PHYS2001F 量子力学作业三　　　　　　　　提交日期： 27/11/2025

1. 设做一维自由运动的粒子 $t=0$ 时处于状态

$$\psi(x,0)=A\left[\sin^2(kx)+\frac{1}{2}\cos(kx)\right],$$

已知动量本征态（连续表述）为

$$\varphi_{k'}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik'x}.$$

求（1）将 $\psi(x,0)$ 展开到动量本征态中并求展开系数；（2）求 $t=0$ 与 $t>0$ 时动量和动能的可能取值与概率以及平均值。

2. 定义算符

$$\hat{A}=\frac{1}{2}\left(\hat{U}+\hat{U}^{+}\right);\ \hat{B}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{U}-\hat{U}^{+}\right)$$

式中算符 $\hat{U}$ 是么正算符。证明 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 皆为厄米算符，并且满足

$$\hat{A}^2+\hat{B}^2=1$$
$$[\hat{A},\hat{B}]=0$$

3. 在 $t=0$ 时刻，氢原子处于状态

$$\Psi(r,0)=C\left[\sqrt{\frac{1}{2}}\psi_1(r)+\sqrt{\frac{1}{3}}\psi_2(r)+\sqrt{\frac{1}{2}}\psi_3(r)\right]$$

式中 $\psi_n(r)$ 为氢原子的第 n 个本征态。计算 $t=0$时能量的取值概率与平均值，写出 $t>0$ 时的波函数。

4 设氢原子处于基态，求在 $r=2a_0$ 以外处发现电子的概率。若在半径为 r_0 的球内发现电子的概率为 0.9 ，那么，半径 r_0 为多大

5. 处于三维空间体系的基矢分别为 $\left|u_1\right\rangle$ 、 $\left|u_2\right\rangle$ 和 $\left|u_3\right\rangle$ 。已知算符 $\hat{L}$ 与 $\hat{S}$ 分别满足

$$\hat{L}\left|u_1\right\rangle=\left|u_1\right\rangle,\hat{L}\left|u_2\right\rangle=0,\hat{L}\left|u_3\right\rangle=-\left|u_3\right\rangle$$
$$\hat{S}\left|u_1\right\rangle=\left|u_3\right\rangle,\hat{S}\left|u_2\right\rangle=\left|u_2\right\rangle,\hat{S}\left|u_3\right\rangle=\left|u_1\right\rangle$$

给出算待 $\hat{L}$、$\hat{S}$、$\hat{L}^2$ 及 $\hat{S}^2$ 的矩阵表示

6.处于三维空间体系的基矢分别为 $|u_1\rangle$、$|u_2\rangle$ 和 $|u_3\rangle$ 。已知两个状态分别为

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{i}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|u_3\rangle$$

求此二状态的投影算符的矩阵表示。

7. 求自由粒子坐标算符的海森伯表示。

8. 求 $\hat{s}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 及 $\hat{s}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ 的本征值及相应的本征矢。

9. 设氢原子处于状态

$$\Psi(r) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}R_{21}(r)Y_{11}(\theta,\phi) \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}R_{21}(r)Y_{10}(\theta,\phi) \end{pmatrix}$$

求轨道角动量 z 分量和自旋 z 分量的平均值，进而求出总磁矩 $\mu = -\frac{e}{2\mu c}L - \frac{e}{\mu c}S$ 的 z 分量的平均值。