静电场习题讲解 1

1. 在直角坐标系中，已知电场强度 $\vec{E}=6x^2\vec{e}_x+6y\vec{e}_y+4\vec{e}_z$ V/m，点 M 和 N 的坐标分别为点 $M(2,6,-1)$、点 $N(-3,-3,2)$，试求：

(1) $\varphi_{MN}=?$；

(2) 若点 $Q(4,-2,-35)$ 为参考点，则 $\varphi_M=?$；

(3) 若点 $P(1,2,-4)$ 处的电位为 2V，则 $\varphi_N=?$

解：(1) $\varphi_{MN}=\int_M^N(6x^2\vec{e}_x+6y\vec{e}_y+4\vec{e}_z)\cdot(dx\vec{e}_x+dy\vec{e}_y+dz\vec{e}_z)$

$$=\int_M^N(6x^2dx+6ydy+4dz)=(2x^3+3y^2+4z)\Big|_{(2,6,-1)}^{(-3,-3,2)}$$

$$=-139\text{V}$$

1．在直角坐标系中，已知电场强度 $\vec{E}=6x^2\vec{e}_x+6y\vec{e}_y+4\vec{e}_z$ V/m，点 M 和 N 的坐标分别为点 $M(2,6,-1)$、点 $N(-3,-3,2)$，试求：

(1) $\varphi_{MN}=?$；

(2) 若点 $Q(4,-2,-35)$ 为参考点，则 $\varphi_M=?$；

(3) 若点 $P(1,2,-4)$ 处的电位为 2V，则 $\varphi_N=?$

(2) $\varphi_M=\int_M^Q \vec{E}\cdot d\vec{l} = (2x^3+3y^2+4z)\Big|_{(2,6,-1)}^{Q}$

$=0-(16+108-4)=-120\text{V}$

1. 在直角坐标系中，已知电场强度 $\vec{E}=6x^2\vec{e}_x+6y\vec{e}_y+4\vec{e}_z$ V/m，点 M 和 N 的坐标分别为点 $M(2,6,-1)$、点 $N(-3,-3,2)$，试求：

(1) $\varphi_{MN}=?$；

(2) 若点 $Q(4,-2,-35)$ 为参考点，则 $\varphi_M=?$；

(3) 若点 $P(1,2,-4)$ 处的电位为 2V，则 $\varphi_N=?$

(3) $\varphi_N=\int_N^Q \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_N^P \vec{E}\cdot d\vec{l}+\varphi_P$

$=(2x^3+3y^2+4z)\Big|_{(-3,-3,2)}^{(1,2,-4)}+2$

$=19V$

第1题的补充答案（另一种算法）

(2) 若点Q(4, -2, -35)为参考点.

则 $\varphi_Q = 0$　　　$\varphi = -2x^3 - 3y^2 - 4z + C$

$$\varphi_Q = (-2x^3 - 3y^2 - 4z + C)\Big|_{(4,-2,-35)} = 0$$

得到 $C = 0$

$$\varphi_M = (-2x^3 - 3y^2 - 4z)\Big|_{(2,6,-1)} = -120\ V$$

(3) 若点P(1, 2, -4)对应电位为2V，则 $\varphi_P = (-2x^3 - 3y^2 - 4z + C')\Big|_P = 2V$

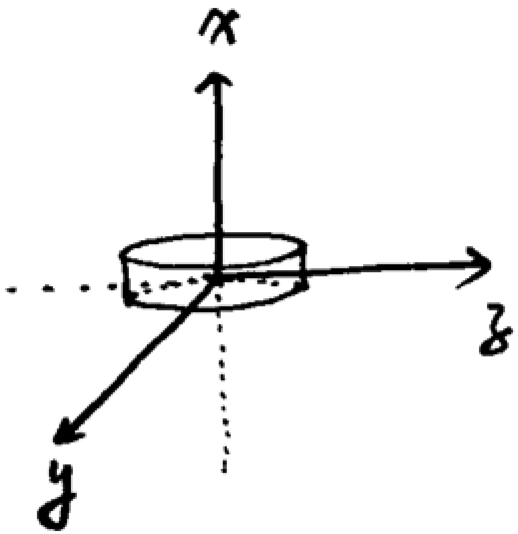
把P的坐标代入 φ_P 表达式，可得 $C' = 0$

$$\therefore \varphi_N = (-2x^3 - 3y^2 - 4z)\Big|_{(-3,-3,2)} = 19V$$

2. 在直角坐标系中电荷分布为 $\rho(x,y,z)$，试求电场强度 $\vec{E}$，其中

$$\rho(x,y,z)=\begin{cases}\rho_0, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$$

解:



电荷分布具有面对称性，

⇒电场分布也具有面对称性. } ⇒高斯定理

在 $x=0$ 取一小闭合柱面

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = q$$

$$2\varepsilon_0 E S = \rho_0 S \Rightarrow E = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \begin{cases}\dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\vec{e_x}, & x>0\\[2ex] \dfrac{-\rho_0}{2\varepsilon_0}\vec{e_x}, & x<0\end{cases}$$

2. 在直角坐标系中电荷分布为 $\rho(x,y,z)$，试求电场强度 $\vec{E}$，其中

$$\rho(x,y,z)=\begin{cases}\rho_0,\ x=0\\ 0,\quad x\neq 0\end{cases}$$

例 设有一无限大均匀带电平面，电荷面密度为σ，求距平面为r处某点的电场强度.（教材P_{344}例10. 4. 2）

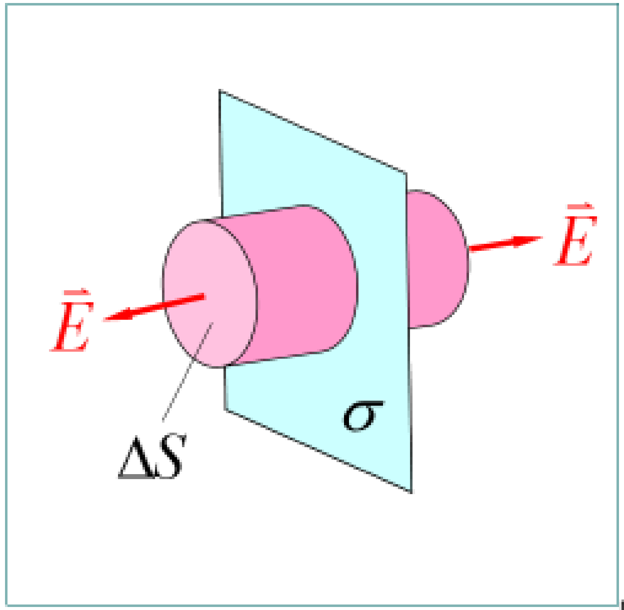
解 对称性：轴对称

高斯面：闭合圆柱面

$$2E\Delta S=\frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

矢量式 $\vec{E}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$



另一种解题法，这个题目和原来题目的已知条件表达式略有不同，但思路相同

3. 对于下面给出的几种 $\bar{D}$ 场，试求相应的体电荷密度表达式，

(1) $\bar{D} = \frac{4xy}{z}\bar{e}_x + \frac{2x^2}{z}\bar{e}_y - \frac{2x^2 y}{z^2}\bar{e}_z$；

(2) $\bar{D} = z\sin\phi\bar{e}_\rho + z\cos\phi\bar{e}_\phi + \rho\sin\phi\bar{e}_z$

解：本题考察：静电场基本方程 $\nabla\cdot\vec{D} = \rho_f$

(1) $\rho_f = \nabla\cdot\vec{D} = \frac{4y}{z} + \frac{4x^2 y}{z^3} = \frac{4y}{z^3}(x^2+z^2)$

(2) $\rho_f = \nabla\cdot\vec{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

$= \frac{1}{\rho}z\sin\phi + \frac{1}{\rho}(-z\sin\phi) + 0$

$= 0$

4. 在空间区域为 $x=0$ 到 1，$y=0$ 到 2，$z=0$ 到 3 的平行六面体内，有矢量场 $\vec{D}=2xy\vec{e}_x+x^2\vec{e}_y$ C/m^2。试计算平行六面体内的总电荷量。

解：$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = q$

$$\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla\cdot\vec{D})\, dV} = \int_V (2y)\, dV = \int_V 2y\, dx\, dy\, dz$$

$$\Rightarrow q = \int_0^1 dx \int_0^3 dz \int_0^2 2y\, dy$$

$$\Rightarrow q = 12C$$

5. 无限长同轴圆柱面，半径分别为 a 和 b ($b>a$)，每单位长度上电荷：内柱上为 τ，外柱为 $-\tau$。求真空中带电面之间的电压：

解：内外柱面之间的电场为：$\vec{E}=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\vec{e}_\rho$

（求解方法与单根线电荷在空间产生的电场相同）

∴ 内外柱面之间的电压

$$U=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{\rho}=\int_a^b \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}d\rho \Rightarrow U=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

6. 从静电场基本性质出发，证明当电介质均匀时，极化电荷密度 ρ_P 存在的条件是自由电荷的体密度 ρ 不为零，且有关系式 $\rho_P = -(1-\varepsilon_0/\varepsilon)\rho$。

证明: $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\vec{D} + \vec{P}$

$\Rightarrow (1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\vec{D} = \vec{P}$

$\Rightarrow (1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\nabla\cdot\vec{D} = \nabla\cdot\vec{P}$

$\Rightarrow -(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\rho_f = \rho_P$

当 $\rho_f \neq 0$ 时，$\rho_P \neq 0$

即 ρ_P 存在的条件是自由电荷的体密度 ρ_f 不为零.

7. 已知真空中有三个点电荷 $q_1 = 1\text{C}$， $q_2 = 1\text{C}$， $q_3 = 4\text{C}$，分别位于 $(1,0,0)$， $(0,1,0)$， $(-1,0,0)$ 点，求 $(1,1,1)$ 点的电场强度。

解： 场点： $\vec{r} = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$

源点： $\vec{r}_1' = \vec{e}_x$ ， $\vec{r}_2' = \vec{e}_y$ ， $\vec{r}_3' = -\vec{e}_x$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &\vec{R}_1 = (\vec{r} - \vec{r}_1') = \vec{e}_y + \vec{e}_z, \quad \vec{e}_{R1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_z \\ &\vec{R}_2 = (\vec{r} - \vec{r}_2') = \vec{e}_x + \vec{e}_z, \quad \vec{e}_{R2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_z \\ &\vec{R}_3 = (\vec{r} - \vec{r}_3') = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z, \quad \vec{e}_{R3} = \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_y + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}\vec{e}_{R1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\vec{e}_{R2} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3^2}\vec{e}_{R3}$$

$$= \frac{1}{24\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\sqrt{3}+8}{\sqrt{6}}\vec{e}_x + \frac{3\sqrt{3}+4}{\sqrt{6}}\vec{e}_y + \frac{6\sqrt{3}+4}{\sqrt{6}}\vec{e}_z\right)$$