1. 同轴电缆内导体半径为$a=1\text{mm}$，外导体半径为$b=4\text{mm}$。内、外导体均是理想导体。内、外导体之间填充满聚乙烯($\varepsilon_r=2.25$，$\mu_r=1$，$\gamma=0$)。已知聚乙烯中的电场强度为

$$\vec{E}=\frac{100}{\rho}\cos(10^8 t-\beta z)\vec{e}_\rho\ \text{V/m}$$

式中z是沿电缆轴线的坐标。

(1)说明$\vec{E}$的表达式是否表示有波动性；

(2)求β值；

(3)求$\vec{H}$的表达式；

(4)求内外导体之间的平均坡印廷矢量；

(5)求内导体表面的线电流密度；

(6)求沿轴线$0\le z\le 1\text{m}$区段中的位移电流。

解：(1) $\vec{E}$中含有相位滞后因子βz，所以表达式有波动性；

(2) $\beta=\dfrac{\omega}{v}=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=\omega\sqrt{\mu_r\varepsilon_r\mu_0\varepsilon_0}=0.5\text{rad/m}$

(3) $\dot{\vec{E}}_m=\dfrac{100}{\rho}e^{-j0.5z}\vec{e}_\rho$ V/m，要用柱坐标中的旋度公式

因为：$\nabla\times\dot{\vec{E}}_m=j\omega\mu\dot{\vec{H}}_m \quad\Rightarrow\quad \dot{\vec{H}}_m=j\dfrac{\nabla\times\dot{\vec{E}}_m}{\omega\mu}$

$$\Rightarrow\quad \dot{\vec{H}}_m=\frac{0.398}{\rho}e^{-j0.5z}\vec{e}_\phi \quad \text{A/m}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{H}=\frac{0.398}{\rho}\cos(10^8 t-0.5z)\vec{e}_\phi \quad \text{A/m}$$

(4) $\vec{S}_{av}=\text{Re}\left(\dfrac{1}{2}\dot{\vec{E}}_m\times\dot{\vec{H}}_m{}^*\right)=\dfrac{19.9}{\rho^2}\vec{e}_z \quad \text{W/m}^2$

(5) $\vec{K}=\vec{e}_\rho\times\vec{H}\Big|_{\rho=0.001}=398\cos(10^8t-0.5z)\vec{e}_z$ A/m

(6) 位移电流密度：

$$\vec{J}_D=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{100\varepsilon}{\rho}\times10^8\sin(10^8t-0.5z)(-\vec{e}_\rho)$$

$$\Rightarrow\quad \vec{J}_D=\frac{0.199}{\rho}\sin(10^8t-0.5z)(-\vec{e}_\rho)$$

故沿轴线$0\le z\le 1\mathrm{m}$区段中的位移电流为：

$$\begin{aligned}I_D&=\int_S\vec{J}_D\bullet\mathrm{d}\vec{S}=\int_0^1\frac{0.199}{\rho}\sin(10^8t-0.5z)(-\vec{e}_\rho)\bullet\vec{e}_\rho2\pi\rho\mathrm{d}z\\&=-2.5\cos(10^8t-0.5z)\Big|_0^1\\&=-2.5\left[\cos(10^8t-0.5)-2.5\cos(10^8t)\right]\\&=-2.5(-2)\sin\left(\frac{10^8t-0.5+10^8}{2}\right)\sin\left(\frac{10^8t-0.5-10^8}{2}\right)\\&=5\sin(-0.25)\sin(10^8t-0.25)\\&=-1.24\sin(10^8t-0.25)\quad \mathrm{A}\end{aligned}$$

2. 一个平行板电容器的极板为圆形，极板面积为S，极板间距离为d，介质的介电常数和电导率分别为ε，γ，试问：

(1). 当极板间电压为直流电压U时，求电容器内任一点的坡印亭矢量；

(2). 如果电容器极板间的电压为工频交流电压$u=\sqrt{2}U\cos314t$，求电容器内任一点的复坡印亭矢量及电容器的有功功率和无功功率。

解：(1)采用柱坐标系，设电场强度$\vec{E}$的方向沿着极轴z方向。

由电压和电场强度的关系，得到：$\vec{E}=\dfrac{U}{d}\vec{e}_z$

利用安培定律得到电容器任一点的磁场强度为

$$\vec{H}=\frac{J_C\pi r^2}{2\pi r}\vec{e}_\phi=\frac{r}{2}J\vec{e}_\phi=\frac{r}{2}\gamma E\vec{e}_\phi=\frac{r}{2}\gamma\frac{U}{d}\vec{e}_\phi$$

则电容器任一点的坡印亭矢量即为

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{U}{d}\vec{e}_z\times\frac{r}{2}\gamma\frac{U}{d}\vec{e}_\phi=-\frac{r}{2}\gamma\frac{U^2}{d^2}\vec{e}_r$$

(2) 采用柱坐标系，设电场强度 $\dot{E}$ 的方向沿着极轴 z 方向。

由电压和电场强度的关系，得到：$\dot{\vec{E}}=\frac{\dot{U}}{d}\vec{e}_z$

对于时变场：$\nabla\times\dot{\vec{H}}=\dot{\vec{J}}_C+\mathrm{j}\omega\dot{\vec{D}}=\dot{\vec{J}}_C+\mathrm{j}\omega\varepsilon\dot{\vec{E}}=\gamma\dot{\vec{E}}+\mathrm{j}\omega\varepsilon\dot{\vec{E}}=\dot{\vec{J}}$

利用全电流定律的复数形式得到：$\oint_l\dot{\vec{H}}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_A(\dot{\vec{J}}_C+\mathrm{j}\omega\dot{\vec{D}})\cdot\mathrm{d}\vec{A}$

则 $\dot{\vec{H}}=\frac{\dot{J}\pi r^2}{2\pi r}\vec{e}_\phi=\frac{r}{2}(\gamma\dot{\vec{E}}+\mathrm{j}\omega\varepsilon\dot{\vec{E}})\vec{e}_\phi=\frac{\dot{U}r}{2d}(\gamma+\mathrm{j}\omega\varepsilon)\vec{e}_\phi$

则电容器内任一点的复坡印亭矢量为：

$$\tilde{S}=\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*=-\frac{r}{2}\frac{U^2}{d^2}(\gamma-\mathrm{j}\omega\varepsilon)\vec{e}_r$$

电容器内任一点的有功功率密度为 $\frac{r\gamma}{2}\frac{U^2}{d^2}$，

电容器的有功功率为 $P=\mathrm{Re}\left[-\oint_A(\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*)\cdot\mathrm{d}\vec{A}=\right]=\frac{\gamma S}{d}U^2$，

即 $P=GU^2$，G 是电容器的电导；

电容器内任一点的无功功率密度为 $-\frac{r\omega\varepsilon}{2}\frac{U^2}{d^2}$，

电容器的无功功率为 $Q=\mathrm{Im}\left[-\oint_A(\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*)\cdot\mathrm{d}\vec{A}=\right]=-\omega\frac{\varepsilon S}{d}U^2$，

即 $Q=-\omega CU^2$，C 是电容器的电容。

3. (1) 证明无源自由空间仅随时间变化的场(例如$\vec{B}=B_{\mathrm{m}}\sin(\omega t)\vec{e}_z$)，不满足麦克斯韦方程组；

(2) 证明若将t换成($t-y/c$)，则可以满足麦克斯韦方程组；

(3) 回答根据第(1)问和第(2)问的结果说明什么？满足什么条件时，可以得到形如$\vec{B}=B_{\mathrm{m}}\sin(\omega t)\vec{e}_z$或$\vec{E}=E_{\mathrm{m}}\sin(\omega t)\vec{e}_x$的电磁场？

(1)证明：

$$\left.\begin{aligned}&\vec{B}=B_{\mathrm{m}}\sin(\omega t)\vec{e}_z \quad\Rightarrow\quad \vec{H}=\frac{B_{\mathrm{m}}}{\mu_0}\sin(\omega t)\vec{e}_z\\&\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=0\,,$$

所以$\vec{D}$与时间t无关。

根据麦克斯韦第二方程可知$\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-B_{\mathrm{m}}\omega\cos(\omega t)\vec{e}_z$，所以$\vec{E}$与时间$t$有关。

即$\vec{D}$与时间t有关，所以与第一方程的结果相矛盾，所以自由空间仅随时间变化的场不满足麦克斯韦方程。

(2)证明：显然满足麦克斯韦第三和第四方程。

$$\vec{B}=B_{\mathrm{m}}\sin(\omega t-\frac{\omega y}{c})\vec{e}_z \quad\Rightarrow\quad \vec{H}=\frac{B_{\mathrm{m}}}{\mu_0}\sin(\omega t-\frac{\omega y}{c})\vec{e}_z$$

$$\nabla\times\vec{H}=\frac{B_{\mathrm{m}}}{\mu_0}\cos(\omega t-\frac{\omega y}{c})(-\frac{\omega}{c})\vec{e}_x$$

$$\Rightarrow\quad\vec{D}=\int(\nabla\times\vec{H})\mathrm{d}t=-\frac{B_{\mathrm{m}}}{\mu_0 c}\sin(\omega t-\frac{\omega y}{c})\vec{e}_x$$

$$\Rightarrow\quad\vec{E}=-\frac{B_{\mathrm{m}}}{\mu_0\varepsilon_0 c}\sin(\omega t-\frac{\omega y}{c})\vec{e}_x$$

$$\nabla\times\vec{E}=\frac{B_{\mathrm{m}}}{\mu_0\varepsilon_0 c}\cos(\omega t-\frac{\omega y}{c})(-\frac{\omega}{c})\vec{e}_z=-B_{\mathrm{m}}\omega\cos(\omega t-\frac{\omega y}{c})\vec{e}_z$$

而 $-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-B_{\mathrm{m}}\omega\cos(\omega t-\dfrac{\omega y}{c})\vec{e}_z$，所以满足麦克斯韦方程组。

(3) 根据第(1)问和第(2)问的结果可知只有具有($t-y/c$)这种时间变量的解满足麦克斯韦方程；

满足准静态场条件时，$\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\approx 0$ 或 $\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\approx 0$，可以得到形如 $\vec{B}=B_{\mathrm{m}}\sin(\omega t)\,\vec{e}_z$ 或 $\vec{E}=E_{\mathrm{m}}\sin(\omega t)\,\vec{e}_x$ 的电磁场。

4. 在恒定电磁场中导线的电阻与电感值仅决定于导线的几何形状、尺寸及媒质的参数，而与所加的电压无关，这一结论在时变电磁场中是否仍然适用？为什么？

答案：不适用。由于集肤效应在时变电磁场中导线的电阻与电感值不仅决定于导线的几何形状、尺寸及媒质的参数，还取决于所加电压的频率。频率越大，等效电阻越大，等效电感越小。