1. 已知无限长直导体圆柱由电导率不同的两层导体构成，内层导体的半径 $R_1$=2mm，电导率$\gamma_1$=$10^7$S/m；外层导体的外半径 $R_2$=3mm，电导率$\gamma_2$=4x$10^7$S/m。导体圆柱中沿轴线方向流过的电流为 I=100A，求：（1）两层导体中的电流密度$\vec{J_1}$和$\vec{J_2}$；（2）求导体圆柱内、外的磁感应强度。

解：(1) 根据衔接条件，内导体与外导体中的电场强度是相同的。

$$\begin{cases} \dfrac{J_1}{\gamma_1} = \dfrac{J_2}{\gamma_2} \quad (\text{即 } E_1 = E_2) \\ J_1(\pi R_1^2) + J_2(\pi R_2^2 - \pi R_1^2) = I \quad (\text{即 } J_1 S_1 + J_2 S_2 = I) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{J_1} = \dfrac{\gamma_1 I}{\gamma_1 \pi R_1^2 + \gamma_2 \pi (R_2^2 - R_1^2)} \vec{e_z} = 1.33 \times 10^6 \vec{e_z} \ A/m^2 \\ \vec{J_2} = \dfrac{\gamma_2 I}{\gamma_1 \pi R_1^2 + \gamma_2 \pi (R_2^2 - R_1^2)} \vec{e_z} = 5.31 \times 10^6 \vec{e_z} \ A/m^2 \end{cases}$$

(2). 当 $r < R_1$ 时

$$\oint \vec{H_1} \cdot d\vec{l} = I' \Rightarrow H_1 2\pi r = J_1 \pi r^2 \Rightarrow \vec{H_1} = \frac{r}{2} J_1 \vec{e_\phi} \Rightarrow \vec{B_1} = \frac{\mu_0 r}{2} J_1 \vec{e_\phi} = 0.836 r \vec{e_\phi}$$

当 $R_1 < r < R_2$ 时

$$\oint \vec{H_2} \cdot d\vec{l} = I'' \Rightarrow H_2 2\pi r = J_1 \pi R_1^2 + J_2 \pi (r^2 - R_1^2) \Rightarrow \vec{H_2} = \frac{J_1 R_1^2 + J_2 (r^2 - R_1^2)}{2r} \vec{e_\phi}$$

$$\Rightarrow \vec{B_2} = \mu_0 \frac{J_1 R_1^2 + J_2 (r^2 - R_1^2)}{2r} \vec{e_\phi} = \left(\frac{10}{3} r - \frac{10^{-5}}{r}\right) \vec{e_\phi}$$

当 $r > R_2$ 时

$$\oint H_3 \cdot d\vec{l} = I \Rightarrow H_3 2\pi r = I \Rightarrow \vec{H_3} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e_\phi}$$

$$\Rightarrow \vec{B_3} = \frac{2 \times 10^{-5}}{r} \vec{e_\phi}$$

2. 有一半径为 a 的长直圆柱形导体，通有电流密度为$\vec{J}=J_0\frac{\rho}{a}\vec{e}_z$的恒定电流（z 轴就是圆柱导体的轴线）。试求导体内、外的磁场强度$\vec{H}$。

解：$0 \leq \rho < a$

$$\oint \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \Rightarrow H_1 2\pi\rho = \int_0^{\rho} J_0 \frac{\rho}{a} 2\pi\rho d\rho$$

$$\Rightarrow H_1 = \frac{J_0 \rho^2}{3a} \vec{e}_\phi$$

$\rho > a$

$$\oint \vec{H}_2 \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \Rightarrow H_2 2\pi\rho = \int_0^{a} J_0 \frac{\rho}{a} 2\pi\rho d\rho$$

$$\Rightarrow \vec{H}_2 = \frac{J_0 a^2}{3\rho} \vec{e}_\phi$$

3. 一根截面积为 $2cm^2$，长为 10cm 的圆柱状磁媒质被均匀磁化，磁化强度$\vec{M}=2\vec{e}_x$(A/m)，试计算它的磁矩$\vec{m}$。

解：考察知识点：磁化强度 $\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \vec{m}}{\Delta V} = \frac{\vec{m}}{V}$

$$\vec{m} = \vec{M} V = 2\vec{e}_x \times (20 \times 10^{-6}) = 4 \times 10^{-5} \vec{e}_x \quad A/m$$

4. z=0 是两种媒质的分界面，分界面上无自由电流密度分布，在 z＞0 时，$\mu_{r1}$=1，$\vec{B}_1$=1.5$\vec{e}_x$+0.8$\vec{e}_y$+0.6$\vec{e}_z$ mT；在 z＜0 时，$\mu_{r2}$=100，求(1)在 z＜0 时的磁感应强度$\vec{B}_2$；（2）每个区域的磁化强度和界面磁化面电流密度。

解：(1) 考察知识点：磁场衔接条件 $\begin{cases} H_{1t} - H_{2t} = K \\ B_{2n} = B_{1n} \end{cases}$

若分界面上无自由电流分布则 $k=0 \Rightarrow \begin{cases} H_{1t} = H_{2t} \\ B_{2n} = B_{1n} \end{cases}$

$$B_{2n} = B_{1n} \Rightarrow B_{2z} = B_{1z} \Rightarrow B_{2z} = 0.6$$

$$H_{1t} = H_{2t} \Rightarrow \begin{cases} H_{2x} = H_{1x} = 1.5 \\ H_{2y} = H_{2y} = 0.8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_{2x} = \mu_2 H_{2x} = 150 \\ B_{2y} = \mu_2 H_{2y} = 80 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_2 = 150\vec{e}_x + 80\vec{e}_y + 0.6\vec{e}_z \quad , mT$$

(2) $\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M}) \Rightarrow \vec{M}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\frac{\vec{B}}{\mu_0\mu_r}$

在介质1，$\mu_{r1}=1$

$$\vec{M_1}=\frac{\vec{B_1}}{\mu_0}-\frac{\vec{B_1}}{\mu_0\mu_{r1}}=0$$

在介质2，$\mu_{r2}=100$

$$\vec{M_2}=\frac{\vec{B_2}}{\mu_0}-\frac{\vec{B_2}}{\mu_0\mu_{r2}}=\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{B_2}-\frac{\vec{B_2}}{100}\right)=\frac{99}{100\mu_0}(150\vec{e_x}+80\vec{e_y}+0.6\vec{e_z})$$

又∵ $\vec{J_m}=\nabla\times\vec{M} \Rightarrow I_m=\oint\vec{M}\cdot d\vec{l} \Rightarrow \vec{e_n}\times(\vec{M_2}-\vec{M_1})=\vec{K}$

又∵ $\vec{M_1}=0$ ∴ $\vec{K}=\vec{e_n}\times\vec{M_2}$

$z<0$ 介质2
$z>0$ 介质1 $\Big\} \Rightarrow \vec{e_n}=-\vec{e_z}$

$$\Rightarrow \vec{K}=-\vec{e_z}\times\vec{M_2}=\frac{99}{100\mu_0}(80\vec{e_x}-150\vec{e_y})\ \mathrm{A/m}$$

5. 证明在平行平面磁场中等$\vec{A}$线就是$\vec{B}$线。

在直角坐标系中，若$\vec{B}$为平行平面场，则$\vec{A}$仅有一个方向分量，

假设：$\vec{A}=A\vec{e_z}$

则 $$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & A\end{vmatrix}$$

$$\therefore \vec{B}=\frac{\partial A}{\partial y}\vec{e_x}-\frac{\partial A}{\partial x}\vec{e_y}=B_x\vec{e_x}+B_y\vec{e_y}$$

即：$B_x=\frac{\partial A}{\partial y}$，$B_y=-\frac{\partial A}{\partial x}$

由于$\vec{B}$的矢量线：$\frac{B_x}{dx}=\frac{B_y}{dy}$

$$\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial y}dy=-\frac{\partial A}{\partial x}dx \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial x}dx+\frac{\partial A}{\partial y}dy=0$$

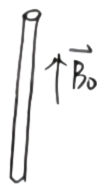
等式左端为A的全微分，即 $dA=0 \Rightarrow A=C$

即 $A=C$ 为$\vec{B}$的矢量线。

6. 一根极细的圆铁杆和一个很薄的圆铁盘样品放入磁场$\vec{B}_0$中，并使它们的轴与$\vec{B}_0$平行，铁的磁导率为$\mu$，求两样品内的$\vec{B}$，$\vec{H}$。若已知$\vec{B}_0$=1T，$\mu = 5000\mu_0$，求两样品内的磁化强度$\vec{M}$。

解：把极细铁杆和极薄铁盘内部的磁场均看作均匀磁场

对于极细圆铁杆，其轴线与$B_0$平行，则在铁杆与空气分界面上：




$H_{1t} = H_{2t}$

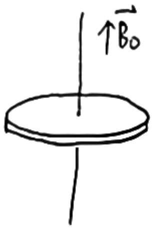
则铁杆内的磁场为：

$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$ ，$\vec{B} = \mu H = \frac{\mu}{\mu_0} B_0 = 5000\vec{B}_0$ T

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}\left(1-\frac{1}{\mu_r}\right) = \frac{5000}{\mu_0}\left(1-\frac{1}{5000}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{4999}{\mu_0} \text{ A/m}$$

对于极薄的圆铁盘样品，其轴线与$B_0$平行时，则在铁盘与空气分界面上：$B_{2n} = B_{1n}$




则铁盘内的磁场为：

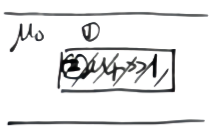
$\vec{B} = \vec{B}_0$　　$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{\vec{B}_0}{\mu}$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}\left(1-\frac{1}{\mu_r}\right) = \frac{4999}{5000\mu_0}\vec{B}_0$$

7. 在真空均匀磁场中放入一小块铁磁媒质（相对磁导率远大于 1），试问与周围场域相比，媒质中磁感应强度和磁场强度总体有何变化（大或小）？

考察知识点：磁场衔接条件 $\begin{cases} H_{1t} - H_{2t} = K \\ B_{2n} = B_{1n} \end{cases}$

解：

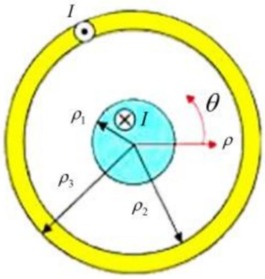



在真空和铁磁媒质表面 $K = 0$

$H_{1t} = H_{2t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2} \\ \mu_1 \ll \mu_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_{1t} \ll B_{2t} \\ 又\ B_{2n} = B_{1n} \end{cases} \Rightarrow B_1 \ll B_2$，$\vec{B}$增加

$B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \\ \mu_1 \ll \mu_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_{1n} > H_{2n} \\ H_{1t} = H_{2t} \end{cases} \Rightarrow H_1 > H_2$，$\vec{H}$减小

8、无限长同轴电缆横截面如图所示，内外导体通过等大反向恒定电流，外导体电流均匀分布，内导体电流密度为 $\vec{J}=-\dfrac{I}{\pi\rho_1^2}\vec{e}_z$。




1）计算内导体磁感应强度；

2）计算内外导体之间的磁感应强度。

∵ 内导体电流分布均匀，则


$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I'=\mu_0\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

$$B2\pi\rho=\mu_0\left(-\frac{I}{\pi\rho_1^2}\cdot\pi\rho^2\right)$$

$\Rightarrow$ 内导体的 $\vec{B}=-\dfrac{\mu_0 I\rho}{2\pi\rho_1^2}\vec{e}_\theta$ $(0\le\rho\le\rho_1)$


$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I''=\mu_0\left(-\frac{I}{\pi\rho_1^2}\cdot\pi\rho_1^2\right)$$

$$B2\pi\rho=-\mu_0 I$$

$\Rightarrow$ 内外导体之间的 $\vec{B}=-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\theta$ $(\rho_1\le\rho\le\rho_2)$

9、同轴电缆内导体半径为 0.5m，外导体半径为 1m，长度为 2m。电缆中的电流为 5A，绝缘材料的磁导率为 $\mu_0$，计算在半径为 0.75m 处的磁场能量密度。

解. 同轴电缆内外导体中的磁场为

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=I \Rightarrow H2\pi\rho=I$$

$$\Rightarrow \vec{H}=\frac{I}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi$$

$$\therefore w_m=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}=\frac{1}{2}\mu_0 H^2$$

$$\therefore w_m=\frac{1}{2}\mu_0\frac{I^2}{4\pi^2\rho^2}=\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2\rho^2}$$

∴ 当 $\rho=\frac{3}{4}$ 时，$w_m=\dfrac{\mu_0 5^2}{8\pi^2(\frac{3}{4})^2}$

$$\therefore w_m=\frac{50\mu_0}{9\pi^2}$$