

自动控制理论 B

直线电机一级倒立摆状态反馈控制 实验指导书

2023 年 5 月

一、系统建模

1.1 受力分析

在忽略了空气阻力、各种摩擦之后，可将直线一级倒立摆系统抽象成小车和匀质杆组成的系统，如图 1 所示

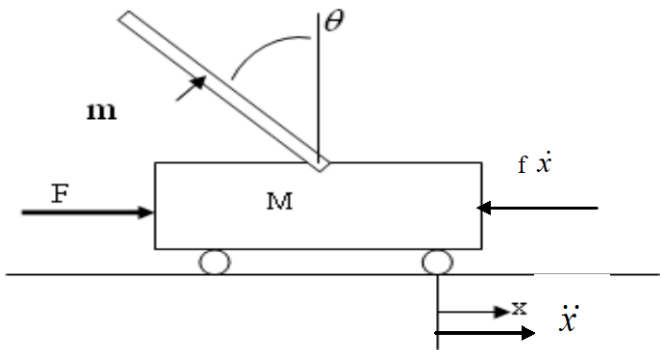


图 1 直线一级倒立摆系统

本文中倒立摆系统描述中涉及的符号、物理意义如表 1 所示。

表 1 直线一级倒立摆系统参数

符号	意义
M	小车质量（不含动子）
m	摆杆质量
b	小车摩擦力系数*
l	摆杆转动轴心到杆质心的长度
I	摆杆惯量
g	重力加速度
F	加在小车上的力
x	小车位置
θ	摆杆与垂直向下方向的夹角 （考虑到摆杆初始位置为竖直向下）
φ	摆杆与垂直向上方向的夹角
F_s	摆杆受到的水平方向的干扰力
F_h	摆杆受到的垂直方向的干扰力
F_g	F_s 与 F_h 的合力

图 2 是系统中小车的受力分析图。其中， N 和 P 为小车与摆杆相互作用力的水平和垂直方向的分量。

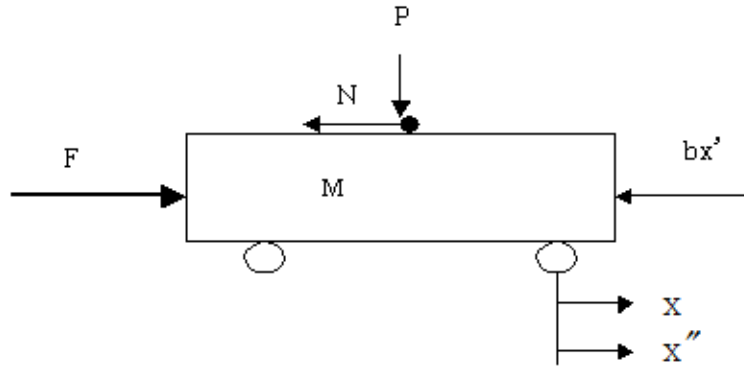


图 2 系统中小车的受力分析图

图 3 是系统中摆杆的受力分析图。 F_s 是摆杆受到的水平方向的干扰力， F_h 是摆杆受到的垂直方向的干扰力，合力是垂直方向夹角为 α 的干扰力 F_g 。

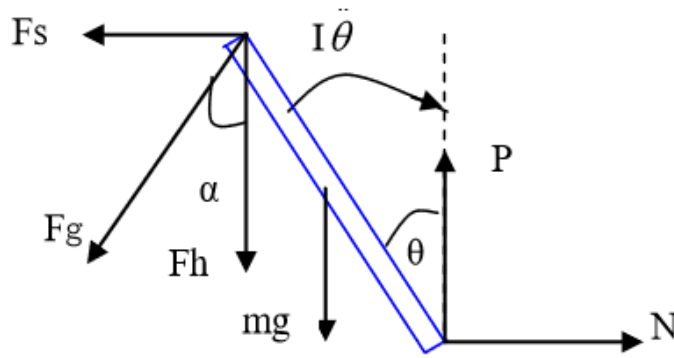


图 3 摆杆受力分析图

注意：在实际倒立摆系统中检测装置和执行装置的正负方向已确定，因而矢量方向定义如图所示，图示方向为矢量正方向。

1.2 数学模型

分析小车水平方向所受的合力，可以得到以下方程：

$$M\ddot{x} = F - b\dot{x} - N$$

设摆杆受到与垂直方向夹角为 α 的干扰力 F_g ，可分解为水平方向、垂直方向的干扰力，所产生的力矩可以等效为在摆杆顶端的水平干扰力 F_s 、垂直干扰力 F_h 产生的力矩。

$$F_s = F_g \sin \alpha \quad F_h = F_g \cos \alpha$$

对摆杆水平方向的受力进行分析可以得到下面等式：

$$N - F_s = m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta)$$

即：

$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + F_g \sin \alpha$$

对图 3 摆杆垂直方向上的合力进行分析，可以得到下面方程：

$$-P + mg + F_h = m \frac{d^2}{dt^2} (l - l \cos \theta)$$

即：

$$-P + mg + F_g \cos \alpha = ml\ddot{\theta} \sin \theta + ml\dot{\theta}^2 \cos \theta$$

力矩平衡方程如下：

$$F_g l \sin \alpha \cos \theta + F_g l \cos \alpha \sin \theta + Pl \sin \theta + Nl \cos \theta + I\ddot{\theta} = 0$$

代入 P 和 N ，得到方程：

$$2F_g l \sin \alpha \cos \theta + 2F_g l \cos \alpha \sin \theta + (I + ml^2 \cos 2\theta)\ddot{\theta} + mgl \sin \theta - ml^2 \dot{\theta}^2 \sin 2\theta + ml\ddot{x} \cos \theta = 0$$

设 $\theta = \pi + \varphi$ (φ 是摆杆与垂直向上方向之间的夹角，单位是弧度)，代入上式。假设 $\varphi \ll 1$ ，则可以进行近似处理：

$$\cos \varphi = 1, \sin \varphi = \varphi, \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 0, \cos 2\varphi = 1, \sin 2\varphi = \varphi$$

由于：

$$I = \frac{1}{3} ml^2$$

方程化为：

$$2F_g (-\sin \alpha - \varphi \cos \alpha) + \frac{4}{3} ml\ddot{\varphi} - mg\varphi = m\ddot{x}$$

令： $F_f = F_g (-\sin \alpha - \varphi \cos \alpha)$ 则上式化为

$$2F_f + \frac{4}{3} ml\ddot{\varphi} - mg\varphi = m\ddot{x}$$

忽略干扰力后，直线一级倒立摆系统是单输入二输出的四阶系统，考虑干扰力后，直线一级倒立摆系统是二输入二输出的四阶系统。其内部的 4 个状态量分别是小车的位移 x 、小车的速度 \dot{x} 、摆杆的角度 θ 、摆杆的角速度 $\dot{\theta}$ 。系统输出的观测量为小车的位移 x 、摆杆的角度 θ 。其控制量为小车的加速度 \ddot{x} ， F_f 是直线一级倒立摆运动中各种干扰因素的综合项，可以等效为干扰力考虑。

根据系统微分方程，化为关于加速度输入量和角度输出量的传递函数：

$$\frac{\Phi(s)}{R(s)} = \frac{3}{s^2 - 29.4}$$

1.3 状态方程的建立

实验所使用的直线一级倒立摆系统是以加速度 \ddot{x} 作为系统的控制输入，建立系统的状态方程为：

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = \ddot{x} \\ \dot{\phi} = \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} = \frac{3g}{4l}\phi + \frac{3}{4l}\ddot{x} \end{cases}$$

将实际参数代入，得到以位移、速度、角度、角速度为状态变量的四状态空间方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 29.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \ddot{x}$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{x}$$

以下分别构造三状态、二状态空间方程。

A) 三状态方程：角度、角速度、速度

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 29.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{x}$$

$$y = [\phi] = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ \dot{x} \end{bmatrix} + [0] \ddot{x}$$

B) 二状态方程：角度、角速度

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 29.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \ddot{x}$$

$$y = [\phi] = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + [0] \ddot{x}$$

1.4 计算状态反馈矩阵

根据能控规范型的状态反馈进行极点配置，此部分由同学们自己手写计算完成。

期望极点的选择注意以下几点：

- (1) 期望极点可选择在开环极点的幅值附近；
- (2) 四状态期望极点，可选一对共轭极点+两个实数极点；
- (3) 三状态期望极点，可选一对共轭极点+一个实数极点；
- (4) 二状态期望极点，可选一对共轭极点。

二、倒立摆实时控制原理与方法

倒立摆四状态反馈控制的实时控制程序图如图 4 所示。

（注意：二状态、三状态的实时控制程序与图 4 基本相同，仅需修改控制器的状态输入量，以及状态控制器的参数即可。）

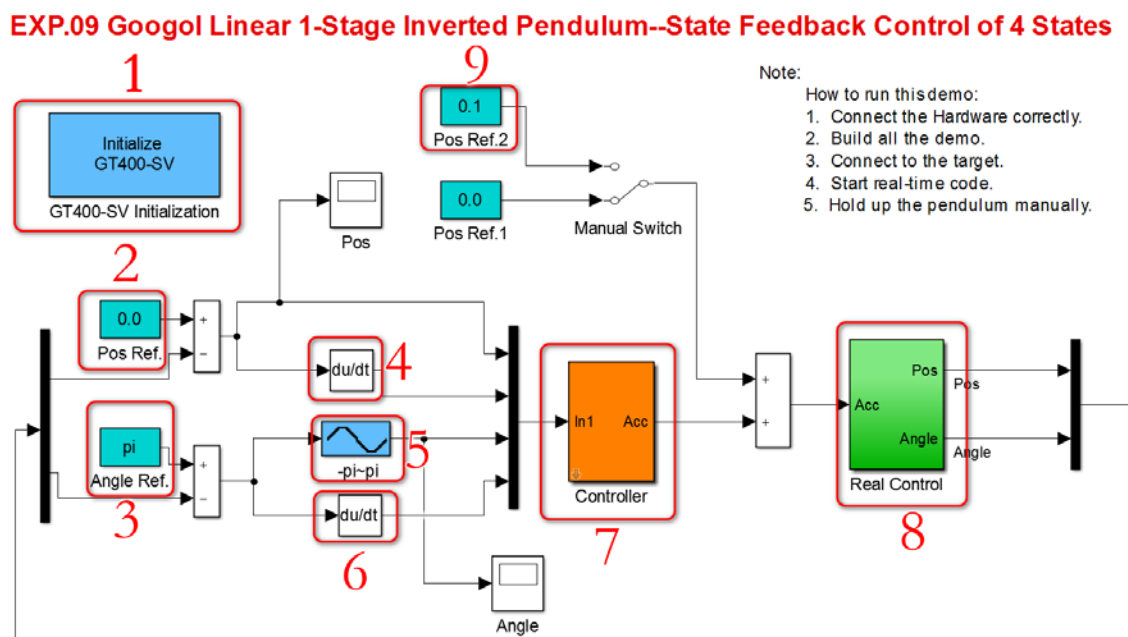


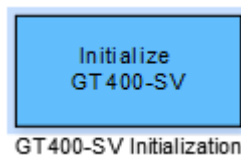
图 4 四状态反馈实时控制参考程序

程序模块说明：

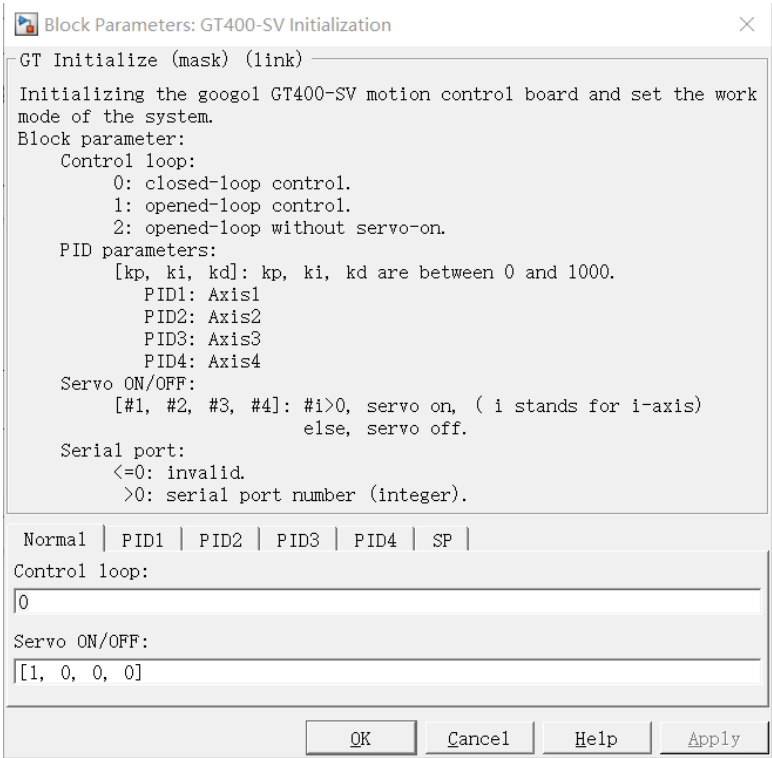
- ① GTS400-PVs Initialization 模块：负责初始化控制器
- ② Pos Ref.0 模块：位移补偿
- ③ Angle Ref 模块：系统摆杆垂直向上角度定义为 $\pi=180^\circ$
- ④ du/dt 模块：位移对时间求导
- ⑤ -pi~pi 模块：将输入的角度归一化到 $-\pi\sim\pi$ 之间。例如：输入 1.5π ，输出 -0.5π
- ⑥ du/dt 模块：角度对时间求导
- ⑦ Controller 模块：控制器，**需要自行设计的状态反馈矩阵**
- ⑧ RealControl 模块：将控制量转换给到实际系统
- ⑨ Pos ref.2 模块：位移阶跃信号（**注意：在二状态、三状态控制时，该模块作为位移的输入静态补偿值**）

给定的模块说明：

GT400-SV Initialization 模块



双击打开参数界面如下



参数说明：

负责初始化GT-400-SV 控制器			
类	标示	功能	默认
参数	Control loop	表示控制器开、闭环控制。 0：控制器闭环控制 1：控制器开环控制 2：控制器开环且轴不上伺服（多用于硬件测试）	0
	ServoON/OFF	表示各轴上下伺服。 0：下伺服 1：上伺服	0
	PID parameters	[kp, ki, kd] 各轴使用控制器闭环时的 PID 参数 kp, ki, kd 参数为 0~32767，但不能全为 0	[1,0,0] [1,0,0] [1,0,0] [1,0,0]
	SP	串口号，根据硬件串口号进行设置，主要用于直线电机倒立摆的模式切换，其他应用均设置为0。	0

三、实验任务

1. 针对四状态反馈系统模型，自行选取期望的极点，设计状态反馈控制器，使闭环系统稳定。
2. 绘制加入控制器前后的阶跃响应曲线（Simulink 仿真，观察闭环系统是否稳定）。
3. 将计算得到的控制器增益代入实时控制程序中，观察实验现象并记录系统响应曲线。
4. 针对三状态反馈系统模型，重复上述 1.2.3 步骤。
5. 针对二状态反馈系统模型，重复上述 1.2.3 步骤。

四、注意事项

1. 手扶倒立摆到最高点过程中要缓慢，顺时针和逆时针扶起的效果不同。
2. 控制器增益需要现场手动计算，给出计算过程。