

信号 FFT 与频谱的关系

①对于信号 $x(t)$ ，以 f_s 为采样频率进行采样 N 个点得到 $x(n), n=0,1,2,\dots,N-1, n=f_s \cdot t$ 。

注意： N 为偶数。

②用 MATLAB 的 `fft()` 函数对 $x(n), n=0,1,2,\dots,N-1$ 进行 FFT 分析得到 $X(k), k=0,1,2,\dots,N-1$ 。

那么 FFT 分析的结果 $X(k)$ 是一列复数，它与时域采样信号 $x(n)$ 有什么关系呢？

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}, n=0,1,2,\dots,N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \left\{ X(0) \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot 0 \cdot n} + X(1) \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot 1 \cdot n} + \dots + X\left(\frac{N}{2}-1\right) \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot \left(\frac{N}{2}-1\right) \cdot n} + X\left(\frac{N}{2}\right) \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot \left(\frac{N}{2}\right) \cdot n} + X(N-1) \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot (N-1) \cdot n} + \dots + X\left(\frac{N}{2}+1\right) \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot \left(\frac{N}{2}+1\right) \cdot n} \right\}$$

这一部分可以参考教材《控制系统设计》第二章频谱分析。

③设 $X(k) = a_k + jb_k$ ，计算画红框部分之和的结果。

$$\begin{aligned} & X(k)e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot k \cdot n} + X(N-k)e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot (N-k) \cdot n} \\ &= X(k)e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot k \cdot n} + X(N-k)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot k \cdot n} = 2a_k \cos\left(\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot k \cdot n\right) - 2b_k \sin\left(\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot k \cdot n\right) \end{aligned}$$

④ $X(0)$ 与 $X\left(\frac{N}{2}\right)$ 虚部为 0，重新整理 $x(n)$ 。

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \{ a_0 \cos(0) \\ &\quad + 2a_1 \cos\left(\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot 1 \cdot n\right) - 2b_1 \sin\left(\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot 1 \cdot n\right) \\ &\quad + 2a_2 \cos\left(\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot 2 \cdot n\right) - 2b_2 \sin\left(\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot 2 \cdot n\right) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + 2a_{\frac{N}{2}-1} \cos\left(\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot \left(\frac{N}{2}-1\right) \cdot n\right) - 2b_{\frac{N}{2}-1} \sin\left(\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot \left(\frac{N}{2}-1\right) \cdot n\right) \\ &\quad + a_{\frac{N}{2}} \cos(2\pi) \} \end{aligned}$$

⑤将 $n = f_s \cdot t$ 代入，进一步整理。

$$\begin{aligned}
x(n) = & \frac{a_0}{N} \\
& + \frac{2\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{N} \cos\left(\frac{2\pi f_s}{N} \cdot 1 \cdot t + \phi_1\right) \\
& + \frac{2\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{N} \cos\left(\frac{2\pi f_s}{N} \cdot 2 \cdot t + \phi_2\right) \\
& + \dots \\
& + \frac{2\sqrt{a_{\frac{N}{2}-1}^2 + b_{\frac{N}{2}-1}^2}}{N} \cos\left(\frac{2\pi f_s}{N} \cdot \left(\frac{N}{2}-1\right) \cdot t + \phi_{\frac{N}{2}-1}\right) \\
& + \frac{a_{\frac{N}{2}}}{N}
\end{aligned}$$

可以直观看出信号 $x(t)$ 的直流分量为 $\frac{a_0}{N}$ ；基频幅值 $\frac{2|X(1)|}{N}$ ，相角 ϕ_1 ；二倍频幅值 $\frac{2|X(2)|}{N}$ ，相角

ϕ_2 ；……， $N/2-1$ 倍频幅值 $\frac{2\left|X\left(\frac{N}{2}-1\right)\right|}{N}$ ，相角 $\phi_{\frac{N}{2}-1}$ ； $N/2$ 倍频幅值 $\frac{\left|X\left(\frac{N}{2}\right)\right|}{N}$ ，相角为 0。

注意：寻找信号主频（幅值最大值）时记得剔除直流分量。