22-psp

自控原理 hw1 2025/4/22

1. 设模拟控制器为$D(s)=\frac{5(s+2)}{s+8}$，采样周期为$T=0.1\text{sec}$，试用双线性变换法和根匹配法对该模拟控制器进行离散化，并给出其数字控制算法。 不考!

解 ①双线性变换: $s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

$$D(z)=\frac{5(20\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+2)}{20\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+8}=\frac{110-90z^{-1}}{28-12z^{-1}}=\frac{55-45z^{-1}}{14-6z^{-1}}$$

设输入为$e(t)$输出为$u(t)$

由$D(z)=\frac{U(z)}{E(z)}$ 得 $14U(z)-6z^{-1}U(z)=55E(z)-45z^{-1}E(z)$

即 $U(z)=\frac{3}{7}z^{-1}U(z)+\frac{55}{14}E(z)-\frac{45}{14}z^{-1}E(z)$

故数字控制算法为: $u(k)=\frac{3}{7}u(k-1)+\frac{55}{14}e(k)-\frac{45}{14}e(k-1)$

②根匹配法: $(s+a)\longrightarrow(1-e^{-aT}z^{-1})$

$(s+a)^2+b^2\longrightarrow(1-2z^{-1}e^{-aT}\cos bT+z^{-2}e^{-2aT})$

根匹配法需关注: ①零、极点 ②增益k_z

$D(s)=\frac{5(s+2)}{s+8}$ 零点 -2 极点 -8 ⇒ $D(z)=\frac{k_z(1-e^{-2T}z^{-1})}{1-e^{-8T}z^{-1}}$

由于$T=0.1\text{sec}$, 有 $D(z)=\frac{k_z(1-e^{-0.2}z^{-1})}{1-e^{-0.8}z^{-1}}$

由连续和离散控制器增益相等得:

$$\lim_{s\to0}D(s)=\lim_{z\to1}D(z)$$

即 $\frac{5\times2}{8}=\frac{k_z(1-e^{-0.2})}{1-e^{-0.8}}$

解得 $k_z=3.797$

故 $D(z)=\frac{3.797-3.109z^{-1}}{1-0.449z^{-1}}$

故数字控制算法为: $u(k)=0.449u(k-1)+3.797e(k)-3.109e(k-1)$

2. 设离散系统如下图所示，其中$H_0(s)$为零阶保持器，采样周期为$T=1s$，

$$G_0(s)=\frac{K}{s}$$

试求当$r(t)=R_1 1(t)+R_1 t$时，系统无稳态误差，过渡过程在最少拍内结束的$D(z)$。

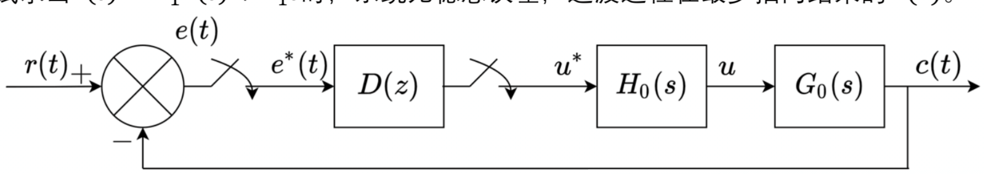

图 1 离散控制系统【提示: $Z\left[\frac{1}{s}\right]=\frac{1}{1-z^{-1}}$, $Z\left[\frac{1}{s^2}\right]=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$, $Z\left[\frac{1}{s+a}\right]=\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$】

解. 输入信号 $R(s)=R_1\mathcal{L}[1]+R_1\mathcal{L}[t]=R_1\left[\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right]_{T=1s}=\frac{R_1}{(1-z^{-1})^2}$ ⇒ $r=2$ 说明$r(t)$中的$1(t)$可被吃掉

广义脉冲传函 $G(z)=Z[H_0(s)G_0(s)]=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s}\right]=(1-z^{-1})Z\left[\frac{K}{s^2}\right]$

其中 $Z\left[\frac{1}{s^2}\right]=\sum_i \mathrm{Res}\left[\frac{z}{z-e^{sT}}\frac{1}{s^2},s_i\right]$

$$=\frac{1}{1!}\lim_{s\to0}\frac{d}{ds}\frac{z}{z-e^{sT}}=\lim_{s\to0}z(z-e^{sT})^{-2}Te^{sT}=\frac{zT}{(z-1)^2}$$

故 $G(z)=\frac{KTz^{-1}}{1-z^{-1}}$，包含纯延迟环节，需$\Phi(z)$也含一个$z^{-1}$

由$r=2$ 设 $\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^2$, $\Phi(z)=1-\Phi_e(z)=z^{-1}(2-z^{-1})$ 满足要求

$E(z)=\Phi_e(z)R(z)=R_1$ ⇒ $e(0)=R_1,\ e(1)=e(2)=\cdots=0$ ⇒ 调整时间为1拍，达到稳态

故 $D(z)=\frac{\Phi(z)}{\Phi_e(z)G(z)}=\frac{z^{-1}(2-z^{-1})(1-z^{-1})}{(1-z^{-1})^2KTz^{-1}}=\frac{2-z^{-1}}{(1-z^{-1})KT}=\frac{2-z^{-1}}{K(1-z^{-1})}$

22-PSP

3. 设离散系统如图 1 所示，采样周期为$T=1\mathrm{s}$，其中

广义脉冲传递 $G_d(z)=Z[H_0(s)G_0(s)]=\dfrac{z^{-1}(1+0.92z^{-1})(1+3z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.5z^{-1})}$

$D(z)=\dfrac{\Phi(z)}{\Phi_e(z)G(z)}$

针对单位阶跃输入信号，设计一个最少拍数字控制器$D(z)$，并判断所设计系统采样点之间是否有振荡。【提示：$Z\left[\frac{1}{s}\right]=\frac{1}{1-z^{-1}}$，$Z\left[\frac{1}{s^2}\right]=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$，$Z\left[\frac{1}{s+a}\right]=\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$】

解：输入 $r(t)=1$，$R(s)=\frac{1}{1-z^{-1}}$，$r=1$，$G_d(s)$ 有 1 个 z^{-1} 和单位圆外零点 $z_1=-3$ 故 $\Phi(z)$ 应包含 $z^{-1}, (1+3z^{-1})$

令 $\Phi(z)=az^{-1}(1+3z^{-1})$，而 $\Phi_e(z)$ 应与 $\Phi(z)$ 同阶，设 $\Phi_e(z)=\underbrace{(1-z^{-1})^1}_{①}\underbrace{(1+bz^{-1})}_{②}$

①为了与 $R(z)$ 相抵消
②为了与 $\Phi(z)$ 同阶

由 $\Phi_e(z)=1-\Phi(z)$ 得 $1+(b-1)z^{-1}-bz^{-2}=1-az^{-1}-3az^{-2}\Rightarrow\begin{cases}a=0.25\\b=0.75\end{cases}$

$\Rightarrow\Phi(z)=\frac{1}{4}z^{-1}(1+3z^{-1})$，$\Phi_e(z)=(1-z^{-1})(1+\frac{3}{4}z^{-1})$

调整时间 $t_s=2T$

$E(z)=\Phi_e(z)R(z)=1+\frac{3}{4}z^{-1}\Rightarrow e(0)=1, e(1)=\frac{3}{4}, e(2)=\cdots=0\Rightarrow$ 过渡过程经历 2 拍，达到稳态.

从而 $D(z)=\dfrac{\Phi(z)}{\Phi_e(z)G(z)}=\dfrac{\frac{1}{4}z^{-1}(1+3z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+\frac{3}{4}z^{-1})}\dfrac{(1-z^{-1})(1+0.5z^{-1})}{z^{-1}(1+0.92z^{-1})(1+3z^{-1})}=\dfrac{1}{4}\dfrac{1+0.5z^{-1}}{(1+0.75z^{-1})(1+0.92z^{-1})}$

控制器输出 $\underline{U(z)=D(z)E(z)}=\frac{1}{4}\dfrac{1+0.5z^{-1}}{1+0.92z^{-1}}=\frac{1}{4}(1-0.42z^{-1}+0.3864z^{-2}-0.3555z^{-3}+0.3270z^{-4}$
$-0.3009z^{-5}+0.2768z^{-6}-0.2547z^{-7}+\cdots)$

注意计算

说明 $u(nT)$ 无法在有限个采样周期后达到相对稳定 $\Rightarrow$ 有纹波

4. 某单位负反馈线性离散系统的结构如图 1 所示，其被控对象和零阶保持器 ZOH 的传递函数分别为

$$G_0(s)=\frac{10}{s(s+1)(0.1s+1)}, H_0(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

考试不会出这么逆天

采样周期$T=0.5\mathrm{s}$。设计单位阶跃输入时最少拍无差系统的数字控制器$D(z)$。

解：输入 $r(t)=1$，$R(s)=\frac{1}{1-z^{-1}}$，$r=1$

广义脉冲传递 $G(z)=Z[H_0(s)G_0(s)]=Z\left[(1-e^{-Ts})\dfrac{10}{s^2(s+1)(0.1s+1)}\right]=(1-z^{-1})\cdot10\cdot Z\left[\dfrac{1}{s^2(s+1)(0.1s+1)}\right]$

其中 $Z\left[\dfrac{1}{s^2(s+1)(0.1s+1)}\right]=\sum_i Res\left[\dfrac{1}{s^2(s+1)(0.1s+1)}\dfrac{z}{z-e^{sT}}, s_i\right]$

① $\lim\limits_{s\to0}\dfrac{d}{ds}\dfrac{z}{(s+1)(0.1s+1)(z-e^{sT})}=\dfrac{-z[(0.1s+1)(z-e^{sT})+0.1(s+1)(z-e^{sT})+(s+1)(0.1s+1)(-Te^{sT})]}{[(s+1)(0.1s+1)(z-e^{sT})]^2}$

$=\dfrac{-z[1.1(z-1)-0.5]}{(z-1)^2}=\dfrac{0.5z^{-1}-1.1(1-z^{-1})}{(1-z^{-1})^2}$

② $\lim\limits_{s\to-1}\dfrac{z}{s^2(0.1s+1)(z-e^{sT})}=\dfrac{1}{0.9(1-0.6066z^{-1})}=\dfrac{1.111}{1-0.6066z^{-1}}$

③ $\lim\limits_{s\to-10}\dfrac{10z}{s^2(s+1)(z-e^{sT})}=\dfrac{10}{-900(1-0.0067z^{-1})}=\dfrac{-0.0111}{1-0.0067z^{-1}}$

故 $G(z)=\dfrac{0.7385z^{-1}(1+1.5163z^{-1})(1+0.0517z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.6066z^{-1})(1-0.0067z^{-1})}$ 有 1 个 z^{-1} 因子和零点 $z_1=-1.5163$

设 $\Phi(z)=az^{-1}(1+1.5163z^{-1})$，$\Phi_e(z)$ 应与 $\Phi(z)$ 同阶，设 $\Phi_e(z)=(1-z^{-1})(1+bz^{-1})$

由于 $\Phi(z)=1-\Phi_e(z)$，即 $az^{-1}(1+1.5163z^{-1})=(1-b)z^{-1}+bz^{-2}\Rightarrow\begin{cases}a=0.3974\\b=0.6026\end{cases}$

从而 $\Phi(z)=0.3974z^{-1}(1+1.5163z^{-1})$，$\Phi_e(z)=(1-z^{-1})(1+0.6026z^{-1})$

从而 $D(z)=\dfrac{\Phi(z)}{\Phi_e(z)G(z)}=\dfrac{0.5381(1-0.6066z^{-1})(1-0.0067z^{-1})}{(1+0.6026z^{-1})(1+0.0517z^{-1})}$

$E(z)=\Phi_e(z)R(z)=1+0.6026z^{-1}$，故

$e(0)=1, e(1)=0.6026, e(2)=\cdots=0$，过渡过程经历 2 拍，达到稳态.