曲线/曲面的微分几何初步　　红色为矢量

1、参数曲线：令 $I=(a,b)$ 是 R 中的开区间，参数曲线是可微映射 $\alpha: I\to R^3$，

$\alpha(r)=[x(r)\quad y(r)\quad z(r)]^T$。

2、切线：向量 $\dfrac{d\alpha(r)}{dr}=\alpha'(r)=[x(r)\quad y(r)\quad z(r)]^T$ 为曲线 α 在 r 处的切矢量，

使 $\alpha'(r)=0$ 的点称为曲线的奇异点。称曲线 α 是正则的，若 $\forall r\in I$，有 $\alpha'(r)\neq 0$。

3、弧长：$s(r)=\int_a^r|\alpha'(\sigma)|d\sigma$

若曲线正则，则有 $\dfrac{ds}{dr}=|\alpha'(r)|$

关于弧长参数的切矢量为 $u=\dfrac{d\alpha}{ds}=\dfrac{d\alpha}{dr}\dfrac{dr}{ds}=\alpha'\dfrac{1}{|\alpha'|}$

若 $|\alpha'|\equiv 1$，则 $u=\alpha'$，弧长 s 可充当参数 r，即称曲线是由弧长参数化的。

对于由弧长参数化的曲线，有

4、u（此时即为 α'）为定长矢量，则有 $\alpha'\perp\alpha''$　　← 对定长矢量 v 有 $v\perp v'$

称 $|\alpha''(s)|$ 为 $\alpha(s)$ 的曲率 $k(s)$　　对定向矢量 v 有 $v\times v'=0$

归一化的矢量 $n(s)=\dfrac{1}{k(s)}\alpha''(s)$ 为曲线的法矢量。

5、称由 $n(s)$ 和 $\alpha'(s)$ 张成的平面为曲线的密切面，

$\alpha(s)$ 的密切圆是过该点的密切面上的圆，半径为曲率的倒数 $\dfrac{1}{k(s)}$，点 $\xrightarrow{\text{法向}}$ 圆心 → 曲率中心

密切面的单位法矢称为 $\alpha(s)$ 的副法线，则 $b(s)=\alpha'(s)\times n(s)$

6、$b'(s)=\dfrac{d}{ds}\left(\alpha'(s)\times n(s)\right)$

$=\alpha''(s)\times n(s)+\alpha'(s)\times n'(s)$　　$\Rightarrow b'\perp\alpha'$

$=k(s)\underbrace{n(s)\times n(s)}_{=0}+\alpha'(s)\times n'(s)=\alpha'(s)\times n'(s)$

又 b 为定长矢量，则 $b'\perp b$，因此有 $b'\parallel n$

则 $b'(s)=\tau(s)\underset{\downarrow}{n}(s)$　　$\tau(s)$ 称为曲线 $\alpha(s)$ 的挠率。

单位矢量

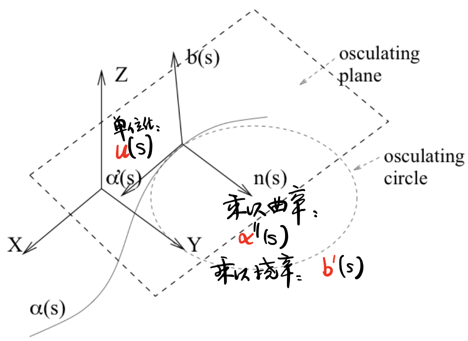
$\tau(s)$ 的计算可以这样完成：

↓

要只用与 α 有关的表达式来表示

$$\tau(s) = b'(s)\cdot n(s)$$
$$= \frac{d}{ds} b(s)\cdot n(s)$$
$$= \frac{d}{ds}\left(\alpha'(s)\times n(s)\right)\cdot n(s)$$
$$= \frac{d}{ds}\left(\alpha'(s)\times \frac{1}{k(s)}\alpha''(s)\right)\cdot \frac{1}{k(s)}\alpha''(s)$$
$$= \frac{1}{k(s)}\,\frac{\frac{d}{ds}\left(\alpha'(s)\times\alpha''(s)\right)k(s) - \underbrace{k'(s)\left(\alpha'(s)\times\alpha''(s)\right)}_{=0}}{k^2(s)}\cdot\alpha''(s)$$
$$= \frac{1}{k^2(s)}\left[\underbrace{\alpha''(s)\times\alpha''(s)}_{=0} + \alpha'(s)\times\alpha'''(s)\right]\cdot\alpha''(s)$$
$$= \frac{1}{k^2(s)}\,\alpha''(s)\cdot\left[\alpha'(s)\times\alpha'''(s)\right]$$

7. Frenet 公式：描述切矢、法矢、副法矢及其导数的关系：



$$u'(s) = \alpha''(s) = \underline{k(s)\,n(s)}$$

$$n'(s) = \frac{d}{ds} n(s) = \frac{d}{ds}\left(b(s)\times u(s)\right)$$
$$= b'(s)\times u(s) + b(s)\times \overbrace{u'(s)}^{=\alpha''(s) = k(s)n(s)}$$
$$= \tau(s)\,n(s)\times u(s) + b(s)\times k(s)\,n(s)$$
$$= -\tau(s)\,b(s) - k(s)\,u(s)$$

$$b'(s) = \underline{\tau(s)\,n(s)}$$

记 $R(s) = \left[\,u(s)\quad n(s)\quad b(s)\,\right]$ 则 $\frac{d}{ds}R(s) = R(s)\begin{bmatrix} 0 & -k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix}$

8、曲线论基本定理：给定方程 $k(s)\neq 0$ 与 $\tau(s)$，即存在正则的参数曲线 $\alpha: I\to R^3$ 使得 s 为弧长，$k(s)$ 与 $\tau(s)$ 分别为曲率和挠率，其余同样满足条件的曲线可由 α 经一刚体运动得到。

例：

Given the parameterized curve (helix)

$$\mathbf{a}(s) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{bs}{c}\right), s\in R$$

Where $c = \left(a^2+b^2\right)^{1/2}$

a. Show that the parameter s is the arc length.
b. Determine the curvature of $\mathbf{a}$
c. Determine the osculating plane of $\mathbf{a}$
d. Determine the torsion of $\mathbf{a}$
e. Show that the lines containing $\mathbf{n}(s)$ and passing through $\mathbf{a}(s)$ meet the axis under a constant angle equal to $\pi/2$.
f. Show that the tangent lines to $\mathbf{a}$ make a constant angle with the axis

此页标、矢符号混用、

a. $\alpha' = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}\right)$

则 $|\alpha'| = \sqrt{\frac{a^2}{c^2}\left(\sin^2\frac{s}{c}+\cos^2\frac{s}{c}\right)+\frac{b^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2}} = 1$ 　则 s为弧长参数

b. $\alpha'' = \left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c},\ -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c},\ 0\right)$

则曲率为其模： $k(s) = |\alpha''| = \sqrt{\frac{a^2}{c^4}\left(\sin^2\frac{s}{c}+\cos^2\frac{s}{c}\right)} = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$ 　为常数

c. 密切面由切矢和法矢张成， 切矢和法矢在上两问中已求得

d. $\alpha'''(s) = \left(\frac{a}{c^3}\sin\frac{s}{c},\ -\frac{a}{c^3}\cos\frac{s}{c},\ 0\right)$

$$\tau(s) = b'(s)\cdot n(s)$$

$$= \frac{d}{ds}\left(\alpha'(s)\times n(s)\right)\cdot n(s)$$

$\frac{1}{k(s)}\alpha''(s)$ 　 $\frac{1}{k(s)}\alpha''(s)$

$k(s)$ 　 d/ds

$$= \frac{1}{k(s)}\,\frac{(\alpha'(s)\times\alpha''(s)) - \alpha'(s)\times\alpha''(s)}{k^2(s)}\cdot\alpha''(s)$$

$$= \frac{\alpha'(s)\times\alpha'''(s)}{k^2(s)}\cdot\alpha''(s)$$

$$V = \alpha'(s)\times\alpha'''(s) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c} & \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c} & \frac{b}{c} \\ \frac{a}{c^3}\sin\frac{s}{c} & -\frac{a}{c^3}\cos\frac{s}{c} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{ab}{c^4}\cos\frac{s}{c},\ \frac{ab}{c^4}\sin\frac{s}{c},\ 0\right)$$

$$V\cdot\alpha''(s) = -\frac{a^2b}{c^6}\cos^2\frac{s}{c} - \frac{a^2b}{c^6}\sin^2\frac{s}{c} = -\frac{a^2b}{c^6}$$

$$k^2(s) = \frac{a^2}{c^4} \Rightarrow \tau = -\frac{a^2b}{c^6}\times\frac{c^4}{a^2} = -\frac{b}{c^2}$$

e. 直线方程为

$$(x,y,z) = \left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c},\ -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c},\ 0\right)t + \left(a\cos\frac{s}{c},\ a\sin\frac{s}{c},\ \frac{bs}{c}\right)$$

$(\ )\cdot(0,0,1) = \underline{0}$ 　直线正交于z轴 　$\frac{\pi}{2}$

f. $\left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}\right)t + \left(a\cos\frac{s}{c},\ a\sin\frac{s}{c},\ \frac{bs}{c}\right)$

$$\frac{\text{方向向量}\cdot\text{轴}}{\text{模}} = \begin{cases} x: & -\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c} \\ y: & \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c} \quad \text{non-constant} \\ z: & \underline{\frac{b}{c}} \quad \text{constant} \end{cases}$$

对于非均匀参数曲线：重新参数化 $t = s(t)$ 则 $t(t) = \bar{t}(s(t))$ $k(t) = \bar{k}(s(t))$

（变速曲线） $n(t) = \bar{n}(s(t))$ $b(t) = \bar{b}(s(t))$ $\tau(t) = \bar{\tau}(s(t))$

9. Frenet 公式形式不变：

定义 $\frac{ds}{dt} = |a'(t)| = v$

$$\begin{cases} t'(t) = kv\,n(t) \to \frac{dt}{dt} = \underbrace{\frac{dt}{ds}}_{\text{适用弧长参数时的定义}}\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{=v} = knv \\ n'(t) = (-\tau b - kt)v \to \frac{dn}{dt} = \frac{dn}{ds}\frac{ds}{dt} = (-\tau b - kt)v \\ b'(t) = \tau v\,t(t) \to \frac{db}{dt} = \frac{db}{ds}\frac{ds}{dt} = \tau t v \end{cases}$$

切矢导数 = 曲率 × 单位法矢

10. $\frac{da}{dt} = \frac{da}{ds}\frac{ds}{dt} = tv$

$$a'' = v\frac{dt}{dt} + v't = \frac{dv}{dt}t + v^2\frac{dt}{ds} = v^2kn + \frac{dv}{dt}t$$

用此条结论可以证明：

(1) $b = \frac{a' \times a''}{|a' \times a''|}$ 切矢 × 法矢 $\overset{\text{单位化}}{=}$ 副法矢

由 $a' \times a'' = vt \times \left(v^2kn + \frac{dv}{dt}t\right) = kv^3\,t \times n = kv^3 b$ 则 $|a' \times a''| = kv^3$， $b = \frac{a' \times a''}{|a' \times a''|}$

(2) $k = \frac{|a' \times a''|}{|a'|^3 \to v^3}$

(3)

$$由\ a''' = \left(\frac{dv}{dt}t + kv^2 n\right)' = \frac{d^2v}{dt^2}t + \frac{dv}{dt}\underbrace{\frac{dt}{ds}}_{kn}\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v} + kv^2\underbrace{\frac{dn}{dt}}_{(-\tau b - kt)v} + 2kvn\frac{dv}{dt} + \frac{dk}{dt}v^2 n$$

$$= \left(\frac{d^2v}{dt^2} - k^2v^3\right)t + \left(3kv\frac{dv}{dt} + \frac{dk}{dt}v^2\right)n - kv^3\tau b$$

则 $(a' \times a'') \cdot a''' = (kv^3 b) \cdot (\quad)$ 由 $b \perp t$ $b \perp n$，

$$= -k^2v^6\tau = -|a' \times a''|^2\tau$$

则 $\tau = -\frac{(a' \times a'') \cdot a'''}{|a' \times a''|^2}$.

$(abc) = a \cdot (b \times c)$

曲面的法向量：对 $r(u,v)$ 有 $\vec{n} = \frac{S_u \times S_v}{\underbrace{\|S_u \times S_v\|}_{\text{单位化}}}$，其中 $S_u = \frac{\partial r}{\partial u}$， $S_v = \frac{\partial r}{\partial v}$