

## 信号 FFT 与频谱的关系

①对于信号  $x(t)$ , 以  $f_s$  为采样频率进行采样  $N$  个点得到  $x(n), n = 0, 1, 2, \dots, N-1, n = f_s \cdot t$ 。

注意:  $N$  为偶数。

②用 MATLAB 的 fft() 函数对  $x(n), n = 0, 1, 2, \dots, N-1$  进行 FFT 分析得到  $X(k), k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

那么 FFT 分析的结果  $X(k)$  是一列复数, 它与时域采样信号  $x(n)$  有什么关系呢?

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \{ X(0) \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)0 \cdot n} + X(1) \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)1 \cdot n} + \dots + X\left(\frac{N}{2}-1\right) \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\left(\frac{N}{2}-1\right) \cdot n} + X\left(\frac{N}{2}\right) \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\left(\frac{N}{2}\right) \cdot n}$$

$$\quad + X(N-1) \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(N-1) \cdot n} + \dots + X\left(\frac{N}{2}+1\right) \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\left(\frac{N}{2}+1\right) \cdot n} \}$$

这一部分可以参考教材《控制系统设计》第二章频谱分析。

③设  $X(k) = a_k + jb_k$ , 计算画红框部分之和的结果。

$$X(k)e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k \cdot n} + X(N-k)e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(N-k) \cdot n}$$

$$= X(k)e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k \cdot n} + X(N-k)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k \cdot n} = 2a_k \cos\left(\left(\frac{2\pi}{N}\right)k \cdot n\right) - 2b_k \sin\left(\left(\frac{2\pi}{N}\right)k \cdot n\right)$$

④  $X(0)$  与  $X\left(\frac{N}{2}\right)$  虚部为 0, 重新整理  $x(n)$ 。

$$x(n) = \frac{1}{N} \{ a_0 \cos(0) \\ + 2a_1 \cos\left(\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot 1 \cdot n\right) - 2b_1 \sin\left(\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot 1 \cdot n\right) \\ + 2a_2 \cos\left(\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot 2 \cdot n\right) - 2b_2 \sin\left(\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot 2 \cdot n\right) \\ + \dots \\ + 2a_{\frac{N}{2}-1} \cos\left(\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot \left(\frac{N}{2}-1\right) \cdot n\right) - 2b_{\frac{N}{2}-1} \sin\left(\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot \left(\frac{N}{2}-1\right) \cdot n\right) \\ + a_{\frac{N}{2}} \cos(2\pi) \}$$

⑤将  $n = f_s \cdot t$  代入, 进一步整理。

$$\begin{aligned}
x(n) = & \frac{a_0}{N} \\
& + \frac{2\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{N} \cos\left(\frac{2\pi f_s}{N} \cdot 1 \cdot t + \phi_1\right) \\
& + \frac{2\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{N} \cos\left(\frac{2\pi f_s}{N} \cdot 2 \cdot t + \phi_2\right) \\
& + \dots \\
& + \frac{2\sqrt{a_{\frac{N}{2}-1}^2 + b_{\frac{N}{2}-1}^2}}{N} \cos\left(\frac{2\pi f_s}{N} \cdot \left(\frac{N}{2} - 1\right) \cdot t + \phi_{\frac{N}{2}-1}\right) \\
& + \frac{a_{\frac{N}{2}}}{N}
\end{aligned}$$

可以直观看出信号  $x(t)$  的直流分量为  $\frac{a_0}{N}$ ; 基频幅值  $\frac{2|X(1)|}{N}$ , 相角  $\phi_1$ ; 二倍频幅值  $\frac{2|X(2)|}{N}$ , 相角

$\phi_2$ ; ...,  $N/2-1$  倍频幅值  $\frac{2|X\left(\frac{N}{2}-1\right)|}{N}$ , 相角  $\phi_{\frac{N}{2}-1}$ ;  $N/2$  倍频幅值  $\frac{|X\left(\frac{N}{2}\right)|}{N}$ , 相角为 0。

注意：寻找信号主频（幅值最大值）时记得剔除直流分量。