作业8

作者：Costannt

完成时间：2025年12月8日

1. 等效噪声带宽用来衡量噪声对系统跟踪误差的影响，对于基本 I 型系统，等效噪声带宽与转折频率无关，为什么设计中还设置转折频率尽可能小（即归一化的无量纲增益 K 尽可能大），以降低噪声的影响？

答：查看系统的等效噪声带宽定义，系统的等效噪声带宽是指一个理想滤波器的带宽：在白噪声作用下，系统的均方输出与理想滤波器的均方输出相等。这里的理想滤波器特指其频率特性等于1，而在带宽ω_b外则完全截止。

然而，实际系统中的噪声可能并非白噪声，而是含有较多的高频部分。减小转折频率可充分抑制高频噪声。

2. 针对课件“9.1.2 伺服系统的数学模型”中电压源驱动的电机的数学模型，对比是否省略 f 、L_a 两种条件下，采用比例控制器时增益的大小对系统稳定性的影响。基于鲁棒稳定性概念，对上述对比结果进行定性的解释。

答：

根据电机相关知识，若不忽略f, L_a：

$$
\begin{aligned}
&u = e_m + i_a R_a + L_a \frac{\mathrm{d} i_a}{\mathrm{d} t} \\
&T = K_T i_a = J\ddot{\theta} + f\dot{\theta} \\
&e_m = K_e \dot{\theta}
\end{aligned}
$$

选择状态变量$x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}, x_3 = i$。

列写状态空间表达式得：

$$
\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{i}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{f}{J} & \frac{K_T}{J} \\ 0 & -\frac{K_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} u
$$

$$
y = [1, 0, 0] \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i_a \end{bmatrix}
$$

若忽略f, L_a：

$$
\begin{aligned}
&u = e_m + i_a R_a \\
&T = K_T i_a = J\ddot{\theta} \\
&e_m = K_e \dot{\theta}
\end{aligned}
$$

选择状态变量$z_1 = \theta, z_2 = \dot{\theta}$,

列写状态空间表达式得：

$$
\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{K_T K_e}{J R_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_T}{J R_a} \end{bmatrix} u
$$

$$
y = [1, 0] \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}
$$

均取控制律 $u = -Ky, K > 0$，则：

$$
\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{i}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{f}{J} & \frac{K_T}{J} \\ 0 & -\frac{K_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i_a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} K [1, 0, 0] \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i_a \end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix}\dot\theta\\ \ddot\theta\\ \dot i_a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{f}{J} & \frac{K_T}{J}\\ -\frac{K}{L_a} & -\frac{K_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \dot\theta\\ i_a\end{bmatrix} \tag{1}$$

类似地有：

$$\begin{bmatrix}\dot\theta\\ \ddot\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\frac{K_TK_e}{JR_a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \dot\theta\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ \frac{K_T}{JR_a}\end{bmatrix}K[1,0]\begin{bmatrix}\theta\\ \dot\theta\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot\theta\\ \ddot\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{K_TK}{JR_a} & -\frac{K_TK_e}{JR_a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \dot\theta\end{bmatrix} \tag{2}$$

首先研究（1）的稳定性。写出其特征多项式：

$$\det\left(\lambda I-\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{f}{J} & \frac{K_T}{J}\\ -\frac{K}{L_a} & -\frac{K_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a}\end{bmatrix}\right)=\lambda^3+\left(\frac{R_a}{L_a}+\frac{f}{J}\right)\lambda^2+\left(\frac{K_T\,K_e}{J\,L_a}+\frac{R_a\,f}{J\,L_a}\right)\lambda+\frac{K\,K_T}{J\,L_a}$$

根据Routh判据，这个系统稳定的要求是：

$$\left(\frac{R_a}{L_a}+\frac{f}{J}\right)\left(\frac{K_T\,K_e}{J\,L_a}+\frac{R_a\,f}{J\,L_a}\right)>\frac{K\,K_T}{J\,L_a}$$

显然，若 K 很大，这个要求不能得到满足。

再来研究（2）的稳定性。（2）对应了一个友矩阵的形式，很容易判断（2）是稳定的。

上面的分析表明：若 f, L_a 不可忽略，则采用比例控制器时，增益过大会破坏系统稳定性。

下面从鲁棒稳定性角度出发加以分析，认为忽略 f, L_a 的系统为标称系统，不忽略的为实际系统，构建其开环传递函数：

$$G_0(s,K)=C(sI-A)^{-1}BK=\frac{K\,K_T}{(J\,R_a)\,s^2+(K_T\,K_e)\,s}$$

$$G(s,K)=C'(sI-A')^{-1}B'K=\frac{K\,K_T\,L_a}{(J\,L_a)\,s^3+(L_a\,f+J\,R_a)\,s^2+(R_a\,f+K_T\,K_e)\,s}$$

$$\begin{aligned}\Delta(s)&=G(s,K)-G_0(s,K)\\ &=\frac{K\,K_T\,L_a}{J\,L_a\,s^3+(L_a\,f+J\,R_a)\,s^2+(R_a\,f+K_T\,K_e)\,s}-\frac{K\,K_T}{J\,R_a\,s^2+K_T\,K_e\,s}\end{aligned}$$

为选取适当的系统参数值，参考瑞士Maxon公司的DCX 35 L石墨电刷DC电机工作在60V额定电压下的若干参数：

序号	参数名称	单位	数值	符号
1	引线端电阻	Ω	2.16	R_a
2	电枢电感	mH	0.776	L_a
3	转矩常数	mNm/A	74.1	K_T
4	机械时间常数	ms	3.75	τ
5	转子转动惯量	gcm^2	95.2	J

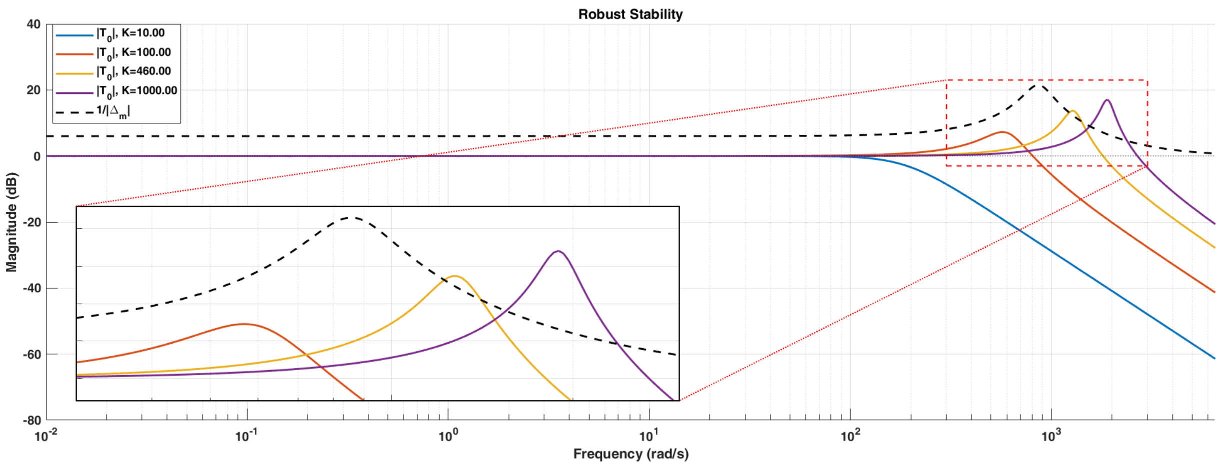
化为国际单位，有$K_e = K_T$，$f = J/\tau$。

整理后：

$$
\begin{aligned}
&R_a = 2.16\Omega \\
&L_a = 7.76 \times 10^{-4}\mathrm{H} \\
&K_T = 7.41 \times 10^{-2}\mathrm{Nm \cdot A^{-1}} \\
&\tau = 3.75 \times 10^{-3}\mathrm{s} \\
&J = 9.52 \times 10^{-6}\mathrm{kg \cdot m^2} \\
&f = 2.54 \times 10^{-3}\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}
\end{aligned}
$$

根据前面Routh稳定性判据的推导，在以上参数下，使系统临界稳定的 $K \approx 451.87$。

若考虑$K = 10$、100、460、1000：



可见过大的增益将造成系统不稳定。