1、（1.5 分）有一分区均匀理想电介质电场，区域 1($z<0$)中的相对介电常数为 ε_{r1}，区域 2($z>0$)中的相对介电常数为 ε_{r2}。已知 $\vec{E}_1 = 20\vec{e}_x - 10\vec{e}_y + 50\vec{e}_z$，求 $\vec{D}_1$，$\vec{E}_2$ 和 $\vec{D}_2$。

知识点：静电场衔接条件 $\begin{cases} E_{2t} = E_{1t} \\ D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f \end{cases}$

解：由已知可知介面法向方向为 $\vec{e_z}$，则 $\vec{e_x}$、$\vec{e_y}$ 为切向方向

两电介质分界面上 $\sigma_f = 0 \Rightarrow D_{2n} - D_{1n} = 0 \Rightarrow D_{2z} = D_{1z}$

又 $\because \vec{D_1} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \vec{E_1} = \varepsilon_{r1}\varepsilon_0(20\vec{e_x} - 10\vec{e_y} + 50\vec{e_z})$

$\therefore D_{1z} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} 50 \Rightarrow D_{2z} = D_{1z} = 50\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 \Rightarrow E_{2z} = \dfrac{D_{2z}}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0} = 50\dfrac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$

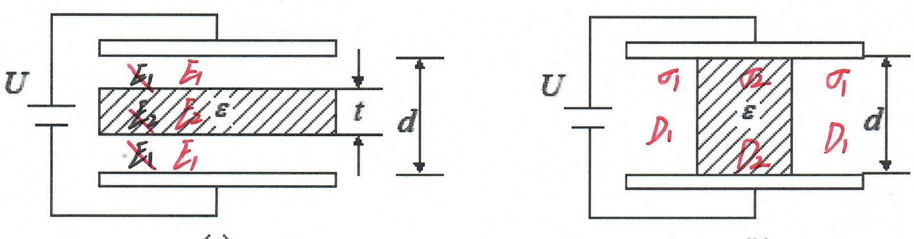
又 $\because E_{2t} = E_{1t} \Rightarrow \begin{cases} E_{2x} = E_{1x} = 20 \\ E_{2y} = E_{1y} = -10 \end{cases}$

$\therefore \vec{E_2} = 20\vec{e_x} - 10\vec{e_y} + 50\dfrac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}\vec{e_z}$，$\vec{D_2} = 20\varepsilon_{r2}\varepsilon_0\vec{e_x} - 10\varepsilon_{r2}\varepsilon_0\vec{e_y} + 50\varepsilon_{r1}\varepsilon_0\vec{e_z}$

2、（0.5 分）在平行平面静电场中，边界线的某一部分与一条电场强度线重合。这部分边界线的边界条件如何表示？

答：边界线的一部分与一条电场强度线重合，即电场强度为边界面的切线方向，即 $E_n = 0$，所以 $\varepsilon \dfrac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_s = 0$，即为第二类齐次边界条件。

3、（2 分）面积为 A，间距为 d 的平板电容器电压为 U，介电常数为 ε，厚度为 t 的介质板分别如图(a)、(b)所示的方式放置在导电平板之间。分别计算两种情况下电容器中电场及电荷的分布。



(a) (b)

解：(a) 根据衔接条件可知介质中的 D 相等：

$$\begin{cases} \varepsilon_0 E_1 = \varepsilon E_2 \\ E_1(d-t) + E_2 t = U \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = \dfrac{\varepsilon U}{\varepsilon_0 t + \varepsilon(d-t)} \\ E_2 = \dfrac{\varepsilon_0 U}{\varepsilon_0 t + \varepsilon(d-t)} \end{cases}$$

上下导体表面的电荷密度 $\sigma = \pm \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon U}{\varepsilon_0 t + \varepsilon(d-t)}$

(b) 根据衔接条件可知介质中的E相等:

∴导体板之间的电场为 $E = \dfrac{U}{d}$

上、下导体板与空气界面上的电荷面密度为: $\sigma_1 = \pm \dfrac{\varepsilon_0 U}{d}$

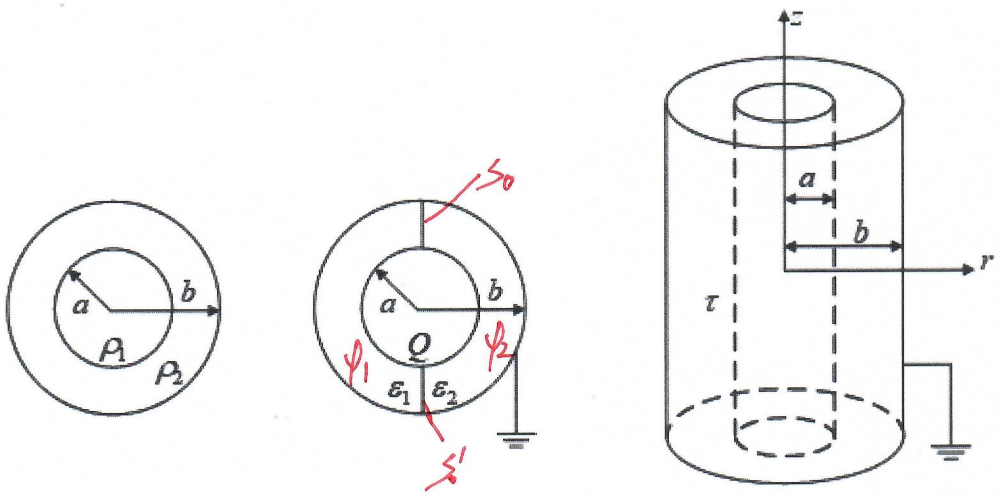
上、下导体板与介质界面上的电荷面密度为: $\sigma_2 = \pm \dfrac{\varepsilon U}{d}$

4、（3分）写出下列静电场的边值问题：

(1) 电荷体密度分别为 ρ_1 和 ρ_2，半径分别为 a 与 b 的双层同心带电球体，如图(a)所示；

(2) 在两同心导体球壳间，左半部和右半部分别填充介电常数为 ε_1 与 ε_2 的均匀介质，内球壳带总电荷量为 Q，外球壳接地，如图(b)所示；

(3) 半径分别为 a 与 b 的无限长空心同轴圆柱面导体，内圆柱表面上单位长度的电量为 τ，外圆柱面导体接地，如图(c)所示。



(a) (b) (c)

解：(a) $\nabla^2\varphi_1=-\frac{\rho_1}{\varepsilon_0}\quad(0<r<a)$

$\nabla^2\varphi_2=-\frac{\rho_2}{\varepsilon_0}\quad(a<r<b)$

$\nabla^2\varphi_3=0\quad(r>b)$

$\varphi_1\big|_{r=a}=\varphi_2\big|_{r=a}$

$\varphi_2=\varphi_3\big|_{r=b}$

$\varphi_3\big|_{r\to\infty}=0$

$\varepsilon_0\frac{d\varphi_1}{d\vec{r}}=\varepsilon_0\frac{d\varphi_2}{d\vec{r}}\Big|_{r=a}$

$\varepsilon_0\frac{d\varphi_2}{d\vec{r}}=\varepsilon_0\frac{d\varphi_3}{d\vec{r}}\Big|_{r=b}$

$\varphi_1\big|_{r=0}=$有界

(b) 左半部介质　　　　右半部介质

$\nabla^2\varphi_1=0$　　　　$\nabla^2\varphi_2=0$

$\varphi_1\big|_{r=b}=0$　　　　$\varphi_2\big|_{r=b}=0$

$\varphi_1\big|_{r=a}=C$　　　　$\varphi_2\big|_{r=a}=C$

$\varphi_1=\varphi_2\big|_{S_0,S_0'}$　　　　$\varphi_1=\varphi_2\big|_{S_0,S_0'}$

所以左右两部分介质里的电位分布相同

所以可以简化为：$\nabla^2\varphi=0\quad(a<r<b)$

$\varphi\big|_{r=b}=0$

$-\int_{左侧}\varepsilon_1\frac{d\varphi}{d\vec{r}}ds-\int_{右侧}\varepsilon_2\frac{d\varphi}{d\vec{r}}ds=Q\Rightarrow\int_S\frac{d\varphi}{d\vec{r}}ds=-\frac{Q}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$

(c) $\nabla^2\varphi=0\quad(a<\rho<b)$

$\varphi\big|_{\rho=b}=0$

$\varepsilon_0\frac{d\varphi}{d\rho}\Big|_{\rho=a}=-\frac{\tau}{2\pi a}$

单位长度总电量为τh

τh转化为面电荷分布

$\tau h=\sigma(2\pi ah)$

$\Rightarrow\sigma=\frac{\tau}{2\pi a}$

5、（1.5分）两个小球半径分别为1cm，相距为20cm，位于空气中。

(1) 若已知φ_1，φ_2，求q_1和q_2；

(2) 若已知φ_1，q_2，求q_1和φ_2；

(3) 问用什么办法使小球带电荷$q_1=10^{-8}$C，小球2不带电荷。

解：由于两球半径远小于两球之间的距离，故可忽略两球之间的静电感应，即可认为两小球所带电量均匀分布在小球表面

$$\begin{cases}\varphi_1=\alpha_{11}q_1+\alpha_{12}q_2\\ \varphi_2=\alpha_{21}q_1+\alpha_{22}q_2\end{cases}$$

且 $\alpha_{11}=\alpha_{22}$，$\alpha_{12}=\alpha_{21}$

$\alpha_{11}=\alpha_{22}=\frac{\varphi_1}{q_1}\Big|_{q_2=0}$　　$\alpha_{21}=\alpha_{12}=\frac{\varphi_2}{q_1}\Big|_{q_2=0}$

面电荷分布 ➡ $\varphi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{\sigma(x',y',z')}{R}\mathrm{d}S'+C$

当小球带1C电荷量时，小球表面电位为：$\varphi_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 10^{-2}}=\frac{1}{4\pi\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-11}}=9\times10^{11}$

$\Rightarrow\alpha_{11}=\alpha_{22}=9\times10^{11}$

当小球带1C电荷量时，另一小球表面电位为：$\varphi_2=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\times20\times10^{-2}}=\frac{1}{4\pi\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-11}\times20}=4.5\times10^{10}$

$\Rightarrow\alpha_{12}=\alpha_{21}=4.5\times10^{10}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\varphi_1=9\times10^{11}q_1+4.5\times10^{10}q_2\\ \varphi_2=4.5\times10^{10}q_1+9\times10^{11}q_2\end{cases}$$

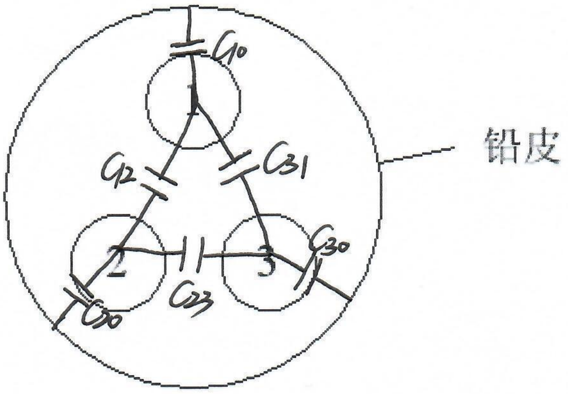
(1)(2)问都可以由上式计算

(3) 当$q_1=10^{-8}$C，$q_2=0$时，

$\varphi_1=9\times10^{11}\times10^{-8}=9000$V

即当小球1接9000V电源时，小球1所带电量为10^{-8}C

6、（1.5分）若将某对称的三芯电缆中三个导体相联，测得导体与铅皮间的电容为0.051μF，若将电缆中的两导体与铅皮相联，它们与另一导体间的电容为0.037μF，求：(1)电缆的各部分电容；(2)每一相的工作电容；(3)若在导体 1、2 之间加直流电压100V，求导体每单位长度的电荷量。



解：对称 ⇒ $C_{10}=C_{20}=C_{30}$, $C_{12}=C_{23}=C_{31}$

(1) 三个导体相联，此时C_{10}, C_{20}, C_{30}并联：$3C_{10}=0.051$

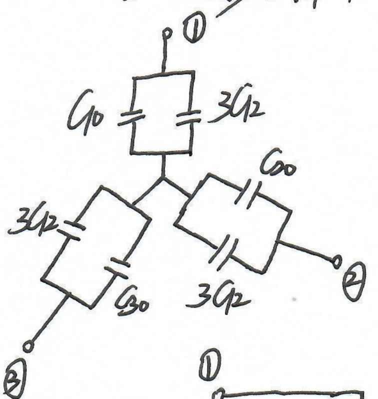
两导体与铅皮相联，此时假如1,2导体与铅皮相联，则

C_{10}, C_{12}, C_{20}被短掉，即C_{30}, C_{31}, C_{23}并联，$C_{10}+2C_{12}=0.037$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3C_{10}=0.051 \\ C_{10}+2C_{12}=0.037 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{10}=C_{20}=C_{30}=0.017\mu F \\ C_{12}=C_{23}=C_{13}=0.01\mu F \end{cases}$$

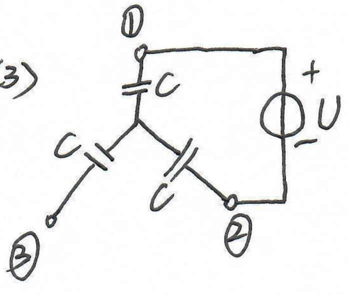
(2) 把△型连接的C_{12}, C_{31}, C_{23}转变成Y型
C_{10}, C_{20}, C_{30}原本为Y型联接

⇒连接两个Y型的中性点，得：



$C=C_{10}+3C_{12}=0.047\mu F$

(3)



$Q=\frac{1}{2}CU=\frac{1}{2}\times 0.047\times 100$

$=2.35\mu C$

7、图 1(a)所示为镜像法分析静电场分布特性问题。两个点电荷分别位于两种介质中，两种介质的分界面为无限大平面，介电常数分别为ε_1和ε_2，点电荷q_1与q_2相对于界面为镜像位置，相距为$2h$。用叠加定理分析介质 1 中的电位φ_1。当点电荷q_1单独作用时，可按图 1(b)计算，在图 1(b)的括号中填入相应的介电常数，此时$q_1' =$ $\underline{\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q_1}$；当点电荷$q_2$单独作用时，可按图 1(c)计算，在图 1(c)的括号中填入相应的介电常数，此时$q_2'' =$ $\underline{\dfrac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q_2}$。（图内每空 1 分，题干中每空 3 分，共 10 分）（如有计算过程，请在下方写出计算步骤）

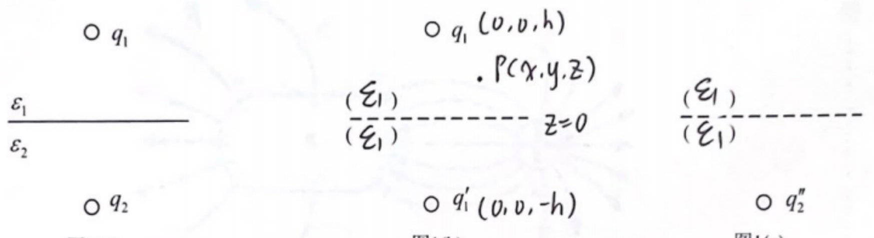
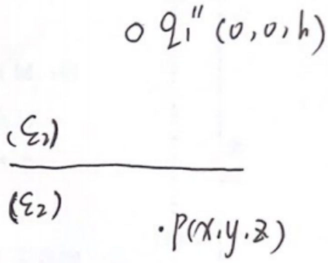


图1(a) 图1(b) 图1(c)

解:1) 根据分界面上（$z=0$）

$$\begin{cases}\varphi_1=\varphi_2\\ \varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}\end{cases}\quad (1分)$$

图1(b)'



由图1(b)得：

$$\varphi_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\frac{q_1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\frac{q_1'}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}}\quad (1分)$$

由图(b)'知

$$\varphi_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\frac{q_1''}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}$$

由 $\left.\begin{matrix}\varphi_1=\varphi_2\\ \varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\end{matrix}\right|_{z=0}$ $\Rightarrow$ $q_1'=\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q_1$ (1分)

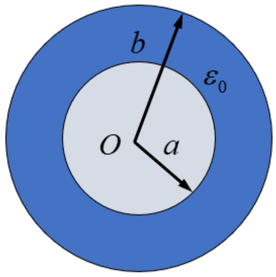
$q_1''=\dfrac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q_2$

2)

图1(c)中，求q_2''相当于求q_1''，但是介质要从ε_1换成ε_2. ∴ $q_2''=\dfrac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q$

8、试求无限长同轴电容器的单位长度电容。

解：假设内导体的线电荷为τ，则内外导体间的电场强度为



$$Q=\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}\Rightarrow \tau h=\varepsilon_0 E(2\pi rh)\Rightarrow \vec{E}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$$

同轴柱面之间的电压 $U=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r}=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{b}{a}$

单位长度的电容 $C=\dfrac{\tau}{U}=\dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)}$