哈尔滨工业大学（深圳）

2024 年秋离散数学试题　答案

题目来源：Gaster　题解：Chi. Ya.

不保证回忆正确，也还没回忆完哈，要是谁能想起来的话可以私聊我。还差 3，8，25，27 三个题。

一、选择题（每题 1 分）

1. 下列选项正确的是 ________.

   A. $p: \sqrt{2}$ 为无理数。$q: \sqrt{3}$ 为有理数。则 $p \to q$ 为真命题

   B. $p: 2 > 3$。$q: 3 < 4$。则 $p \to q$ 为假命题

   C. 一个命题逻辑的主（合取或析取）范式存在且唯一

   D. 一个命题逻辑的（合取或析取）范式存在且唯一

   A 选项，真的推出假的，是假命题。B 选项，前件 p 为假，是真命题。

   故答案为：$\boxed{\text{C}}$

2. $A = \{\{a\}, 1, 3, 4\}, B = \{2, 3, 4, \{a\}\}$，下列说法正确的是 ________.

   A. $\{1\} \in A$

   B. $\{a\} \subset B$

   C. $\{3\} \in P(A \cap B)$

   D. $\{1\} \subset P(A \oplus B)$

   A 的元素是 $\{\{a\}, 1, 3, 4\}$，没有 $\{1\}$ 这个元素，所以 A 错误。

   B 的元素是 $2, 3, 4, \{a\}$，不包含 a （只包含 $\{a\}$ 这个集合），B 错误。

   $A \cap B = \{\{a\}, 1, 3, 4\} \cap \{2, 3, 4, \{a\}\} = \{3, 4, \{a\}\}$ 再看 $P(A \cap B)$。这是 $\{3, 4, \{a\}\}$ 的幂集，包含所有子集，例如 $\{3\}, \{4\}, \{\{a\}\}, \{3, 4\}, \ldots$ 等。故 $\{3\} \in P(A \cap B)$ 为真。

   $A \oplus B = \{1, 2\}, \quad P(A \oplus B) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ 错。

   故答案为：$\boxed{\text{C}}$

3. 下列选项正确的是 ________.

   A. $t(s(r(R)))$ 一定是等价关系

   B. $s(r(t(R)))$ 一定不是等价关系

   C.

   D. 偏序关系是自反、对称、传递的

   偏序关系是自反、反对称、传递的，而不是对称的。操作 r, s, t 中 r 不会破坏这几个操作已经获得的性质。那么对任何二元关系 R，把这三种性质补足就能得到等价关系。传递是最难满足的。自反放哪都可以。这里说得比较模糊，但是我觉得在这塞个证明有些大材小用了。所以像 tsr, trs, rts 这类写法最终必定是*等价关系*。剩下的那三个不保证出等价关系。

   B 的反例：srt(等价关系) 是等价关系。

   故答案为：$\boxed{\text{A}}$

4. 设 f 为 $A \to B$ 的函数，$S \subset A, T \subset B$，下列说法正确的是 ________.

A. f 满射的充要条件是 $f(A) = B$

B. f 单射的充要条件是 $f(f^{-1}(T)) = T$

C. f 有反函数则必有 $f(A) = B$

D. f 有反函数则 $f^{-1}(f(S)) = S$

对于任何能实施逆运算的函数，都有 $f(f^{-1}(T)) \subseteq T$。C 选项，B 可能只是个陪领。D 选项，没上过这门课我暂时不能解释。

故答案为: $\boxed{\text{A}}$

5. 下列可简单图化的度数列为 ________.

A. (4,4,4,4,2)

B. (4,4,3,3,1)

C. (4,4,3,3,2,1)

D. (4,4,3,3,2,2)

检验是否为图的度数序列常用度数和的奇偶性判断:

- A. (4,4,4,4,2) 和为 18，但这个包画不出来不信你自己画，能画出来给你竖大拇指。
- B. (4,4,3,3,1) 之和为 15，是奇数，不可能成为简单图的度和。故不可图化。
- C. (4,4,3,3,2,1) 之和为 17，是奇数，不可能成为简单图的度和。故不可图化。
- D. (4,4,3,3,2,2) 和为 18，可图化。

故答案为: $\boxed{\text{D}}$

6. 设 n 为奇数且 $n \geq 2$，则 K_n________.

A. 既是欧拉图又是哈密顿图

B. 是欧拉图但不是哈密顿图

C. 不是欧拉图但是哈密顿图

D. 既不是欧拉图也不是哈密顿图

K_n的每个顶点度是$n-1$. 当 n 为奇数时，$n-1$ 为偶数，故是欧拉图。 完全图 $K_n(n \geq 3)$ 必是哈密顿图。

故答案为: $\boxed{\text{A}}$

7. 波兰表达式为`/-*abc+/de*fg`，则其逆波兰表达式为 ________.

A. `a*b-c/d/e+f*g`

B. `ab*c-de/fg*+/`

C. `/-*abc+/de*fg`

D. `gf*ed/+cba*-/`

波兰表达式 `/-*abc+/de*fg` 的含义是:

$$[(a*b)-c]/[(d/e)+(f*g)]$$

故答案为：$\boxed{\text{B}}$

8. 下列关于平面图的说法正确的是 ________.

A. 平行边和环影响图的平面性

B. 若其不含 K_5 或 $K_{3,3}$，则其是可平面化的

C. 平面图的对偶图一定是连通的

D.

B 选项，如果含有对应同胚的也不能平面化。C 选项，注意无限面，因此对偶必连通。

故答案为：$\boxed{\text{C}}$

9. 下列关于二部图的说法正确的是 ________.

A. 二部图的点着色数为 3

B. 若 p, q 都是偶数，则二部图 $K_{p,q}$ 是欧拉图

C. 二部图的完备匹配一定是最大匹配

D. 完备匹配的二部图中可能存在与两个非饱和点关联的边。

任何二部图都有 2 - 着色方案。$K_{p,q}$ 若表示完全二部图。其任一顶点度都为对侧顶点数，因此：若 p, q 均为偶数且 $p, q > 0$，则图中每个顶点度均为偶数，且该图连通 (若 $p, q \geq 1$)。故是欧拉图。可惜题里那个没说完全。若图中已经存在完备匹配，则至少一侧所有顶点都被匹配，这侧不再有非饱和点。不可能从这侧连出边。那侧的点间也没边。故 D 错误。

故答案为：$\boxed{\text{C}}$

10. 彼得松图的 $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ 分别为 ________.

A. 6,4,5,5

B. 4,6,5,5

C. 5,5,6,4

D. 5,5,4,6

Petersen 图有 10 个顶点、15 条边。β_0 是 4，Petersen 图中能找出 4 个互不相邻的点，找不出 5 个。β_1：Petersen 图存在完美匹配。α_0：可用 6 个点覆盖全部边，5 个不够。α_1：最小边覆盖数 $= |V| -$ 最大匹配数 $= 10 - 5 = 5$。

故答案为：$\boxed{\text{A}}$

二、判断题（每题 1 分）

11. $\{\uparrow\}$ 是完备集。

对。

故答案为：$\boxed{\text{对}}$

12. 有 n 个变项的矛盾式的主合取范式有 2^n 个极大项。

嗯背。

故答案为：$\boxed{\text{对}}$

13. A,B,C 为非空集合，$A\times B=A\times C$，则 $B=C$。

若 $A\times B=A\times C$ 且 $A\neq\varnothing$，就可左消去 A，从而得 $B=C$。

故答案为：$\boxed{\text{对}}$

14. 对于一个集合而言，确定的关系 R 所决定的划分有无数个。

一个确定的关系 R 若是等价关系，它所决定的划分 (商集) 只有**唯一**一个。

故答案为：$\boxed{\text{错}}$

15. $K_n(n\geq 1)$ 都是哈密顿图。

反例：K_1,K_2.

故答案为：$\boxed{\text{错}}$

16. 连通图中若含有桥，则其不是哈密顿图。

如果有桥，设桥能将图分为两个连通分支 G,S。若从 G 出发，经过这条割边进入 S 后，就不能经过这条割边回到 G 中起点。

故答案为：$\boxed{\text{对}}$

17. 若图 G 是平面图，则对 G 有 $m\leq 3n-6$。

需要是简单图，否则你可以往一个点上塞 100 个自环。

故答案为：$\boxed{\text{错}}$

18. 欧拉图的对偶图是二部图。

若 G 是欧拉图，则 G^* 是二部图 (因为对偶中每个面次数均为偶数，故可化为二部图)。

故答案为：$\boxed{\text{对}}$

19. 点覆盖集的补集是点独立集。

嗯背。

故答案为：$\boxed{\text{对}}$

20. 连通图的最小生成树唯一。

最小生成树的权和是确定的，但是树本身不一定是确定的。

故答案为：$\boxed{\text{错}}$

三、填空题（每题 1 分）

21. 三命题变项的公式 A 满足 $A\Leftrightarrow M_2\vee M_3\vee M_4$，则 A 的主合取范式为 ________.

注意到 $M_2=0+1+0,M_3=0+1+1,M_4=1+0+0$。各个命题变项都可以取 0 或 1。因此恒真。

故答案为：$\boxed{\mathbf{1}}$

22. $A=\{\{a,b\},\{b\}\}$，求 $\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cap\cap A)=$_________.

$\cap\cup A=\cap(\{a,b\}\cup\{b\})=a\cap b \quad \cup\cup A=\cup(\{a,b\}\cup\{b\})=a\cup b \quad \cap\cap A=\cap(\{a,b\}\cap\{b\})=b$

于是

$$\cup\cup A-\cap\cap A \;=\; a-b.$$

再并，得到 a.

故答案为：$\boxed{a}$

23. $A=\{3,4,5,6,7,8,9,10\}$，R 为模 7 同余，则 $A/R=$_________.

将 A 中元素依其 mod 7 的值进行分类：

$$3\mapsto 3,\;\; 4\mapsto 4,\;\; 5\mapsto 5,\;\; 6\mapsto 6,\;\; 7\mapsto 0,\;\; 8\mapsto 1,\;\; 9\mapsto 2,\;\; 10\mapsto 3.$$

故答案为：$\boxed{\{\{7\},\ \{8\},\ \{9\},\ \{3,10\},\ \{4\},\ \{5\},\ \{6\}\}.}$

24. 已知自然数集的基数为 $\aleph_0$，即 $card(\mathbb{N})=\aleph_0$。写出一个与 $\mathbb{N}$ 等势的集合：_________.

你随便写哈。

故答案为：$\boxed{\mathbb{Z},\mathbb{N}^*,\mathbb{Q},\mathbb{P},\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$

25.

26. K_{2n} 至少加上 _________ 几条边后是欧拉图。

为了使 K_{2n} 成为欧拉图，必须将每个顶点的度数变成偶数。初始时每个顶点度数均为奇数。加 n 个边即可。

故答案为：$\boxed{n}$

27.

28. 设 G 是森林（不止一棵树），其有 7 片树叶，5 个 2 度顶点，1 个 3 度顶点，其余顶点的度数都是 4（这样的顶点个数不为 0），则 G 有 _________ 棵树，_________ 个顶点。

对森林有

$$\sum_{v\in V}\deg v \;=\; 2\,(n-c),\quad \sum_{v\in V}(\deg v-2) \;=\; -2\,c,$$

其中 c 为该森林的分支数 (分量数)。7 个叶子 (1 度) 贡献 $\sum(\deg-2)=7\times(1-2)=-7$; 5 个 2 度顶点贡献总和 $5\times(2-2)=0$; 1 个 3 度顶点贡献 $3-2=1$; 其余都是 4 度顶点 $(4-2=2)$。假设只有 1 个 4 度顶点。这些已知顶点度的 $\sum(\deg-2)=-7+0+1+2=-4$。若不存在更多顶点，则

$$\sum_{v\in V}(\deg v-2)=-4=-2c \quad\Rightarrow\quad c=2.$$

再数顶点共 14 个。由森林的边数公式 $m = n - c$，可知边数 $= 14 - 2 = 12$，总度和 $= 24$，吻合。不用再试了。

故答案为：$\boxed{2, 14}$

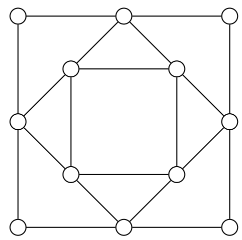
29. 平面图有 3 个连通分支，$n = 5, m = 7$，则面数为 ________.

欧拉公式推广版：

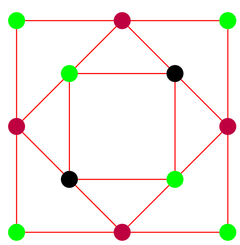
$$V + F - E = 1 + C\text{，即}5 + F - 7 = 1 + 3$$

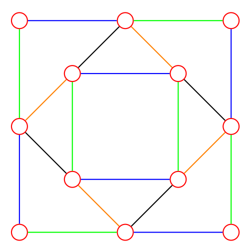
故答案为：$\boxed{6}$

30. 以下 12 阶图的点色数为 ________；边色数为 ________。



图中有三角 K_3，色数至少为 3。下面会给出一个可行的 3 - 染色方案。接下来考虑其边色数。记该图的最大度数为 $\Delta = 4$. 根据 Vizing 定理，可知图的边色数要么是 $\Delta = 4$，要么是 $\Delta + 1 = 5$. 在该图上尝试构造一个 4-色的边染色，发现可行，因此该图边色数就是 4.





故答案为：$\boxed{3, 4}$

四、简答题（70 分）

31.（14 分）张三、李四、王五完成一项任务，试用主析取范式给出派遣方案。要求：

（1）张三去则王五也去；

（2）李四去则王五不去；

（3）王五不去则张三去或者李四去。

设如下命题：p: 张三去，q: 李四去，r: 王五去。

根据要求可以列出以下条件：

1. 张三去则王五也去：$p \to r$
2. 李四去则王五不去：$q \to \neg r$
3. 王五不去则张三去或者李四去：$\neg r \to (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$【注：按照朴素的中文表述理解，这里的或严格来说应是异或。不过你写 $\neg r \to (p \vee q)$ 对最后的结果没影响。】

p	q	r	违反条件
0	0	0	谁也没派出，不合题意
0	0	1	√
0	1	0	√
0	1	1	$q \to \neg r$
1	0	0	$p \to r$
1	0	1	√
1	1	0	$p \to r$
1	1	1	$q \to \neg r$

对着真值表，得到最终的主析取范式：

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

32. (14 分) 设 G 为 n 阶 m 条边的无向连通图，用数学归纳法证明 $m \geqslant n-1$。

基础：当 $n=1$ 时，图 G 只有一个顶点且连通，不存在边，故 $m=0$，而 $n-1=0$，因此 $m=0 \geq 0=n-1$ 成立。

归纳：假设当图的顶点数为 k（$1 \leq k < n$）时，若该图是连通的，则其边数 $m' \geq k-1$ 成立。现在考虑顶点数为 $k+1$ 的情形。

设 G 为含有 $k+1$ 个顶点的连通图。从图中任取一个顶点 v。若去掉 v 以及以 v 为端点的所有边后，记剩下的图为 G'. 那么 G' 至少有k 个顶点. 可惜此时 G' 不一定是连通的。不过可以说，在 G' 中至少存在一个连通分量 G'_1，它包含了 k 个顶点或者更少个。我们形式化的说明这个部分：

情况 1：如果 G' 依然连通（这时 G' 就是 k 阶连通图），根据归纳假设，G' 的边数满足

$$m' \geq k-1.$$

而从 G' 到 G，为了恢复 v，至少要添上一条边把 v 与 G' 中的某个顶点连接起来，使得 G 连通。因此 G 的边数

$$m \geq m'+1 \ \geq \ (k-1)+1 \ = \ k.$$

因此 $m \geq k=(k+1)-1$. 归纳成立。

情况 2：如果 G' 不连通，那么为保证 G 原先是连通的，顶点 v 必须至少与 G' 中每个连通分支都有边。设 G' 有 r 个连通分量，分别记为 $G'_1, G'_2, \ldots, G'_r$，其中每个 G'_i 至少包含一个顶点，总顶点数为 k。根据归纳假设，若取 G'_i 各自都连通，则

$$m'_i \geq |V(G'_i)|-1.$$

将所有分量合并，G' 的边数 $m'=\sum_{i=1}^{r} m'_i$. 此时，从 G' 到 G，要使所有分量与 v 都相连，需要至少 r 条边。因此

$$m=m'+r=\sum_{i=1}^{r} m'_i+r \ \geq \ \sum_{i=1}^{r}\big(|V(G'_i)|-1\big)+r.$$

而

$$\sum_{i=1}^{r}|V(G'_i)|=k.$$

因此

$$m \ \geq \ \sum_{i=1}^{r}\big(|V(G'_i)|-1\big)+r=\left(\sum_{i=1}^{r}|V(G'_i)|\right)-r+r=k.$$

同理可知 $m \geq k=(k+1)-1$.

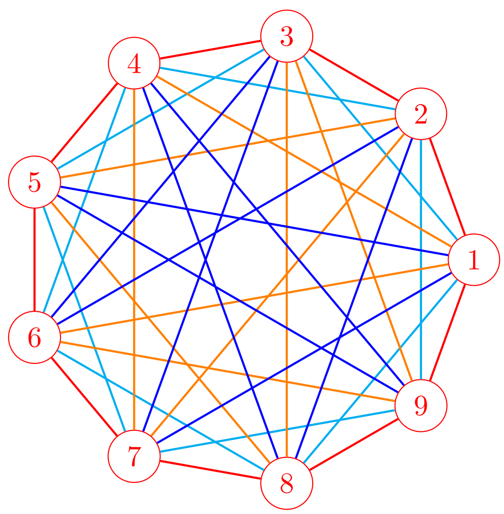
综上，在 $n=1$ 时成立，且由 k 推至 $k+1$ 也成立。由数学归纳法可知：对于连通的 n 阶图 G，一定有 $m \geq n-1$。

33. (14 分) 一幼儿园有 9 名新来的小朋友，每天中午围成圆桌就餐，每天小朋友相邻的人都不相同，试用图论求最多能坚持几天这种做法。

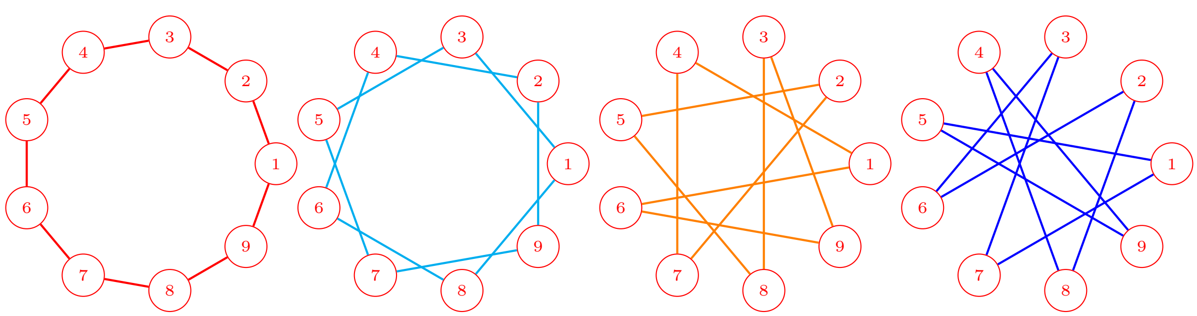
将 9 名小朋友视为图中的 9 个顶点。每天围成一个圆桌就餐，相当于在 9 个顶点上选出一个**哈密顿圈**。每天的相邻关系对应于这个闭路上的边。如果我们把所有天的座位相邻关系都画到一张 9 阶完全图 K_9 上，那么每天就餐的圆桌就是 K_9 的一个哈密顿圈。

题目要求每天小朋友相邻的人都不相同，相当于这些哈密顿圈必须**边两两不重叠**。也就是说，我们需要在 K_9 中寻找**最多个互不重叠的哈密顿圈**。

事实上这个 K_9 是 8-正则图，而每个哈密顿圈占用 9 条边，每个边上都是 2 度。其实就是对 K_9 施 2 因子的生成子图分解。那么能分解出的理论上限就是 4 组圈。说人话就是 9 个人的小团体，一个人左右的人天天不一样，这种情况最多持续 4 天，8 个人。下面给出一种完全分解方案。



为了方便你看清，我给你拆开了：



4.

34. (14 分) 设 n 阶无向简单图 G 的阶数 $n \geq 11$，求证 G 和 $\overline{G}$ 中至少有一个图是不可平面的。

假设 G 和 $\overline{G}$ 同时是可平面的。则根据面数公式，G 和 $\overline{G}$ 的边数必须满足以下不等式：

$$m \leq 3n-6, \overline{m} \leq 3n-6.$$

将两式相加得：$C_n^2 \leq 2(3n-6)$.

即

$$\frac{n(n-1)}{2} \leq 2(3n-6).$$

移项整理得：

$$n^2 - 13n + 24 \leq 0.$$

解此不等式可得：

$$2 < \frac{13-\sqrt{73}}{2} \leq n \leq \frac{13+\sqrt{73}}{2} < 11.$$

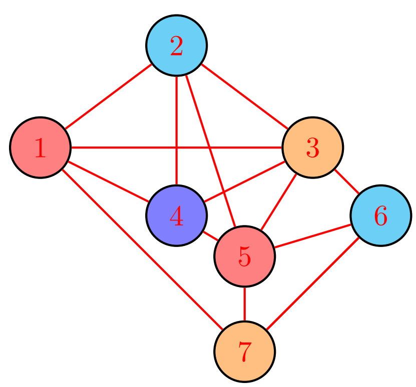
矛盾。故原命题成立。

35. (14 分) 计算机学院有 7 门选修课，有不同学生选修，其中：1 和 2，1 和 3，1 和 4，1 和 7，2 和 3，2 和 4，2 和 5，3 和 4，3 和 5，3 和 6，4 和 5，5 和 6，5 和 7，6 和 7 有学生同时选修。为了保证每名同学都可以参加每门课的考试，试给出一种利用最少个时间段进行考试的时间安排方案。

把这 7 门选修课看成一个无向图的 7 个顶点；凡是有学生同时选修的两门课之间就画一条边。问题就转化成点着色问题。

注意到：1, 2, 3, 4 这四个顶点两两相连：(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4). 存在 K_4 子图。它们恰好构成了一个 K_4。因此至少需要 4 种颜色。

下面我们给出一种可行的 4-着色方案，如下所示：



这意味着可以把课程分成 4 个时间段，每个时段的课互不冲突。

$$\begin{cases} \text{时段 1} : 1, 5 \\ \text{时段 2} : 2, 6 \\ \text{时段 3} : 3, 7 \\ \text{时段 4} : 4. \end{cases}$$