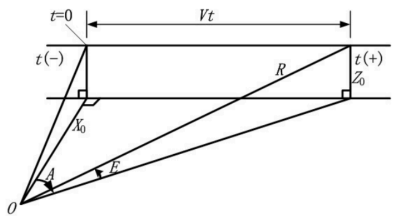
作业2

作者：Costannt

完成时间：2025年10月23日

1. 参照课件“第 6 章 控制系统的输入条件分析（1）”中给出的 “例 1 跟踪直线飞行目标时伺服系统的输入”关于方位角的分析过程，针对相同的飞行目标，完成高低角输入信号的分析。（包括角度、角速度、角加速度的解析表达式，角输入信号的频谱分析。）

解：



观察几何关系，由勾股定理可给出：

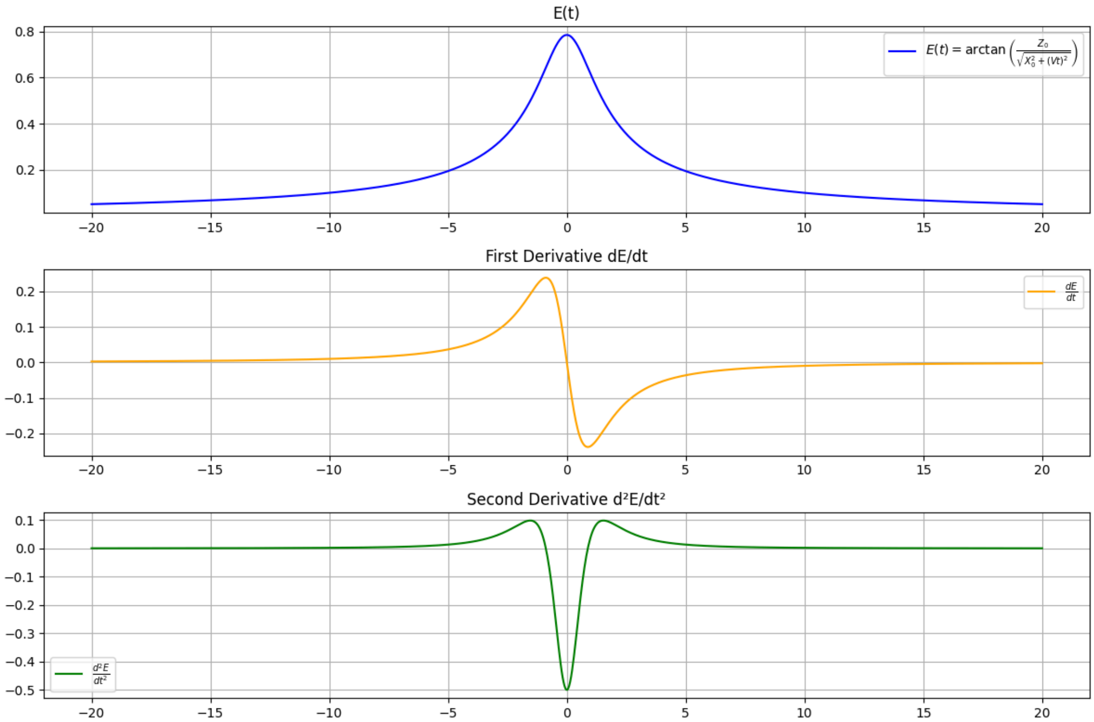
$$E=\arctan\frac{Z_0}{\sqrt{X_0^2+(Vt)^2}}$$

进而有：

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{dt}}=-\frac{V^2Z_0t}{\sqrt{V^2t^2+X_0^2}\left(V^2t^2+X_0^2+Z_0^2\right)}=-\frac{V}{Z_0}\sin^2E\sin A=-\frac{V}{R}\sin E\sin A$$

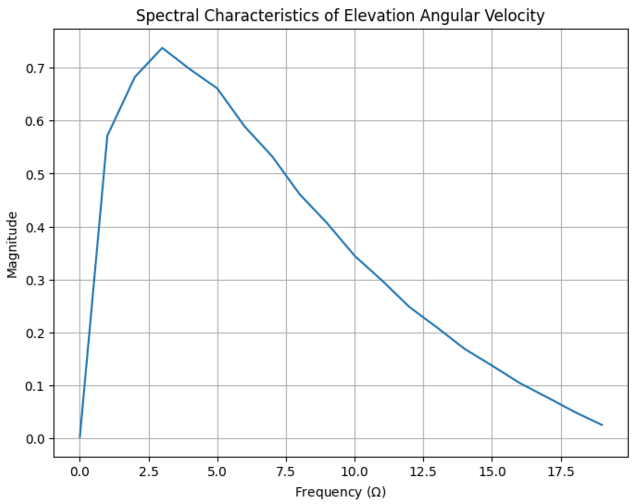
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{dt}^2}&=\frac{V^2Z_0\left[-2V^2Z_0^2t^2+3V^2t^2\left(V^2t^2+X_0^2+Z_0^2\right)-\left(V^2t^2+X_0^2\right)\left(V^2t^2+X_0^2+Z_0^2\right)\right]}{\left(V^2t^2+X_0^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(V^2t^2+X_0^2+Z_0^2\right)^2}\\&=-\frac{V^2}{R^2}\tan E[1-\sin^2A(1+\cos E)]\end{aligned}$$

假定 X_0,Z_0,V 均在国际单位制下取“1”，则有：



观察发现 $E(t)$ 的表达式发现，通过连续时间傅里叶变换的定义来求取其频谱形式是非常困难的，不妨着手从其速度特性利用离散傅里叶变换进行分析。

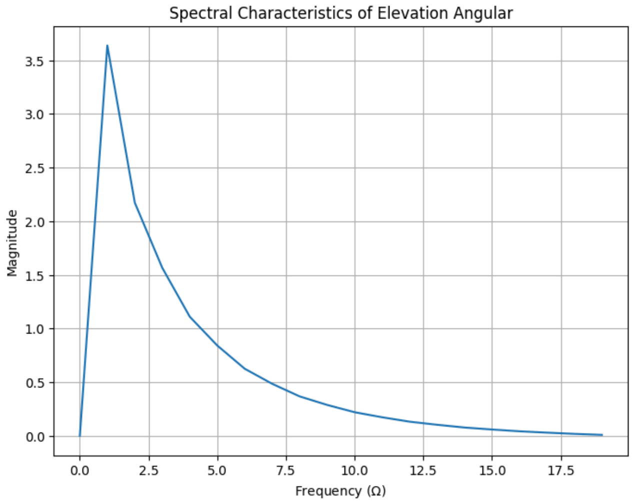
观察上图可发现，在 $\pm 20\text{s}$ 外，高度角速度曲线已很接近 0。对这段曲线做离散傅里叶变换。取数据长度 $T=40\text{s}$，对应的 $\Omega=\frac{2\pi}{T}\approx 0.1571\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ 。取 $N=40$，求得 40 点 DFT 后再乘以 $\Delta t=1\text{s}$则可得高度角速度曲线的频谱特性如下 $|\dot{E}(\mathrm{j}\omega)|$：



由：

$$|E(\mathrm{j}\omega)|=\frac{|\dot{E}(\mathrm{j}\omega)|}{\omega}$$

有：



这样一来，这个高度角信号的频谱分布在：

$$\omega = 18\Omega = 2.82 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

以内，或称 0.45Hz 内。

2. 阅读并掌握教材《控制系统设计》中关于离散傅里叶变换（DFT）、快速傅里叶变换（FFT）相关内容，列写 FFT 算法。（上交的作业中只列写算法即可。）

答：

库利-图基（Cooley-Tukey）算法

思想是通过分治策略将长度为 N 的 DFT 分解为若干较小规模的 DFT，从而显著降低计算复杂度。

设序列 $f(n)$（$n=0,1,\ldots,N-1$）的 DFT 定义为：

$$F(k)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)\,e^{-j2\pi nk/N},\quad k=0,1,\ldots,N-1 \tag{1}$$

直接计算该式需要 $O(N^2)$ 次运算。若当 N 为 2 的整数幂（即 $N=2^r$）时 ，将原序列按奇偶索引分为两组：

$$\begin{aligned} f_{\text{even}}(m)&=f(2m),\quad m=0,1,\ldots,N/2-1 \\ f_{\text{odd}}(m)&=f(2m+1),\quad m=0,1,\ldots,N/2-1 \end{aligned}$$

则 DFT 可重写为：

$$\begin{aligned} F(k)&=\sum_{m=0}^{N/2-1} f(2m)\,e^{-j2\pi(2m)k/N}+\sum_{m=0}^{N/2-1} f(2m+1)\,e^{-j2\pi(2m+1)k/N} \\ &=\sum_{m=0}^{N/2-1} f_{\text{even}}(m)\,e^{-j2\pi mk/(N/2)}+e^{-j2\pi k/N}\sum_{m=0}^{N/2-1} f_{\text{odd}}(m)\,e^{-j2\pi mk/(N/2)} \\ &=F_{\text{even}}(k)+W_N^k\,F_{\text{odd}}(k),\quad k=0,1,\ldots,N-1 \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $W_N=e^{-j2\pi/N}$ 为 N 次单位根。 由于 $F_{\text{even}}(k)$ 和 $F_{\text{odd}}(k)$ 均以周期 $N/2$ 重复，因此只需计算 $k=0,1,\ldots,N/2-1$，并利用对称性得到另一半：

$$F(k+N/2)=F_{\text{even}}(k)-W_N^k\,F_{\text{odd}}(k),\quad k=0,1,\ldots,N/2-1 \tag{3}$$

在下一页给出这个算法的伪代码：

Algorithm 1 Radix-2 Cooley-Tukey Fast Fourier Transform (FFT)

Require: Input: complex array $x[0..N-1]$, where $N = 2^r$ $(r \in \mathbb{Z}^+)$
Ensure: Output: DFT result $X[0..N-1]$, where $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-\jmath 2\pi nk/N}$

// Step 1: Bit-reversal permutation
for $i = 0$ to $N-1$ **do**
    $j \leftarrow \textsc{BitReverse}(i, r)$ ▷ $r = \log_2 N$
    if $i < j$ **then**
        Swap $x[i]$ and $x[j]$
    end if
end for
// Step 2: Iterative FFT (butterfly operations)
for $s = 1$ to r **do** ▷ Stage s, total $r = \log_2 N$ stages
    $m \leftarrow 2^s$ ▷ Current transform length
    $w_m \leftarrow e^{-\jmath 2\pi/m}$
    for $k = 0$ to $N-1$ step m **do**
        $w \leftarrow 1$
        for $j = 0$ to $m/2 - 1$ **do**
            $t \leftarrow w \cdot x[k + j + m/2]$
            $u \leftarrow x[k + j]$
            $x[k + j] \leftarrow u + t$
            $x[k + j + m/2] \leftarrow u - t$
            $w \leftarrow w \cdot w_m$
        end for
    end for
end for
return x ▷ Now x holds the frequency-domain result X

3. 单位阶跃信号的 Laplace 为$1/s$，频率特性分析时，能否将$s=j\omega$带入，将结果$1/j\omega$作为其频谱？为什么？

答：

不能。根据单边拉普拉斯变换的定义：

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0}^{+\infty} f(t) e^{-st} \mathrm{d}t, s = \sigma + j\omega \tag{1}$$

将 $s = j\omega$ 代入，相当于认为（1）中 $\sigma = 0$，但此时其显然不收敛。