

作业4

作者：Costannt

完成时间：2025年11月26日

1. 完成下表中各灵敏度函数的推导。

四种情况	可变参数	灵敏度
开环系统	被控对象	$S_G^T = 1$
单位反馈闭环系统	被控对象	$S_G^T = \frac{1}{1+GK}$
反馈闭环系统	被控对象	$S_G^T = \frac{1}{1+HGK}$
反馈闭环系统	反馈环节	$S_H^T = \frac{-HGK}{1+HGK}$

解：

- 开环系统对被控对象 $G(s)$ 变化的灵敏度表示为：

$$S_G^T = \frac{d \ln T}{d \ln G} = \frac{dT}{dG} \cdot \frac{G}{T} = 1$$

- 单位反馈闭环系统对被控对象 $G(s)$ 变化的灵敏度表示为：

$$\begin{aligned}
 S_G^T &= \frac{d \ln T}{d \ln G} = \frac{dT}{dG} \cdot \frac{G}{T} = \frac{d(GK/1+GK)}{dG} \cdot \frac{G}{GK/1+GK} \\
 &= \frac{K}{(1+GK)^2} \cdot \frac{1+GK}{K} \\
 &= \frac{1}{1+GK}
 \end{aligned}$$

- 反馈闭环系统对被控对象 $G(s)$ 变化的灵敏度表示为：

$$\begin{aligned}
 S_G^T &= \frac{d \ln T}{d \ln G} = \frac{dT}{dG} \cdot \frac{G}{T} = \frac{d(GK/1+HGK)}{dG} \cdot \frac{G}{GK/1+HGK} \\
 &= \frac{K}{(1+HGK)^2} \cdot \frac{1+HGK}{K} \\
 &= \frac{1}{1+HGK}
 \end{aligned}$$

- 反馈闭环系统对反馈因子 $H(s)$ 变化的灵敏度为：

$$\begin{aligned}
 S_H^T &= \frac{d \ln T}{d \ln H} = \frac{dT}{dH} \cdot \frac{H}{T} = \frac{d(GK/1 + HGK)}{dH} \cdot \frac{H}{GK/1 + HGK} \\
 &= \frac{-(GK)^2}{(1 + HGK)^2} \cdot \frac{H(1 + HGK)}{GK} \\
 &= \frac{-HGK}{1 + HGK}
 \end{aligned}$$

2. 推导灵敏度函数最大值与系统相位裕度之间的关系。

解：

根据灵敏度函数的定义可知，灵敏度函数取得最大值，即 GK 到 $(-1, j0)$ 点的距离取得最小值 ρ ，参考教材图5-3：

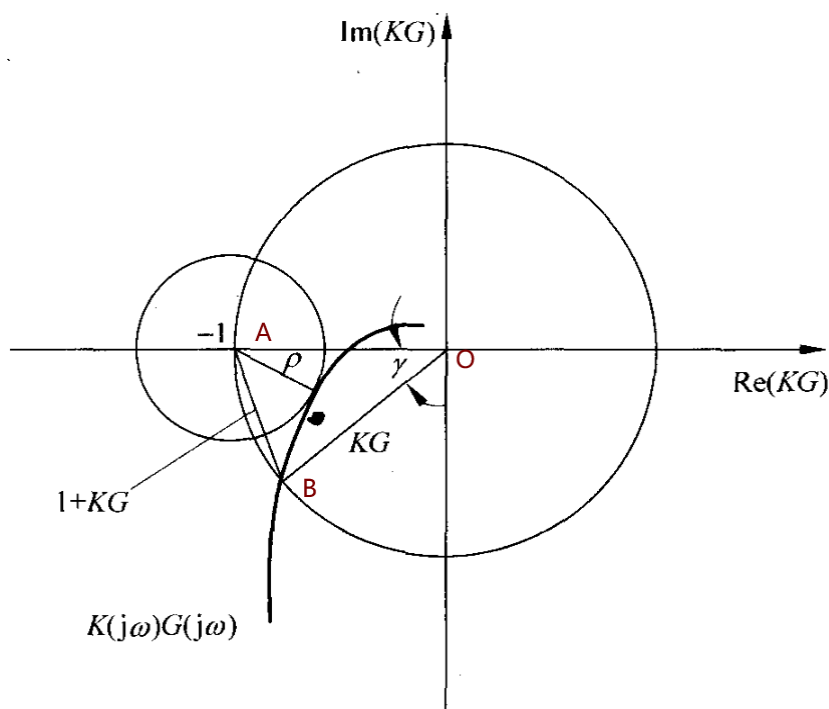


图 5-3 相位裕度 γ 与 ρ 的关系

立刻发现， $\triangle OAB$ 是一个等腰三角形，其中两腰 $OA = OB = 1$ 。由几何关系可得 $|AB| = 2|\sin \frac{\gamma}{2}|$ ，又因 ρ 已是最小值，立刻有：

$$2|\sin \frac{\gamma}{2}| \geq \rho = |1 + GK|_{\min}$$

整理得：

$$|S(j\omega)|_{\max} = \frac{1}{|1 + GK(j\omega)|_{\min}} \geq \frac{1}{2|\sin \frac{\gamma}{2}|}$$

3. 分别针对乘性和加性不确定性, 完成鲁棒稳定性条件的推导(注意推导过程的逻辑关系)。

证:

记名义系统为 G_0 且稳定。开环传递函数 G_0K 包围 $(-1, j0)$ 点次数满足 Nyquist 稳定性要求。

考虑实际系统 G , 只要 G_0 过渡为 G 时包围 $(-1, j0)$ 点次数不变即可, 这要求:

$$|1 + GK(j\omega)| \neq 0, \text{ 即 } |1 + GK(j\omega)| > 0$$

①考虑乘性不确定性。

$$\begin{aligned} & |1 + GK| > 0 \\ \Leftrightarrow & |1 + (1 + L)G_0K| > 0 \\ \Leftrightarrow & |1 + G_0K + LG_0K| > 0 \\ \Leftrightarrow & \left| 1 + \frac{LG_0K}{1 + G_0K} \right| > 0 \\ \Leftrightarrow & \left| 1 + \frac{LG_0K}{1 + G_0K} \right| \geq 1 - l_m \left| \frac{G_0K}{1 + G_0K} \right| \\ 1 - l_m \left| \frac{G_0K}{1 + G_0K} \right| > 0 \Rightarrow & \left| 1 + \frac{LG_0K}{1 + G_0K} \right| > 0 \\ 1 - l_m \left| \frac{G_0K}{1 + G_0K} \right| > 0 \Leftrightarrow & \left| \frac{G_0K}{1 + G_0K} \right| < \frac{1}{l_m} \end{aligned}$$

②考虑加性不确定性。

$$\begin{aligned} & |1 + GK| > 0 \\ \Leftrightarrow & |1 + G_0K + \Delta GK| > 0 \\ \Leftrightarrow & \left| 1 + \frac{\Delta GK}{1 + G_0K} \right| > 0 \\ \Leftrightarrow & \left| 1 + \frac{\Delta GK}{1 + G_0K} \right| \geq 1 - l_a \left| \frac{K}{1 + G_0K} \right| \\ 1 - l_a \left| \frac{K}{1 + G_0K} \right| > 0 \Rightarrow & \left| 1 + \frac{\Delta GK}{1 + G_0K} \right| > 0 \\ 1 - l_a \left| \frac{K}{1 + G_0K} \right| > 0 \Leftrightarrow & \left| \frac{K}{1 + G_0K} \right| < \frac{1}{l_a} \end{aligned}$$

4. 鲁棒稳定性条件是充分条件还是必要条件？为什么？

答：鲁棒稳定性条件是充分必要条件。充分性在第3题中已证明完毕。下证其必要性：

采用反证法。考虑乘性摄动的鲁棒稳定性条件。假设系统

$$\forall L, \text{st.} |L(j\omega)| < l_m(\omega), \forall \omega, |1 + (1 + L)G_0K(j\omega)| > 0$$

$$\exists \omega_0, \text{st.} \left| \frac{G_0K}{1 + G_0K}(j\omega_0) \right| \geq \frac{1}{l_m(\omega_0)}$$

令：

$$L_0(j\omega) = \begin{cases} -\frac{1+G_0K}{G_0K}(j\omega) & \omega = \omega_0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

显然， $|L_0(j\omega)| \leq l_m(\omega)$

将 L_0 代入 $|1 + (1 + L)G_0K(j\omega)|$ ，立刻发现其在 $\omega = \omega_0$ 处值为0。即存在允许的 L_0 使系统在 ω_0 处不稳定，矛盾。

故原假设不成立，必要性得证。

可以类似地证明加性摄动的鲁棒稳定性条件必要性如下：

假设系统：

$$\forall \Delta \text{ s.t. } |\Delta(j\omega)| \leq l_a(\omega), \forall \omega, |1 + (G_0 + \Delta)K(j\omega)| > 0$$

但存在某个频率 ω_0 ，使得

$$\left| \frac{K}{1 + G_0K}(j\omega_0) \right| \geq \frac{1}{l_a(\omega_0)}.$$

令：

$$\Delta_0(j\omega) = \begin{cases} -\frac{1+G_0K}{K}(j\omega) & \omega = \omega_0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

显然， $|\Delta_0(j\omega)| \leq l_a(\omega)$

将 Δ_0 代入 $|1 + (G_0 + \Delta)K(j\omega)|$ ，立刻发现其在 $\omega = \omega_0$ 处值为0。即存在允许的 Δ_0 使系统在 ω_0 处不稳定，矛盾。

故原假设不成立，必要性得证。

5. 下图给出了扰动观测器的设计原理。

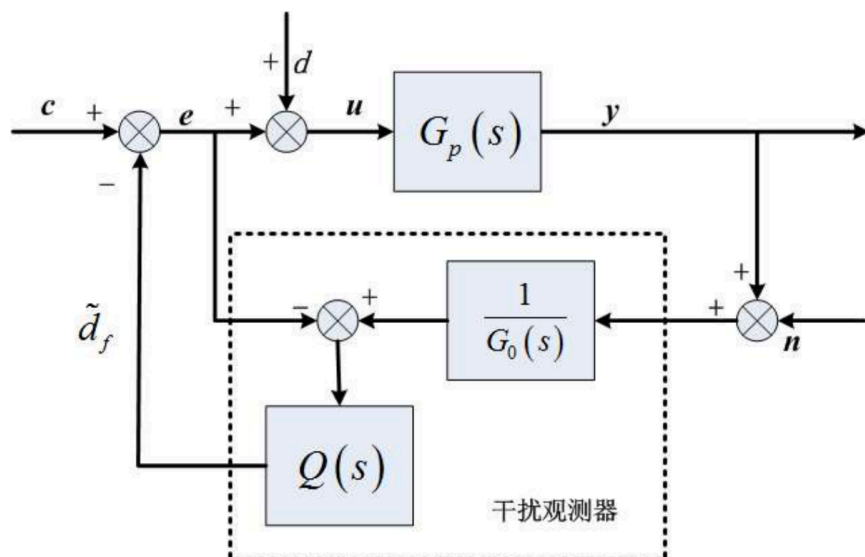


图 1 干扰观测器

图 1 中, $Q(s)$ 为一低通滤波器, $G_0(s)$ 为被控对象 $G_p(s)$ 的标称模型, 且 $G_0(s)$ 和 $G_p(s)$ 具有相同的相对阶。令

$$\Delta(s) = \frac{G_p(s)}{G_0(s)} - 1$$

则可得

$$G_p(s) = G_0(s)(1 + \Delta(s)), \quad G_p(s) - G_0(s) = \Delta(s)G_0(s)$$

显然, $\Delta(s)$ 表征了标称模型偏离被控对象实际特性的程度。由于图 1 中引入了反馈通道, 构成了闭环系统, 因此必须考虑稳定性问题。系统稳定的条件为

$$\|\Delta(s)Q(s)\|_{\infty} < 1 \quad (1)$$

这里所说的闭环系统稳定性, 应该如何理解? 是否为 $\Delta(s)$ 存在的条件下由 $C(s)$ 到 $Y(s)$ 的闭环系统稳定性? 写出自己的理解。在此基础上, 推导式(1)给出的稳定性条件。

答: 干扰观测器构成了一个内部反馈回路, 闭环系统稳定性实际上指这个回路的稳定性而非从参考输入 c 到 输出 y 整个主控制系统稳定性。

查看系统内变量关系:

$$\begin{aligned} u &= d + e \\ y &= G_p u \\ e &= -\tilde{d}_f \\ \tilde{d}_f &= Q \left(\frac{y}{G_0} - e \right) \end{aligned}$$

e 是反馈量，通过切断它对 u 的影响，容易给出从 d 到 \tilde{d}_f 的开环传递函数：

$$L = \frac{Q}{1-Q} \frac{G_p}{G_0} = \frac{Q}{1-Q} (1 + \Delta)$$

令：

$$\begin{aligned} & |1 + L| > 0 \\ \Leftrightarrow & |1 - Q + Q(1 + \Delta)| = |1 + \Delta Q| > 0 \\ & |1 + \Delta Q| \geq 1 - |\Delta Q| \\ & 1 - |\Delta Q| > 0 \Rightarrow |1 + \Delta Q| > 0 \\ & \Leftrightarrow |\Delta Q| < 1 \end{aligned}$$

这是一个充分条件。

关于必要性，可以举出一个反例：

$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{2}{s+2} \\ \Delta(s) &= \frac{5(s+2)}{s+1} \end{aligned}$$

此时：

$$|\Delta Q| \geq 1, \forall |\omega| \leq \sqrt{99}$$

但 $|1 + \Delta Q| > 0$ 恒成立。