轨迹规划（速度规划）

总流程：① 给出曲面，在曲面上取一系列曲线

主要关注与目标的偏差（几何约束）

② 小线段表示（离散化） 有可能无法用解析表达，则直接进行离散化

③ 路径优化：插值与（或）拟合； $\longrightarrow p(u)$

④ 逆解得到关节运动； 到这一步都与时间无关

考虑实际运动能力（运动、动力学约束） ⑤ 速度规划，得出合适的 $u=u(t)$，从而 $p(u)\to p(u(t)) \to \tilde{p}(t)$ 再进行插补

④ → ⑤：

$$\begin{array}{c} [t_{min},\ t_{max}] \\ \downarrow \\ [u_{min},\ u_{max}] \end{array}$$

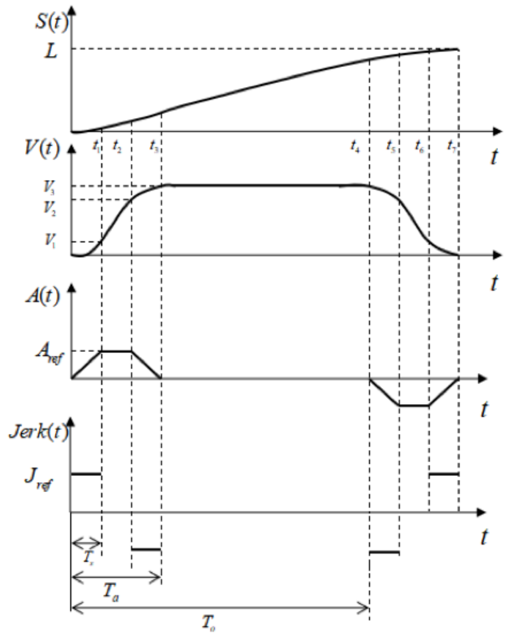
$\tilde{p}(t) = p(u(t)) \longrightarrow$ 机器执行（实时系统）

$u = u(t)$ ↓ 时间参数化

$p = p(u)$ $\{x(u)\ \ y(u)\ \ z(u)\ \ N_x(u)\ \ N_y(u)\ \ N_z(u)\}$ → 对于激光加工，就是激光焦点与轴

一、Point-to-Point Trajectory Planning

$\boxed{\text{S-Curve}}$



$$a = \begin{cases} \dfrac{A_{ref}}{T_s} t, & 0 \le t < T_s \\ A_{ref}, & T_s \le t < T_a - T_s \\ \dfrac{A_{ref}}{T_s}(T_a - t), & T_a - T_s \le t < T_a \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{A_{ref}}{T_s} t^2, & 0 \le t < T_s \\ \dfrac{1}{2}A_{ref}T_s + A_{ref}(t - T_s), & T_s \le t < T_a - T_s \\ v_2 + \displaystyle\int_{T_a-T_s}^{t} \dfrac{A_{ref}}{T_s}(T_a - u)\,du, & T_a - T_s \le t < T_a \end{cases}$$

$v_1 = \frac{1}{2}A_{ref}T_s$

$v_2 = v_1 + A_{ref}(T_a - 2T_s) = A_{ref}T_a - \frac{3}{2}A_{ref}T_s$

$$= v_2 + \frac{A_{ref}}{T_s}\int_{T_a-t}^{T_s} u\,du = v_2 + \frac{A_{ref}}{T_s} \times \frac{1}{2}u^2 \Big|_{T_a-t}^{T_s}$$

$[T_s^2 - (T_a - t)^2]$

$t = T_a$ 时有 $\boxed{v_3 = A_{ref}T_a - A_{ref}T_s}$

$A_{ref}T_a - A_{ref}T_s - \frac{1}{2}\frac{A_{ref}}{T_s}(T_a - t)^2$

$$l = \int_0^{T_s} \frac{1}{2}\frac{A_{ref}}{T_s}t^2\,dt + \int_{T_s}^{T_a-T_s}\left(-\frac{1}{2}A_{ref}T_s + A_{ref}t\right)dt + \int_{T_a-T_s}^{T_a} v_2 + \frac{A_{ref}}{T_s}\times\frac{1}{2}[T_s^2 - (T_a-t)^2]\,dt$$

$$= \frac{1}{6}A_{ref}T_s^2 - \frac{1}{2}A_{ref}T_s(T_a - 2T_s) + \frac{1}{2}A_{ref}t^2\Big|_{T_s}^{T_a-T_s} + A_{ref}(T_a - T_s)T_s - \frac{1}{2}\frac{A_{ref}}{T_s}\underbrace{\int_0^{T_s} t^2\,dt}_{=\frac{1}{6}A_{ref}T_s^2}$$

$$= -\frac{1}{2}A_{ref}T_s(T_a - 2T_s) + A_{ref}T_aT_s - A_{ref}T_s^2 + \frac{1}{2}A_{ref}[T_a^2 + T_s^2 - 2T_aT_s - T_s^2]$$

$$= -\frac{1}{2}A_{ref}T_aT_s + \frac{1}{2}A_{ref}T_a^2$$

$$= \frac{1}{2}A_{ref}T_a(T_a - T_s) = \frac{1}{2}T_a v_3$$

$2\times\frac{1}{2}T_a v_3$

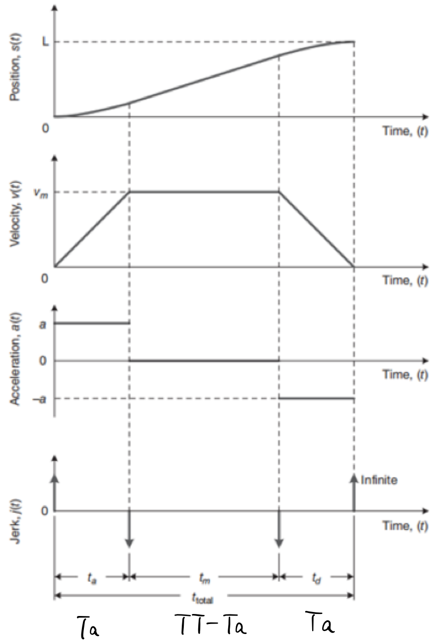
$\Rightarrow 2l + v_3(T_o - T_a) = L$

$\Rightarrow \boxed{v_3 = \dfrac{L}{T_o}}$!

联立 v_3 方程可解得 A_{ref} 与 J_{ref}

梯形速度规划：（LFPB, Linear Function with Parabolic Blends）

$$v=\begin{cases} A_{max}\,t, & 0<t\le T_a=\dfrac{V_{max}}{A_{max}} \\ V_{max}, & T_a<t\le TT \\ V_{max}-A_{max}(t-TT) & TT<t\le TT+T_a \end{cases}$$



$$L=\int_0^{T_a} A_{max}t\,dt+\int_{T_a}^{TT} V_{max}\,dt+\int_{TT}^{TT+T_a} V_{max}-A_{max}(t-TT)\,dt$$

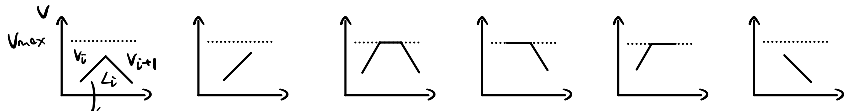
$$=\frac{1}{2}A_{max}t^2\Big|_0^{T_a}+(TT-T_a)V_{max}+V_{max}T_a-A_{max}\int_0^{T_a}t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}A_{max}T_a^2+TT\,V_{max}-\frac{1}{2}A_{max}T_a^2$$

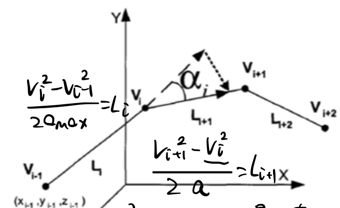
$$=TT\,V_{max}=L \qquad \Rightarrow\ TT=\frac{L}{V_{max}}$$

二、Shorter Line Segments Trajectory Planning with Lookahead

velocity profile: V_i, V_{i+1}, L_i, A_{max}, V_{max}



A_{max} (效率优先)



$\dfrac{V_i^2-V_{i-1}^2}{2a_{max}}=L_i$

$\dfrac{V_{i+1}^2-V_i^2}{2a}=L_{i+1}$

V_i在此情形下的最大值：全程用最大加速度来减速　即 $V_{i+1}^2+2a_mL_{i+1}$

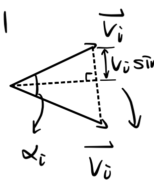
（全力刹车）

约束：

矢量层面约束

$$\begin{cases} V_i^2\le V_{i-1}^2+2a_mL_i \\ V_i^2\le V_{i+1}^2+2a_mL_{i+1} \\ V_i\le \dfrac{\boxed{TA_{max}}}{2\sin\frac{\alpha_i}{2}} \\ V_i\le V_{max} \\ V_i\ge 0 \\ V_0=V_N=0 \end{cases}$$

容许改变量 (ΔV)



前瞻速度规划中，转折处速度不连续

最多

$TA_{max}\ge 2V_i\sin\frac{\alpha_i}{2}$

$V_i\le\dfrac{TA_{max}}{2\sin\frac{\alpha_i}{2}}$

a_i不是加速度！

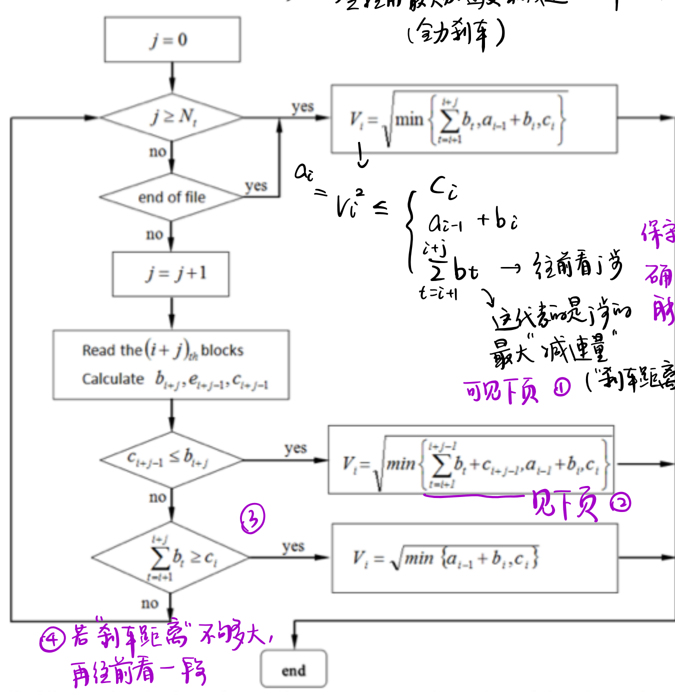
令 $a_i=V_i^2$，　$b_i=2a_mL_i$，　$e_i=\left(\dfrac{TA_{max}}{2\sin\frac{\alpha_i}{2}}\right)^2$，

$d=V_{max}^2$，　$c_i=\min(e_i,d)$

则有

$$\begin{cases} a_i\le a_{i-1}+b_i \\ a_i\le a_{i+1}+b_{i+1} \\ a_i\le c_i \\ a_i\ge 0 \\ a_0=a_N=0 \end{cases}$$

算法框图：



$a_i=V_i^2\le\begin{cases} c_i \\ a_{i-1}+b_i \\ \sum_{t=i+1}^{i+j}b_t \to 往前看j步 \end{cases}$

这代表的是j步的"最大"减速量

可见下页 ①（"刹车距离"）

保守，确保j步能刹住

见下页 ②

③

④若"刹车距离"不够大，再往前看一段

情况1（拐角）：存在$K_1 \in [1,N_t]$使得 $c_{i+K1-1} \le b_{i+K1}$

$$a_i = \min\left(a_{i-1}+b_i, c_i, \sum_{j=i+1}^{i+K1-1} b_j + c_{i+K1-1}\right)$$

情况2（小线段足够长）：存在$K_2 \in [1,N_t]$使得$\sum_{j=i+1}^{K2} b_j \ge c_i$

$$a_i = \min(a_{i-1}+b_i, c_i)$$

情况3（接下来的N_t段不够长）：此时有

$$a_i = \min\left(a_{i-1}+b_i, c_i, \sum_{j=i+1}^{i+N_t} b_i\right)$$

① $a_i \le \underline{a_{i+1}} + b_{i+1} \le \underline{a_{i+2}+b_{i+2}} + b_{i+1} \le \cdots \le \underbrace{a_{i+j}}_{\ge 0} + \sum_{t=i+1}^{i+j} b_t$

故 $a_i \le \sum_{t=i+1}^{i+j} b_t$ 此处存疑

② $\begin{cases} a_{i+j-1} \le a_{i+j} + b_{i+j} \\ \updownarrow \\ a_{i+j-1} \le c_{i+j-1} \end{cases}$ 若 $c_{i+j-1} \le b_{i+j}$，则进一步有 $c_{i+j-1} \le b_{i+j} + \underbrace{a_{i+j}}_{\ge 0}$

c较小通常是因为α较大

所以这种情况常常是因为拐角

有种"前瞻到此为止"的感觉

则这两个不等式实际变成一个： $a_{i+j-1} \le c_{i+j-1}$

$\downarrow$

$a_i \le a_{i+1} + b_{i+1} \le \cdots \le \underbrace{a_{i+j-1}}_{\le c_{i+j-1}} + \sum_{t=i+1}^{i+j-1} b_t$

$\Rightarrow \boxed{a_i \le c_{i+j-1} + \sum_{t=i+1}^{i+j-1} b_t}$

③ 不是②的情况，则都满足 $a_i \le a_{i+1} + b_{i+1} \le \cdots \le \underline{a_{i+j} + \sum_{t=i+1}^{i+j} b_t}$

若此项很大，大过c_i，则说明不用考虑这一不等式，只要用c_i来限制

（此不等式一定满足）

（不存在刹不住车的可能）

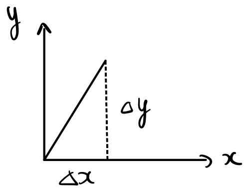
则 $a_i \le \begin{cases} a_{i-1} + b_i \\ c_i \end{cases}$ 即可

① 如果有大拐角或者容许速度特别小的地方（数学上就是某一段的c比b小），那么就停止前瞻，因为如果还用b作为“刹车距离”就刹不住车；

② 如果“总刹车距离”比较小（数学上就是若干段b的求和比c要小），就可以继续往前看，直至达到最大前瞻段数；如果“刹车距离”足够，那么只用c以及根据上一段（a_i-1 + b_i）来约束就好了。

(“刹车距离”实为速度减量，此处为通俗化表达)

多轴运动时还要考虑时间同步问题： 比例系数



$\frac{V_y}{V_x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ （直线段）

合长度：$L(i) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (Q_k(i+1) - Q_k(i))^2}$

各轴比例系数：$K(k,i) = \frac{|Q_k(i+1) - Q_k(i)|}{L(i)}$

速度容许值

合成速度最大值$Velmax_{synthetic}(i) = \min\left(\frac{vel_{max}}{K(1,I)}, \frac{vel_{max}}{K(2,I)}, \dots, \frac{vel_{max}}{K(m,i)}\right)$

分配

同上

合成加速度最大值$Accmax_{synthetic(i)} = \min\left(\frac{acc_{max}}{K(1,i)}, \frac{acc_max}{K(2,i)} \cdots \frac{acc_{max}}{K(m,i)}\right)$

允许速度跳变最大值$Verrmax(i,k) = \frac{\Delta v}{|K(k,i+1) - K(k,i)|}$

允许速度最大值$V_{max}(i) = \min(V_{max}(i,1), V_{max}(i,2), \dots V_{max}(i,m))$