凸优化与最优控制 25 秋（回忆版）

满分 100 分，考试时间 120 分钟，半开卷

*注：原试题为**全英文**但允许中文作答，该回忆版可能存在一些不严谨的地方。分值仅记得前 2 大题。*

*提示：该试题相比 2024 秋难度**极大提升**，且部分内容不在往年 A4 纸上。*

一、单选题（每题 3 分，共 12 分）

1. 以下哪个集合不是凸集（ ）

（A B 选项范数内部记不清是x还是x的 affine（但不影响），但可确定是 2、0 范数）

A. $\{x | \|x\|_2 \le k\}$

B. $\{x | \|x\|_0 \le 1\}$　　*其中 0 范数为向量中非 0 元素的个数。*

C. $\{x | Ax < b\}$

D. 所有n阶正定矩阵构成的集合

2. 牛顿迭代法的公式为（ ）

（选项均为$x_{k+1} = x_k + \cdots$形式）

3. KKT 条件是凸优化问题的（ ）

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 充要条件(under Slater's condition)　　D. 无关条件*（原表述为 irrelevant）*

4. 相比于梯度下降法，牛顿下降法（ ）

A. 计算量更少

B. 收敛速度更快

C. 不需要计算微分

D. 总是全局收敛

二、（每题 8 分，共 16 分）

1. $p(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{m}(x_k \cos(kt) + y_k \sin(kt))$，$I = (-a, a)$，$m$为固定正整数，证明$S = \{z = (x_0, \ldots, x_m, y_0, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{2m+1} |\ |p(t)| < 1 \text{ for } t \in I\}$为凸集。

（I 不确定是开区间还是闭区间，似乎不影响）

2. 证明$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \ge 2x^2 - 4xy + 3y^2 - 2y + 1\}$为凸集。

三、

$$f(x) = \max(a_i x + b_i), \quad i = 1, \ldots, n$$

1. 证明$f(x)$为凸函数。

2. 将$\min_x f(x)$转换为线性优化问题。

四、证明以下函数为凸函数或凹函数。

1. $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}$ for $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{++}$

2. 证明$f^*(y) = \sup_{x \in \text{dom } f}(y^{\mathrm{T}} x - f(x))$为凸函数，其中$\mathrm{f(x)}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$。

五、对于以下离散系统：

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, k = 0, \dots, N-1$$

令$J = \frac{1}{2}x_N^{\mathrm{T}}Q_N x_N + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(x_k^{\mathrm{T}}Qx_k + u_k^{\mathrm{T}}Ru_k)$，其中$Q_N \succcurlyeq 0, Q \succcurlyeq 0, R \succ 0$：

1. 将该问题转化为凸优化问题。
2. 写出凸优化问题的 KKT 条件，并写出 Ricatti 方程。
3. 若添加输入限制条件$\|u\|_\infty \le 1$，判断该问题是否仍为凸优化问题并证明结论。

六、

$$\min \quad J = \frac{1}{2}\int_0^T (x^2(t) + u^2(t))\mathrm{d}t$$
$$\dot{x}(t) = a(x) + u(t), x(0) = x_0$$
$$|u(t)| < 1, t \in [0, t]$$

1. 写出哈密顿函数$H(x, u, \lambda, t)$。
2. 写出最优控制条件*（包含代价条件和最小值条件）*。
3. 如果删除条件$|u(t)| < 1$，将该问题转换为凸优化问题。

（2 中表述记不清了，括号内原文大致为“including costate and minimum principle”之类的内容）

七、

$$\min \frac{1}{2}x^2 + y^2$$
$$\text{s.t.} \quad x + y \ge 1 \quad x \ge 0$$

1. 写出拉格朗日函数$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2)$。
2. 写出对偶问题的函数$g(\lambda_1, \lambda_2)$。
3. 写出原问题的 KKT 条件。
4. 求解原问题的最优解(x^*, y^*)与求解结果p^*。