

作业3

作者：Costannt

完成时间：2025年11月4日

第三次作业：

1. 对于存在两个随机输入信号的线性系统，对比分析输入到输出间信号的传递关系和功率谱密度传递关系及其相应的成立条件。

解：

考虑一个线性时不变系统，其传递函数为 $H(s)$ ，对应的冲激响应为 $h(t)$ ，频率响应为 $H(j\omega)$

现有两个宽平稳的随机输入信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 。

由于系统是线性的，叠加原理成立，因此可以分别分析每个输入对输出的贡献。

记卷积符号为 $*$ ，则输出为：

$$y(t) = h(t) * x_1(t) + h(t) * x_2(t) = h(t) * [x_1(t) + x_2(t)]$$

其传递关系是显然的，这里不再赘述。

由数学期望的性质：

$$\mathbb{E}[y(t)] = h(t) * \{\mathbb{E}[x_1(t)] + \mathbb{E}[x_2(t)]\}$$

显然若输入为零均值，则输出也为零均值。

定义 $R_{x_1x_2} = \mathbb{E}[x_1(t)\overline{x_2(t+\tau)}]$ 称为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的互相关函数。

类比宽平稳的概念，给出下面的要求：

$$R_{x_1x_2} = \mathbb{E}[x_1(t)\overline{x_2(t+\tau)}] \text{ 仅依赖于 } \tau, \text{ 即：}$$

$$R_{x_1x_2}(\tau) = \mathbb{E}[x_1(t)\overline{x_2(t+\tau)}]$$

查阅资料后发现这是所谓“联合宽平稳”的概念。

由相关函数的定义，立刻可以给出：

$$R_{x_1+x_2}(\tau) = R_{x_1}(\tau) + R_{x_2}(\tau) + R_{x_1x_2}(\tau) + R_{x_2x_1}(\tau)$$

故：

$$R_y(\tau) = \mathbb{E}[y(t)\overline{y(t+\tau)}]$$

记 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ 则输出为：

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t-\alpha) d\alpha \\ \overline{y(t+\tau)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(\beta)x(t+\tau-\beta)} d\beta \end{aligned}$$

由相关函数定义：

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \mathbb{E}[y(t)\overline{y(t+\tau)}] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t-\alpha) d\alpha \cdot \overline{\int_{-\infty}^{\infty} h(\beta)x(t+\tau-\beta) d\beta}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\overline{h(\beta)} \mathbb{E}[x(t-\alpha)\overline{x(t+\tau-\beta)}] d\alpha d\beta \end{aligned}$$

由于 $x_1(t), x_2(t)$ 各自是宽平稳的，且是联合宽平稳的：

$$\mathbb{E}[x(t-\alpha)\overline{x(t+\tau-\beta)}] = R_{x_1+x_2}((t+\tau-\beta)-(t-\alpha)) = R_{x_1+x_2}(\tau+\alpha-\beta)$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\overline{h(\beta)} R_{x_1+x_2}(\tau+\alpha-\beta) d\alpha d\beta$$

观察发现其形式十分接近卷积，下面做一些处理：

换元，令：

$$\begin{aligned} u &= \alpha - \beta, v = \beta \\ \Rightarrow d\alpha d\beta &= \left| \det \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(u, v)} \right| du dv = du dv \end{aligned}$$

马上有：

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u+v) \overline{h(v)} R_{x_1+x_2}(\tau+u) du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_1+x_2}(\tau+u) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u+v) \overline{h(v)} dv \right]}_{\text{}} du \end{aligned}$$

上面特别标注出的表达式与卷积原始形式已十分类似，值得专门研究。考虑换元 $w = -v$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(v)} h(u+v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(-w)} h(u-w) dw = (h * \overline{h^-})(u), \quad \text{其中 } h^-(w) = h(-w)$$

因此:

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_1+x_2}(\tau+u) (h * \overline{h^-})(u) du$$

类似前面的操作，令 $s = -u$:

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_1+x_2}(\tau-s) (h * \overline{h^-})(-s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_1+x_2}(\tau-s) \overline{(h * \overline{h^-})(s)} ds \\ &= \overline{[(h * \overline{h^-}) * R_{x_1+x_2}](\tau)} \\ &= [\overline{h(\tau)} * h(-\tau)] * R_{x_1+x_2}(\tau) \end{aligned}$$

这个形式和单个宽平稳随机信号输入时，线性系统对平稳随机过程的响应的相关函数表达式是形似的。下面分析功率谱密度传递关系。

已知有第二种变换:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f\tau} df, \quad S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

为了方便，对 $R_{x_1+x_2}(\tau)$ 做第二种变换，立刻得到:

$$S_{x_1+x_2}(f) = S_{x_1}(f) + S_{x_2}(f) + S_{x_1x_2}(f) + S_{x_2x_1}(f)$$

对于单输入 LTI 系统，若输入 $x(t)$ 是宽平稳随机过程，其 PSD 为 $S_x(f)$ ，则输出 PSD 为:

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

这样一来，类比单输入的情形，推导总输出 PSD 为:

$$\begin{aligned} S_y(f) &= |H(f)|^2 [S_{x_1}(f) + S_{x_2}(f) + S_{x_1x_2}(f) + S_{x_2x_1}(f)] \\ &= |H(f)|^2 [S_{x_1}(f) + S_{x_2}(f) + 2 \operatorname{Re} S_{x_1x_2}(f)] \end{aligned}$$

希望:

$$S_y(f) = |H(f)|^2 [S_{x_1}(f) + S_{x_2}(f)]$$

则要求 $S_{x_1x_2}(f) = 0$, 也即 $R_{x_1x_2}(\tau) = 0$, 这就是要求 x_1, x_2 互不相关。

综上, 对于存在两个随机输入信号的线性系统, 要使功率谱密度传递关系:

$$\boxed{S_y(f) = |H(f)|^2 [S_{x_1}(f) + S_{x_2}(f)]}$$

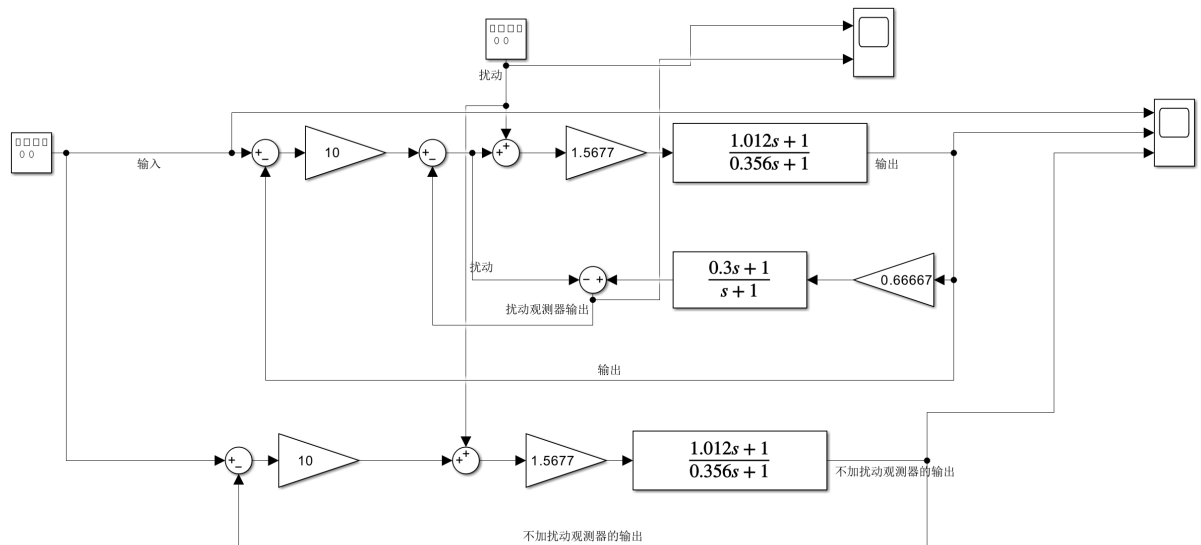
成立, 要求:

- $x_1(t), x_2(t)$ 都是宽平稳的;
- $x_1(t), x_2(t)$ 是联合宽平稳的;
- $x_1(t), x_2(t)$ 是互不相关的。

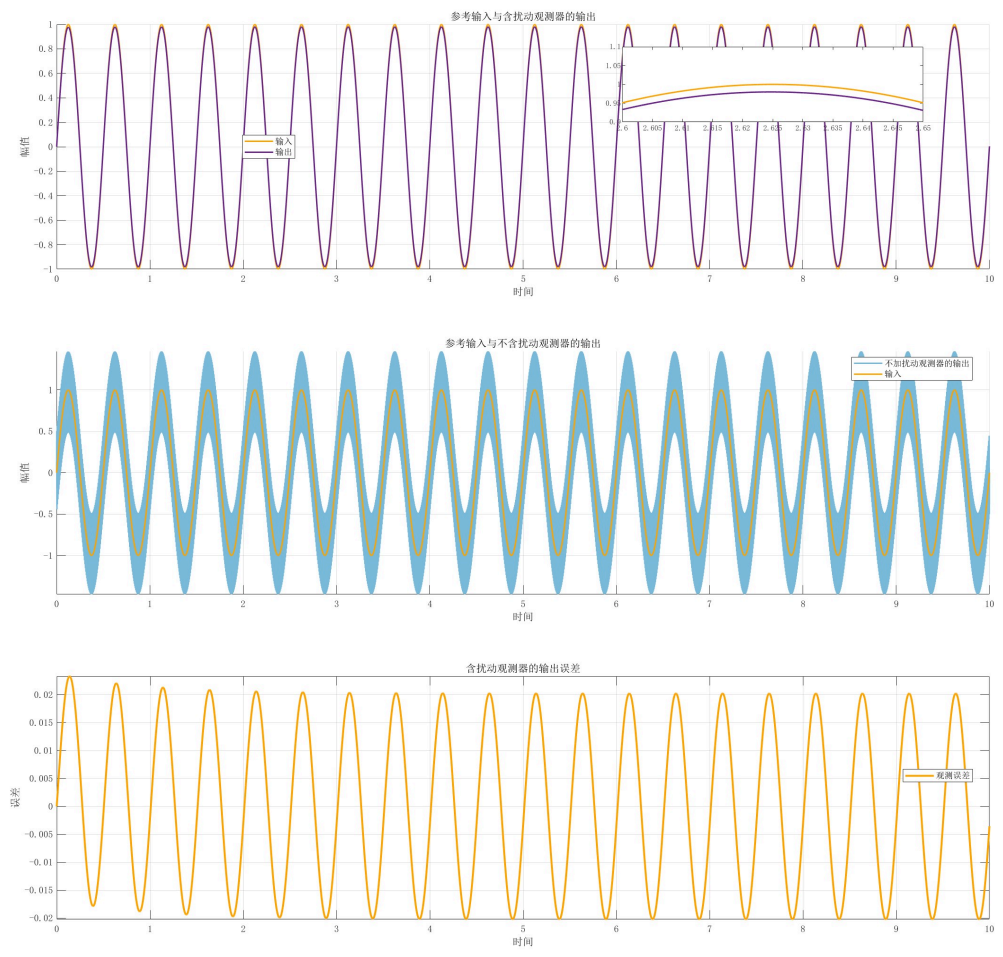
2.“第 6 章 控制系统的输入条件分析（4）”课件，完成例 4 和例 5 的仿真，其中的控制器均可采用比例控制。提交编写的仿真程序和运行结果图。

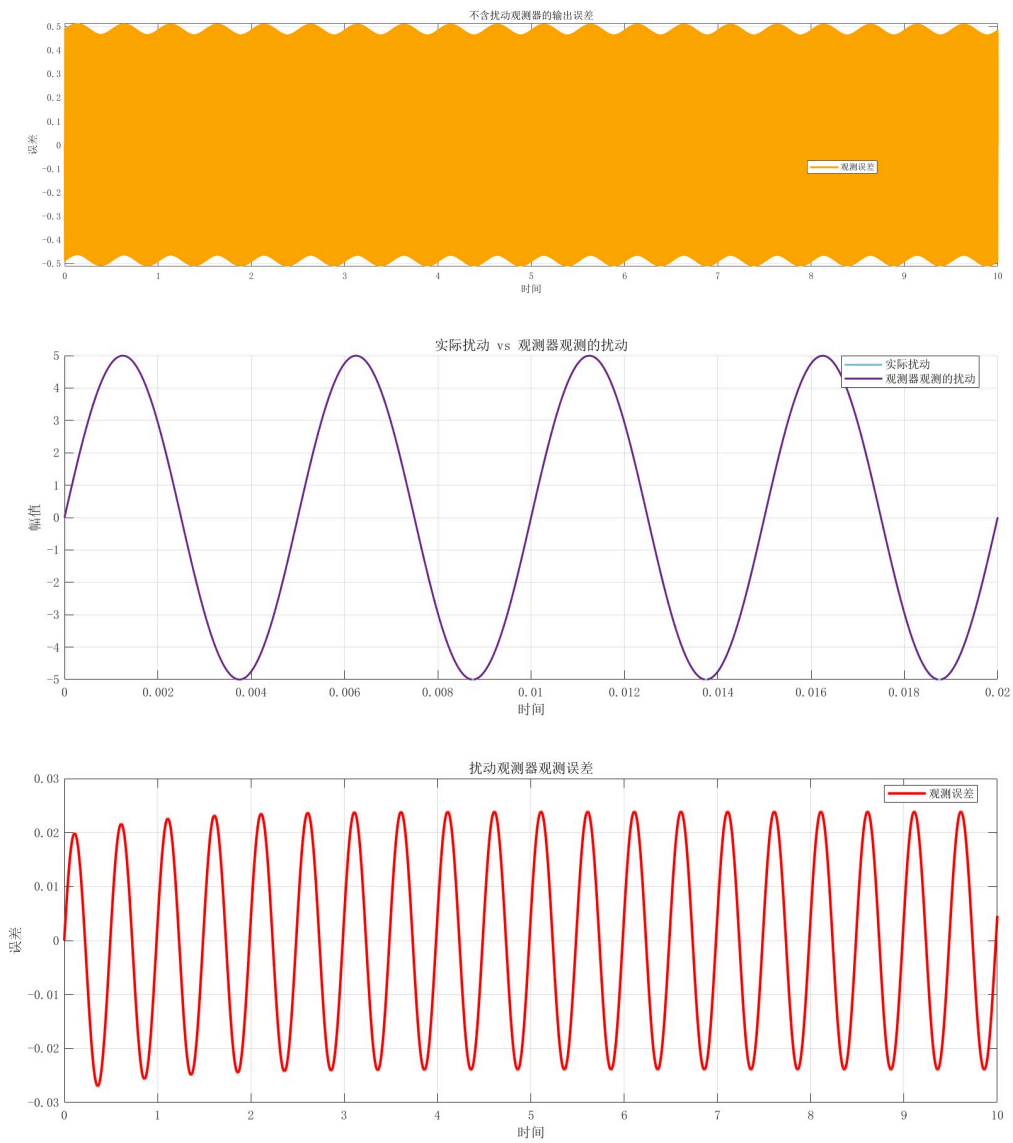
解：

使用simulink设计仿真：

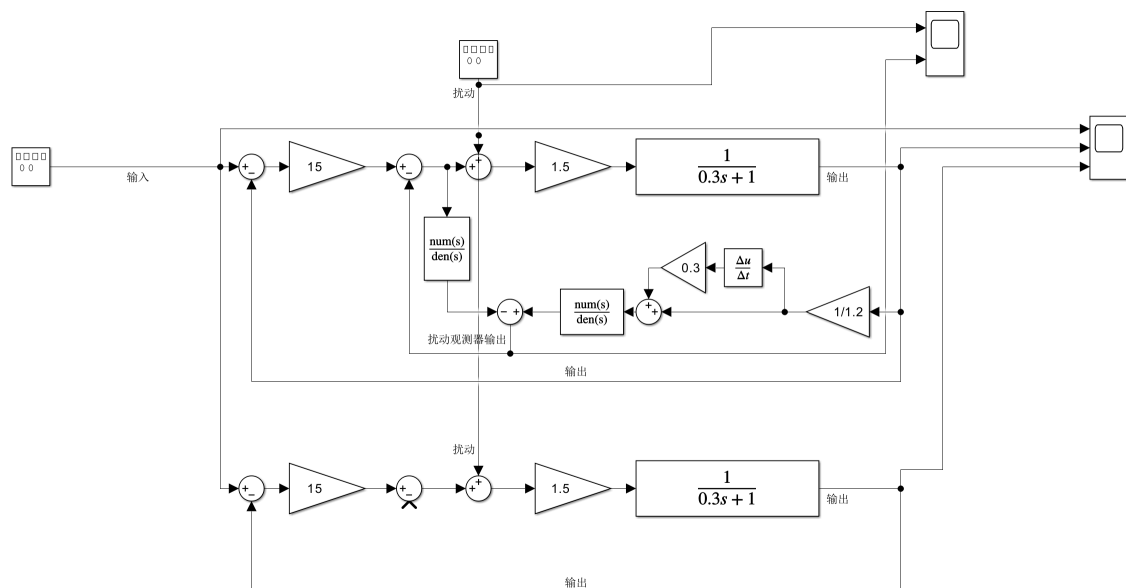


进行例4仿真结果如下：

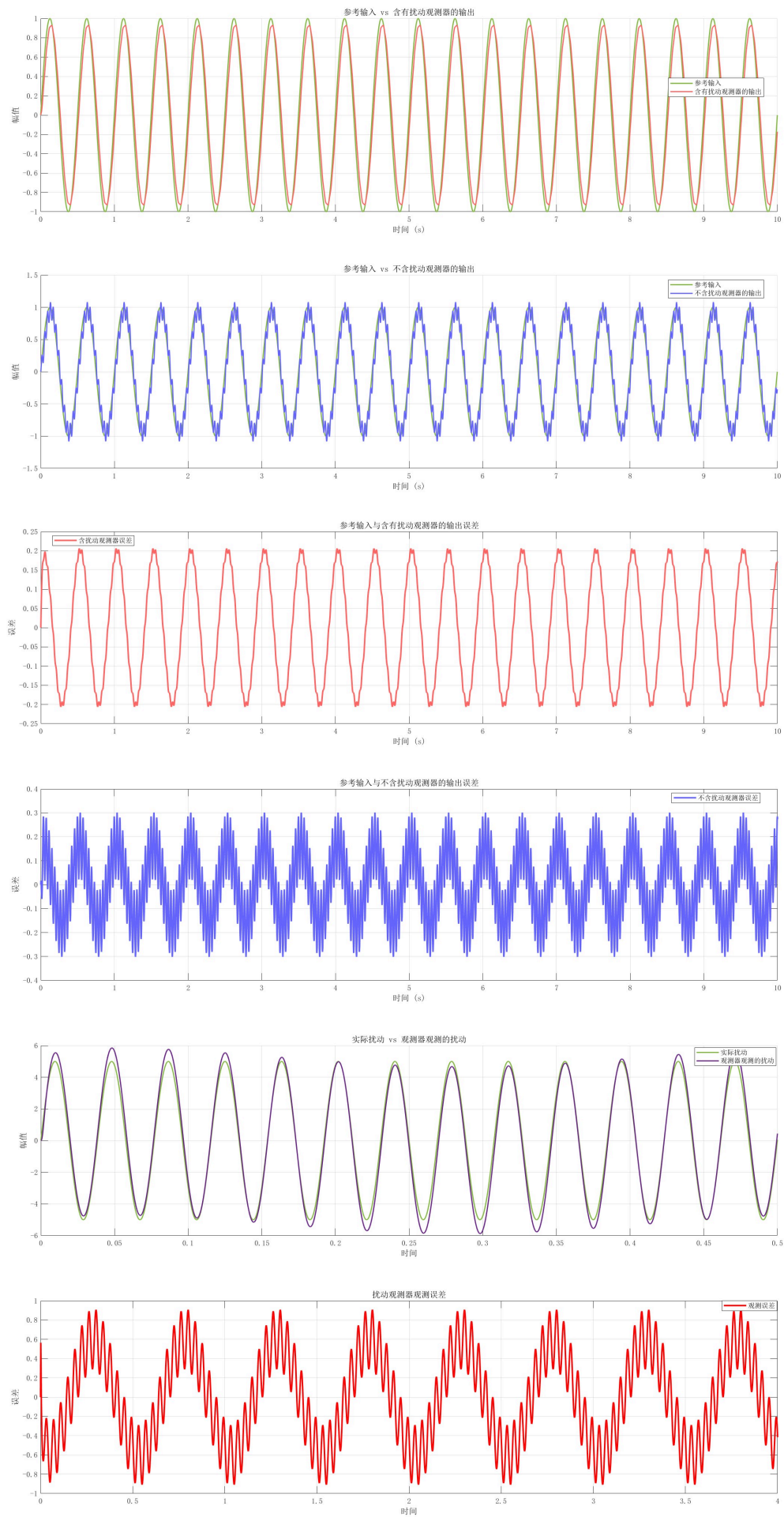




使用simulink对例5进行仿真：



对例5仿真后有：



仿真程序见附件。 [example4.slx](#) [example5.slx](#)

3. 如何选择控制系统的典型输入信号？海浪会产生舰船摇动，对于舰用随动系统（用于复现舰船的摇动）和舰上雷达跟踪系统（雷达天线指向应跟踪惯性坐标系中的某一方向）来说，舰船摇动信号在设计中应分别作为什么信号进行考虑？

答：典型输入信号应该根据系统预定执行的任务来确定。

舰用随动系统（用于复现舰船的摇动），其目的是精确跟踪舰船的摇动，因此舰船摇动信号应作为参考输入信号。系统应被设计能够快速、准确地复现这种输入。这要求系统具有良好的跟踪性能，如低延迟和高带宽。由于海浪摇动通常表现为周期性或随机性，输入信号可能类似于正弦信号或随机信号，应考虑使用某种形式的正弦输入或随机输入进行测试。

舰上雷达跟踪系统（雷达天线指向应跟踪惯性坐标系中的某一方向），其目的是保持雷达天线指向惯性空间中的固定方向，不受舰船摇动的影响。因此，舰船摇动信号应作为干扰输入信号。系统需要设计成能够抑制这种干扰，保持天线的稳定指向。这要求系统具有强大的抗干扰能力和鲁棒性。在设计中，应将海浪摇动视为外部扰动，并通过控制算法（如PID控制、鲁棒控制或滤波技术）进行补偿。