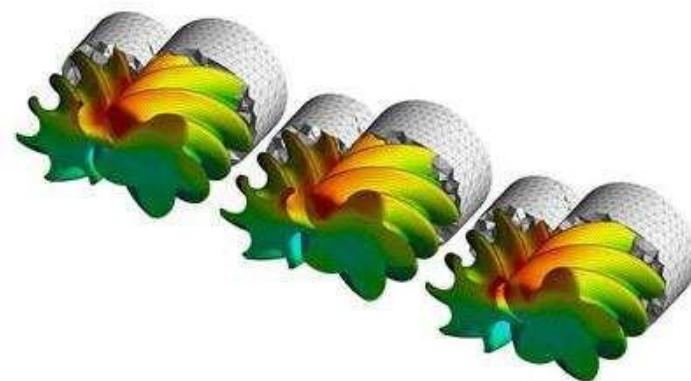


用有限元法求解静电场边值问题 — 以FEMM软件为例

机电工程与自动化学院

授课教师：张 弦



主要内容

- ◆ 1. 有限元方法介绍.....●
- ◆ 2. FEMM软件简介.....●
- ◆ 3. FEMM软件的安装.....●
- ◆ 4. FEMM的基本操作.....●
- ◆ 5. 平面静电问题示例.....●
- ◆ 6. 轴对称静电问题示例.....●

有限元方法介绍 — 计算电磁学的三大方法

📖 有限元法(Finite Element Method, FEM);


📖 有限元法(FEM)、矩量法(MOM)和时域有限差分法(FDTD)并列，号称计算电磁学三大方法；

方法	核心思想	适用条件	代表软件
FDTD	用有限差分法从空间和时间交替离散麦克斯韦方程组	时域，快速瞬变	XFDTD IMST Empire
MOM	用有限单元离散电磁场积分方程	频域，低频	FEKO Zeland IE3D
FEM	基于边值问题的微分形式方程的离散化数值处理	频域，低频	ANSYS ANSOFT INFOLYTICA

有限元方法介绍 — 原理和步骤

 有限元法的数学基础是变分原理和加权余量原理；

 有限元法基本思想：

 将由偏微分方程表征的连续函数所在的封闭场域划分成有限个小区域；

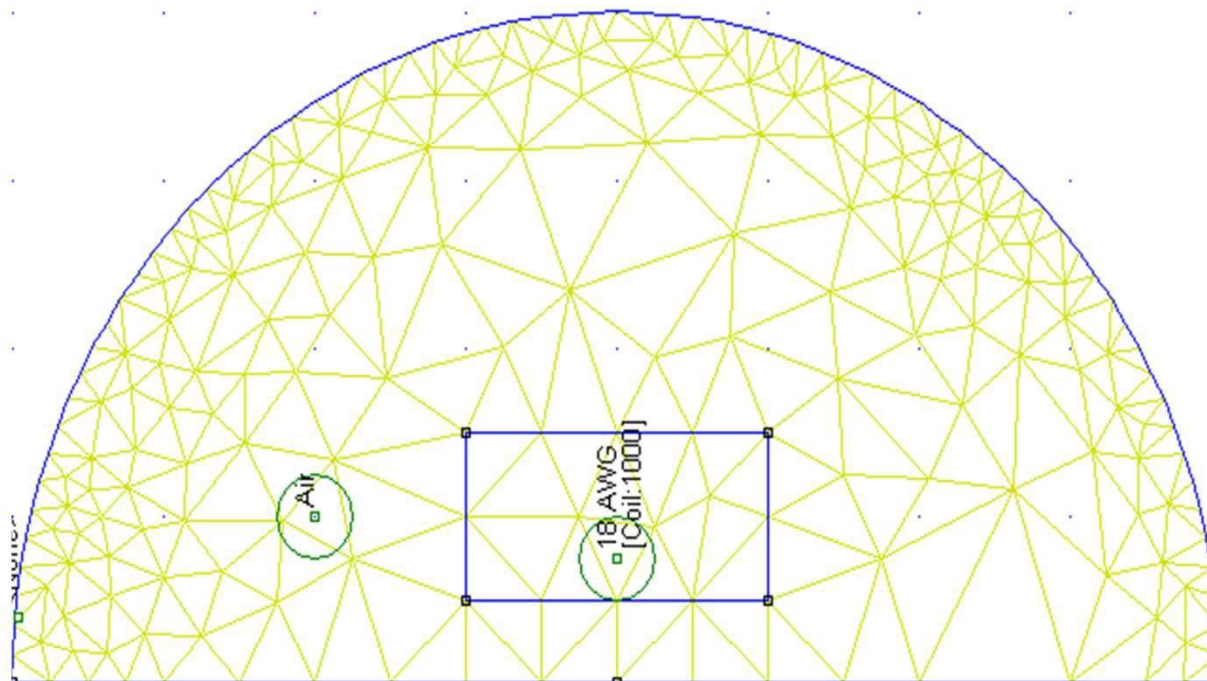
 每一个小区域用一个选定的近似函数来代替；

 于是整个场域上的函数被离散化，由此获得一组近似的代数方程；

 并联立求解，以获得该场域中函数的近似数值；

有限元方法介绍 — 原理和步骤

📖 有限差分法和有限元法之所以不同，是因为它们的数学建模方式不同，即它们对泊松方程或拉普拉斯方程的数学离散方式不同；



主要内容

- ◆ 1. 有限元方法介绍.....
- ◆ 2. FEMM软件简介.....
- ◆ 3. FEMM软件的安装.....
- ◆ 4. FEMM的基本操作.....
- ◆ 5. 平面静电问题示例.....
- ◆ 6. 轴对称静电问题示例.....

FEMM软件简介


 **FEMM (Finite Element Method Magnetics)**

 **二维平面或轴对称模型**

 **具体分析的问题类型包括：**

 **静电分析；**

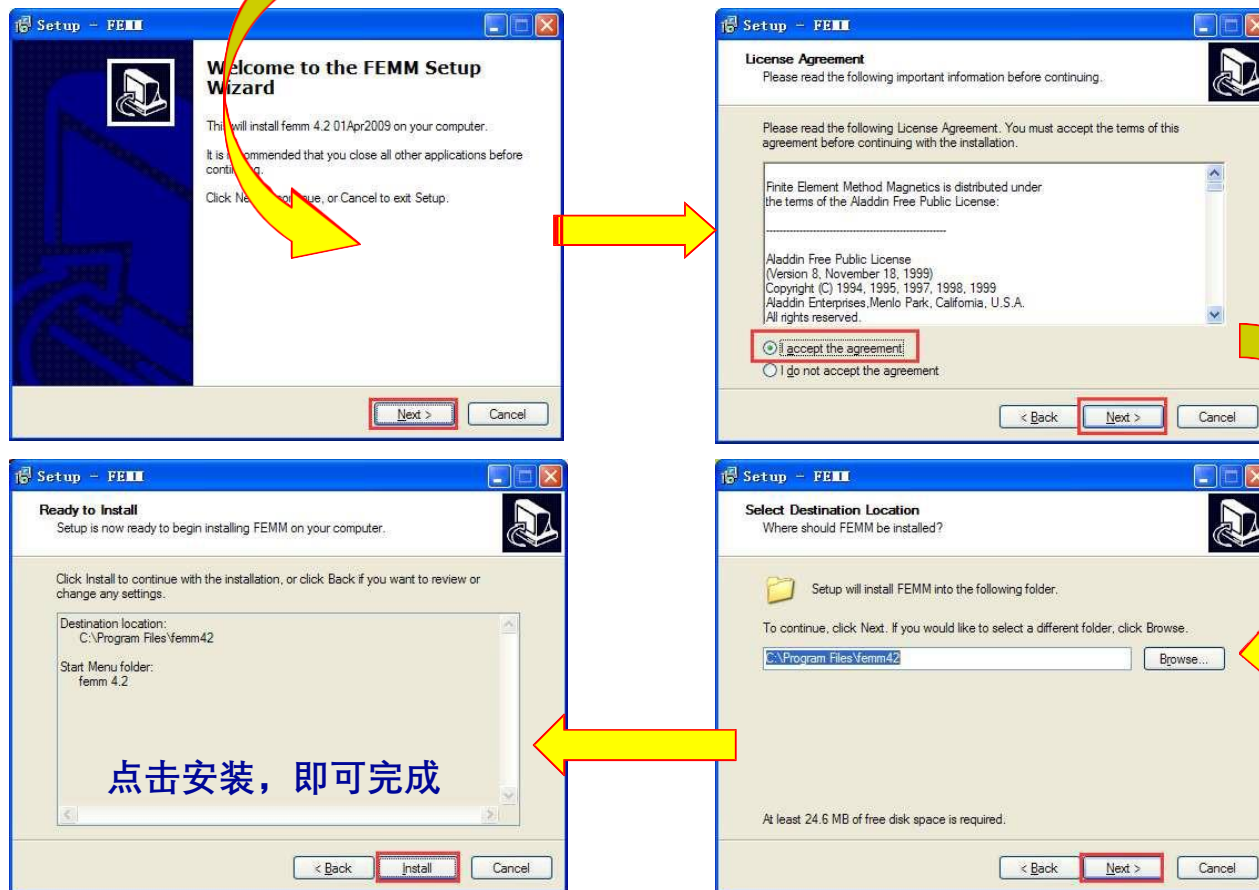
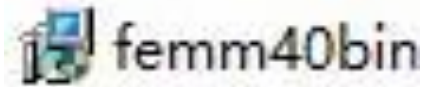
 **线性或非线性静磁分析；**

 **瞬态、谐波磁场（包括涡流）分析等等。**

主要内容

- ◆ 1. 有限元方法介绍.....
- ◆ 2. FEMM软件简介.....
- ◆ 3. FEMM软件的安装.....
- ◆ 4. FEMM的基本操作.....
- ◆ 5. 平面静电问题示例.....
- ◆ 6. 轴对称静电问题示例.....

FEMM软件的安装



1. 双击图标安装文件；
2. 文件安装窗口，
点击“**NEXT**”；
3. 选择
“**I accept the agreement**”
点击“**NEXT**”；
4. 选择安装路径，点击
“**NEXT**”；
5. 点击“**Install**”，即可完成。

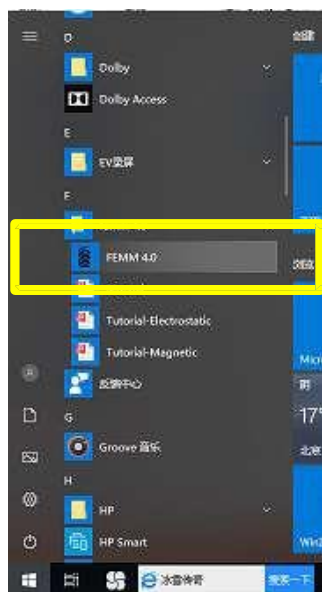
主要内容

- ◆ 1. 有限元方法介绍.....
- ◆ 2. FEMM软件简介.....
- ◆ 3. FEMM软件的安装.....
- ◆ **4. FEMM的基本操作**.....
- ◆ 5. 平面静电问题示例.....
- ◆ 6. 轴对称静电问题示例.....

FEMM的基本操作

一、创建文件：

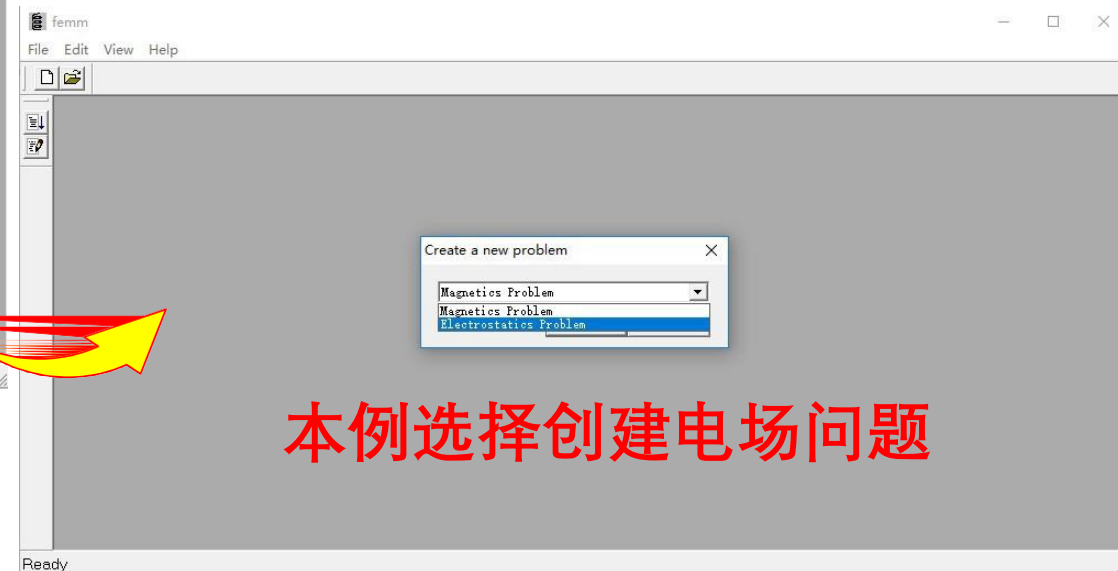
开始菜单找到FEMM程序，并点击  ，在对话框中点击**确定**



FEMM的基本操作

一、创建文件：

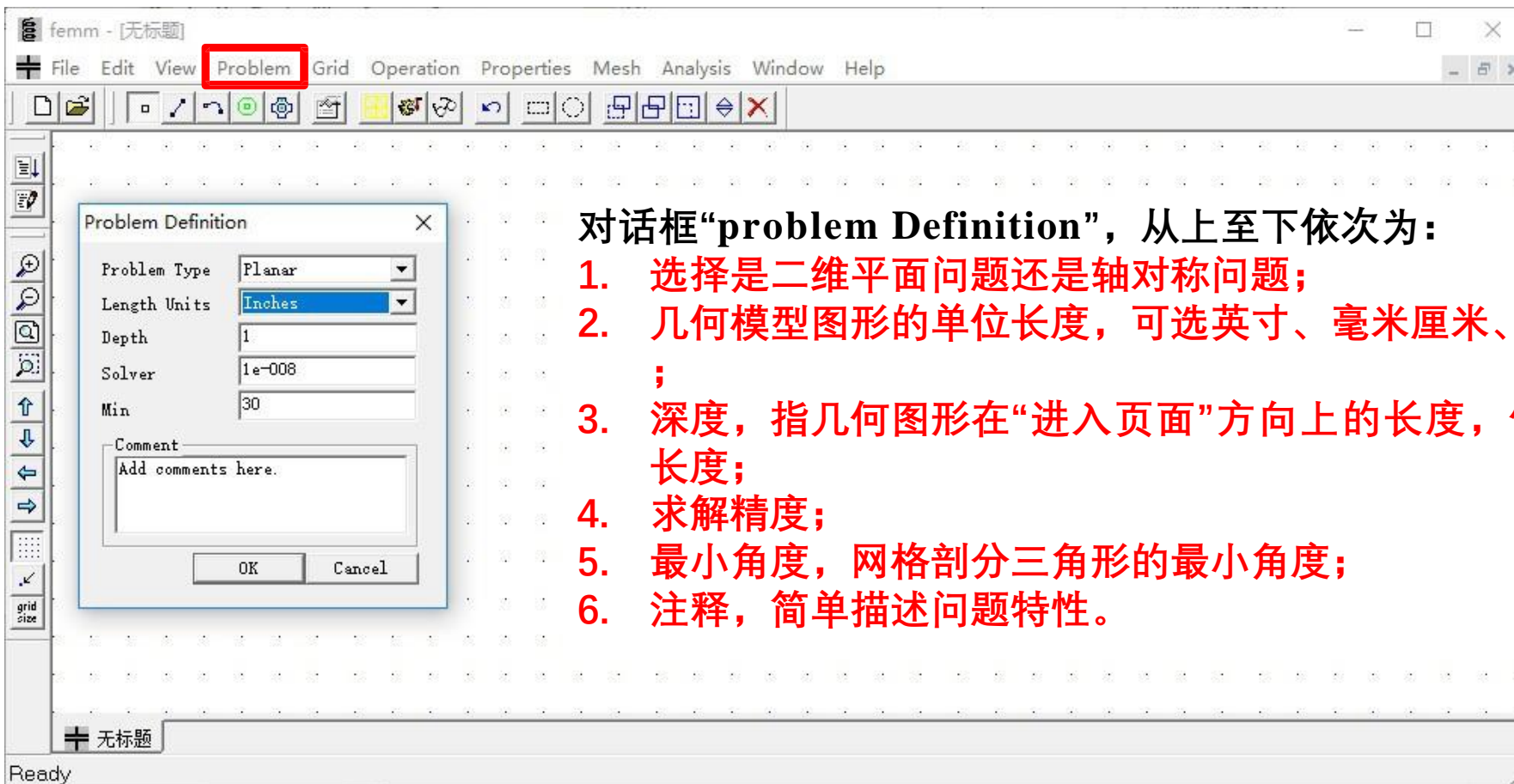
点击  新建文件，选择创建磁场问题，还是电场问题，点击**确定**。



本例选择创建电场问题

FEMM的基本操作

二、下拉菜单“Problem”

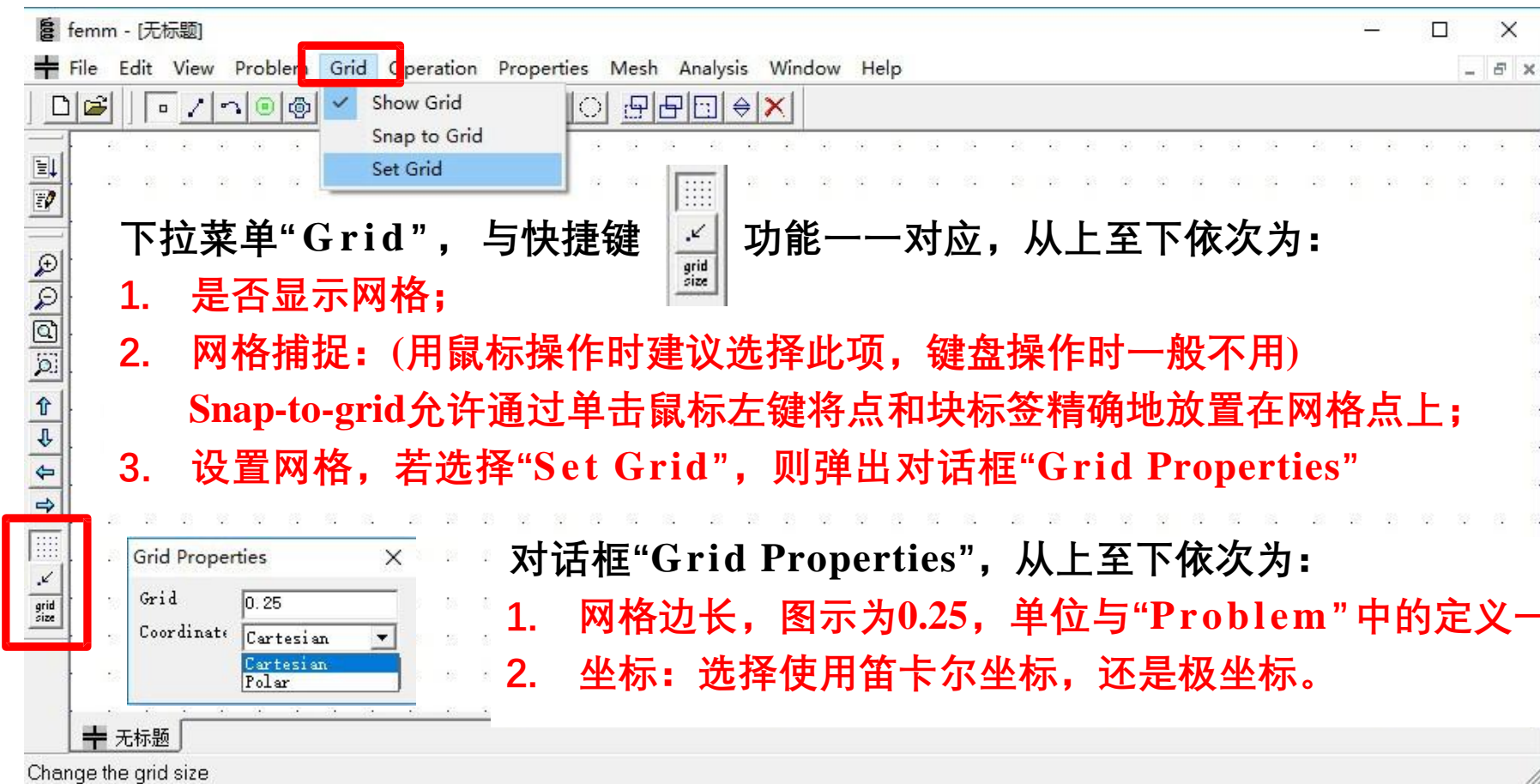


对话框“problem Definition”，从上至下依次为：


1. 选择是二维平面问题还是轴对称问题；
2. 几何模型图形的单位长度，可选英寸、毫米厘米、米、密尔、微米；
3. 深度，指几何图形在“进入页面”方向上的长度，例如同轴电缆的长度；
4. 求解精度；
5. 最小角度，网格剖分三角形的最小角度；
6. 注释，简单描述问题特性。

FEMM的基本操作

三、下拉菜单“Grid”



The screenshot shows the FEMM software interface. The 'Grid' menu is open, showing options: 'Show Grid' (checked), 'Snap to Grid', and 'Set Grid'. The 'Grid Properties' dialog box is also open, showing 'Grid' set to 0.25 and 'Coordinate' set to Cartesian. The 'grid size' button in the toolbar is highlighted with a red box.

下拉菜单“Grid”，与快捷键  功能一一对应，从上至下依次为：

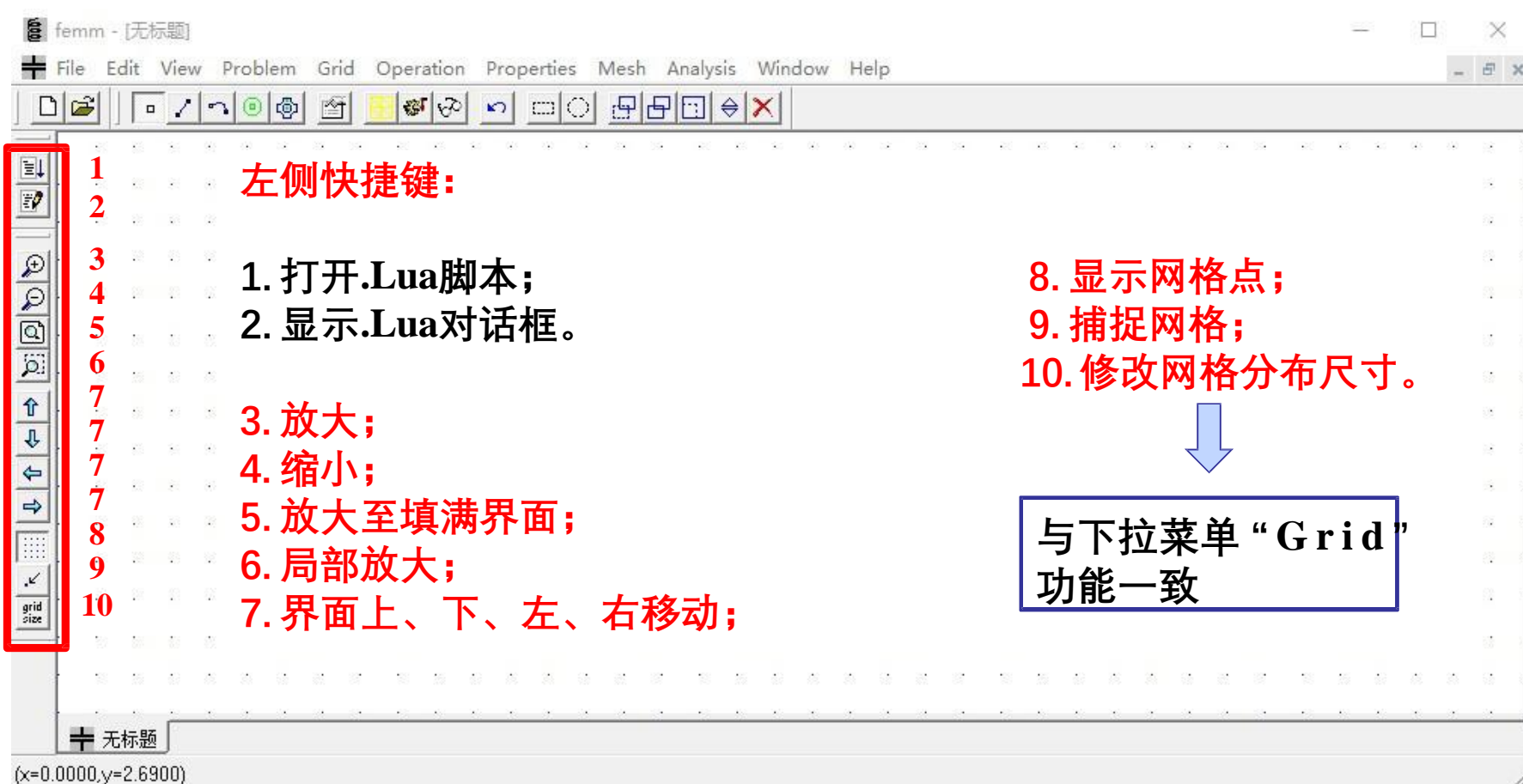
1. 是否显示网格；
2. 网格捕捉：（用鼠标操作时建议选择此项，键盘操作时一般不用）
Snap-to-grid允许通过单击鼠标左键将点和块标签精确地放置在网格点上；
3. 设置网格，若选择“Set Grid”，则弹出对话框“Grid Properties”

对话框“Grid Properties”，从上至下依次为：

1. 网格边长，图示为0.25，单位与“Problem”中的定义一致；
2. 坐标：选择使用笛卡尔坐标，还是极坐标。

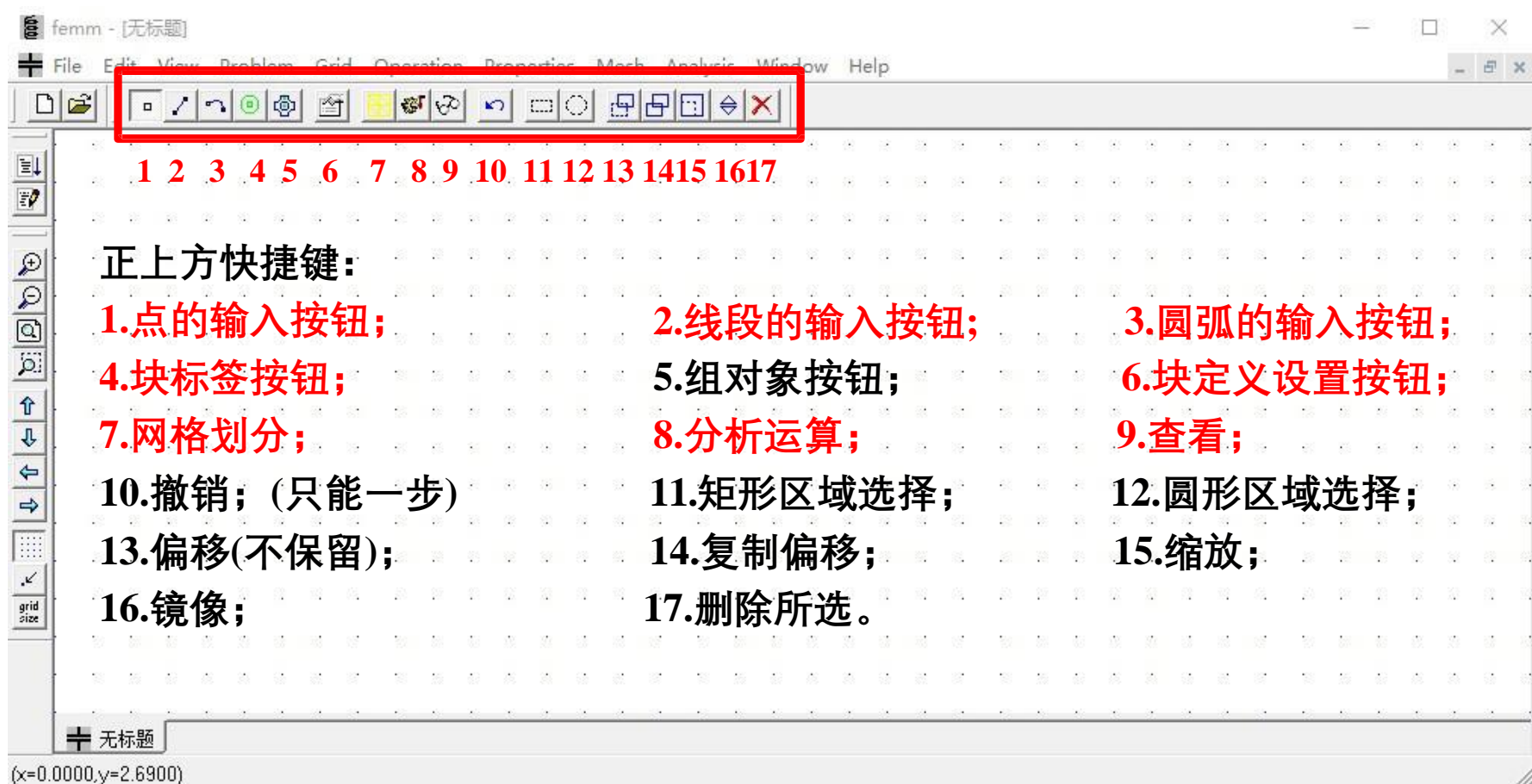
FEMM基本操作

四、设计界面



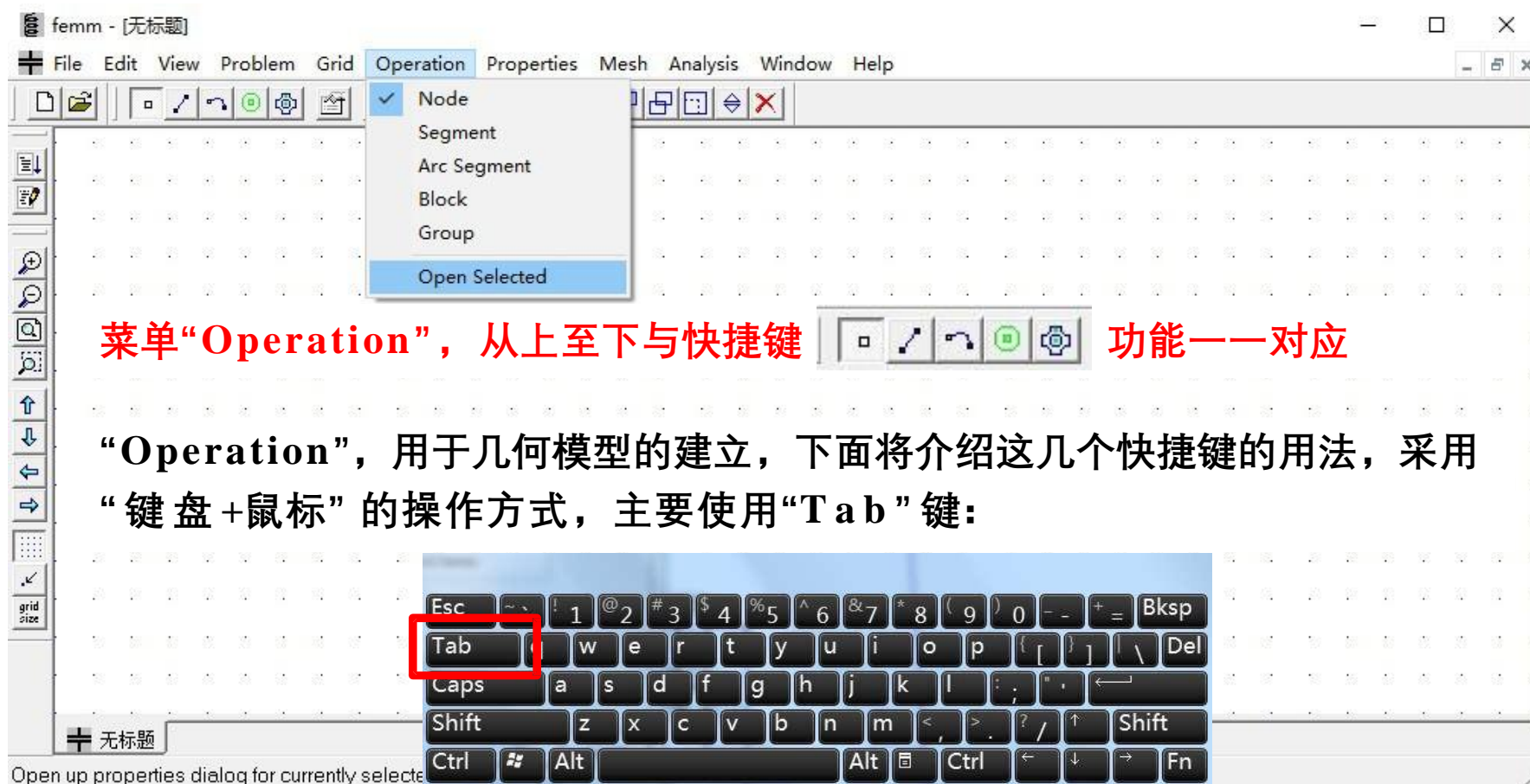
FEMM基本操作

四、设计界面



FEMM基本操作

五、下拉菜单“Operation”和




功能一一对应


FEMM基本操作

五、下拉菜单“Operation”和



“点”操作，鼠标+键盘方式：

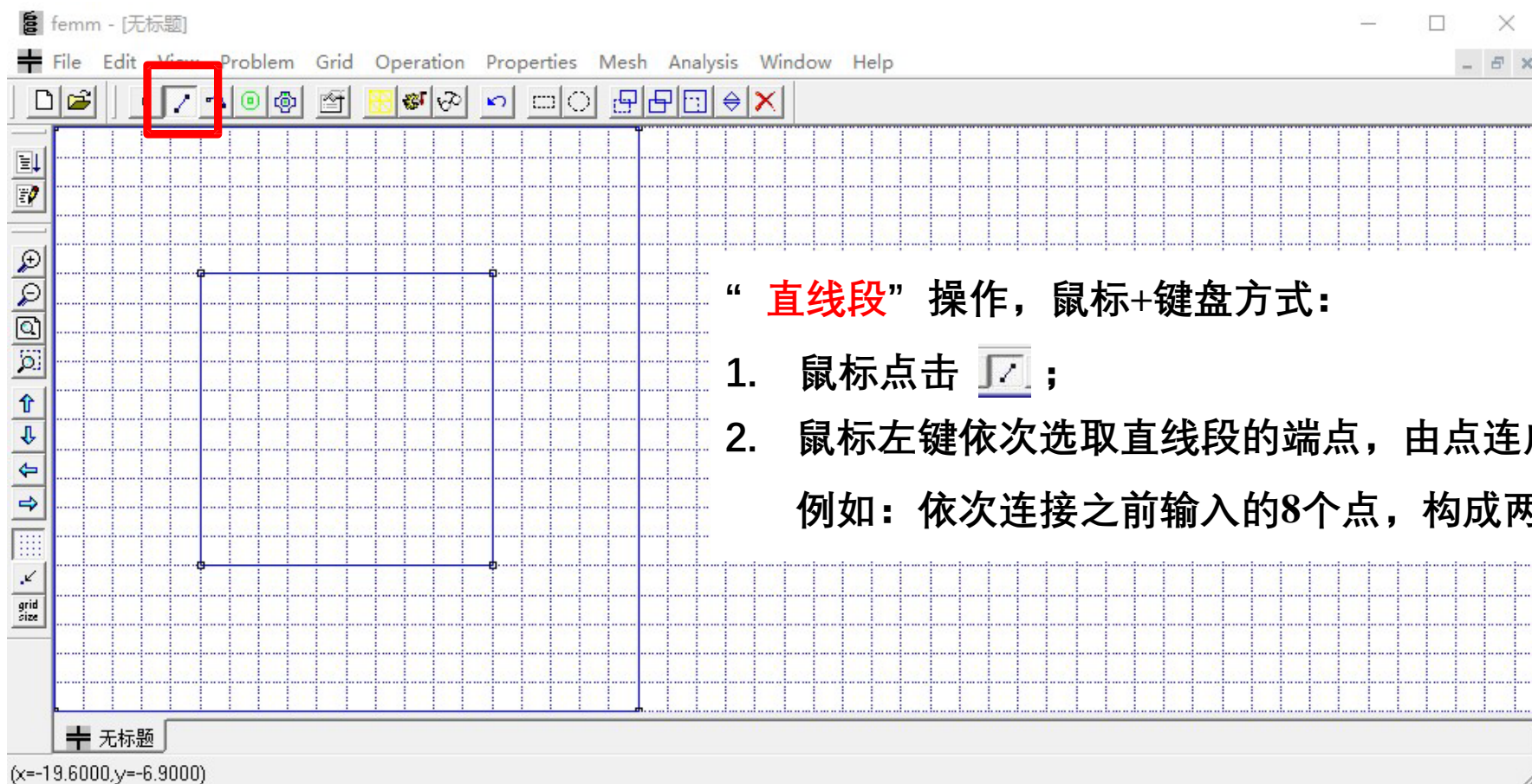
1. 鼠标左键点击  ；
2. 按键盘中的“Tab”键，出现“Enter Point”对话框；
3. 输入点的坐标，例如(10,10)，点击“OK”或键盘的回车；
4. 按键盘中的“Tab”键，重复上面的操作，分别输入
(10,-10)、(-10,10)、(-10,-10)
(20,-20)、(20,20)、(-20,20)、(-20,-20)

小技巧：输入过程中，可随时以点击左侧快捷键  ，整体观察几何模型。

(x=5.2100,y=1.7900)

FEMM的基本操作

五、下拉菜单“Operation”和



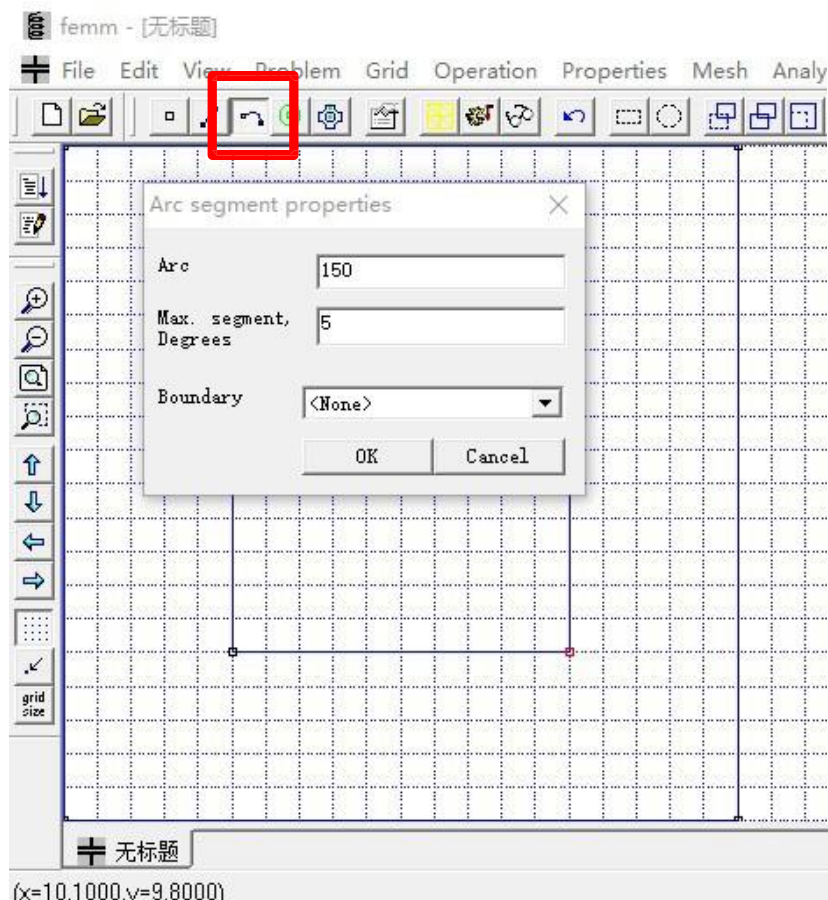
“**直线段**”操作，鼠标+键盘方式：

1. 鼠标点击  ；
2. 鼠标左键依次选取直线段的端点，由点连成线；

例如：依次连接之前输入的8个点，构成两个矩形

FEMM的基本操作

五、下拉菜单“Operation”和



“弧线段”操作，鼠标+键盘方式：

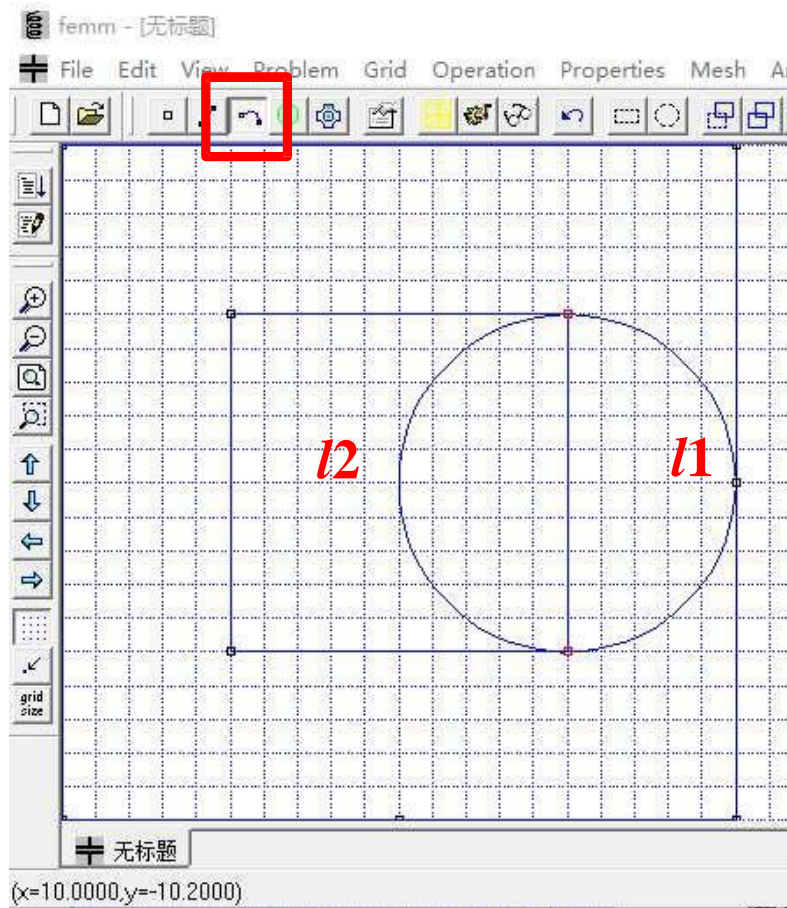
1. 鼠标点击 ；
2. 鼠标左键依次逆时针选取弧线段的端点，出现对话框

“Arc segment properties”，从上至下依次为：

- ① 输入弧线的角度，在 1° - 180° 之间
- ② 弧线离散化的精细程度，数值在0.01-10之间，选择0.01时，离散化的精细程度最好，弧线最平滑。
- ③ 若弧线恰好是研究区域的边界，可在此之间选择边界属性。

FEMM的基本操作

五、下拉菜单“Operation”和



“弧线段”操作，鼠标+键盘方式：

例如：在“弧”操作模式下，鼠标左键依次选取(10,-10)和(10,10)两点，输入180，则形成半圆 *l1*；重复选取，(10,10)和(10,-10)两点，输入180，形成半圆 *l2*；则 *l1* 和 *l2* 构成一个圆。

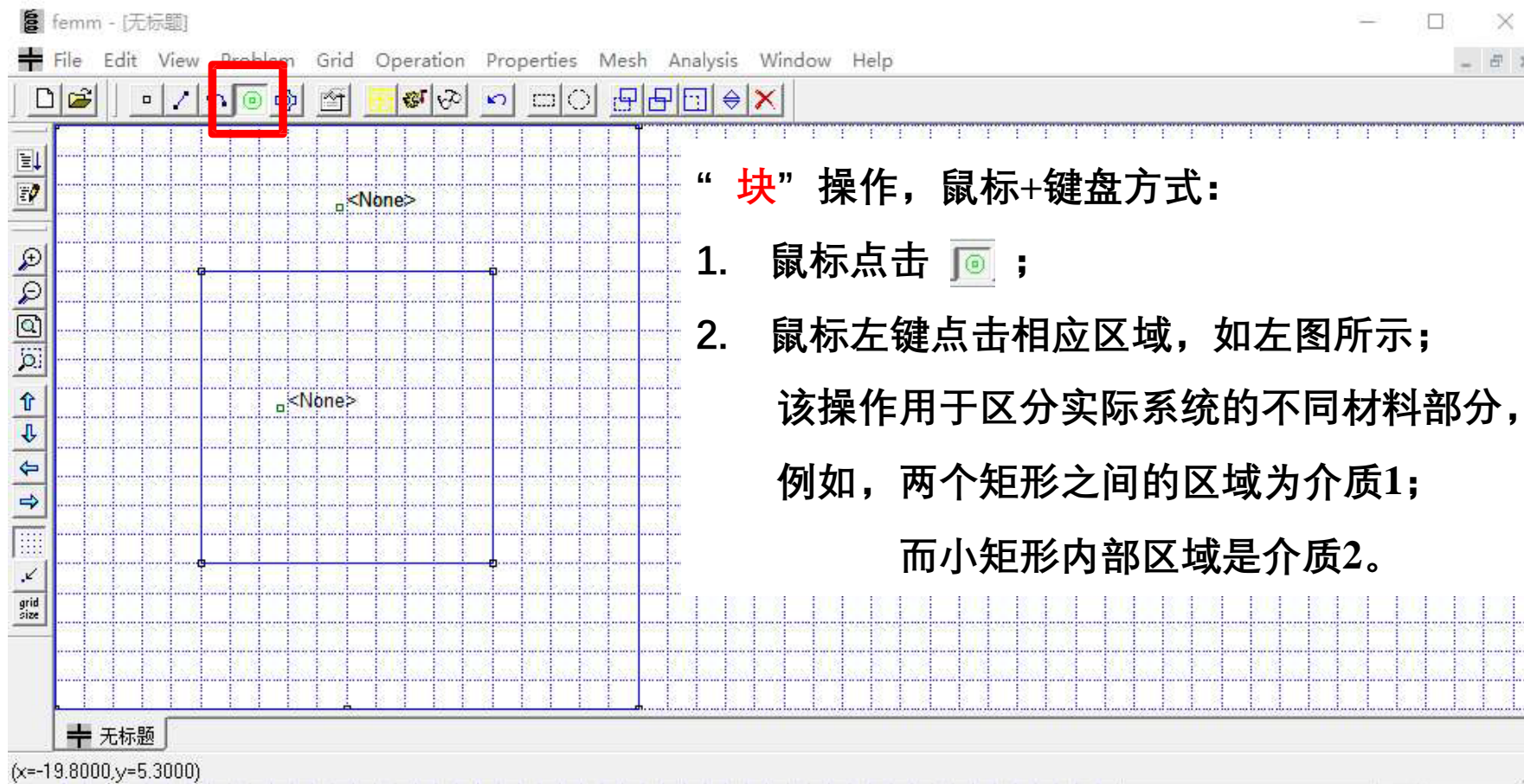
思考：还可以如何画一个圆？

小技巧：在“弧”操作模式下，鼠标右键选取弧段，按“Delete”键，可删除选中弧段。


若删除“点”或“线”，也可在相应模式下，右键选取按“Delete”键删除。

FEMM的基本操作

五、下拉菜单“Operation”和

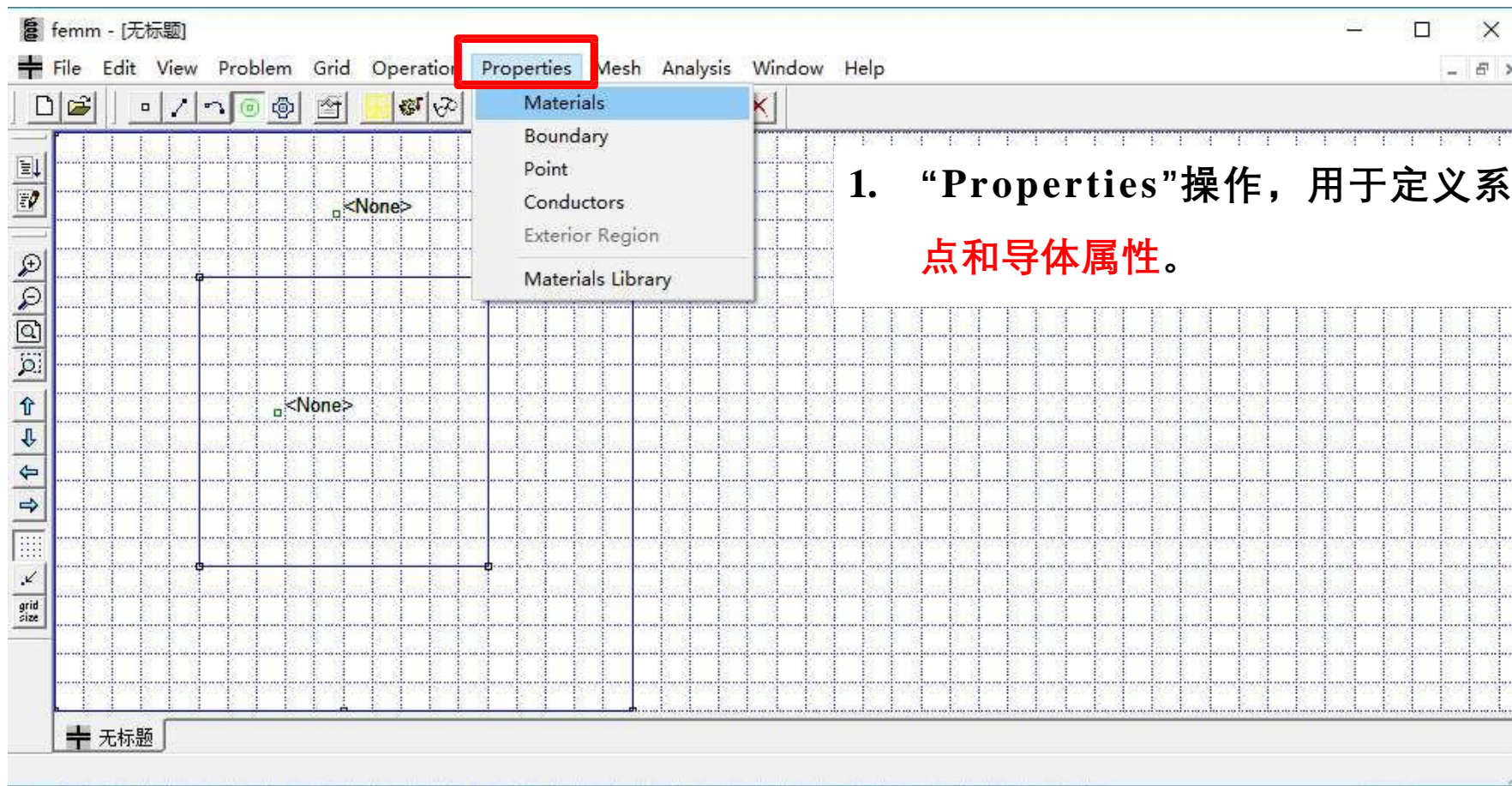


“**块**”操作，鼠标+键盘方式：

1. 鼠标点击  ；
2. 鼠标左键点击相应区域，如左图所示；
该操作用于区分实际系统的不同材料部分，
例如，两个矩形之间的区域为介质1；
而小矩形内部区域是介质2。

FEMM的基本操作

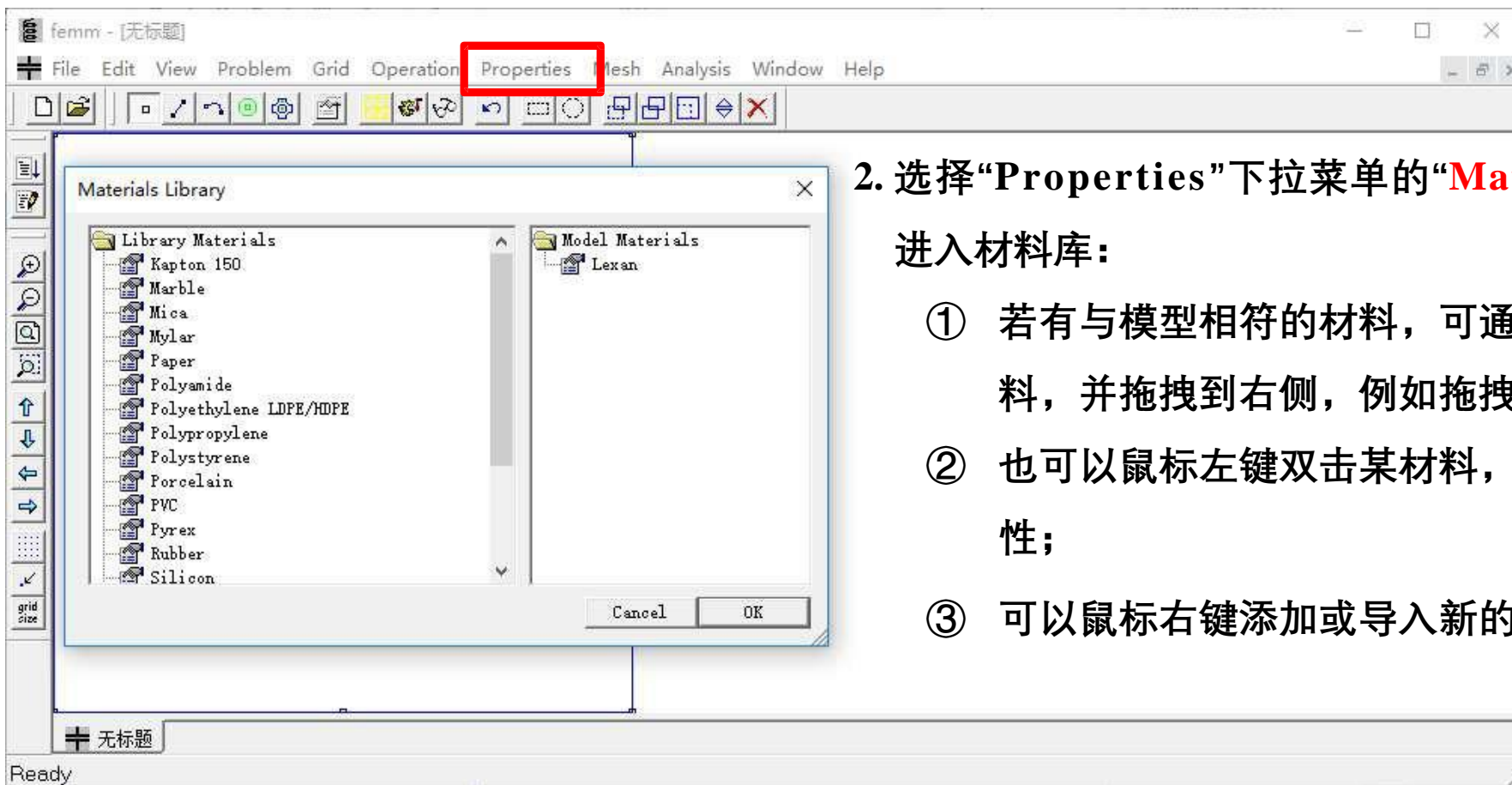
六、下拉菜单“Properties”



1. “Properties”操作，用于定义系统的材料、边界、点和导体属性。

FEMM的基本操作

六、下拉菜单“Properties”

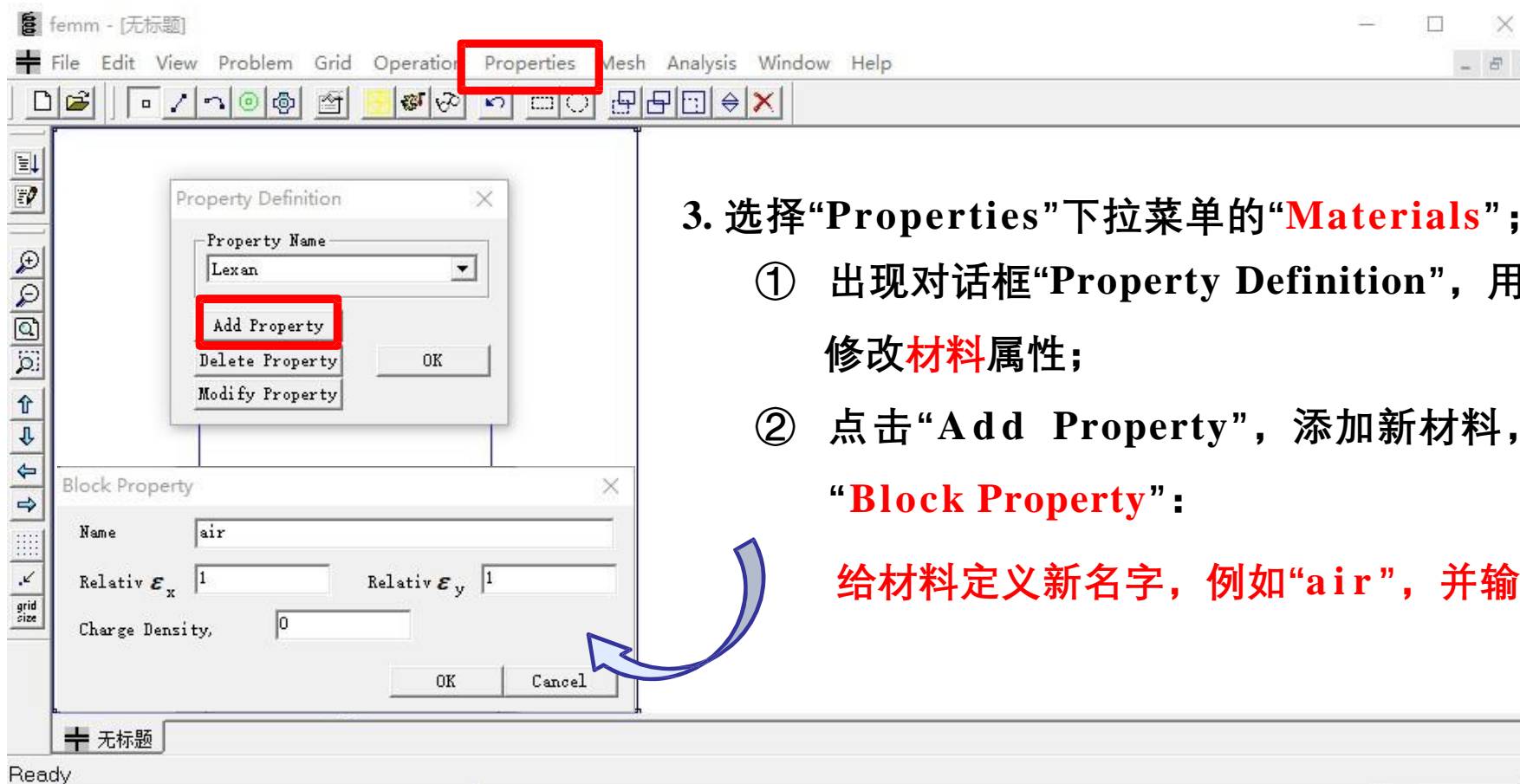


2. 选择“Properties”下拉菜单的“**Materials Library**”
进入材料库：

- ① 若有与模型相符的材料，可通过鼠标左键选中材料，并拖拽到右侧，例如拖拽**Lexan**到右侧；
- ② 也可以鼠标左键双击某材料，修改查看材料的属性；
- ③ 可以鼠标右键添加或导入新的材料；

FEMM的基本操作

六、下拉菜单“Properties”



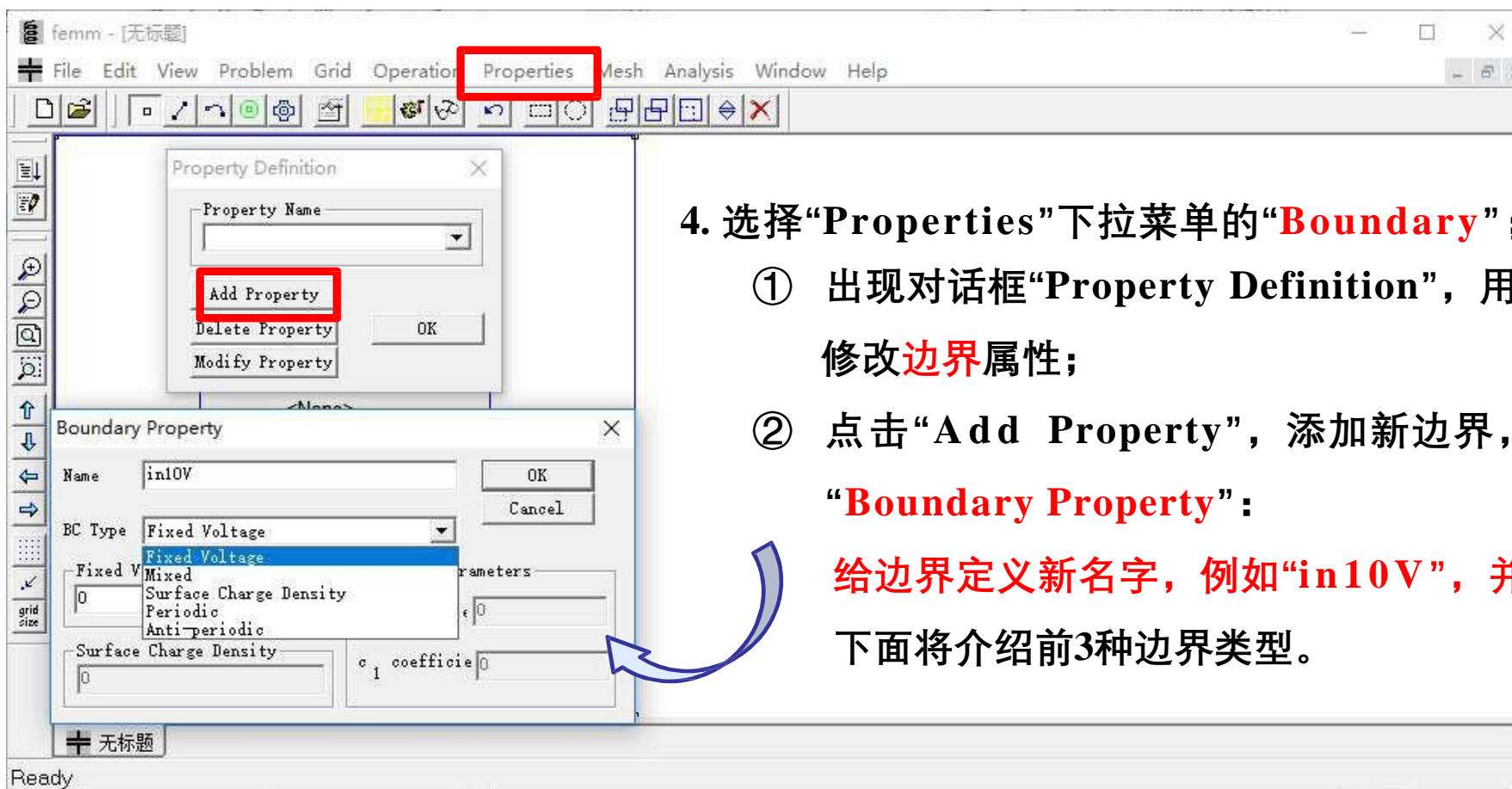
3. 选择“Properties”下拉菜单的“Materials”；

- ① 出现对话框“Property Definition”，用于添加、删除、修改材料属性；
- ② 点击“Add Property”，添加新材料，此时出现对话框“Block Property”：

给材料定义新名字，例如“air”，并输入材料特性参数

FEMM的基本操作

六、下拉菜单“Properties”



4. 选择“Properties”下拉菜单的“**Boundary**”；

- ① 出现对话框“Property Definition”，用于添加、删除、修改边界属性；
- ② 点击“Add Property”，添加新边界，此时出现对话框“**Boundary Property**”：

给边界定义新名字，例如“in10V”，并选择边界类型。

下面将介绍前3种边界类型。

FEMM的基本操作

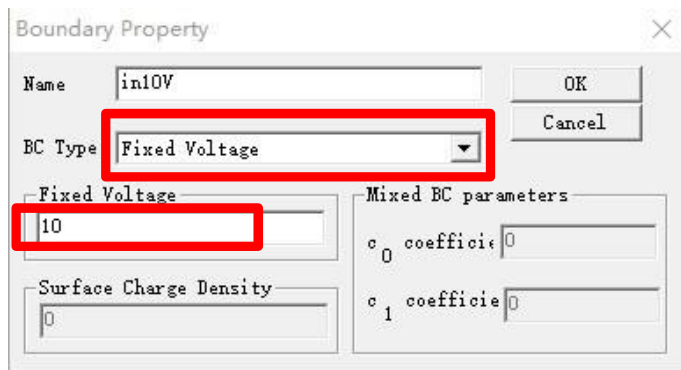
六、 下拉菜单“**Properties**”

4. 选择“Properties”下拉菜单的“**Boundary**”；

(1). “Fixed Voltage”— Dirichlet边界条件

一般用于研究区域的外部边界

例如：输入指定电压：10



思考：如何添加名为“out0V”的新边界?第一类边界条件，指定电压为0V?

FEMM的基本操作

六、下拉菜单“**Properties**”

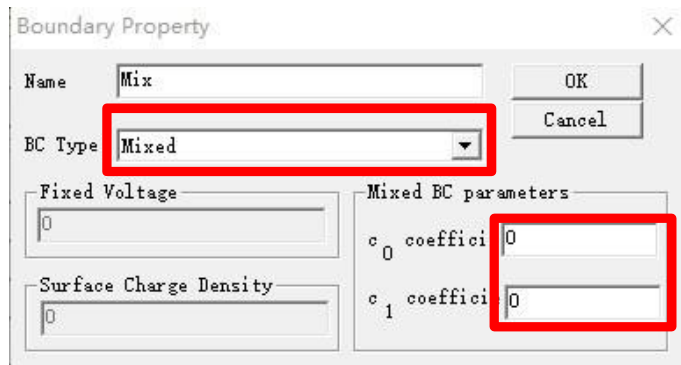
4. 选择“**Properties**”下拉菜单的“**Boundary**”；

(2). “Mixed”— 混合边界条件

一般用于研究区域的外部边界

$$\epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} + c_0 \varphi + c_1 = 0$$

通过 c_0 ， c_1 的不同组合，可得到第二类边界条件和混合边界条件



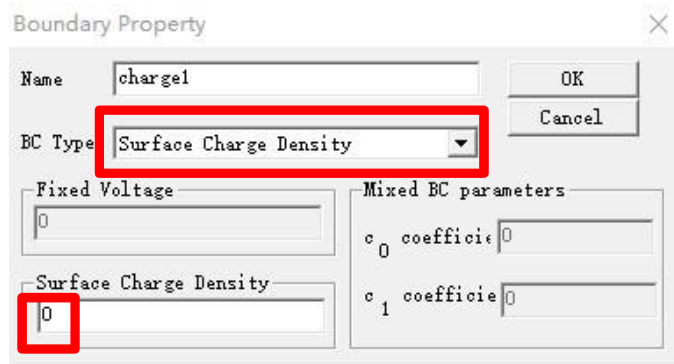
FEMM的基本操作

六、 下拉菜单“**Properties**”

4. 选择“Properties”下拉菜单的“**Boundary**”；

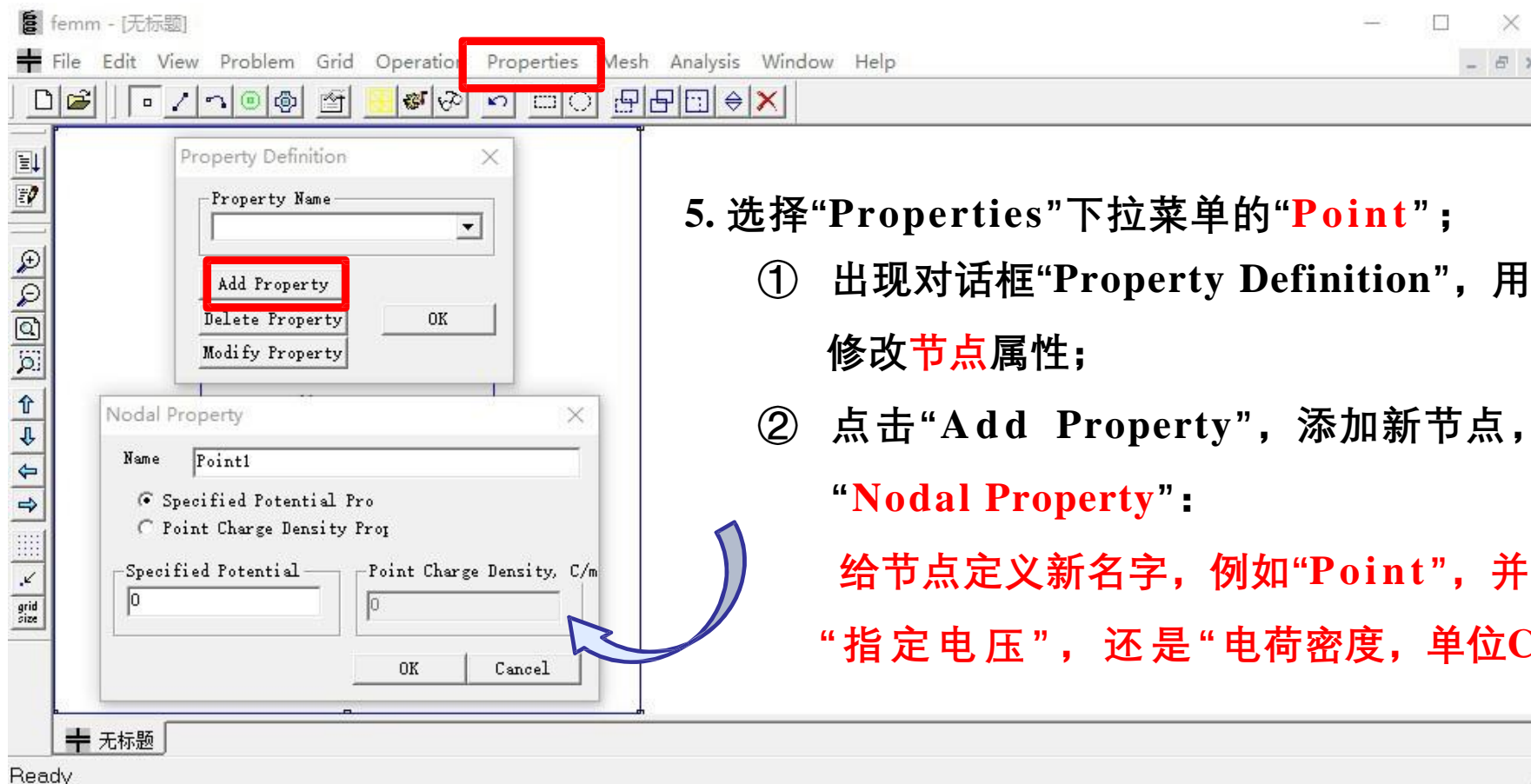
(3). “Surface Charge Density”— 表面电荷密度

一般用于研究区域内部，不同介质的分界面，即衔接条件



FEMM的基本操作

六、下拉菜单“Properties”



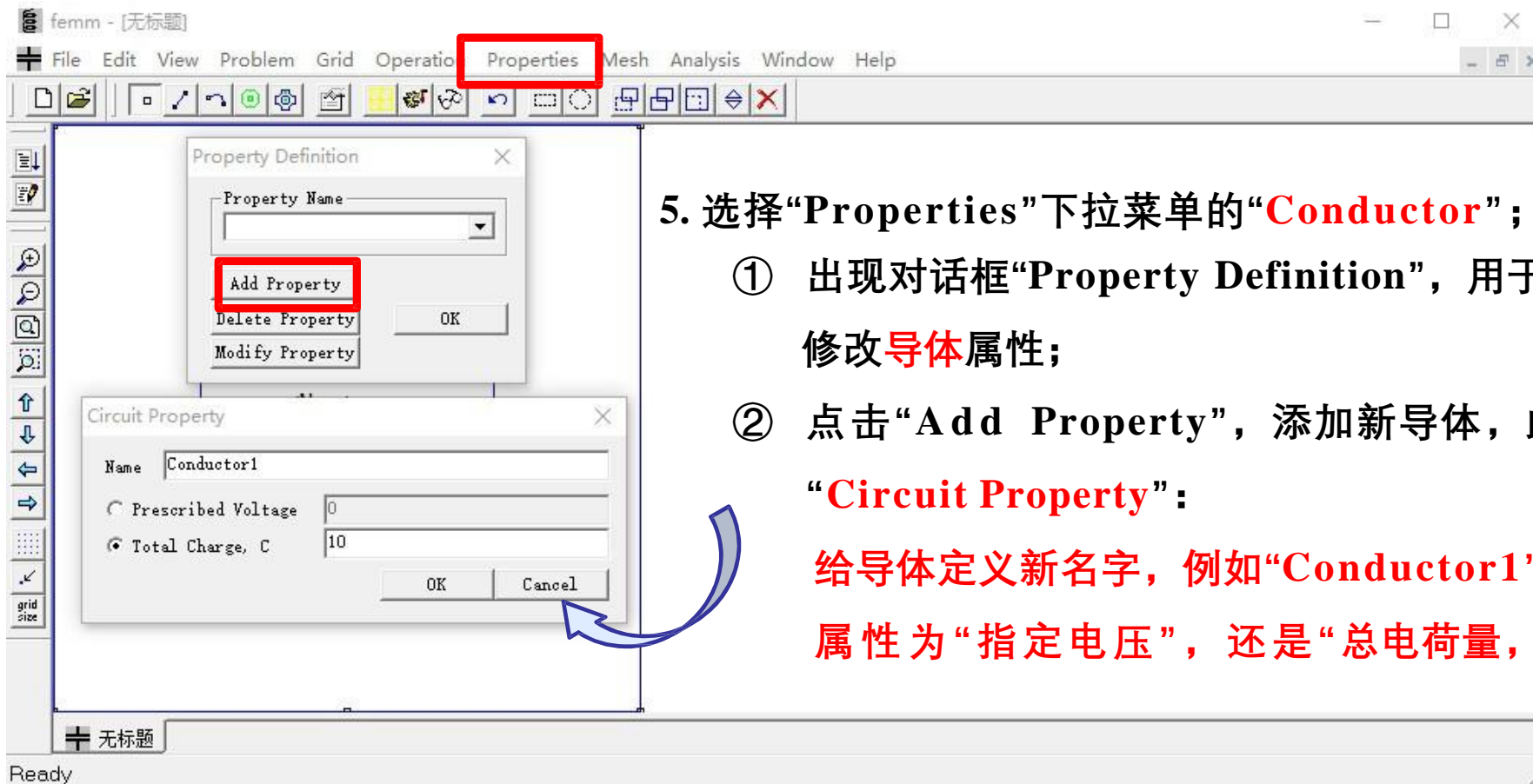
5. 选择“Properties”下拉菜单的“**Point**”；

- ① 出现对话框“Property Definition”，用于添加、删除、修改节点属性；
- ② 点击“Add Property”，添加新节点，此时出现对话框“**Nodal Property**”：

给节点定义新名字，例如“**Point**”，并选择节点属性为“指定电压”，还是“电荷密度，单位C/m”

FEMM的基本操作

六、下拉菜单“Properties”



5. 选择“Properties”下拉菜单的“**Conductor**”；

- ① 出现对话框“Property Definition”，用于添加、删除、修改**导体**属性；
- ② 点击“Add Property”，添加新导体，此时出现对话框“**Circuit Property**”：

给导体定义新名字，例如“**Conductor1**”，并选择导体属性为“指定电压”，还是“总电荷量，单位C”



FEMM的基本操作

如何把上述操作，应用于具体模型的分析？

如何查看仿真得到的结果？

下面以“具有正方形横截面的电容器”为例，讲述完整的仿真过程


主要内容

- ◆ 1. 有限元方法介绍.....
- ◆ 2. FEMM软件简介.....
- ◆ 3. FEMM软件的安装.....
- ◆ 4. FEMM的基本操作.....
- ◆ **5. 平面静电问题示例**.....
- ◆ 6. 轴对称静电问题示例.....


平面静电问题示例

有限元软件的一般分析步骤：

建立模型

 根据实物建立相应的模型，并标上各部分的材料名称

加载并设置边界条件和激励

 给模型中各部件命名并赋予其属性，设置求解区域的边界条件和激励

剖分网格

 自由划分和限定网格尺寸的划分

求解并查看结果

 数据、图线和图表

平面静电问题示例

具有方形截面电容器的分析(同轴电缆):

如图1所示,此示例的外部正方形为4厘米,内部正方形为2厘米。几何形状在“页内”方向延伸100厘米。板之间的电介质是空气。建立模型,分析问题并确定电容。

由于对称性,
仅需对设备的四分之一进行建模

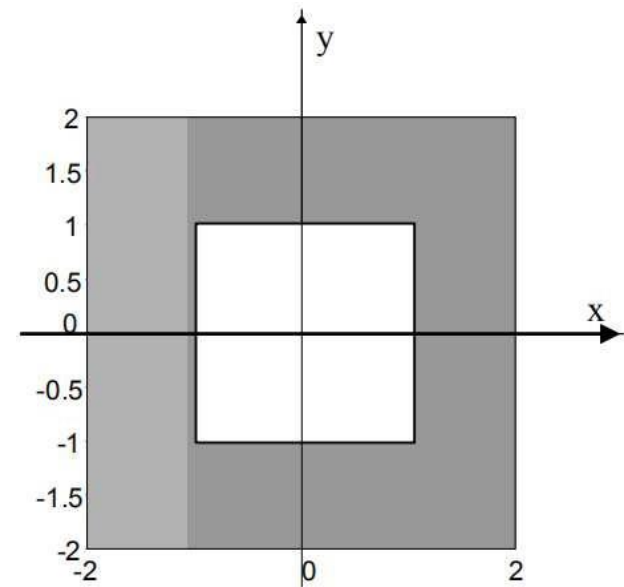
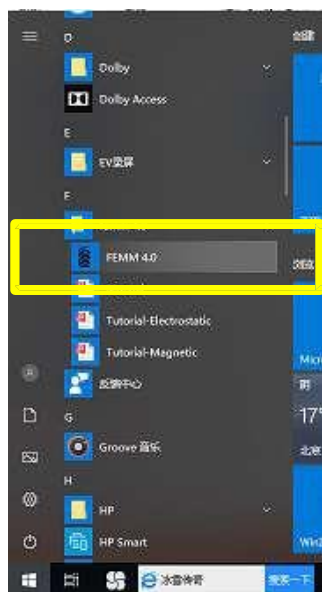


Figure 1: Square Cross-Section Capacitor

平面静电问题示例

一、建立模型：

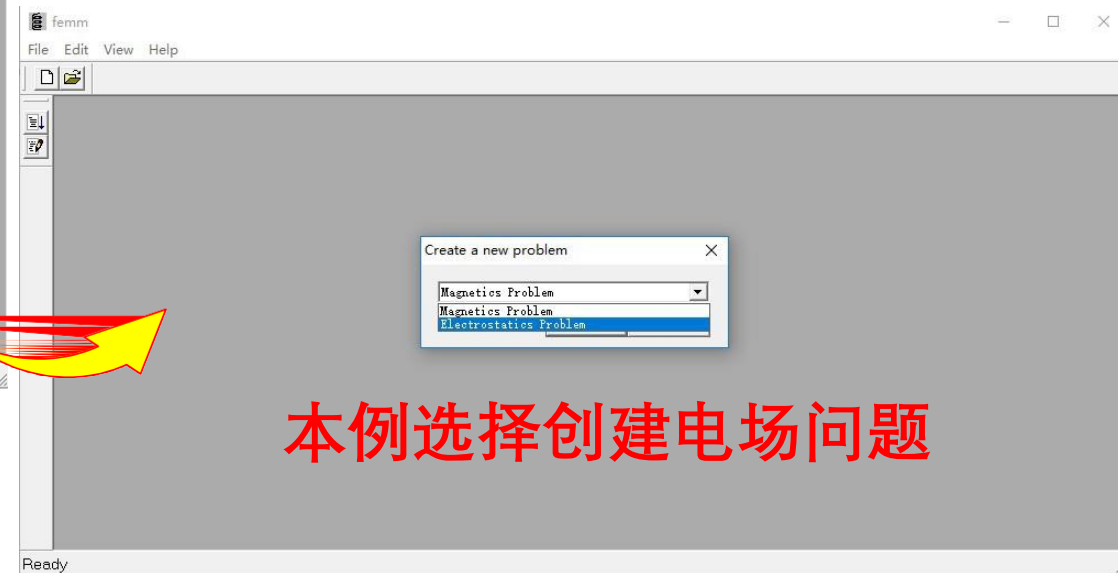
开始菜单找到FEMM程序，并点击  ，在对话框中点击**确定**



平面静电问题示例

一、建立模型：

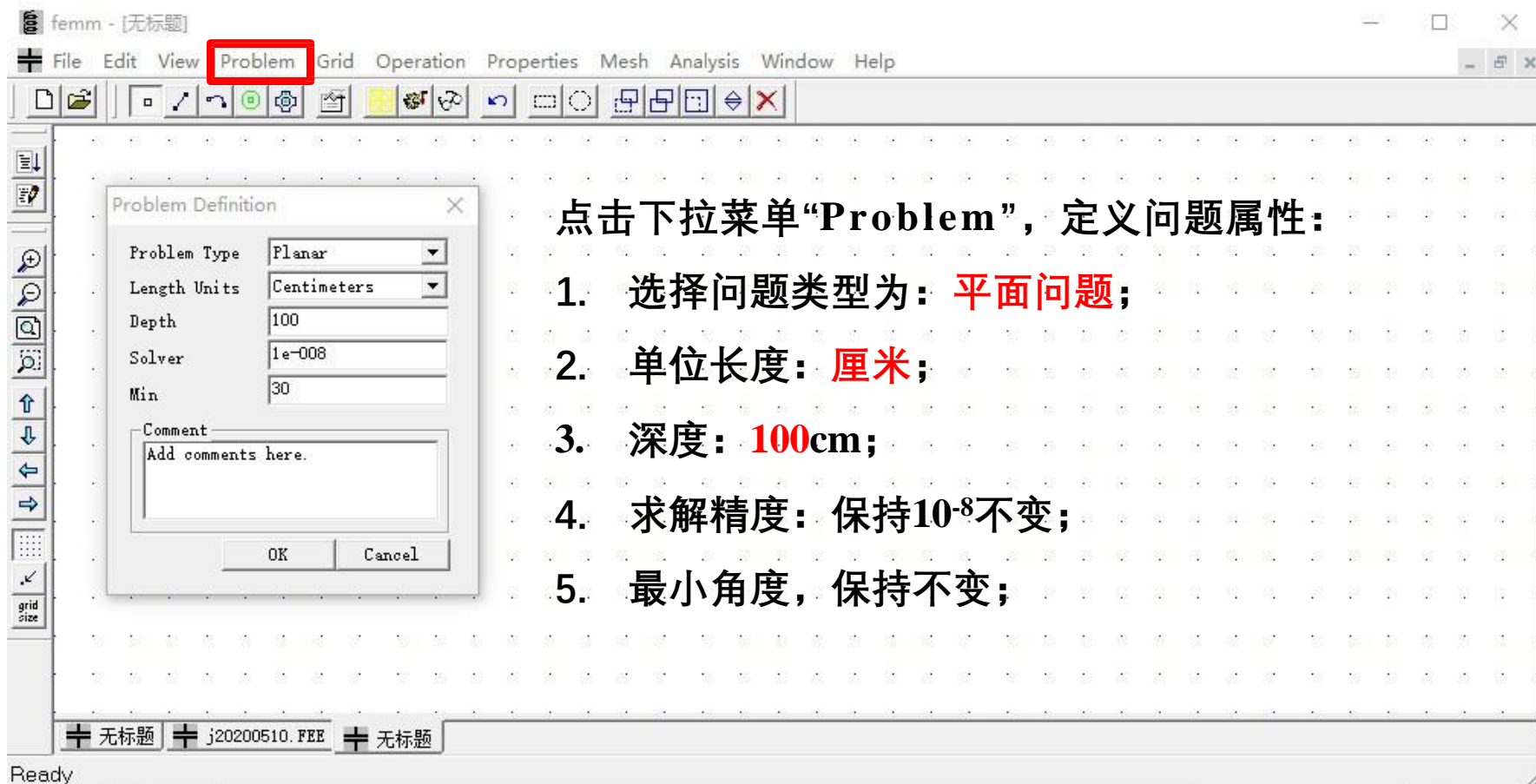
点击  新建文件，选择建立电场问题，点击**确定**。



本例选择创建电场问题

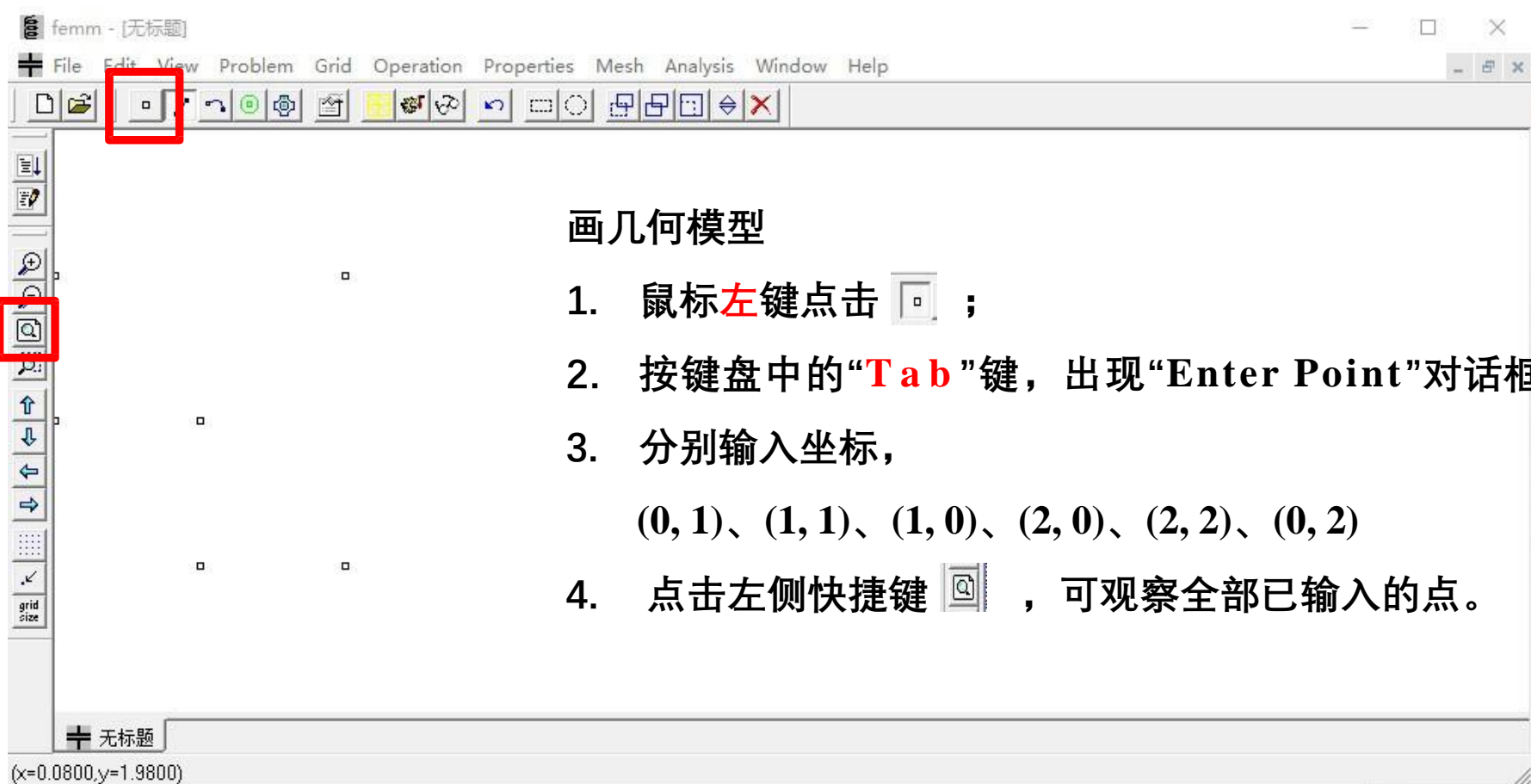
平面静电问题示例

一、建立模型：





平面静电问题示例

一、建立模型：



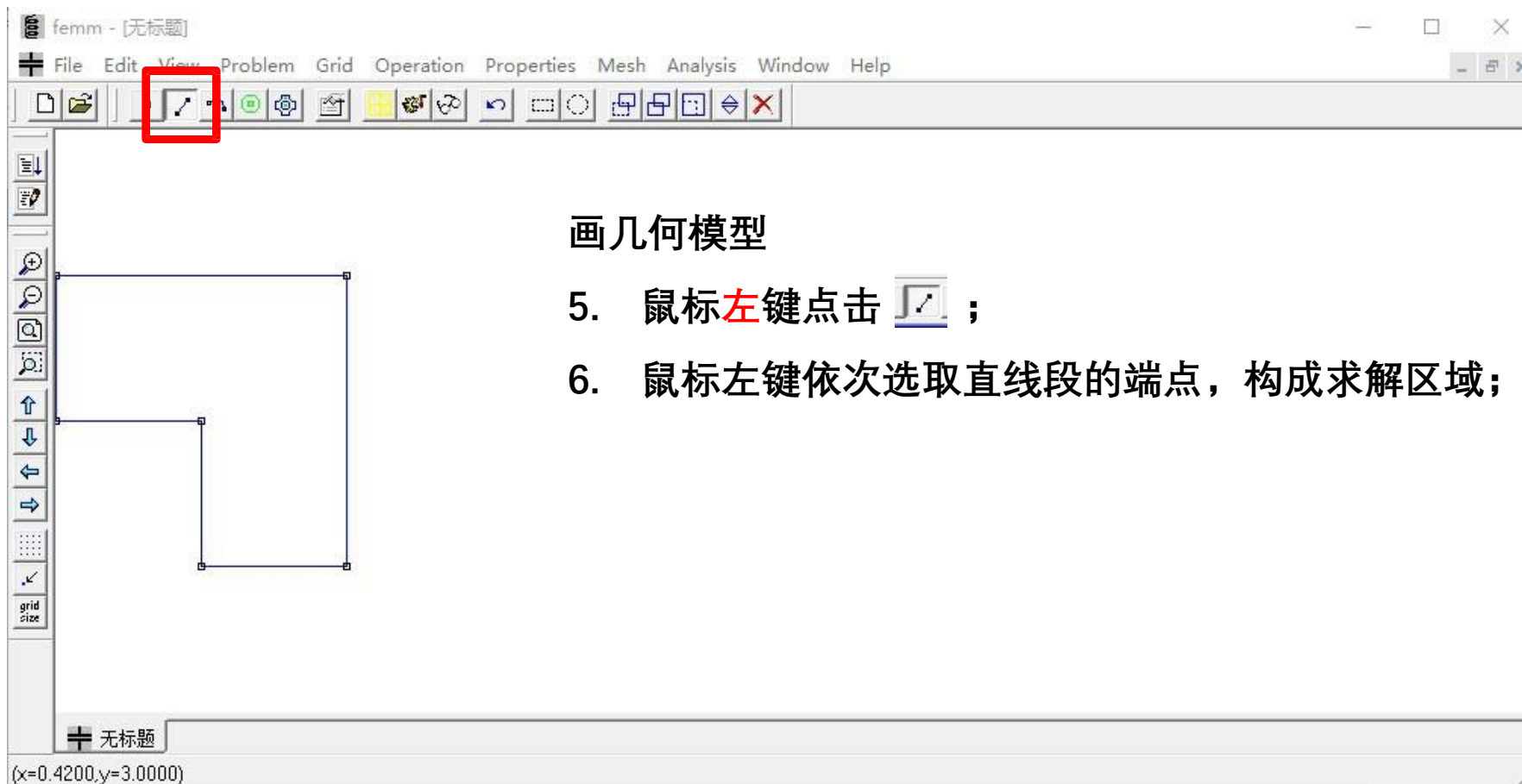
The screenshot shows the femm software interface. The title bar reads 'femm - [无标题]'. The menu bar includes 'File', 'Edit', 'View', 'Problem', 'Grid', 'Operation', 'Properties', 'Mesh', 'Analysis', 'Window', and 'Help'. The toolbar contains various icons, with a red box highlighting the 'Enter Point' icon (a square with a dot). The left sidebar contains a vertical toolbar with a red box highlighting the 'Tab' key icon (a key). The main workspace shows a grid with several points plotted. The status bar at the bottom left displays the coordinates '(x=0.0800,y=1.9800)'.

画几何模型

1. 鼠标左键点击  ；
2. 按键盘中的“**T a b**”键，出现“Enter Point”对话框；
3. 分别输入坐标，
(0, 1)、(1, 1)、(1, 0)、(2, 0)、(2, 2)、(0, 2)
4. 点击左侧快捷键  ，可观察全部已输入的点。

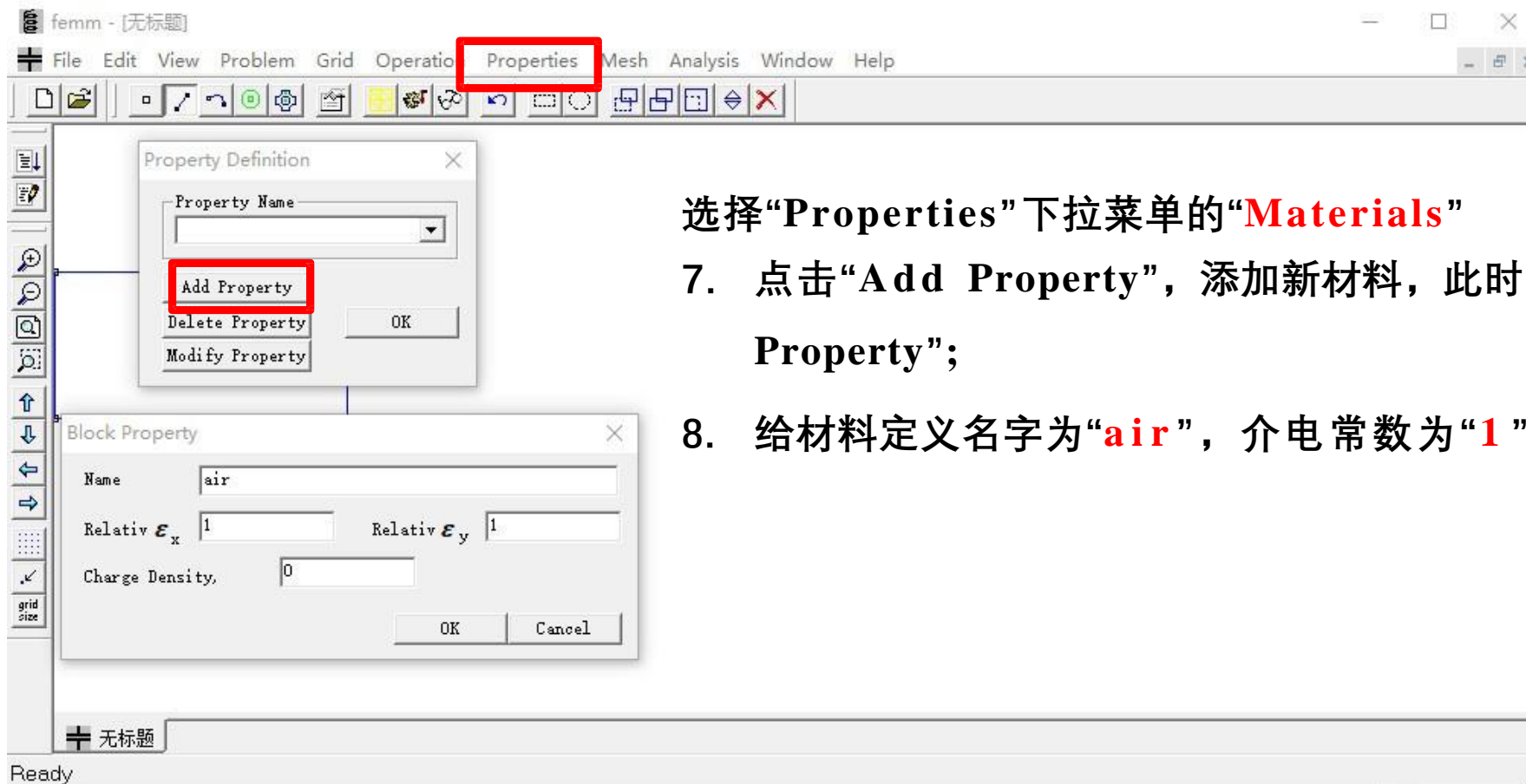
平面静电问题示例

一、建立模型：



平面静电问题示例

一、建立模型：



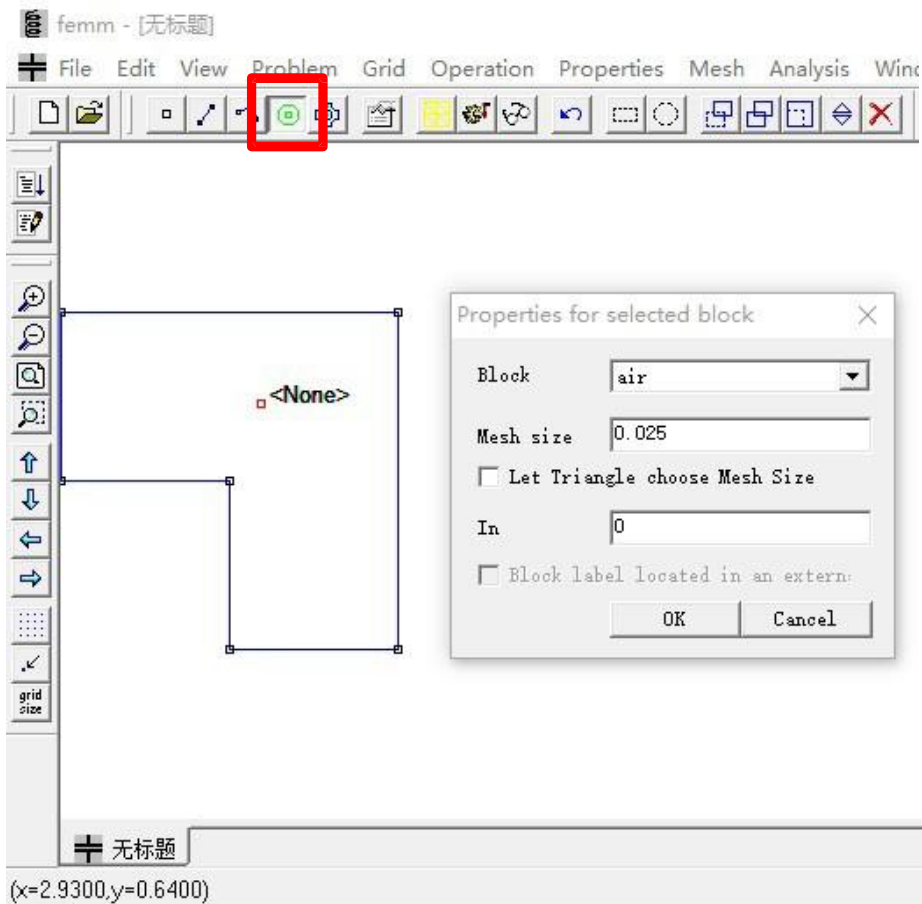
选择“Properties”下拉菜单的“**Materials**”

7. 点击“Add Property”，添加新材料，此时出现对话框“Block Property”；


8. 给材料定义名字为“**air**”，介电常数为“**1**”，点击OK确定。

平面静电问题示例

一、建立模型：



加载材料

9. 鼠标点击 ;

10. 鼠标左键点击直线所围区域，即介质“a i r”所在区域。

11. 鼠标**右**键选中“块标签节点”，选中后该节点变为**红色**；

12. 按键盘“空格键”，出现对话框

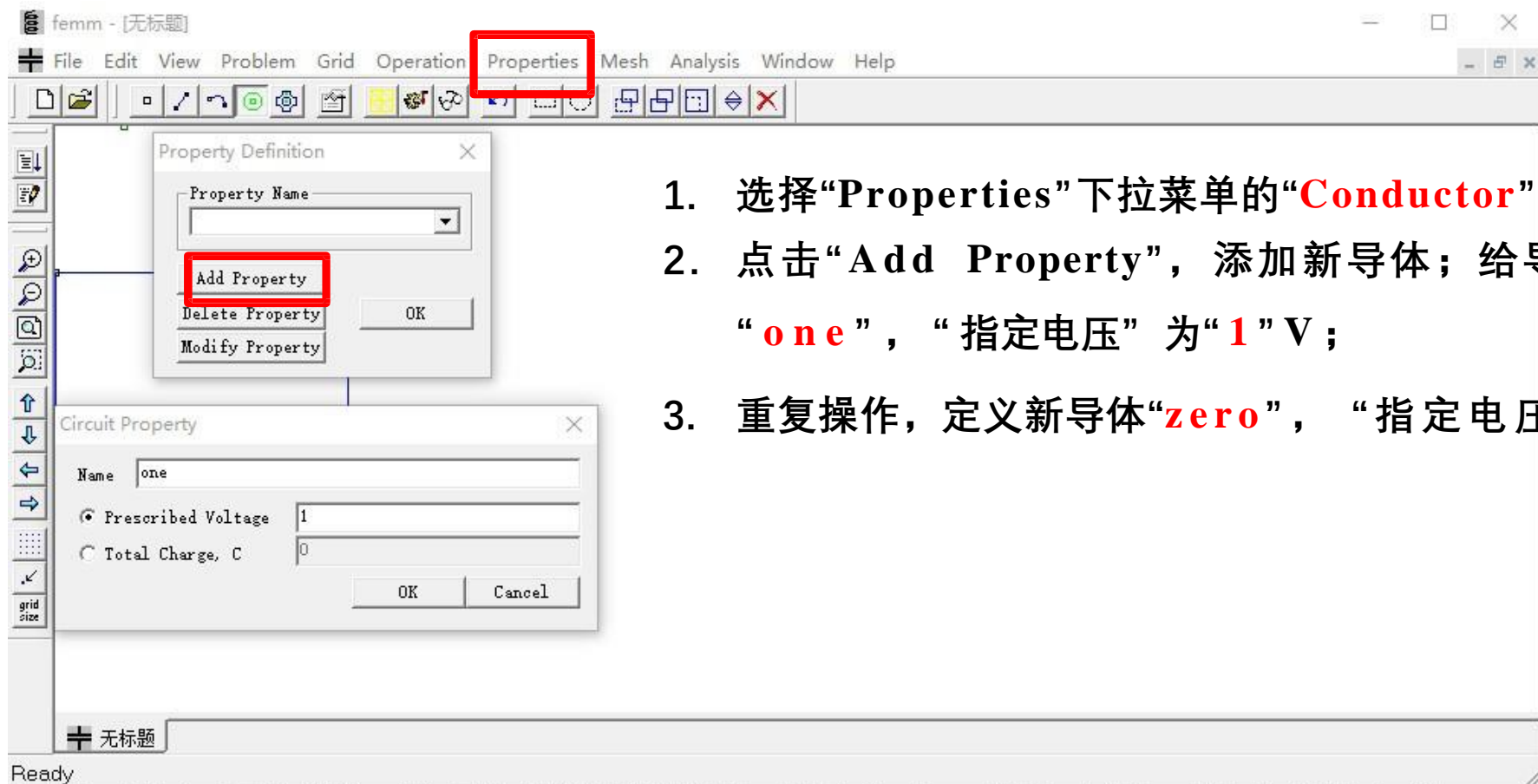
“Properties For selected block”

13. 在“Block”下拉菜单中选择“a i r”

14. 取消“Let Triangle choose Mesh Size”复选框，然后为“网格尺寸”输入“0.025”，点击OK。

平面静电问题示例

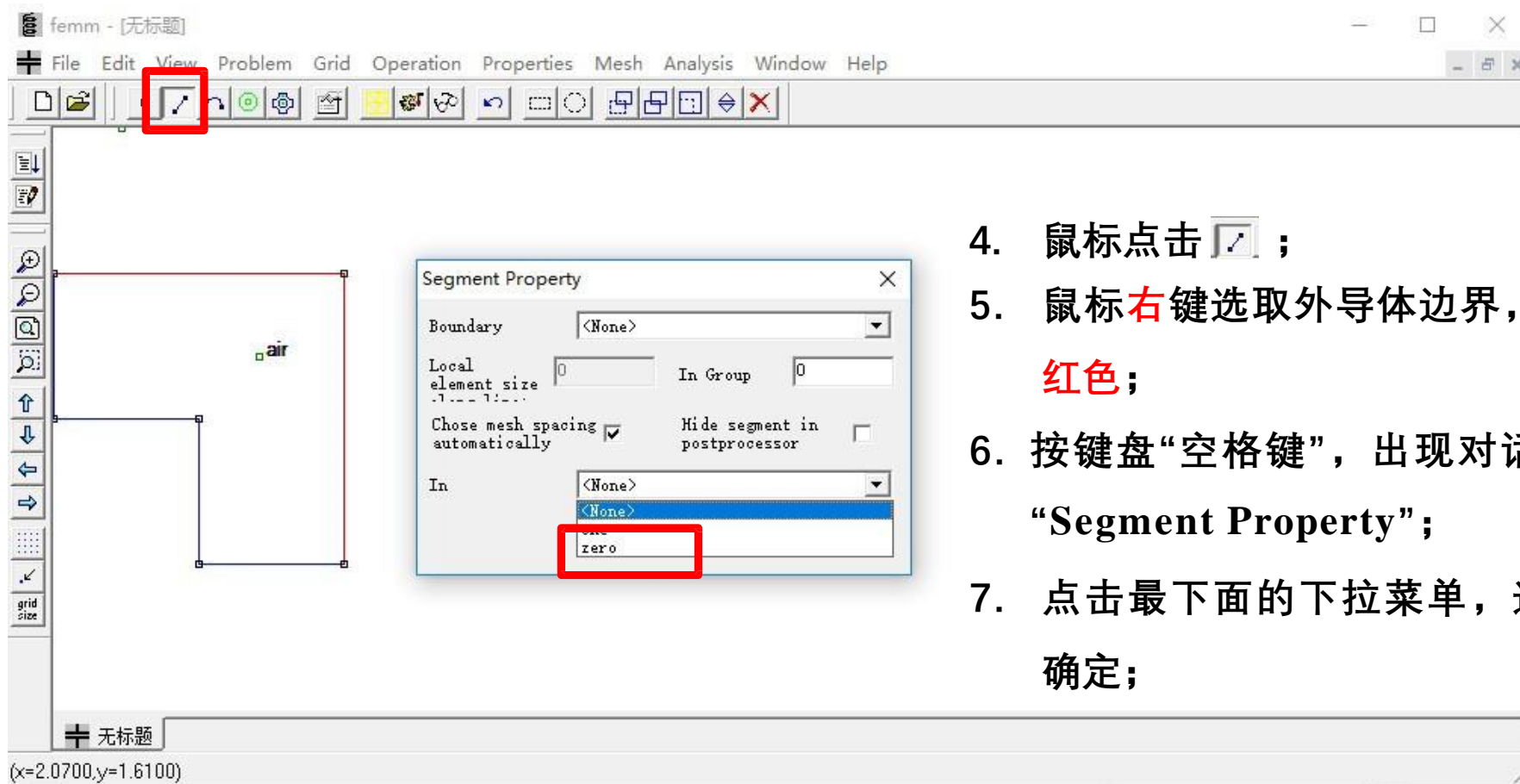
二、加载并设置边界条件和激励：




1. 选择“Properties”下拉菜单的“**Conductor**”；
2. 点击“Add Property”，添加新导体；给导体定义名字为“**one**”，“指定电压”为“**1**”V；
3. 重复操作，定义新导体“**zero**”，“指定电压”为“**0**”V；

平面静电问题示例

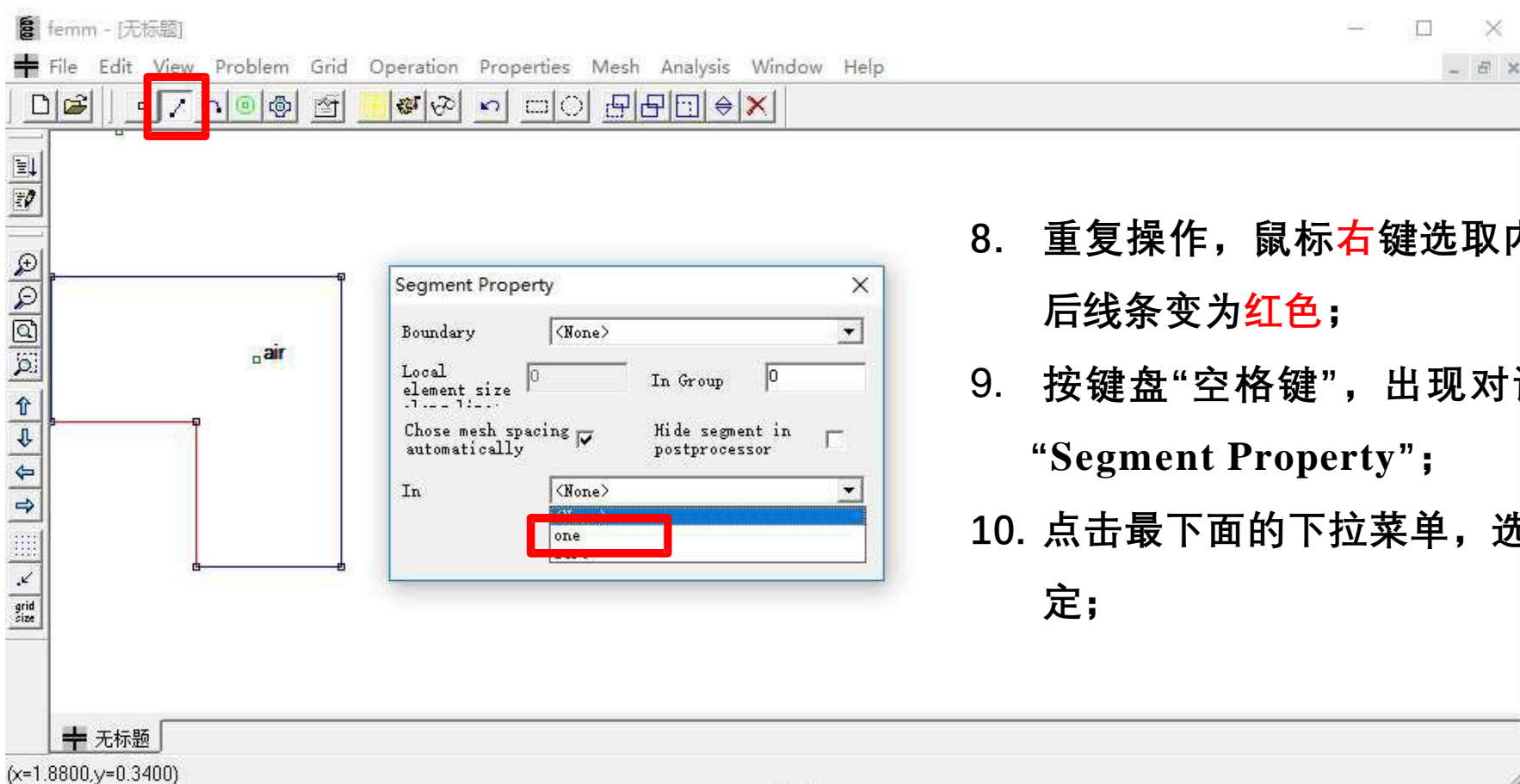
二、加载并设置边界条件和激励：



4. 鼠标点击  ；
5. 鼠标**右**键选取外导体边界，选中后线条变为**红色**；
6. 按键盘“空格键”，出现对话框“Segment Property”；
7. 点击最下面的下拉菜单，选择“**zero**”，并确定；

平面静电问题示例

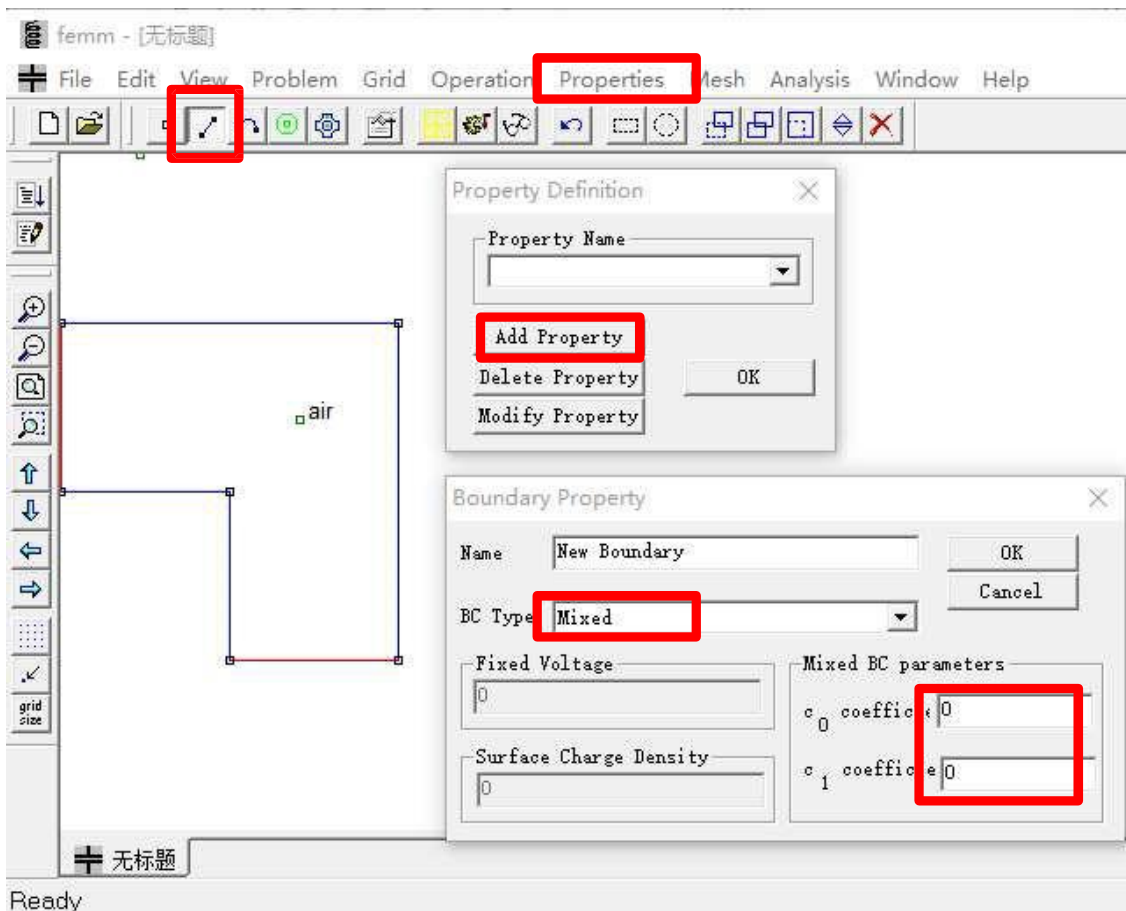
二、加载并设置边界条件和激励：



8. 重复操作，鼠标**右**键选取内导体边界，选中后线条变为**红色**；
9. 按键盘“空格键”，出现对话框“Segment Property”；
10. 点击最下面的下拉菜单，选择“**one**”，并确定；

平面静电问题示例

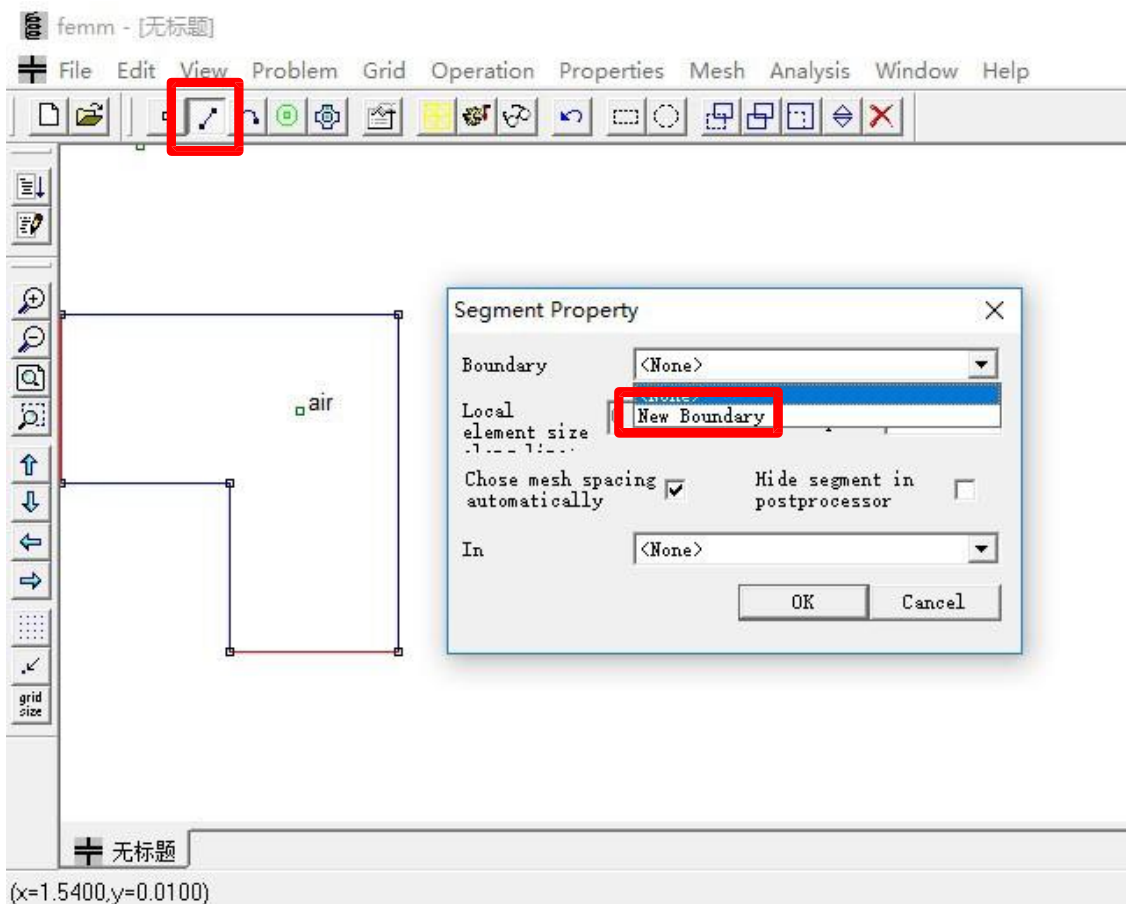
二、加载并设置边界条件和激励：



11. 剩下的两条边，在FEMM中如不加载边界条件，则默认为第二类齐次边界条件；
12. 或者手动设置，点击“Properties”下拉菜单的“**Boundary**”；
13. 点击“Add Property”，添加新边界，此时出现对话框“**Boundary Property**”，边界类型选择“Mixed”，系数均为0时，正好是第二类齐次边界条件，点击确定；

平面静电问题示例

二、加载并设置边界条件和激励：



14. 鼠标点击  ；

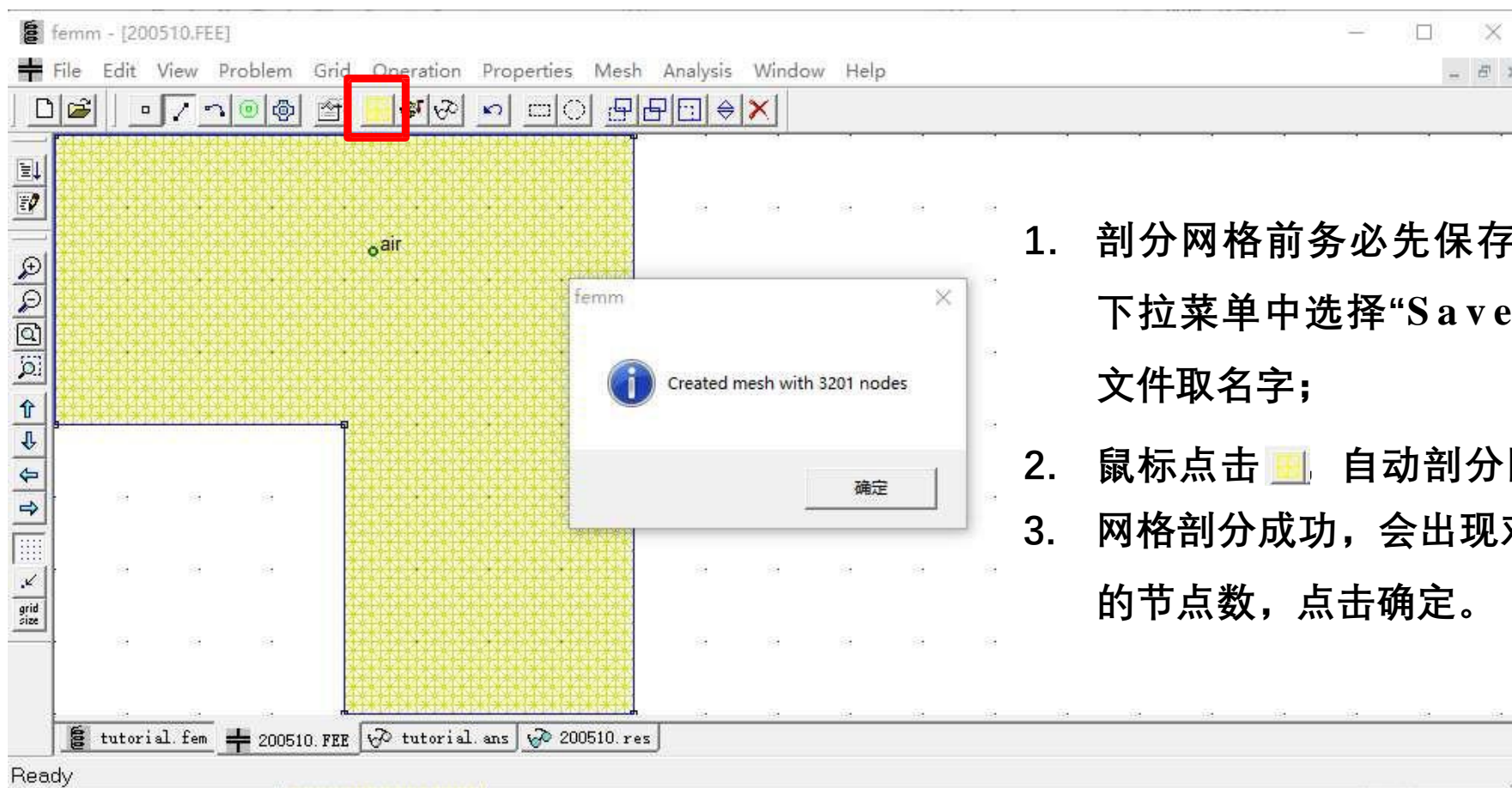
15. 鼠标右键选中剩下的两条边，按键盘“空格键”，出现对话框“Segment Property”；


16. 在最上面的下拉菜单中，选择定义好的第二类齐次边界条件“**New Boundary**”，并确定

思考：同学们可以分别尝试默认(就是对剩下的两条边不做任何操作)或手动设置第二类齐次边界条件，对比计算结果，看是否一致；

平面静电问题示例

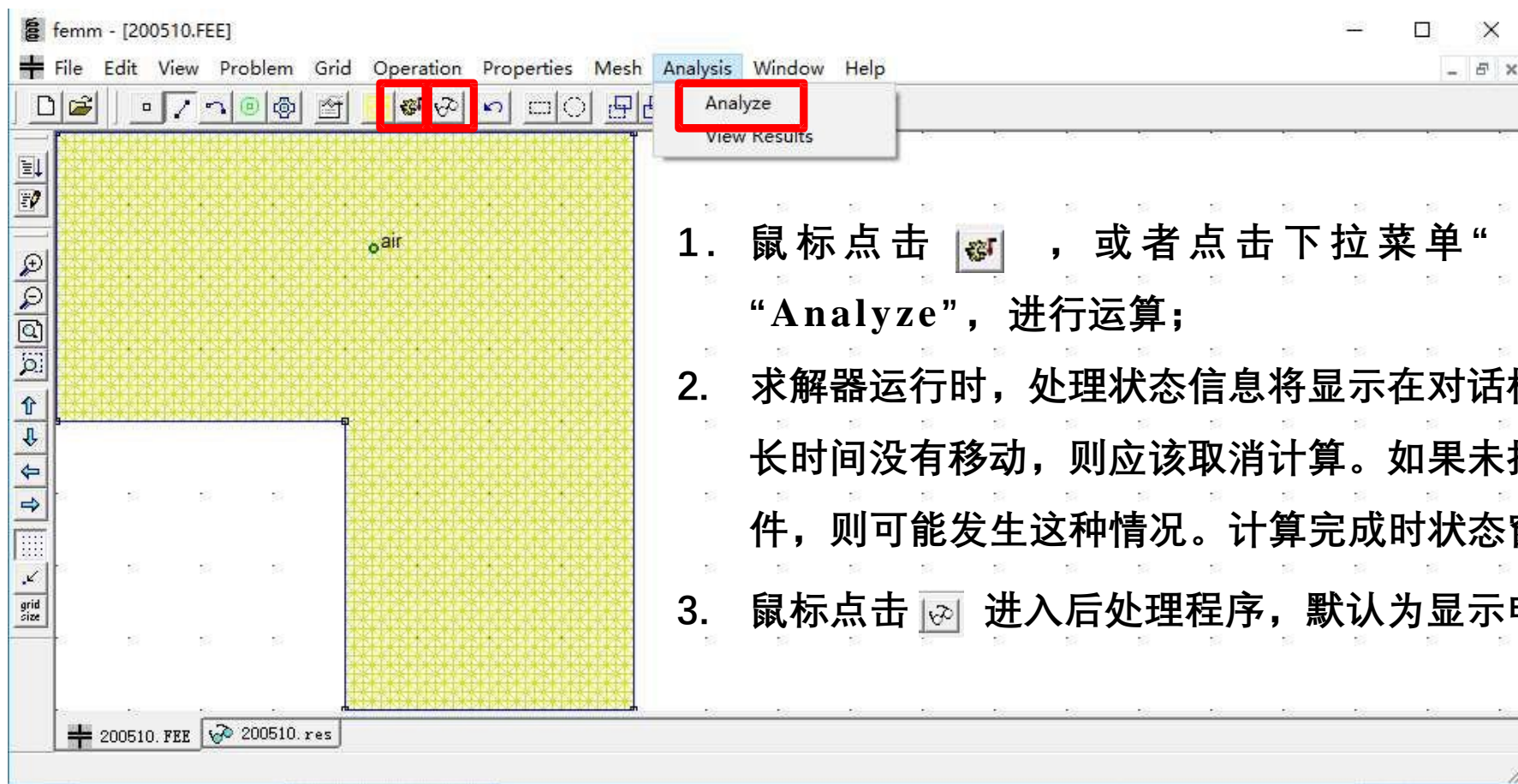
三、剖分网格





1. 剖分网格前务必先保存文件，在“File”下拉菜单中选择“Save”保存文件，并给文件取名字；
2. 鼠标点击  自动剖分网格；
3. 网格剖分成功，会出现对话框，显示创建的节点数，点击确定。

平面静电问题示例

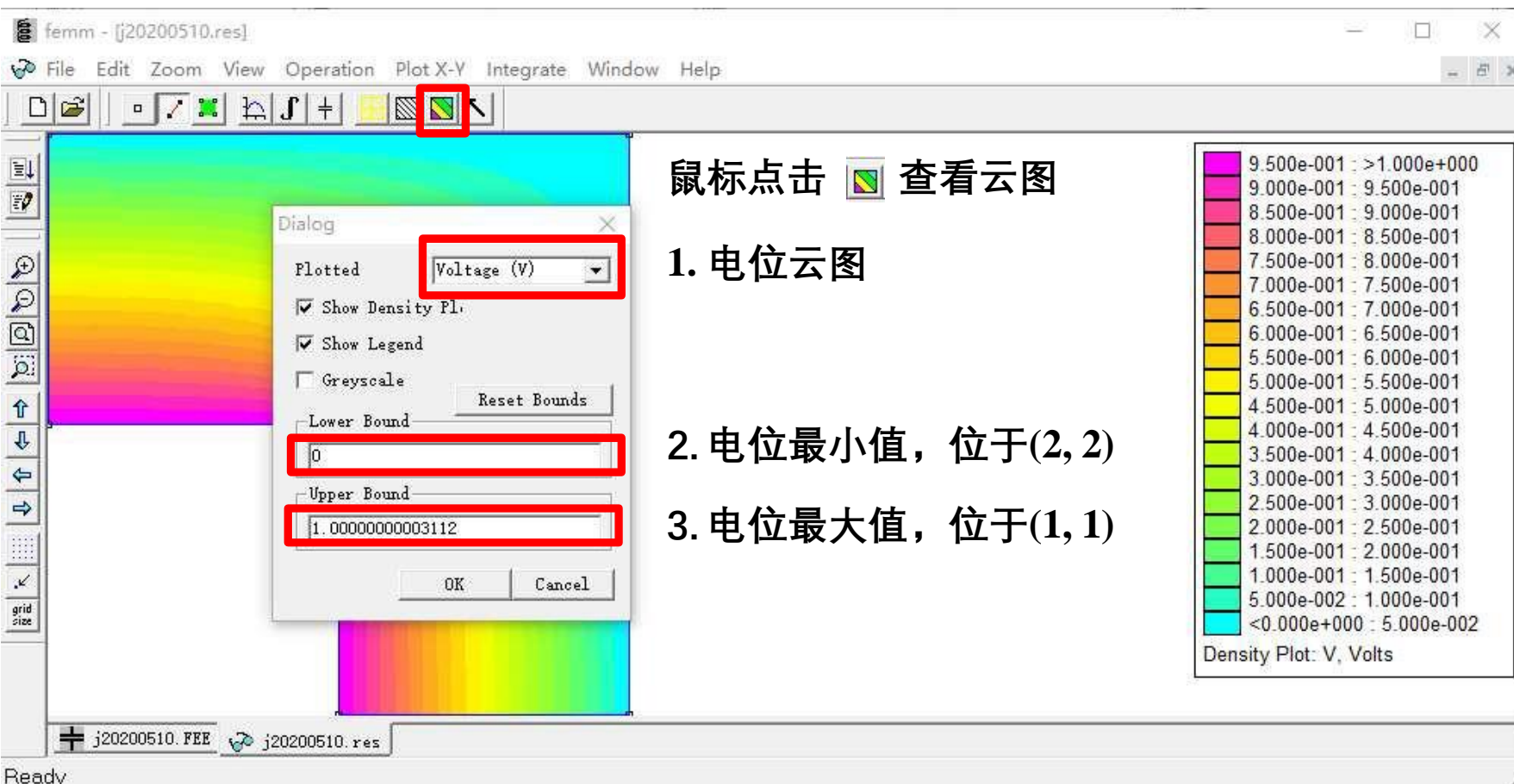
四、求解并查看结果



1. 鼠标点击 ，或者点击下拉菜单“Analysis”，选择“Analyze”，进行运算；
2. 求解器运行时，处理状态信息将显示在对话框中。如果进度条长时间没有移动，则应该取消计算。如果未指定足够的边界条件，则可能发生这种情况。计算完成时状态窗口将消失。
3. 鼠标点击  进入后处理程序，默认为显示电位云图；

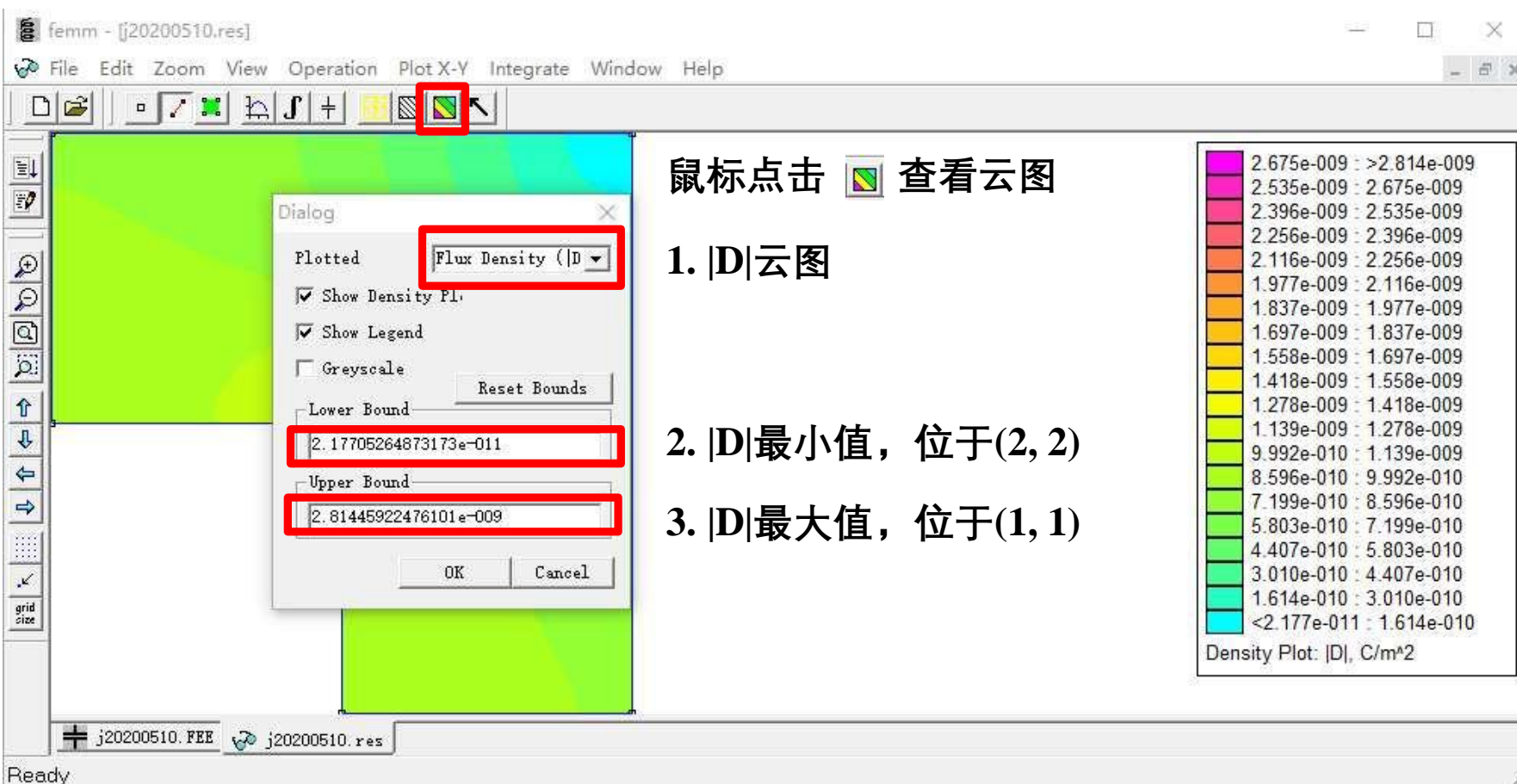
平面静电问题示例

四、求解并查看结果



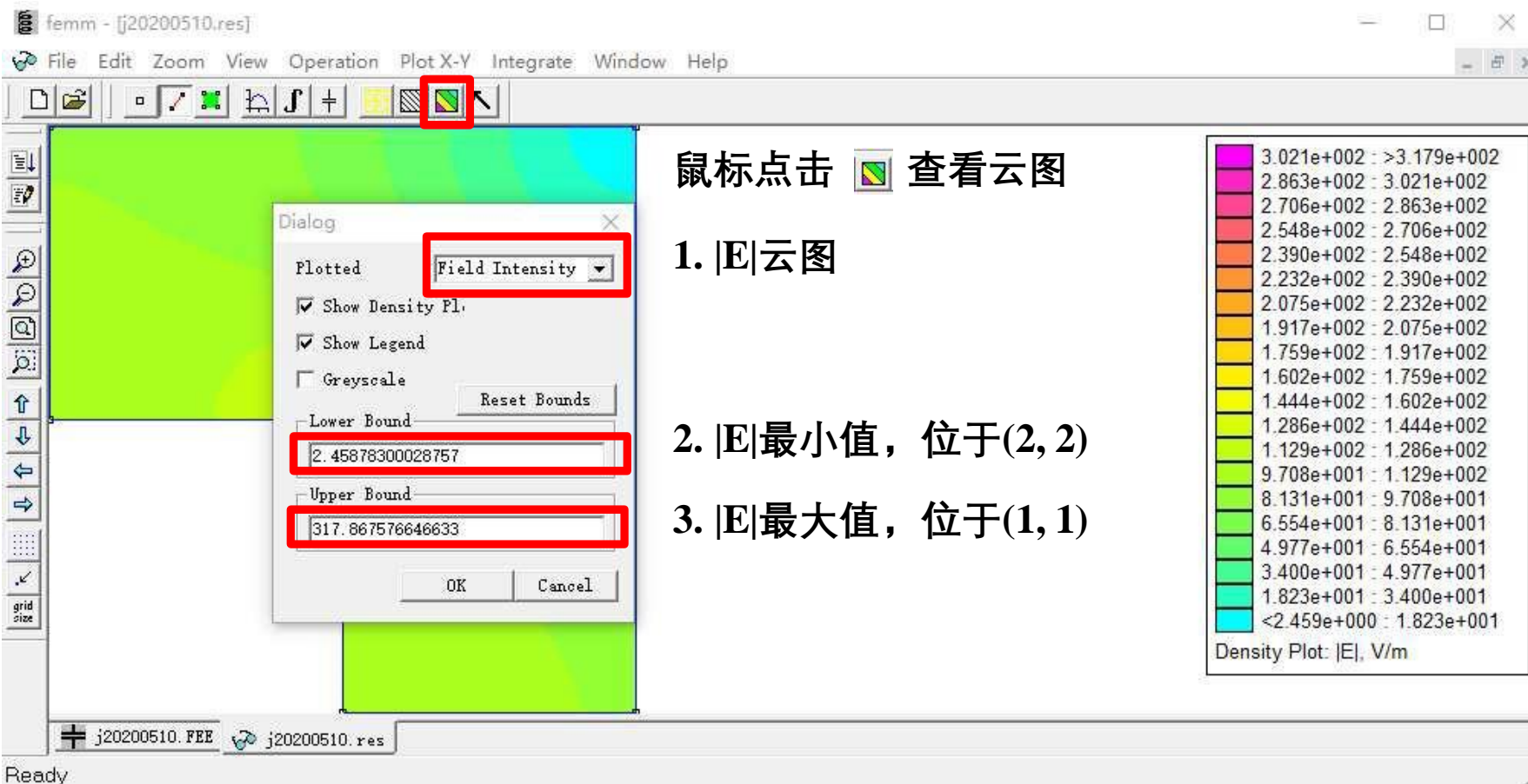
平面静电问题示例

四、求解并查看结果



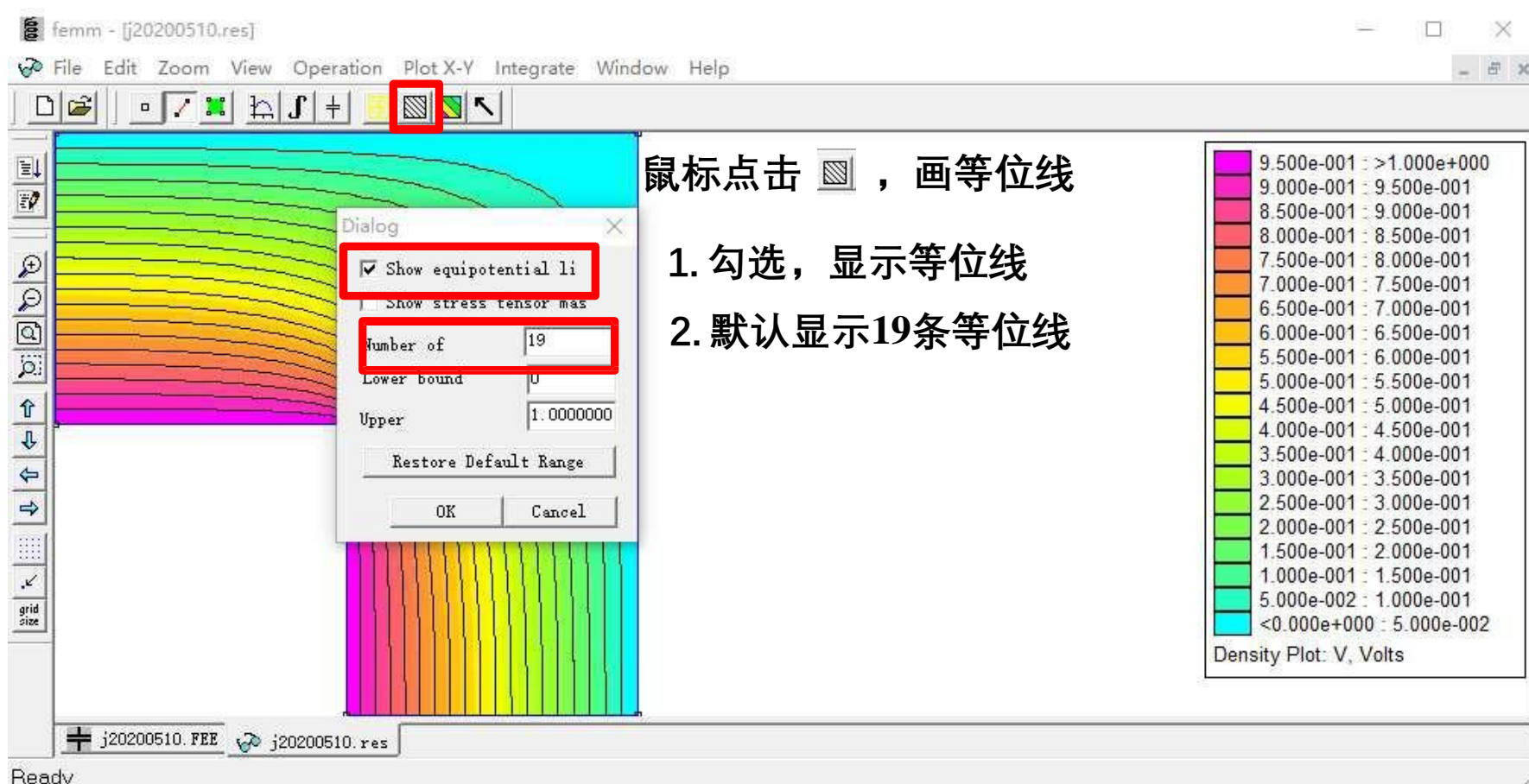
平面静电问题示例

四、求解并查看结果



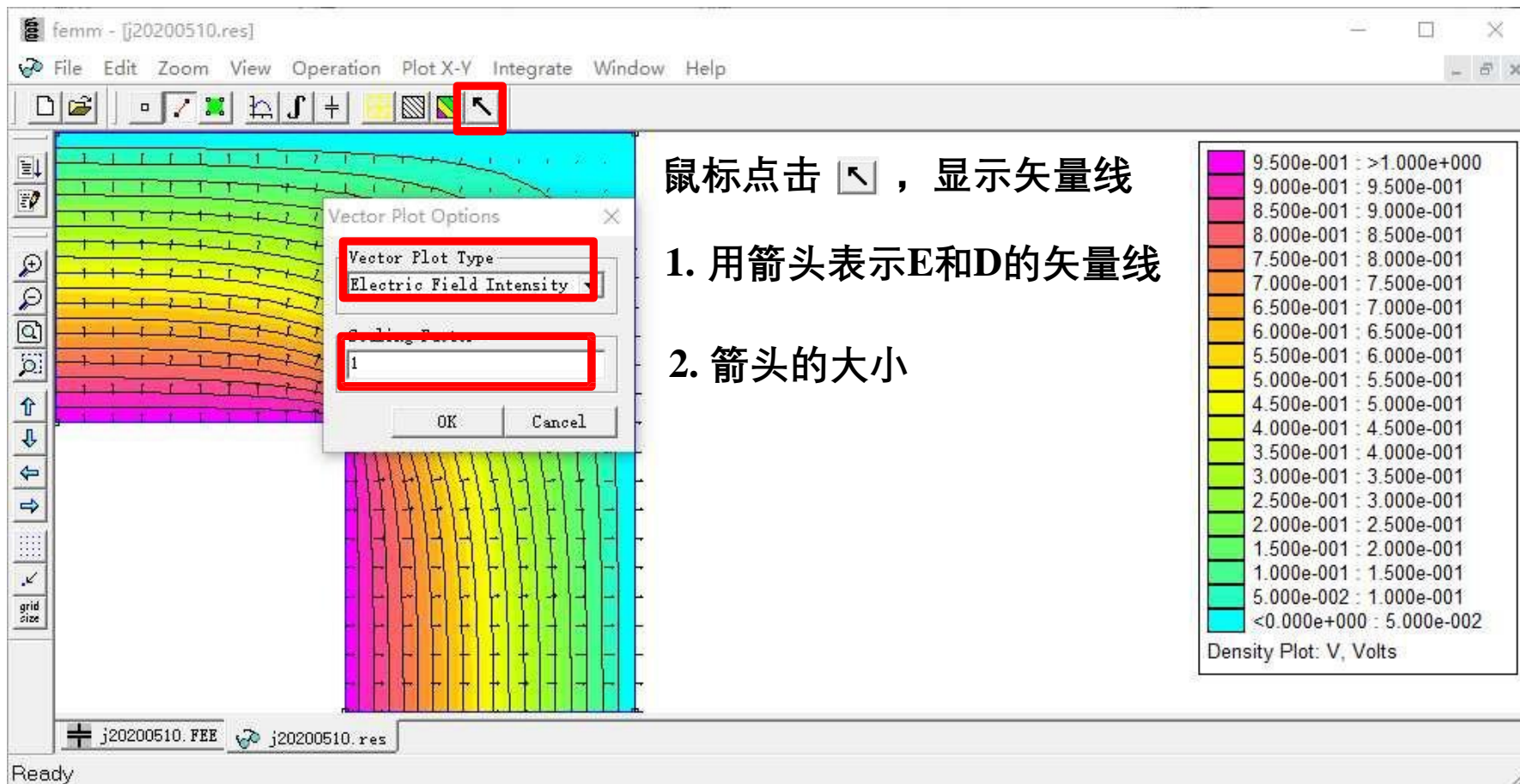
平面静电问题示例

四、求解并查看结果



平面静电问题示例

四、求解并查看结果



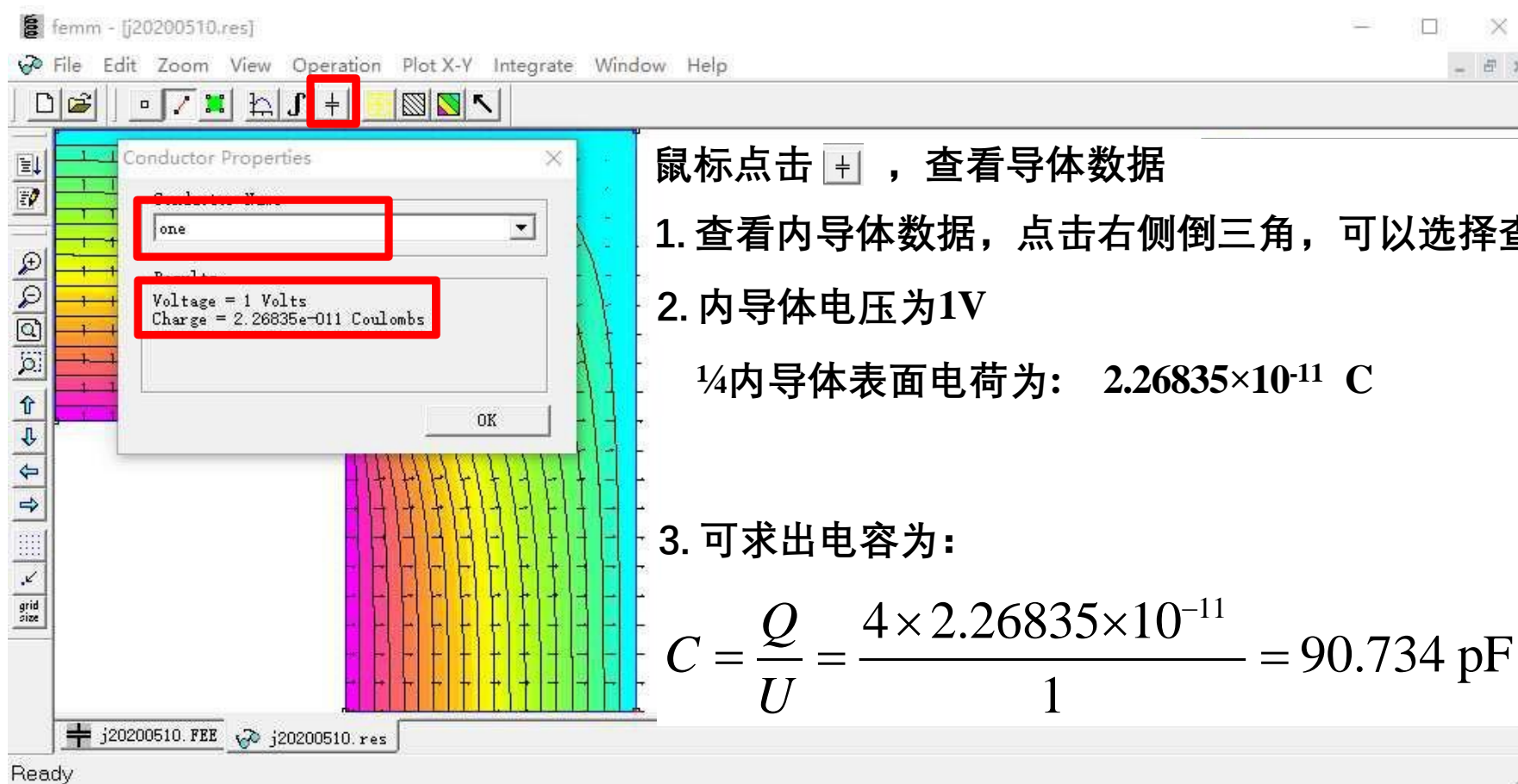
鼠标点击 ，显示矢量线


1. 用箭头表示E和D的矢量线

2. 箭头的大小

平面静电问题示例

四、求解并查看结果



鼠标点击  ，查看导体数据

1. 查看内导体数据，点击右侧倒三角，可以选择查看外导体；

2. 内导体电压为1V

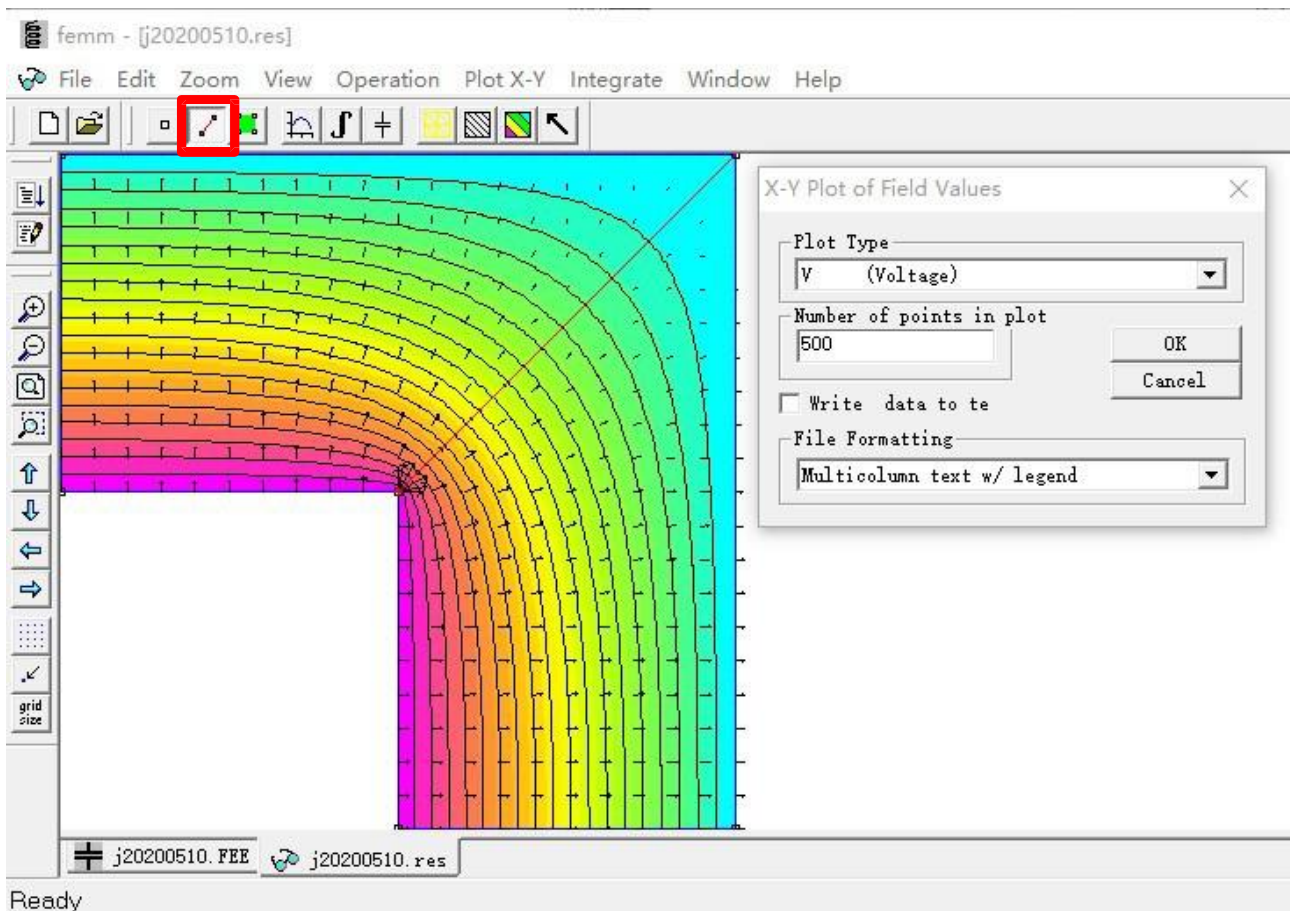
¼内导体表面电荷为： $2.26835 \times 10^{-11} \text{ C}$

3. 可求出电容为：



$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4 \times 2.26835 \times 10^{-11}}{1} = 90.734 \text{ pF}$$

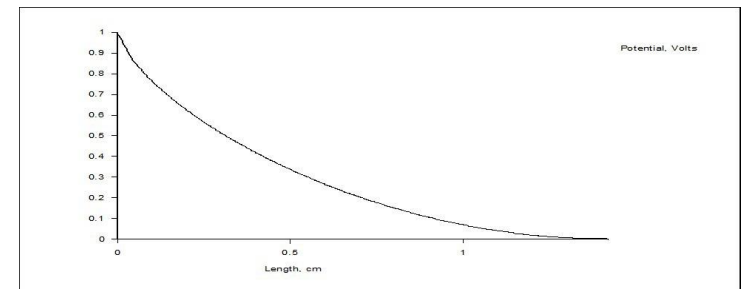
平面静电问题示例

四、求解并查看结果



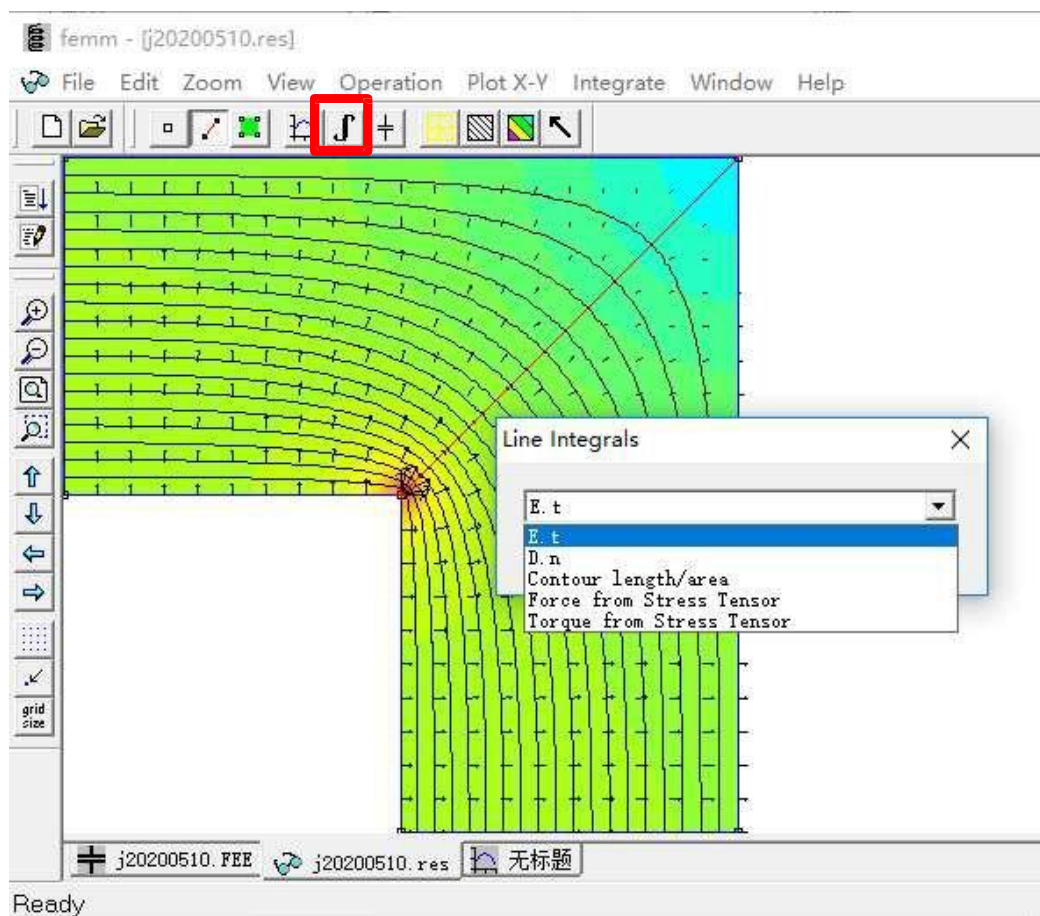
任意方向场量的变化趋势

1. 鼠标点击 ，画出感兴趣方向的线段；
2. 鼠标点击 ，出现对话框X-Y Plot，可通过下拉菜单选择查看不同物理量沿直线的变化情况；
3. 确定得到相应曲线，如下图所示：





平面静电问题示例

四、求解并查看结果



任意方向物理量的平均值

1. 鼠标点击 , 画出感兴趣方向的线段;
2. 鼠标点击 , 出现对话框

“Line Integrals”,

可通过下拉菜单选择查看不同物理量
沿直线的积分情况;



平面静电问题示例

五、本例小结

通过本例，应掌握：

1. 如何使用节点和线来创建模型空间；
2. 如何在模型中添加材料类型以及如何将其分配给区域；
3. 如何指定有限元网格尺寸；
4. 如何为模型定义导体属性；
5. 如何将导体属性应用于模型中的线段；
6. 如何运行后处理器并在每个导体上显示生成的电荷和电压。

主要内容

- ◆ 1. 有限元方法介绍.....
- ◆ 2. FEMM软件简介.....
- ◆ 3. FEMM软件的安装.....
- ◆ 4. FEMM的基本操作.....
- ◆ 5. 平面静电问题示例.....
- ◆ 6. 轴对称静电问题示例.....

轴对称静电问题示例

两个导体球之间的电容：

如图所示，该电容器模型由两个导电球体组成，并位于一个无边界区域。两个直径为25米的球体之间的中心距为70米。顶部球体的电位为100V，底部球体的电位为-100V。这是轴对称系统的示例，并且将使用特殊的“开放”边界条件来模拟无界域的行为。

本例主要关注“**开放边界条件的设置**”，即用混合边界条件模拟无限大开放区域。

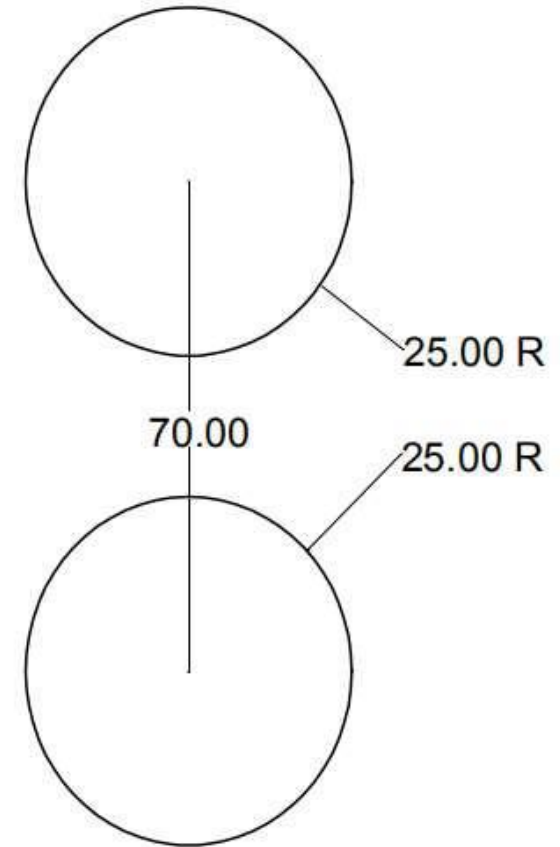
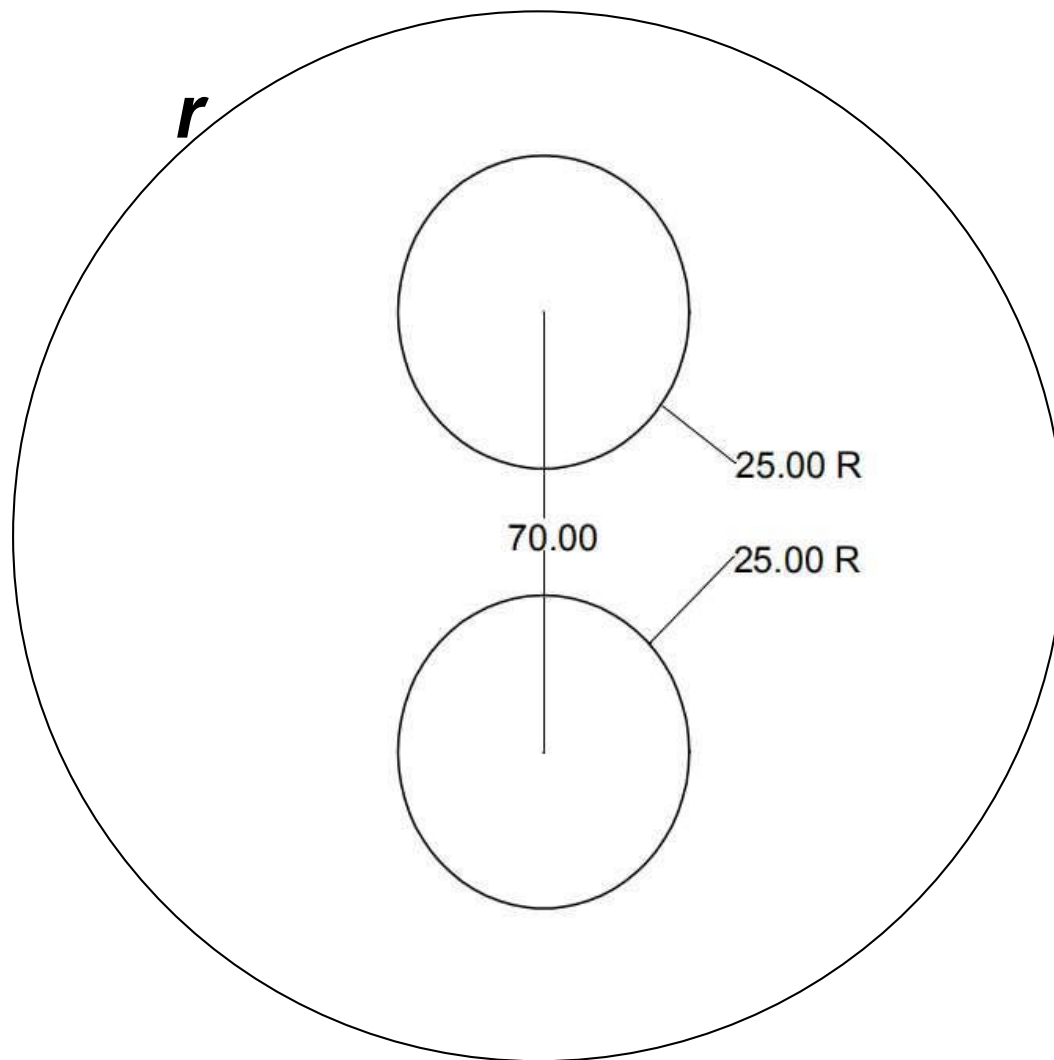


Figure Two conducting spheres.

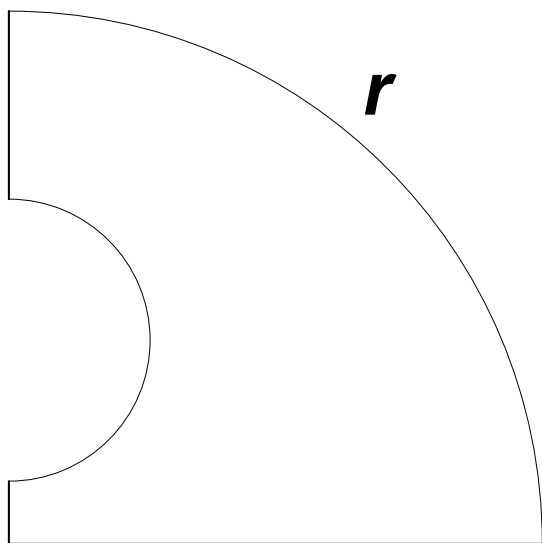
轴对称静电问题示例

开放边界条件的设置

在软件中无法设置边界为无穷大的区域，所以要人为设置一个较大的边界，其形状应当是球形的。



轴对称静电问题示例



由于对称性，仅需对设备的四分之一进行建模

对于无限大区域的边界 r 有两种模拟方式：

- 1、可以认为 r 趋于无穷大时，电位为0
- 2、也可以用混合边界条件来处理，对于此类情况，FEMM软件有一个固定的公式（详见英文手册附录A.3）：

$$\epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} + c_0 \varphi + c_1 = 0$$

$$c_0 = \frac{\epsilon_0 n}{r} = \frac{2 * \epsilon_0}{r}$$

其中， ϵ_0 即为 ϵ_0 ， r 为设置的无限大区域的半径，此处我们可以取150米



平面取 $n=1$

轴对称取 $n=2$

在此例中 c_1 取0, c_0 按公式在软件中设置



青春由磨砺而出彩

人生因奋斗而升华