\lg 0.1\omega) & 10<\omega<1000\\ 20(\lg\frac{1000}{\omega}-\lg 0.1\omega-\lg 0.001\omega) & 1000<\omega\end{cases}$$

$\Rightarrow \omega_{c0}=100\mathrm{rad/s}$, $\angle G_0(j\omega)=-90°-\mathrm{atan}(0.1\omega)-\mathrm{atan}(0.001\omega)$

$\gamma_0=180°+\angle G_0(j\omega_{c0})=0°$, $\gamma_0(165\mathrm{rad/s})=-5.9°$

一级超前，$G_{c1}(s)=\frac{\alpha Ts+1}{Ts+1}$, $\alpha>1$, 设 $\varphi_m=60°$,

$\alpha=\frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}=13.93$, $20\lg|G_0(j\omega_c)|=-10\lg\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{1}{|G_0(j\omega_c)|^2}\Rightarrow|G_0(j\omega_c)|=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}=0.2679$

$\Rightarrow\omega_c=193\mathrm{rad/s}$ 满足要求，$T=\frac{1}{\omega_m\sqrt{\alpha}}=\frac{1}{\omega_c\sqrt{\alpha}}=0.0014$, $\alpha T=0.02$

$$G_{c1}(s)=\frac{0.02s+1}{0.0014s+1}$$

$$\Rightarrow G(s)=\frac{1000(\overset{50}{0.02s+1})}{s(\underset{1000}{0.001s+1})(\underset{10}{0.1s+1})(\underset{714}{0.0014s+1})}$$

检验：$L(\omega)=20(\lg\frac{1000}{\omega}+\lg 0.02\omega-\lg 0.1\omega)$ $50<\omega<714$

$\Rightarrow\omega_c=200\mathrm{rad/s}$. 满足要求，

$\angle G(j\omega)=-90°+\mathrm{atan}(0.02\omega)-\mathrm{atan}(0.001\omega)-\mathrm{atan}(0.1\omega)-\mathrm{atan}(0.0014\omega)$

$\gamma=180°+\angle G(j\omega_c)=51.87°>45°$, 满足要求

求 $\omega_g$：令 $-180°=\angle G(j\omega_g)$ 有 $\omega_g=803.6\mathrm{rad/s}$

$20\lg K_g=-20\lg|G(j\omega_g)|=17.8\mathrm{dB}$ 满足要求

3. 设某单位负反馈系统的开环传递函数为

22-PSP

$$G(s)=\frac{K_v}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

要求:

(1) 系统开环增益 $K_v = 30s^{-1}$；

(2) 系统相角裕度 $\gamma \ge 45^\circ$；

(3) 系统截止频率 $\omega_b \ge 12$ rad/s。

试确定串联迟后-超前校正环节的传递函数。

解. $G_0(s)=\dfrac{30}{s(0.2s+1)(0.1s+1)}$

$$L(w)=\begin{cases}20(\lg\frac{30}{w}) & 0<w<5\\ 20(\lg\frac{30}{w}-\lg 0.2w) & 5<w<10\\ 20(\lg\frac{30}{w}-\lg 0.2w-\lg 0.1w) & 10<w\end{cases}$$

$w_c=11.45$ rad/s

$\angle G_0(jw)=-90^\circ-\mathrm{atan}(0.2w)-\mathrm{atan}(0.1w)$

$\Rightarrow \gamma_0(w_c)=180^\circ+\angle G_0(jw_c)=-25.28^\circ$

$\gamma_0(w_{c1})=180^\circ+\angle G_0(j12\,rad/s)=-27.57^\circ$

法三: $\varphi_m=\gamma-\gamma_0(w_{c1})+\Delta_2=45-(-27.57)+6=78.57^\circ$

先来两级超前, 选 $\varphi_{m1}=\varphi_{m2}=45^\circ$, $w_c=12$rad/s

$\alpha=\dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}=5.828$, $T=\dfrac{1}{w_m\sqrt{\alpha}}=\dfrac{1}{w_c\sqrt{\alpha}}=0.035$, $T\alpha=0.2$

$G_{c1}(s)=G_{c2}(s)=\dfrac{0.2s+1}{0.035s+1}$,

$G_1(s)=G_0(s)G_{c1}(s)G_{c2}(s)=\dfrac{30}{s(0.2s+1)(0.1s+1)}\dfrac{(0.2s+1)^2}{(0.035s+1)^2}=\dfrac{30(\overset{5}{0.2s+1})}{s(\underset{10}{0.1s+1})(\underset{28}{0.035s+1})^2}$

迟后. $G_{c3}(s)=\dfrac{\tau s+1}{\beta\tau s+1}$, $\beta>1$, $\beta=|G_1(jw_c)|=\dfrac{30\cdot 0.2w_c}{w_c\cdot 0.1w_c}=5$

$\frac{1}{\tau}=\frac{1}{10}w_c \Rightarrow \tau=\frac{10}{w_c}=0.83$, $\beta\tau=4.167 \Rightarrow G_{c3}(s)=\dfrac{0.83s+1}{4.167s+1}$

$$G(s)=\frac{30(\overset{5}{0.2s+1})(0.83s+1)}{s(\underset{10}{0.1s+1})(\underset{28}{0.035s+1})^2(4.167s+1)}$$

$L(w)=20(\lg\frac{30}{w}+\lg 0.2w+\lg 0.83w-\lg 0.1w-\lg 4.167w)$ $10<w<28$

$\Rightarrow w_c=12.0$ rad/s, 满足要求

$\gamma=180^\circ+\angle G(jw_c)=90^\circ+\mathrm{atan}(0.2w_c)+\mathrm{atan}(0.83w_c)$
$-\mathrm{atan}(0.1w_c)-2\mathrm{atan}(0.035w_c)-\mathrm{atan}(4.167w_c)$

$=57^\circ$ 满足要求

例4.1  某典型二阶系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

要求性能指标：$\sigma\% \le 20\%$  $t_s \le 2s$

**试用根轨迹法确定串联超前校正装置**

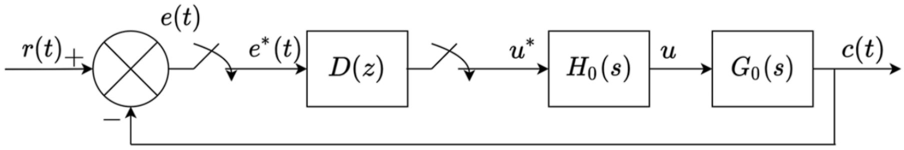
**例 6.6:** 给定连续控制器 $D(s) = \frac{20(s+4)}{s+10}$，在采样周期为 $T = 0.015$sec 时用根匹配法设计离散控制器及控制差分方程。

2. 设离散系统如下图所示，其中$H_0(s)$为零阶保持器，采样周期为$T = 1s$，

$$G_0(s) = \frac{K}{s}$$

22-PSP

试求当$r(t) = R_1 1(t) + R_1 t$时，系统无稳态误差，过渡过程在最少拍内结束的$D(z)$。




解：输入 $r(t)=R_1[1+t]$，$R(z)=R_1\left[\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right]=\frac{R_1}{(1-z^{-1})^2}$ 阶数 $r=2$

$H_0(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}$，下求广义脉冲传函：

$G(z)=Z[H_0(s)G_0(s)]=(1-z^{-1})Z\left[\frac{K}{s^2}\right]=\frac{KTz^{-1}}{1-z^{-1}}=\frac{Kz^{-1}}{1-z^{-1}}$，有1个纯延迟环节

$\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^2$，$\Phi(z)=1-\Phi_e(z)=z^{-1}(2-z^{-1})$有1个纯延迟环节，满足

$\Rightarrow D(z)=\frac{\Phi(z)}{\Phi_e(z)G(z)}=\frac{z^{-1}(2-z^{-1})(1-z^{-1})}{(1-z^{-1})^2(Kz^{-1})}=\frac{2-z^{-1}}{K(1-z^{-1})}$

**例：控制对象方程为$\frac{1}{s(s+1)(s+5)}$试用临界增益法确定PID控制器参数$K_p, T_i, T_d$使得超调量不超过25%。如超调量过大则微调。**

**例 8.17:** 试将例8.16中的状态空间表达式变换为能观标准型。 22-PSP

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=cx\end{cases}$  $\alpha(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$

**定理 8.17: 第一能观规范型**

给定单输入单输出能观性系统 (8.6.1)，其系统的特征多项式如式 (8.6.3) 所示，其能观性矩阵 $Q_o$ 如式 (8.6.16) 所示。则在状态变换 $x = Q_o^{-1}\tilde{x}$ 下，系统 (8.6.1) 可转换为如下第一能观规范型

前提:原系统能观

$Q_o=\begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1}\end{bmatrix}$

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}$$

其中常数 $\beta_i$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 由下式给出

$$\beta_i = cA^i b \qquad b_o = Q_o b$$

解: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $C=(0\ \ 0\ \ 1)$ $CA=(1\ \ 2\ \ -2)$ $CA^2=(5\ \ -4\ \ 6)$

$Q_o=\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ 秩为3,原系统能观

$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & \\ -3 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda+2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}+(\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda+1 \end{vmatrix}=-2\lambda+(\lambda+2)(\lambda^2-7)$

$=\lambda^3+2\lambda^2-9\lambda-14$, $\alpha_2=2$, $\alpha_1=-9$, $\alpha_0=-14$

$A_o=\begin{pmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 14 & 9 & -2 \end{pmatrix}$ $B_o=Q_oB=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$

$C_o=(1\ \ 0\ \ 0)$

法二:实在记不住, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $AB=\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ $A^2B=\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$

$C_c=CQ_c=(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 12 \end{pmatrix}=(1\ \ 2\ \ 12)$ 然后转置

**例 8.23:** 给出下列传递函数的 Jordan 型实现

$$G(s) = \frac{4s^2 + 17s + 16}{s^3 + 7s^2 + 16s + 12}$$

注意验算

解:分母为 $(s+2)^2(s+3)$,极点 $-2,-2,-3$  $G(s)=\dfrac{4s^2+17s+16}{(s+2)^2(s+3)}=\dfrac{-2}{(s+2)^2}+\dfrac{3}{s+2}+\dfrac{1}{s+3}$

设 $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ $G(s)=C(sI-A)^{-1}B=(c_1\ c_2\ c_3)\begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)^2} & \\ & \frac{1}{s+2} & \\ & & \frac{1}{s+3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$C=(c_1\ \ c_2\ \ c_3)$

$=\left(\dfrac{c_1}{s+2}\ \ \ \dfrac{c_1}{(s+2)^2}+\dfrac{c_2}{s+2}\ \ \ \dfrac{c_3}{s+3}\right)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$=\dfrac{c_1b_2}{(s+2)^2}+\dfrac{b_1c_1+b_2c_2}{s+2}+\dfrac{b_3c_3}{s+3}$

$\Rightarrow c_1b_2=-2$, $b_1c_1+b_2c_2=3$, $b_3c_3=1$,

取 $b_1=0$, $b_2=1$, $b_3=1$, $c_1=-2$, $c_2=3$, $c_3=1$

$\Rightarrow B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C=(-2\ \ 3\ \ 1)$

例：设系统的状态空间表达式为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -6 & -5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

1）该系统能通过状态反馈$u=kx$任意配置闭环系统的极点吗？若能，设计状态反馈矩阵$K$，使得闭环系统的极点为$-1\pm j,-1$。

2）设计一个基于三维观测器的状态反馈控制律，使得闭环系统的极点为 $-1\pm j,-1,-10,-10,$ -20，并画出闭环系统的结构图。

**例 10.4:** 设包含死区继电器特性的非线性系统如图10.28所示。其中，饱和特性输出 $b=3$，死区 $a=1$。

(1) 分析系统稳定性；

(2) 继电器参数 $a$、$b$ 应怎样调整使得系统不产生自激振荡？