刚体运动(一) 旋转

1、刚体变换 $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 性质：

保范数：$\|g(p)-g(q)\| = \|p-q\|$，变换前后两点间距不变

保叉积：$g_*(v\times w) = g_*(v)\times g_*(w)$ 保持方向

$\xrightarrow{\text{极化恒等式}}$ 保内积：$v_1^T v_2 = g_*(v_1)^T g_*(v_2)$

刚体中的点不能彼此平移但可以旋转，则取刚体上的一点，并在此点附上一个坐标系（即body frame）①

记录此frame相对于fixed frame的运动 ② $\begin{cases} \text{body frame的运动 (rotational)} \ ① \\ \text{与刚体相连的那一点的运动 (translation)} \ ② \end{cases}$

2、先研究旋转。 (1) 设旋转前的三轴为 x_a, y_a, z_a，旋转后的三轴为 x_b, y_b, z_b

旋转后的轴可在原坐标系下表示为 x_{ab}, y_{ab}, z_{ab}，设空间中一点q在旋转前后的系中坐标分别为 q_a, q_b，则有

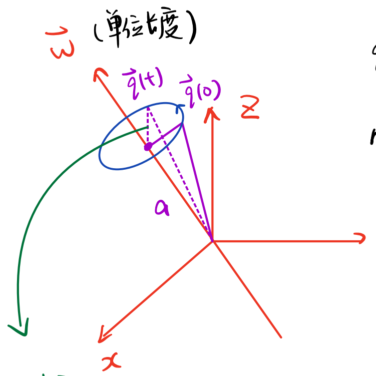
$$q_a = x_{ab}\underbrace{q_{bx}}_{\text{对应于 } x_b \text{ 的坐标}} + y_{ab}\underbrace{q_{by}}_{\text{以此类推}} + z_{ab} q_{bz} = [x_{ab}\ \ y_{ab}\ \ z_{ab}]\, q_b \qquad \text{定义 } R_{ab} = [x_{ab}\ \ y_{ab}\ \ z_{ab}]，$$

则 R_{ab} 即为从a到b的旋转矩阵。实质是基变换与坐标变换。

若b相对于a的旋转矩阵为 R_{ab}，c相对于b的旋转矩阵为 R_{bc}，则有 $R_{ac} = R_{ab} R_{bc}$

可以证明所有旋转矩阵构成一个群，称为 SO(3) special orthogonal group

(2) 导出旋转矩阵的指数坐标表示：



$\dot q(t) = \omega \times (q(t) - a)$ 注意到 $\omega \times a = 0$ (同向)

则 $\dot q(t) = \omega \times q(t)$ 引入叉积因子 $\hat\omega$ 使叉乘能用矩阵乘法来表示

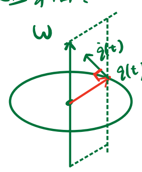
$$\left(a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{此即 } \hat a} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \hat a b \right)$$

$$\Downarrow$$

$q(t) = e^{\hat\omega t} q(0)$，$q(0) = q_0$

$e^{\hat\omega t}$ 为无穷级数，但根据性质可简化其为有限和，即所谓 Rodrigue公式：$\boxed{\exp(\hat\omega\theta) = I + \hat\omega\sin\theta + (1-\cos\theta)\hat\omega^2}$

放正来看：



可见 $\dot q(t)$ 同时垂直于ω与红线所示的向量 → 即 $q(t)-a$
（或者说垂直于二者张成的平面）

可以证明（命题2.4，2.5），任给ω和θ，都有 $e^{\hat\omega\theta} \in SO(3)$ （单射）

任给一个旋转矩阵R，都存在ω与θ 使得 $e^{\hat\omega\theta} = R$ （满射） → 此证明同时给出了根据R算ω和θ的方法

$(\|\omega\| = 1)$

因此，上面的式子中的 $e^{\hat\omega\theta}$ 就是一个旋转矩阵！ $\Rightarrow q(t) = R(t)\, q_0$ 或 $q(\theta) = R(\theta)\, q_0$

旋转矩阵尚有其他参数化方法，比如 Euler角；

旋转矩阵可以 $\begin{cases} \text{表示坐标变换 [上述(1)]} \\ \text{直接作用于向量将其旋转 [上述(2)]} \end{cases}$ 这两种意义下的运算顺序不同。 参看台湾大学林沛群教授的课程。