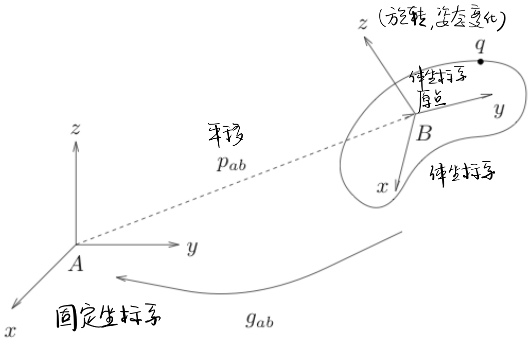
刚体运动（二）一般刚体运动

一、



$$SE(3)=\{(p,R),\ p\in\mathbb{R}^3,\ R\in SO(3)\}=\mathbb{R}^3\times SO(3)$$

$$q_a=p_{ab}+R_{ab}q_b \implies g(q)=p+Rq$$ 对点的作用（固定矢量）

$$g_*(v)=g(s)-g(r)=R(s-r)=Rv$$ 对向量的作用（自由矢量）

不是线性的？

二、齐次坐标　将 $\mathbb{R}^3$ 中的向量用 $\mathbb{R}^4$ 中向量表示

点 $q=\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{bmatrix}\longrightarrow \bar{q}=\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\q_3\\1\end{bmatrix}$　　$\bar{q}_1-\bar{q}_2$

向量 $v=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}\longrightarrow \bar{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\0\end{bmatrix}$

矢量与点的加法为点（末坐标为 $0+1=1$）

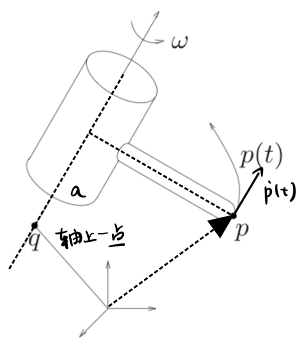
此处加线的向量/点代表齐次坐标，不致混淆时，不加以区分

$$q_a=R_{ab}q_b+p_{ab}\implies \bar{q}_a=\begin{bmatrix}q_a\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_{ab}&p_{ab}\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_b\\1\end{bmatrix}$$

则 g 以矩阵形式描述了平移与旋转 → 线性映射！

可以证明，g 是刚体运动（保长度与叉积），$g\in SE(3)$　满足群的性质　special Euclidean group

三、导出一般刚体运动的指数坐标表示



$$\dot{p}(t)=\omega\times(p-q-\underset{\text{与}\omega\text{同向}}{a})=\omega\times(p(t)-q)=\hat{\omega}(p(t)-q)$$

自由矢量　　点

化为齐次坐标表示

$$\begin{bmatrix}\dot{p}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\omega}&-\omega\times q\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\1\end{bmatrix}=\hat{\xi}\begin{bmatrix}p\\1\end{bmatrix}，\text{则}\quad \boxed{\hat{\xi}=\begin{bmatrix}\hat{\omega}&v\\0&0\end{bmatrix},\quad v=-\omega\times q}$$

对于纯平移运动，$\dot{p}(t)=v\implies\begin{bmatrix}\dot{p}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&v\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\1\end{bmatrix}$　　$\boxed{\hat{\xi}=\begin{bmatrix}0&v\\0&0\end{bmatrix}}$

统一形式 $\implies\dot{p}=\hat{\xi}p$　　$p(\theta)=e^{\hat{\xi}\theta}p_0$

可以证明（命题2.8，2.9），任给 $\hat{\xi}$ 和 θ，都有 $e^{\hat{\xi}\theta}\in SE(3)$　→ 此证明同时给出了根据 ξ 和 θ 算 $e^{\hat{\xi}\theta}$ 的方法

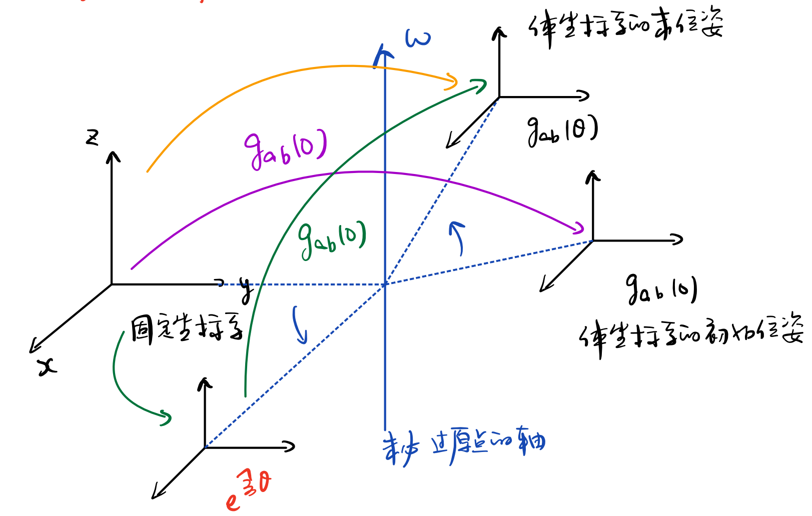
任给一个刚体变换矩阵 g，都存在 ξ 与 θ 使得 $e^{\hat{\xi}\theta}=g$　→ 给出了反算方法

$$e^{\hat{\xi}\theta}=\begin{bmatrix}e^{\hat{\omega}\theta}&(I-e^{\hat{\omega}\theta})(\omega\times v)+\omega\omega^Tv\theta\\0&1\end{bmatrix}$$

因此，上面的式子中的 $e^{\hat{\xi}\theta}$ 就是一个刚体变换矩阵！ $\implies p(t)=g(t)p_0$　或 $p(\theta)=g(\theta)p_0$

类似地，若令 $g_{ab}(0)$ 代表固连于刚体的坐标系相对于固定坐标系的初始位姿，则有 $g_{ab}(\theta)=e^{\hat{\xi}\theta}g_{ab}(0)$

从几何角度理解 $e^{\hat{\xi}\theta}$:



橙色线: $g_{ab}(\theta)$ 末位姿相对于固定坐标系

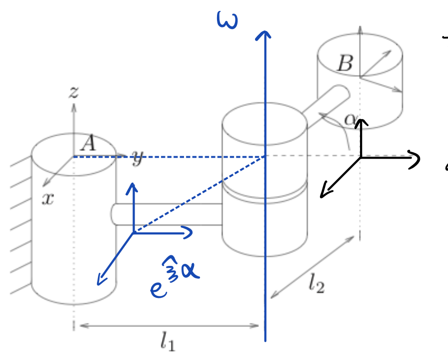
$\|$

绿色线: $e^{\hat{\xi}\theta}g_{ab}(0)$

$e^{\hat{\xi}\theta}$ 可理解为 固定坐标系绕ω的旋转的结果

从它出发看"转完的"末位姿，和从固定系出发看 初始位姿 是相同的: $g_{ab}(0)$

例:



求 $g_{ab}(\alpha)$

已知 $g_{ab}(0)$

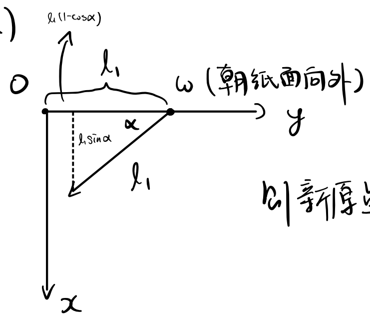
$$g_{ab}(0)=\begin{bmatrix} I & \begin{matrix}0\\ l_1+l_2\\ 0\end{matrix} \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

算 $e^{\hat{\xi}\alpha}$: 如左图所示，ω为旋转轴

即计算固定坐标系绕ω旋转后在固定坐标系下的表示

姿态变化为 $e^{\hat{\omega}\alpha}=R_z(\alpha)$

原点: z不变; xy:



则新原点为 $\begin{bmatrix} l_1\sin\alpha \\ l_1(1-\cos\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow e^{\hat{\xi}\alpha}=\left[\begin{array}{c|c} e^{\hat{\omega}\alpha} & \begin{matrix} l_1\sin\alpha \\ l_1(1-\cos\alpha) \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\Downarrow$

$$g_{ab}(\alpha)=e^{\hat{\xi}\alpha}g_{ab}(0)=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & -l_2\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & l_1+l_2\cos\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

刀具坐标系和工件坐标系下点和向量关系:

$$g_{mt}(\theta)\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}=g_{mw}(\theta)=\begin{bmatrix}Q_x & i\\ Q_y & j\\ Q_z & k\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

刀具系下的原点 即为刀心点

刀具系下的z轴 即为刀轴

点 切削点

轴 切削点法向