附录习题讲解

4. 设有标量场 $\varphi = 2xy^2 - z^3$，求 φ 在点 $(2,-1,1)$ 处沿该点至 $(3,1,-1)$ 方向的方向导数。在点 $(2,-1,1)$ 沿什么方向导数达到最大值？其值是多少？

解：梯度方向，函数变化率最大，即

$$\nabla\varphi = 2y^2\vec{e_x} + 4xy\vec{e_y} - 3z^2\vec{e_z}$$

$$\nabla\varphi\Big|_{(2,-1,1)} = 2\vec{e_x} - 8\vec{e_y} - 3\vec{e_z}$$

沿 $\vec{l} = 2\vec{e_x} - 8\vec{e_y} - 3\vec{e_z}$ 方向，方向导数达到最大值，

最大值为：$\sqrt{2^2+8^2+3^2} = \sqrt{77}$

4. 设有标量场 $\varphi = 2xy^2 - z^3$，求 φ 在点 $(2,-1,1)$ 处沿该点至 $(3,1,-1)$ 方向的方向导数。在点 $(2,-1,1)$ 沿什么方向导数达到最大值？其值是多少？

点 $(2,-1,1)$ 至点 $(3,1,-1)$ 的方向为：$\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - 2\vec{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{e}_l = \frac{\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - 2\vec{e}_z}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{1}{3}\vec{e}_x + \frac{2}{3}\vec{e}_y - \frac{2}{3}\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{l}} = \nabla\varphi \cdot \vec{e}_l = (2\vec{e}_x - 8\vec{e}_y - 3\vec{e}_z)\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{e}_x + \frac{2}{3}\vec{e}_y - \frac{2}{3}\vec{e}_z\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{l}} = -\frac{8}{3}$$

5. 求标量场 $\varphi = x^3y^4z^2$ 的梯度场的散度。

解：$\nabla\varphi = 3x^2y^4z^2\vec{e_x} + 4x^3y^3z^2\vec{e_y} + 2x^3y^4z\vec{e_z}$

$\Rightarrow \nabla\cdot\nabla\varphi = 6xy^4z^2 + 12x^3y^2z^2 + 2x^3y^4$

或 $\nabla\cdot\nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

$\Rightarrow \nabla\cdot\nabla\varphi = \nabla^2\varphi = 6xy^4z^2 + 12x^3y^2z^2 + 2x^3y^4$

7. 若矢量 $\vec{A}=x^2\vec{e}_x+y^3\vec{e}_y+(3z-x)\vec{e}_z$，求(1) $\vec{A}$ 在点 M(1,0,−1)处的散度；(2) $\vec{A}$ 在点 M(1,−1,−1)处的旋度。

解：(1) $\nabla\cdot\vec{A}=2x+3y^2+3=2+3=5$

(2) $$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2 & y^3 & (3z-x)\end{vmatrix}=\vec{e}_y$$

8. 已知电场强度 $\vec{E}=E_0\cos\theta\vec{e}_r-E_0\sin\theta\vec{e}_\theta$，求 $\nabla\cdot\vec{E}$ 和 $\nabla\times\vec{E}$ 。

解：
$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2E_0\cos\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(-E_0\sin\theta\sin\theta)$$

$$=\frac{2}{r}E_0\cos\theta-\frac{2}{r}E_0\cos\theta$$

$$=0$$

$$\nabla\times\vec{E}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r\sin\theta\vec{e}_\phi\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi}\\ E_0\cos\theta & -rE_0\sin\theta & 0\end{vmatrix}$$

$$=0$$

9. 矢量 $\vec{A}=(x^2-2xy)\vec{e}_x+(y^2-2yz)\vec{e}_y+z(z-2x+1)\vec{e}_z$ 对曲面 $\vec{S}$ 的通量，其中 $\vec{S}$ 是球心在原点，半径为 a 的球面外侧。

解：$\Phi=\int_S \vec{A}\cdot d\vec{S}=\int_V (\nabla\cdot\vec{A})dV$

$\Rightarrow \Phi=\int_V (2x-2y+2y-2z+2z-2x+1)\,dV$

$\Rightarrow \Phi=\int_V dV=\frac{4}{3}\pi a^3$

10. 求矢量场 $\vec{A}=xyz(\vec{e}_x+\vec{e}_y+\vec{e}_z)$ 在点 M$(1,3,2)$ 处的旋度以及在点 M$(1,3,2)$ 处绕方向 $\vec{e}_n=\frac{1}{3}(\vec{e}_x+2\vec{e}_y+2\vec{e}_z)$ 的环量面密度。

解：
$$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xyz & xyz & xyz\end{vmatrix}$$

$$=(xz-xy)\vec{e}_x+(xy-yz)\vec{e}_y+(yz-xz)\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \nabla\times\vec{A}\Big|_{(1,3,2)}=-\vec{e}_x-3\vec{e}_y+4\vec{e}_z$$

10. 求矢量场 $\vec{A}=xyz(\vec{e}_x+\vec{e}_y+\vec{e}_z)$ 在点 M(1,3,2) 处的旋度以及在点 M(1,3,2) 处绕方向 $\vec{e}_n=\frac{1}{3}(\vec{e}_x+2\vec{e}_y+2\vec{e}_z)$ 的环量面密度。

$\vec{e}_n$方向的环量面密度：

$$(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{e}_n=(-\vec{e}_x-3\vec{e}_y+4\vec{e}_z)\cdot\frac{1}{3}(\vec{e}_x+2\vec{e}_y+2\vec{e}_z)$$

$$=\frac{1}{3}$$