

数字逻辑设计

高翠芸

School of Computer Science
gaocuiyun@hit.edu.cn

目 录

- 布尔代数的应用
- 最大项、最小项表达式
- 不完全给定函数

组合逻辑电路的设计方法

已知 —— 设计要求

待求 —— 逻辑图

• 步骤：

1. 根据设计要求确定 —— 真值表
2. 根据真值表 —— 卡诺图(表达式)
3. 化简
4. 按设计要求，变换逻辑表达式
5. 画出逻辑图



组合逻辑电路的设计方法——续

- 逻辑设计目标

- 实现逻辑功能
- 满足性能指标
- 综合考虑各项因素：
规模、功耗、价格、可靠性、
速度、易实现、易维修、美观等

设计不唯一，最佳设计方案随新技术的
不断推出而变化

怎样设计组合逻辑电路？

■方法1：直接转换（简单情况下）

- 将文字描述的功能直接转换为真值表或表达式

■方法2：真值表转换

- 由真值表可直接写出标准形式的逻辑表达式

 - 标准与或式（最小项表达式：and-or）

 - 标准或与式（最大项表达式：or-and）

布尔代数的应用

方法1. 将文字描述的功能直接转换为表达式

Mary watches TV if it is Monday night and she has finished her homework

逻辑关系

The diagram illustrates the logical relationship in the sentence. Three red curly braces group the words "watches TV", "it is Monday night", and "she has finished her homework". Two green arrows point from these three groups towards the word "and", which is highlighted in blue, indicating the conjunction of the two conditions.

Define: $F = 1$: 看电视 $F = 0$: 没看电视

$A = 1$: 周一晚上 $A = 0$: 不是周一晚上

$$F = A \cdot B$$

$B = 1$: 完成作业 $B = 0$: 没完成作业

布尔代数的应用

方法1. 将文字描述的功能直接转换为表达式

The alarm will ring if the alarm switch is turned on
and the door is not closed, or it is after 6 P.M. and
the window is not closed.

布尔代数的应用

$$Z = AB' + CD'$$

The alarm will ring **if** the alarm switch is on **and**

Z

A

the door is not closed, **or** it is after 6 P.M. **and**

B'

C

the window is not closed

D'

怎样设计组合逻辑电路？

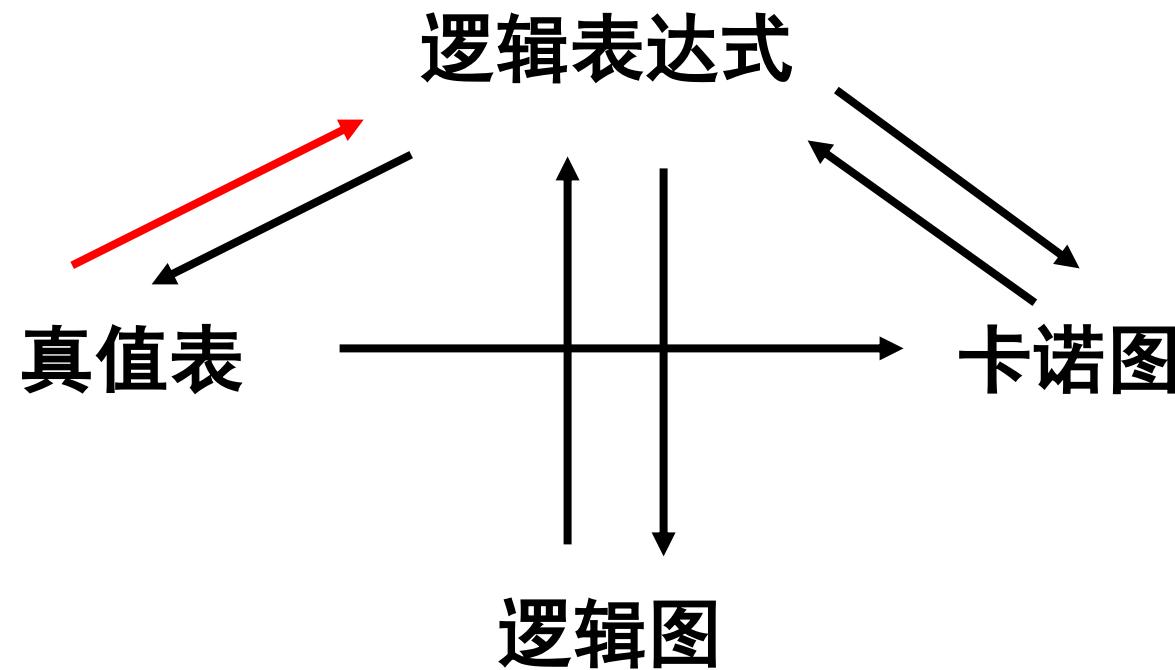
■方法1：直接转换(简单情况下)

- 将文字描述的功能直接转换为真值表或表达式

■方法2：真值表转换

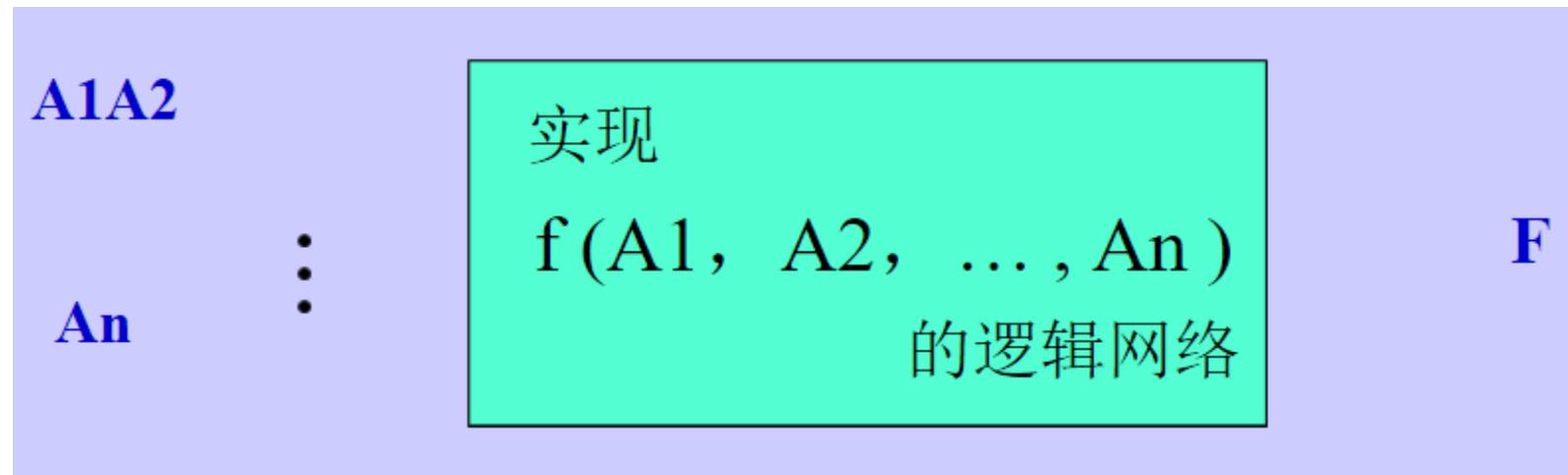
- 由真值表可以直接写出两种标准形式的逻辑表达式
 - 标准与或式 (最小项表达式: and-or)
 - 标准或与式 (最大项表达式: or-and)

逻辑函数的表示方法



逻辑函数

输入逻辑变量 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$; 输出逻辑变量 F ; 记为
 $F = f(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$, 关系如下图所示:



输入变量（自变量）取值: 0、1;

输出变量（逻辑函数值）取值: 0、1。

使用真值表设计组合逻辑电路

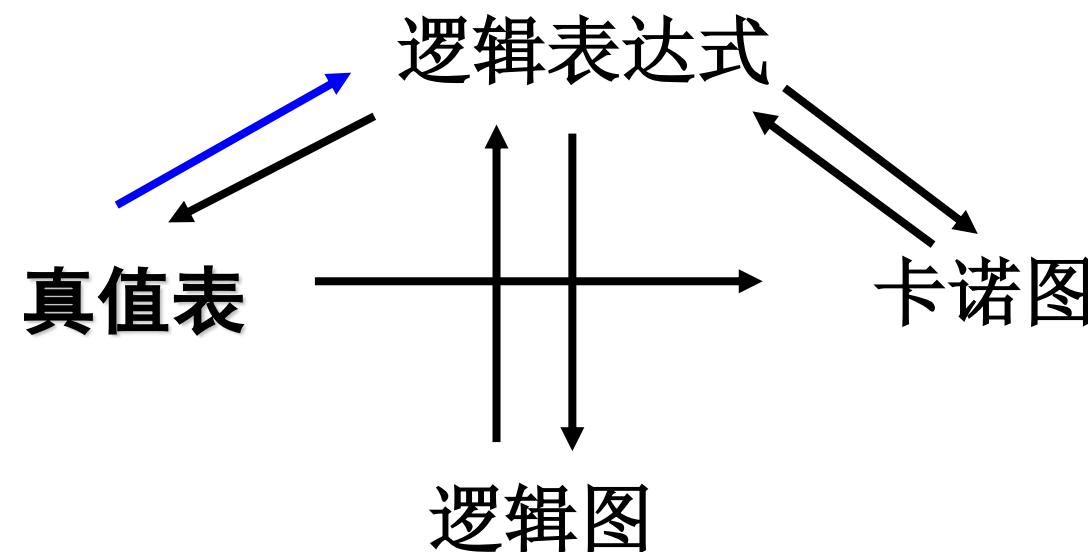
Truth table

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

真值表 ——> 表达式

① 写出标准与或式（乘积之和）

关注表中输出值为1的所有输入取值组合



使用真值表设计组合逻辑电路

Truth table

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1 ✓
1	0	0	0
1	0	1	1 ✓
1	1	0	1 ✓
1	1	1	1 ✓

真值表 → 表达式

① 写出标准与或式（乘积之和）

关注表中输出值为1的所有输入取值组合

$$F = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

输入取值组合中

1——原变量

0——反变量

使用真值表设计组合逻辑电路

真值表 ——> 表达式

②写出标准或与式（和之积）

关注表中输出值为0的所有输入取值组合

输入取值组合中

0——原变量

1——反变量

Truth table

A	B	C	F
0	0	0	0 ✓
0	0	1	0 ✓
0	1	0	0 ✓
0	1	1	1
1	0	0	0 ✓
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F = (A+B+C) \cdot (A+B+\bar{C}) \cdot (A+\bar{B}+C) \cdot (\bar{A}+B+C)$$

布尔代数的应用

Example. 某电路有三个输入端 A, B, C , 当 $ABC \geq 011$ 时, 输出 $f = 1$, 否则 $f = 0$.

- 步骤:
 1. 根据设计要求确定 —— 真值表
 2. 根据真值表 —— 卡诺图(表达式)
 3. 化简
 4. 按设计要求, 变换逻辑表达式
 5. 画出逻辑图

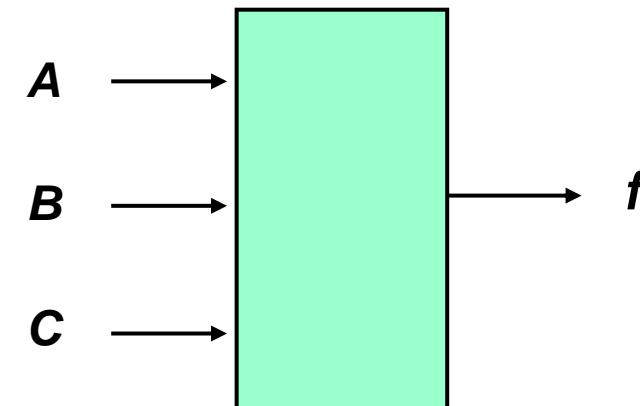
布尔代数的应用

Example. 某电路有三个输入端 A, B, C , 当 $ABC \geq 011$ 时, 输出 $f = 1$, 否则 $f = 0$.

① True Table

穷举法

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



布尔代数的应用

② Algebraic Expression

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f = A'BC + AB'C' + AB'C + ABC' + ABC$$

③ Simplification

$$f = A'BC + \cancel{AB'C'} + \cancel{AB'C} + \cancel{ABC'} + \cancel{ABC}$$

$$= A'BC + \cancel{AB'} + \cancel{AB}$$

$$= A'BC + \cancel{A} = BC + A$$

④ Logic Circuit



设计一个比赛需要用到的三人投票器，如果有两人或者三人投赞成票，则显示通过；否则不通过。请设计逻辑电路。

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

目 录

- 布尔代数的应用
- 最大项、最小项表达式
- 不完全给定函数

最小项minterm、最大项Maxterm的定义

序号		最小项	最大项
0	000	$A'B'C' = m_0$	$A + B + C = M_0$
1	001	$A'B'C = m_1$	$A + B + C' = M_1$
2	010	$A'B'C' = m_2$	$A + B' + C = M_2$
3	011	$A'B'C = m_3$	$A + B' + C' = M_3$
4	100	$AB'C' = m_4$	$A' + B + C = M_4$
5	101	$AB'C = m_5$	$A' + B + C' = M_5$
6	110	$ABC' = m_6$	$A' + B' + C = M_6$
7	111	$ABC = m_7$	$A' + B' + C' = M_7$

■ 编号次序：自左向右从高到低

最小项输入取值组合中
原变量——1
反变量——0

最大项输入取值组合中
原变量——0
反变量——1

- n 个变量组成的最小项 m_i : 是一个与项（包含 n 个变量）
- n 个变量组成的大项 M_i : 是一个或项（包含 n 个变量）
- 每个变量以原变量或反变量的形式出现，并且只出现一次。因子：
原变量或反变量
- n 个变量能组成的最小/大项的个数是 2^n

最小项 m_i 的特点

m_i

	$\bar{A} \bar{B} \bar{C}$	$\bar{A} \bar{B} C$	$\bar{A} B \bar{C}$	$\bar{A} BC$	$A \bar{B} \bar{C}$	$A \bar{B} C$	$A B \bar{C}$	ABC
000	1	0	0	0	0	0	0	0
001	0	1	0	0	0	0	0	0
010	0	0	1	0	0	0	0	0
011	0	0	0	1	0	0	0	0
100	0	0	0	0	1	0	0	0
101	0	0	0	0	0	1	0	0
110	0	0	0	0	0	0	1	0
111	0	0	0	0	0	0	0	1

A,B,C

- ① $\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$
- ② $m_i \cdot m_j = 0 \quad (i \neq j)$
- ③ 对所有输入组合，
只有一个最小项为
1 (输入组合等于最
小项编号时)

最大项 M_i 的特点

A,B,C	$A + B + C$	$A + B + \bar{C}$	$A + \bar{B} + C$	$A + \bar{B} + \bar{C}$	$\bar{A} + B + C$	$\bar{A} + B + \bar{C}$	$\bar{A} + \bar{B} + C$	$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$
000	0	1	1	1	1	1	1	1
001	1	0	1	1	1	1	1	1
010	1	1	0	1	1	1	1	1
011	1	1	1	0	1	1	1	1
100	1	1	1	1	0	1	1	1
101	1	1	1	1	1	0	1	1
110	1	1	1	1	1	1	0	1
111	1	1	1	1	1	1	1	0

- ① $\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$
- ② $M_i + M_j = 1 \quad (i \neq j)$
- ③ 对所有输入组合，只有一个最大项为0(输入组合等于最小项编号)

最小项和最大项的性质

1. 最小项的反是最大项，最大项的反是最小项（编号相同）；

$$\overline{\overline{ABC}} = \overline{m_0} = A + B + C = M_0$$

$$\overline{A + \overline{B} + \overline{C}} = \overline{M_3} = \overline{ABC} = m_3$$

2. 全部最小项之和恒等于“1”；

$$m_0 + m_1 + m_2 + m_3 = 1$$

3. 全部最大项之积恒等于“0”；

$$M_0 M_1 M_2 M_3 = 0$$

4. 一部分最小项之和的反等于其余所有最小项之和

$$\overline{m_1 + m_2} = m_0 + m_3$$

$$\overline{m_0} = m_1 + m_2 + m_3$$

最小项和最大项的性质——续

5. 两个不同的最小项之积恒等于“0”；

例如: $ABC \cdot A\bar{B}\bar{C} = 0$

6. 两个不同的最大项之和恒等于“1”；

例如: $(A + B + C) + (A + B + \bar{C}) = 1$

与或标准型

$$Y = \sum m_i = \sum m(0,1,4,6,7) = m_0 + m_1 + m_4 + m_6 + m_7$$

或与标准型

$$Y = \prod M_i = \prod M(0,1,4,6,7) = M_0 M_1 M_4 M_6 M_7$$

最小项表达式

- 标准与或式
- list of “1”

011 101 110 111

$$F = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

$$= m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

$$= \Sigma m (3 , 5 , 6 , 7)$$

最大项表达式

- 标准或与式
- list of 0

000

001

010

100

$$F = (A+B+C) \cdot (A+B+\bar{C}) \cdot (A+\bar{B}+C) \cdot (\bar{A}+B+C)$$

$$= M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_4$$

$$= \prod M(0, 1, 2, 4)$$

最大项、最小项表达式

练习：

	Minterm Expansion of f	Maxterm Expansion of f	Minterm Expansion of f'	Maxterm Expansion of f'
$f = \Sigma m(3, 4, 5, 6, 7)$	_____	_____	_____	_____
$f = \Pi M(0, 1, 2)$	_____	_____	_____	_____

逻辑函数的标准形式

1、积之和的标准形式, 即最小项之和的形式

•是哪些最小项之和呢? 函数输出为1的行对应的最小项

$$F = \sum_{X,Y,Z}(0,3,4,6,7)$$

$$F = \sum_{X,Y,Z}(0,3,4,6,7)$$

$$= X'Y'Z' + X'Y.Z + X.Y'Z' + X.Y.Z' + X.Y.Z$$

•利用互补律 $X+X'=1$ 可以把任何一个逻辑函数化为最小项之和的标准形式

例: 给定逻辑函数的积之和形式为

$$F = A + B'C$$

化为积之和的标准形式

逻辑函数的标准形式

2、和之积的标准形式 即最大项之积的形式

- 函数输出为0的行对应的最大项之积
 符号 $\prod_{A,B,C(1,2,4,5)}$ 是最大项列表.
- 利用互补律 $X \cdot X' = 0$, 在缺少某一变量的和项中加上该变量, 然后利用分配律 $A = A + X \cdot X' = (A + X)(A + X')$ 展开, 就可以把任何一个逻辑函数化为最大项之积的标准形式

写出 $F=A+B'C$ 的最大项表达式

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

最小项和最大项之间的转换关系

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$$G = \prod_{A,B,C}(3,5,6) = F'$$

$$F = \sum_{A,B,C}(3,5,6)$$

$$F = \prod_{A,B,C}(0,1,2,4,7)$$

标号互补

$$(A' \cdot B \cdot C)' = A + B' + C'$$

$$M_i = m_{i'}$$

$$(A \cdot B' \cdot C)' = A' + B + C'$$

$$m_i = M_{i'}$$

$$(A \cdot B \cdot C')' = A' + B' + C$$

最大项、最小项表达式

最小项之和

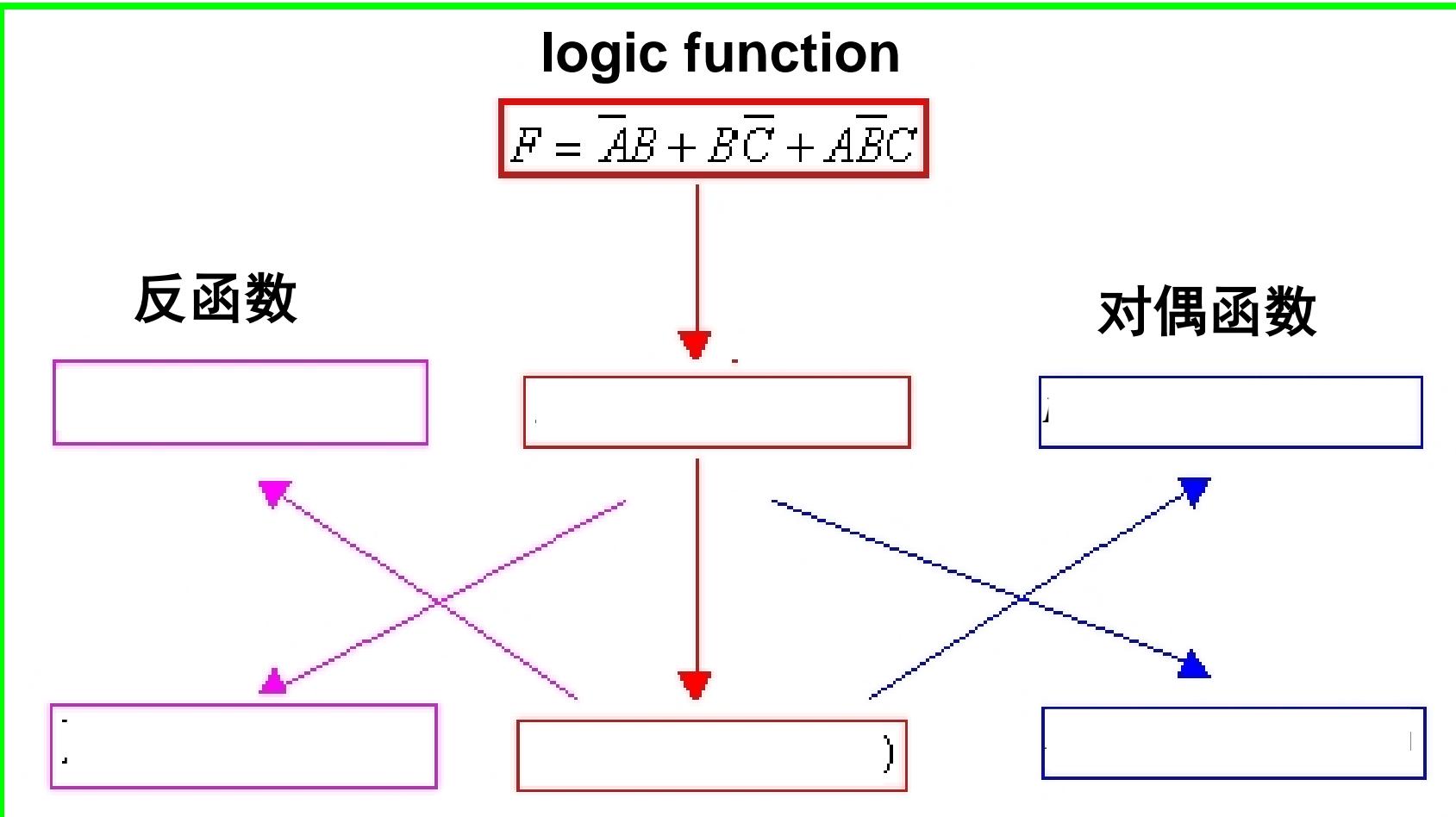
反函数

logic function

$$F = \bar{A}B + B\bar{C} + A\bar{B}C$$

对偶函数

最大项之积



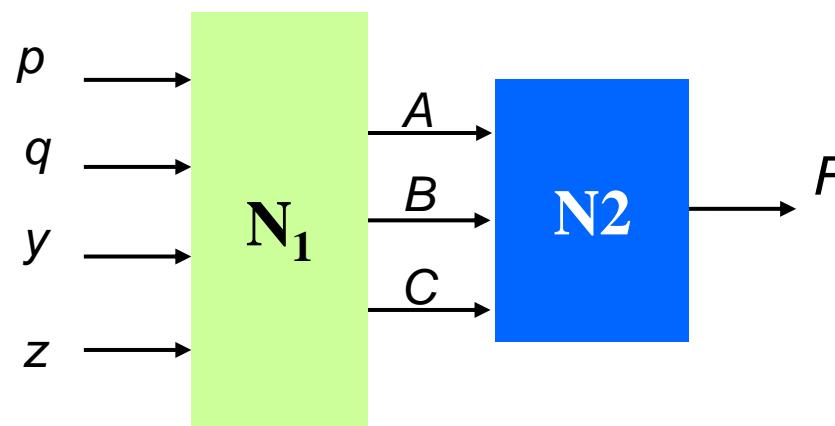
目 录

- 布尔代数的应用
- 最大项、最小项表达式
- 不完全给定函数

无关项 (Don't care terms)

- **约束项**: 不可能存在的输入取值组合。
- **任意项**: 某种输入取值组合存在，但是并不关心它导致的输出结果是0还是1，因为不影响电路功能。
- 约束项和任意项统称为无关项，即把这些最小项写入逻辑函数式无关紧要，可以写入也可以删除。

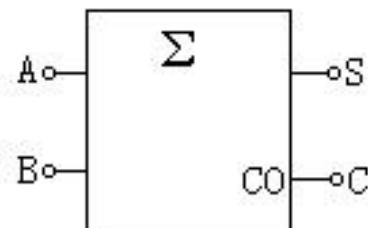
假设：无论 $pqyz$ 取何值，电路N1输出都不为001或110。



A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	X
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	X
1	1	1	1

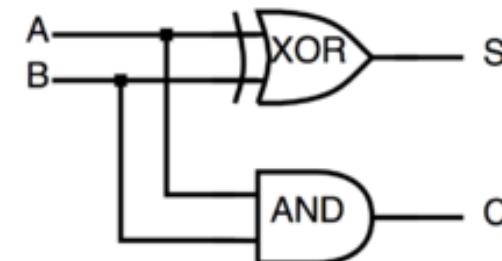
无关项 (Don't care terms)

■ 半加器 (Half-adder)

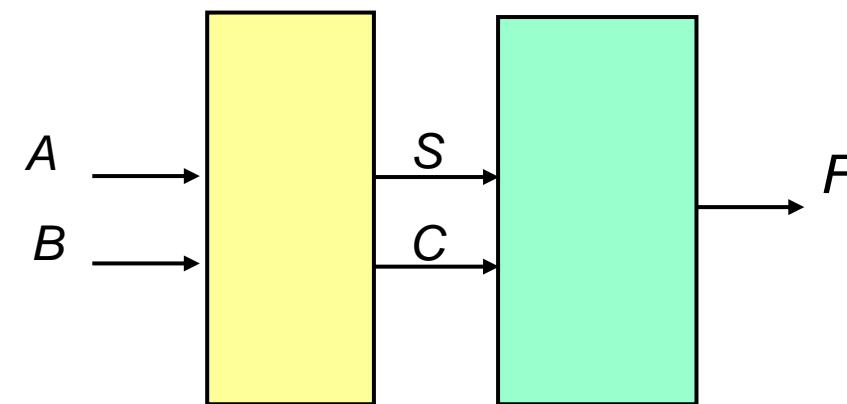


输入		输出	
A	B	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

逻辑表达式: $S = A \oplus B ; C = A \cdot B$ 。

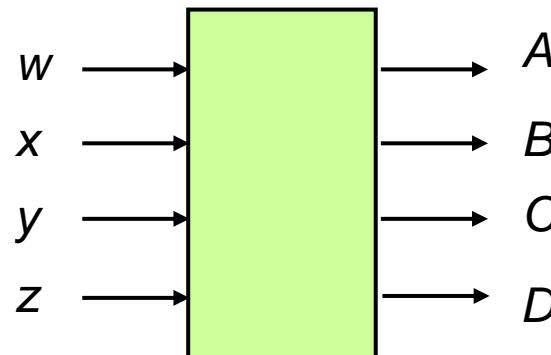


半加器的逻辑实现



例：8421BCD转余三码

将输入的
8421BCD码转
换为余3码



Decimal	8421 BCD	Excess-3
0	0000	0011
1	0001	0100
2	0010	0101
3	0011	0110
...
9	1001	1100
	1010	xxxx
.....
	1110	xxxx
	1111	xxxx

不完全给定函数

$$F = \sum m(0, 3, 7) + \sum d(1, 6)$$

$$F = \prod M(2, 4, 5) \cdot \prod D(1, 6)$$

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	X
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	X
1	1	1	1

例：8421BCD转余三码

将输入的
8421BCD码转
换为余3码

$$A = \sum m(5,6,7,8,9) + \sum d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

$$D = \sum m(0,2,4,6,8) + \sum d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

Decimal	8421 BCD	Excess-3
0	0000	0011
1	0001	0100
2	0010	0101
3	0011	0110
....
9	1001	1100
	1010	xxxx

	1110	xxxx
	1111	xxxx

目 录

- 布尔代数的应用
- 最大项、最小项表达式
- 不完全给定函数

以下哪些内容有不明白的，需要再讲解一下：



A 最大项



B 最小项



C 不完全给定函数



D 其他

提交