

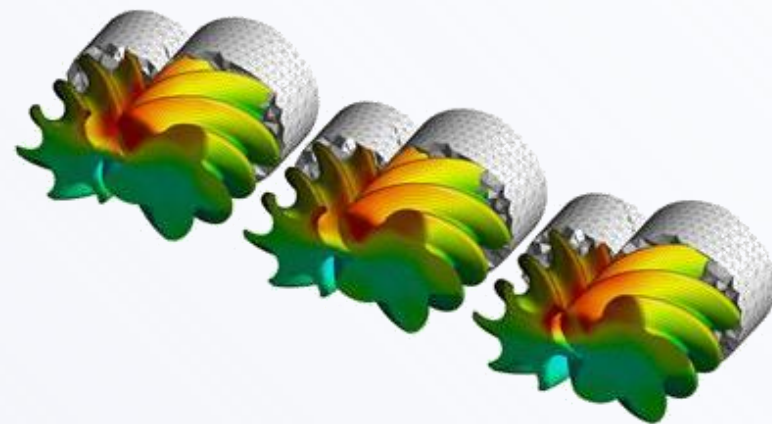
电气、仪器专业技术基础课

电 磁 场

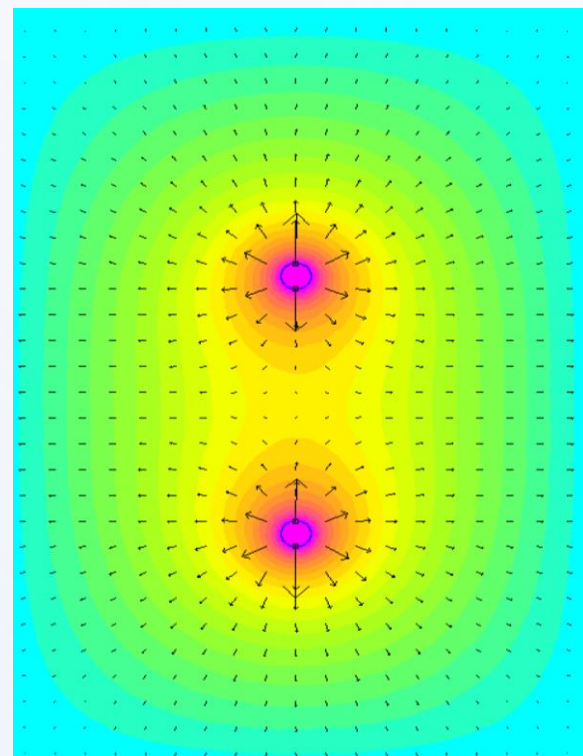
上机实验课

《静电场FDM简单计算的Matlab实现》





1. 《静电场》知识回顾
2. 边值问题、解析解、数值解
3. 有限差分法
4. 实例讲解及本次实验要求



1 《静电场》知识回顾

主要内容

- 1 电场强度、电位
- 2 高斯定律
- 3 基本方程、分界面上的衔接条件
- 4 边值问题、惟一性问题
- 5 镜像法和电轴法
- 6 电容和部分电容
- 7 静电能量与力

本章要求

- 1 深刻理解电场强度、电位移矢量、电位、极化等概念。
- 2 掌握静电场基本方程和分界面衔接条件；理解电位边值问题及典型解法；熟练掌握电场、电位、电容的计算方法。

静电场中建立的物理概念、分析方法在一定条件下可应用推广到其它场的学习。

2 边值问题、解析解、数值解

方程已经列好了该
如何求解?

4.2 静电场的边值问题

静电场边值问题就是在给定第一类、第二类或第三类边界条件下，求电位函数的泊松方程或拉普拉斯方程定解的问题。

边值问题 = 泛定方程 + 边值条件（定解条件）

泊松方程	$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f}{\varepsilon}$
拉普拉斯方程	$\nabla^2 \varphi = 0$

三种类型为主的
边值条件

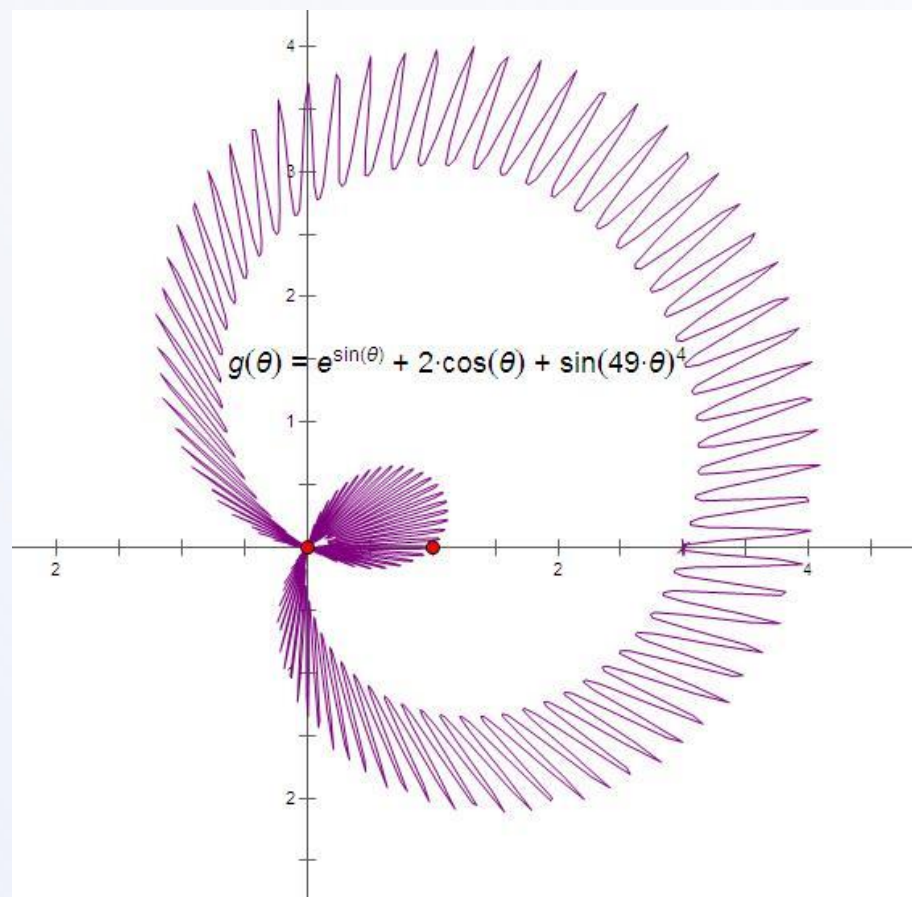
$$\varphi|_s = g_1(\vec{r}) \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right|_s = g_2(\vec{r}) \quad \varphi|_{s1} = g_1(\vec{r}) + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right|_{s2} = g_2(\vec{r}) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r\varphi = \text{有限值}$$

2 边值问题、解析解、数值解

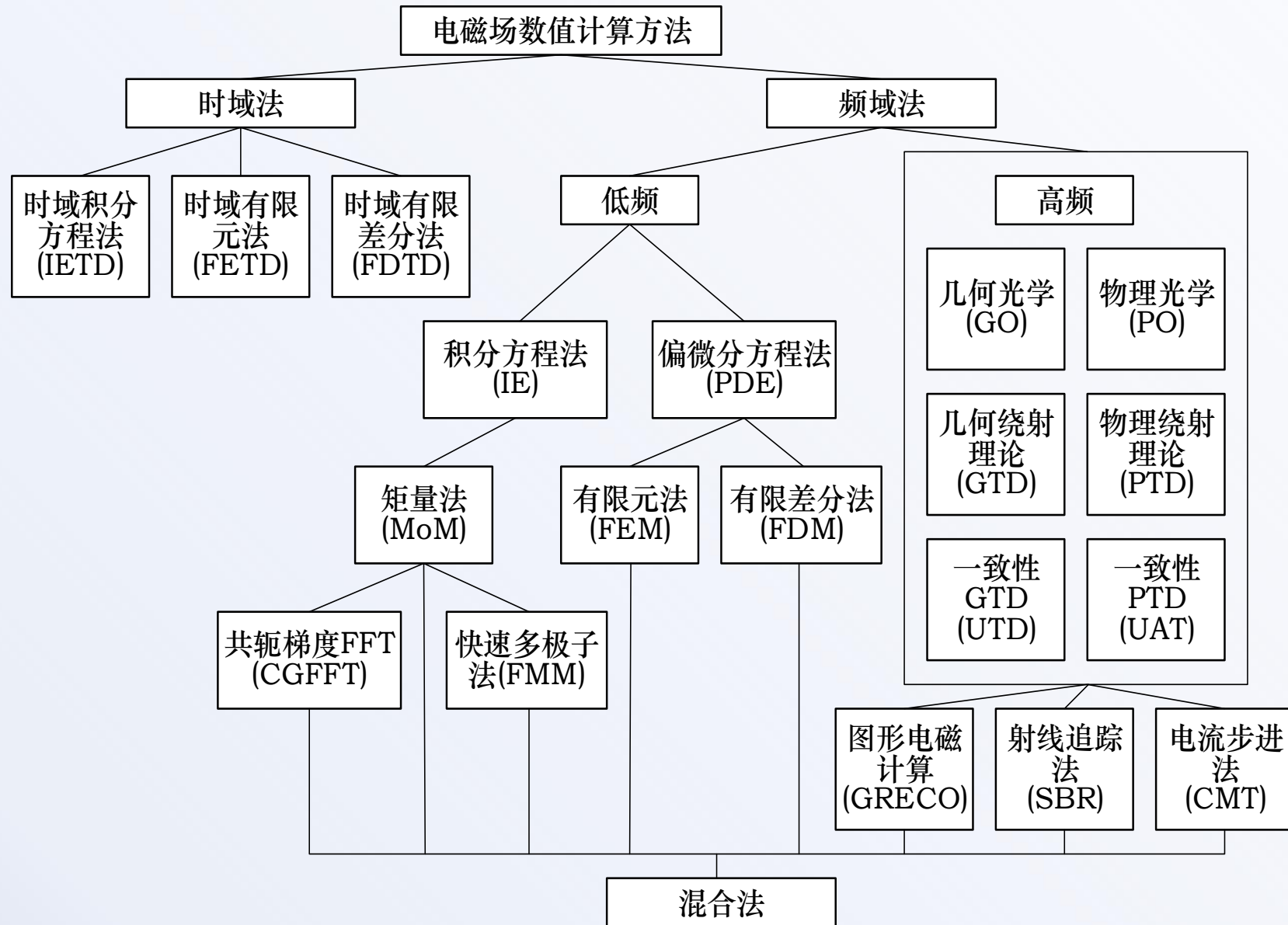
解析法：用解析式表示函数的方法称为解析法。

分离变量法（傅里叶法）：一种解析常微分方程或偏微分方程的方法。使用这方法，可以藉代数来将方程式重新编排，让方程式的一部分只含有一个变量，而剩余部分则跟此变量无关。这样隔离出的两个部分的值都分别等于常数，而两个部分的值的代数和等于零。

最经典、最基本的方法。



2 边值问题、解析解、数值解



2 边值问题、解析解、数值解

数值解：采用如有数值逼近方法、插值方法等计算方法得到的解。

有限差分法（**Finite Difference Methods**，简称**FDM**），是一种微分方程数值方法，是通过有限差分来近似导数，从而寻求微分方程的近似解。

有限单元法（**Finite Element Methods**，简称**FEM**），一种用于求解微分方程组或积分方程组数值解的数值方法。

该解法基于完全消除微分方程，即将微分方程转化为代数方程组或将偏微分方程（组）改写为常微分方程（组）的逼近，这样可以用标准的数值技术（例如欧拉法，龙格-库塔法等）求解。

解析法优缺点：

优点： 可将解答表示为已知函数的显式，从而计算出精确的数值结果；可以作为近似解和数值解的检验标准；在解析过程中和在解的显示中可以观察到问题的内在联系和各个参数对数值结果所起的作用；

缺点： 仅能解决很少量的问题，如简单边界条件和规则几何形状问题。

数值法优缺点：

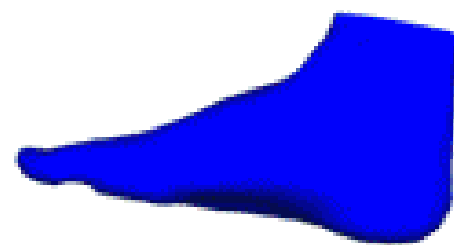
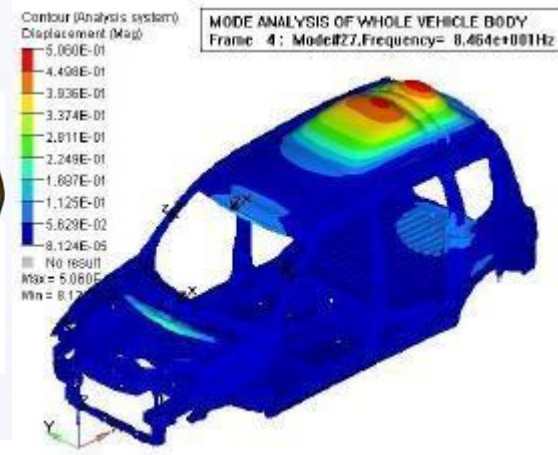
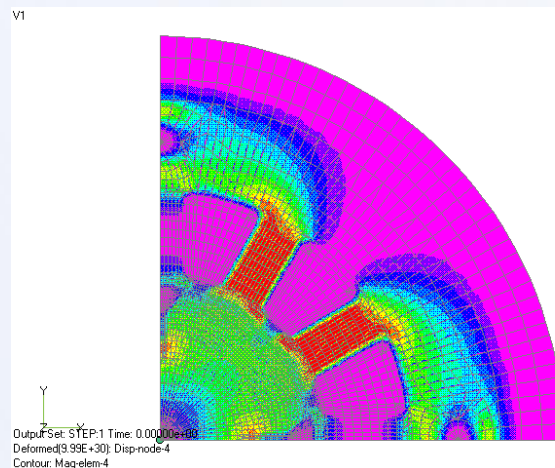
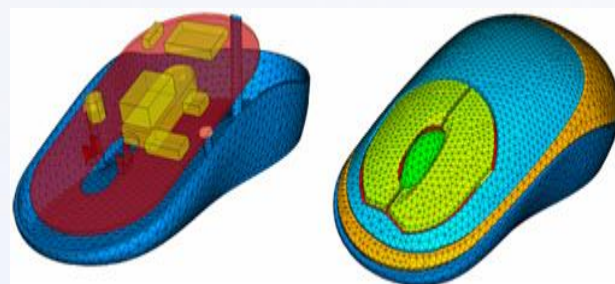
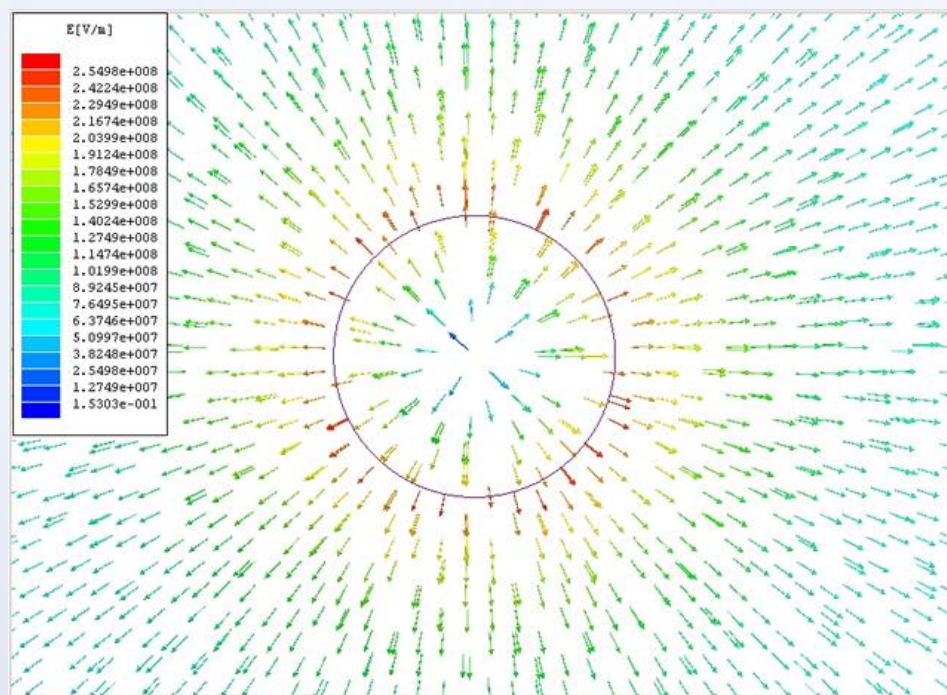
优点： 原则上可以求解具有任何复杂几何形状、复杂材料的电磁场工程问题；普适性强；用户不必具备高度专业化的电磁场理论、数学及数值技术方面的知识就能用提供的程序解决实际问题；

缺点： 数据输入量大、计算量大、受硬件条件的限制。

2 边值问题、解析解、数值解

有限单元法 (Finite-Element Methods, 简称FEM)

静电场简单分析实例



3 有限差分法

3.1 有限差分法 (FDM)

以差分原理为基础的一种数值方法

将求解场域剖分为很多网格和节点，并用差商代替微商；

将场域中的偏微分方程转化成以各节点的电位或磁矢为未知量的差分方程组；

解该方程组可得到各离散点待求的电位或磁矢的数值解。

一阶差分

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

一阶差商

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

二阶差分

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$

二阶差商

$$\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} = \frac{1}{h} \left[\frac{\Delta f(x+h)}{h} - \frac{\Delta f(x)}{h} \right]$$

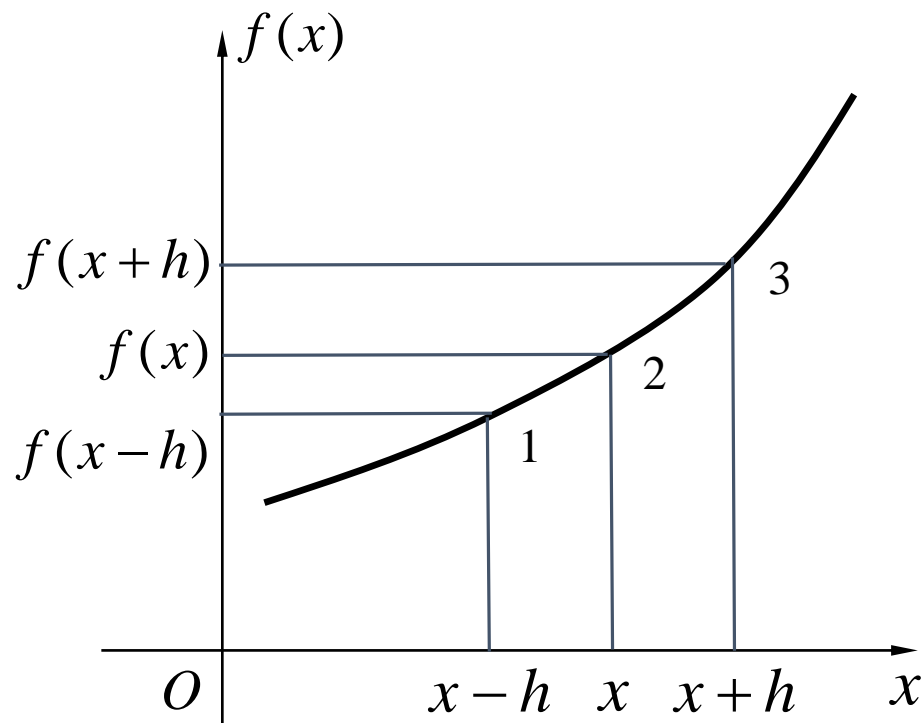
3 有限差分法

3.2 差分运算的基本概念

向前差分 $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

向后差分 $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$

中心差分 $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$



3 有限差分法

3.3 拉普拉斯方程的有限差分形式

$$\varphi_{i,j+1} = \varphi_{i,j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} h^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} h^3 + \dots$$

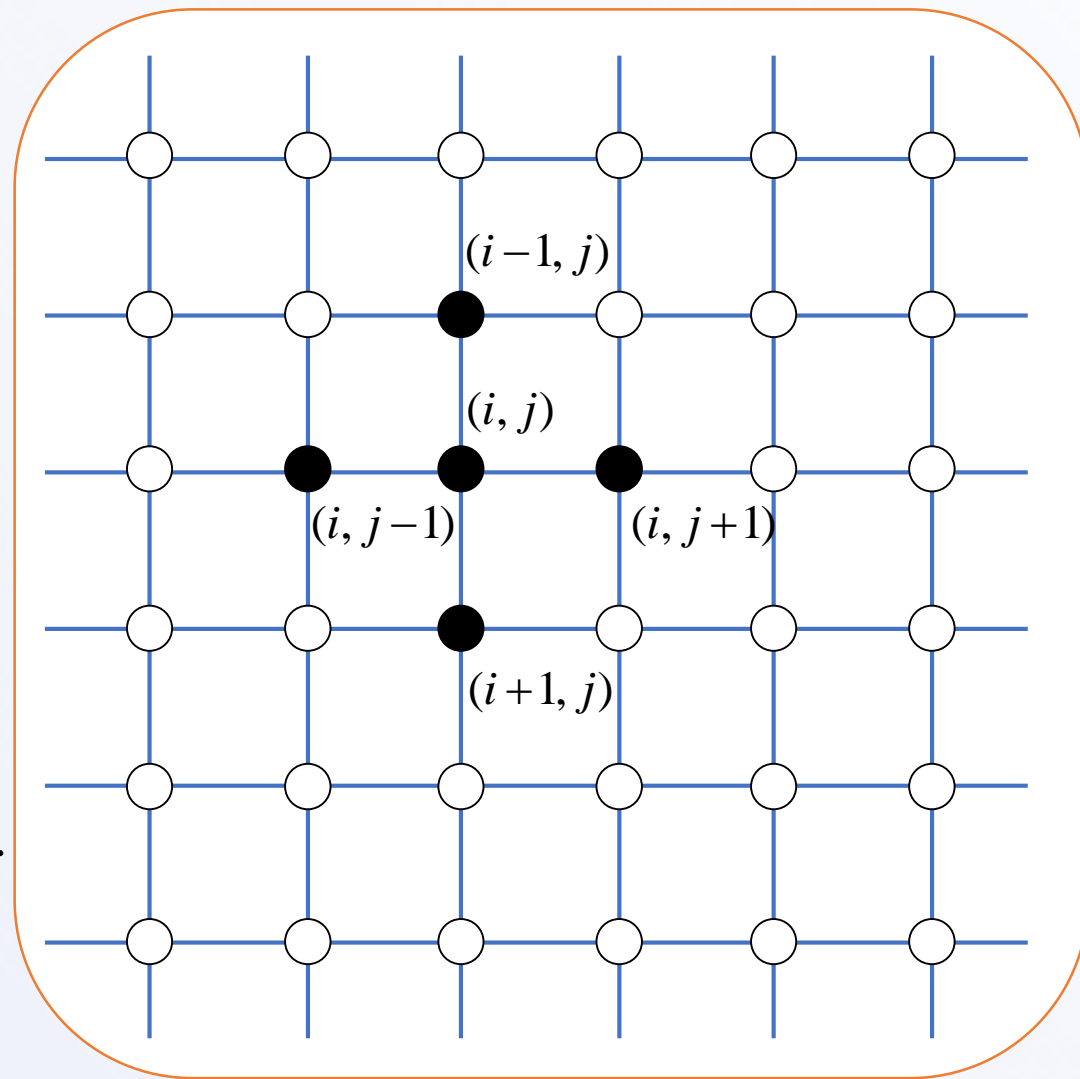
$$\varphi_{i,j-1} = \varphi_{i,j} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} h^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} h^3 + \dots$$

$$\varphi_{i-1,j} = \varphi_{i,j} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} h^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} h^3 + \dots$$

$$\varphi_{i+1,j} = \varphi_{i,j} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} h^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} h^3 + \dots$$

$$\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j} = 4\varphi_{i,j} + h^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \dots$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \varphi_{i,j} = \frac{1}{4} (\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j})$$



3 有限差分法

3.4 求解方法

~~$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{4}(\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j})$$~~

简单迭代法:

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j-1}^n + \varphi_{i-1,j}^n + \varphi_{i+1,j}^n)$$

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \varphi_{i,j}^n + \frac{\omega}{4}(\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j-1}^{n+1} + \varphi_{i-1,j}^{n+1} + \varphi_{i+1,j}^n - 4\varphi_{i,j}^n)$$

松弛迭代法:

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left[\frac{\cos(\pi / m) + \cos(\pi / n)}{2} \right]^2}}$$

简单迭代法:

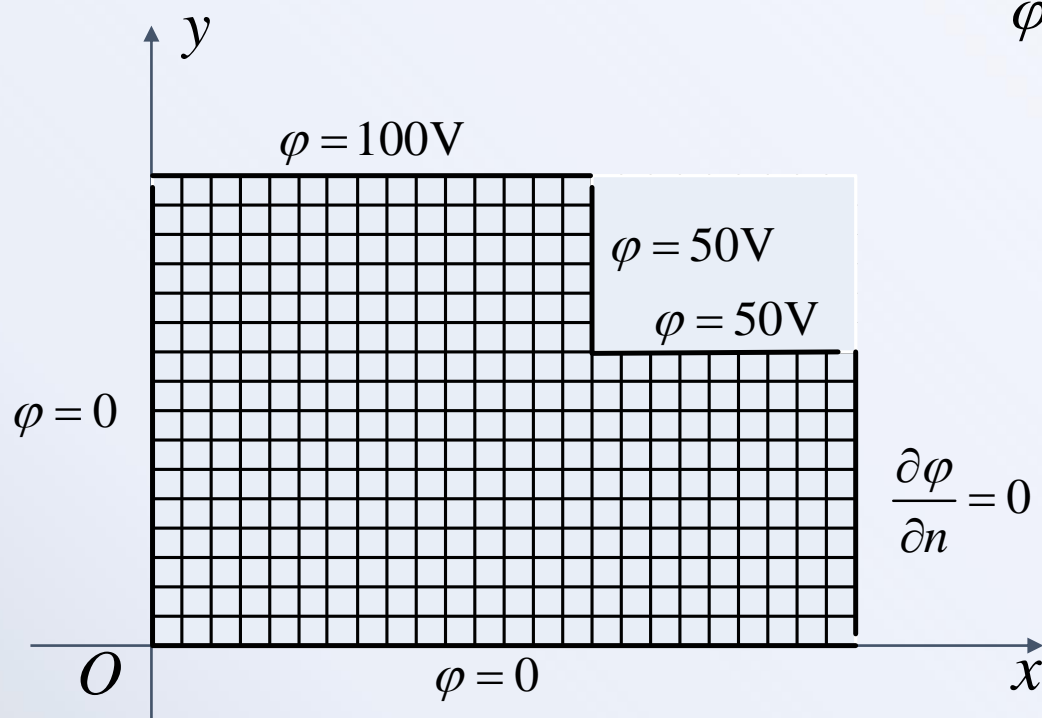
$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4} (\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j-1}^n + \varphi_{i-1,j}^n + \varphi_{i+1,j}^n)$$

高斯-塞德尔
迭代法

$$\varphi_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4} (\varphi_{i,j+1}^k + \varphi_{i,j-1}^{k+1} + \varphi_{i-1,j}^{k+1} + \varphi_{i+1,j}^k)$$

4 实例讲解及本次实验要求

实例1. 横截面为带有一缺口的矩形导体板，其中两面 ($x=0, y=0$) 由接地导体板构成，如图所示，槽的其它边界分别接直流电压100V、50V、50V，右侧边界是为零的第二类边界条件，求此导体板的电位分布。



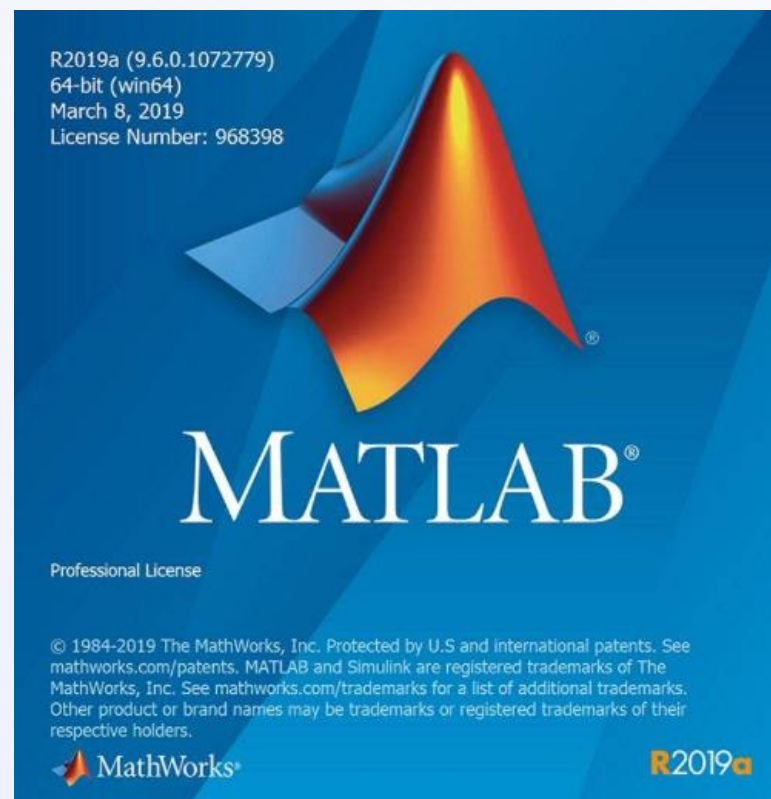
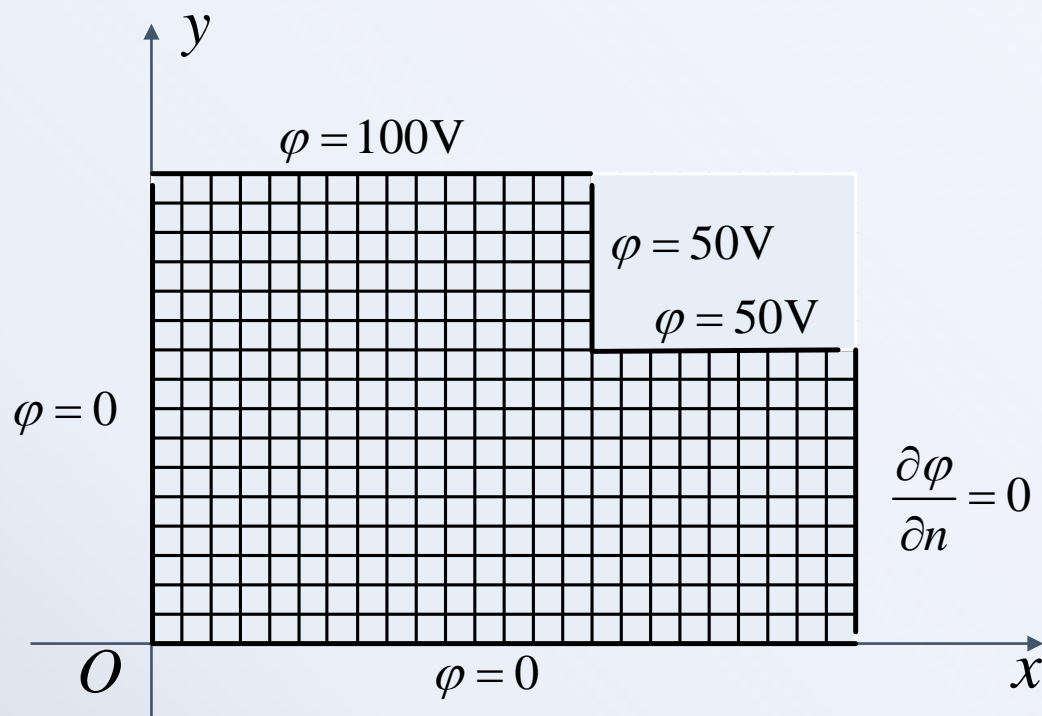
$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \varphi_{i,j}^n + \frac{\omega}{4} (\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i-1,j}^{n+1} + \varphi_{i,j-1}^{n+1} - 4\varphi_{i,j}^n)$$

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left[\frac{\cos(\pi/m) + \cos(\pi/n)}{2} \right]^2}}$$

- 1 设置网格节点数、行列二维数组、横纵向网格数
- 2 设置边界条件值
- 3 计算松弛因子，迭代计算
- 4 画三维曲面图 标注，画等电位线图、标注

4 实例讲解及本次实验要求

实例1. 横截面为带有一缺口的矩形导体板，其中两面 ($x=0, y=0$) 由接地导体板构成，如图所示，槽的其它边界分别接直流电压100V、50V、50V，右侧边界是为零的第二类边界条件，求此导体板的电位分布。



4 实例讲解及本次实验要求

实例1. 横截面为带有一缺口的矩形导体板，其中两面 ($x=0, y=0$) 由接地导体板构成，如图所示，槽的其它边界分别接直流电压100V、50V、50V，右侧边界是为零的第二类边界条件，求此导体板的电位分布。

```
hx=25;hy=17; %设置网格节点数
v1=ones(hy,hx); %设置行列二维数组
v1(1:6,17:25)=zeros(6,9);
m=24;n=16;%横纵向网格数

t1=(cos(pi/m)+cos(pi/n))/2;
w=2/(1+sqrt(1-t1*t1));
v2=v1;maxt=1;t=0;%初始化
k=0;
while(maxt>1e-6)%由 v1 迭代，算出 v2，迭代精度为 0.000001
    k=k+1%计算迭代次数
    maxt=0;
    for i=2:7%从 2 到 hy-1 行循环
        for j=2:15%从 2 到 hx-1 列循环
            v2(i,j)=v1(i,j)+(v1(i,j+1)+v1(i+1,j)+v2(i-1,j)+v2(i,j-1)-4*v1(i,j))*w/4;
```

```
v1(1,1:16)=ones(1,16)*100;
v1(2:7,16)=ones(6,1)*50;
v1(7,17:24)=ones(1,8)*50;
v1(2:17,1)=0;
v1(17,:)=0;
```

4 实例讲解及本次实验要求

实例1. 横截面为带有一缺口的矩形导体板，其中两面 ($x=0, y=0$) 由接地导体板构成，如图所示，槽的其它边界分别接直流电压100V、50V、50V，右侧边界是为零的第二类边界条件，求此导体板的电位分布。

```
t=abs(v2(i,j)-v1(i,j));
if(t>maxt) maxt=t;end
end
end
for i=8:(hy-1)%从 2 到 hy-1 行循环
    for j=2:(hx-1)%从 2 到 hx-1 列循环
        v2(i,j)=v1(i,j)+(v1(i,j+1)+v1(i+1,j)+v2(i-1,j)+v2(i,j-1)-4*v1(i,j))*w/4;
        t=abs(v2(i,j)-v1(i,j));
        if(t>maxt) maxt=t;end
    end
end
v2(7:hy-1,hx)=v2(7:hy-1,hx-1);
v1=v2
end
```

```
x=1:1:hx;y=1:1:hy;
[xx,yy]=meshgrid(x,y);%形成栅格
[Gx,Gy]=gradient(v1,0.6,0.6);%计算梯度
quiver(xx,yy,Gx,Gy,'r')%根据梯度数据画箭头
axis([-1.5,hx+2.5,-2,20])%设置坐标边框
plot([1,1,hx,hx,1],[1,hy,hy,1,1],'k')%画导体边框
text(hx/2-0.5,hy+0.4,'100V','fontsize',11);%下标注
text(hx/2,0.3,'0V','fontsize',11);%上标注
text(-0.3,hy/2,'0V','fontsize',11);%左标注
text(hx+0.1,hy/2,'\partial\phi/\partial n=0','fontsize',11);
text(hx/2+5,hy/2+6,'50V','fontsize',11);%下标注
hold off
```

4 实例讲解及本次实验要求

实例1. 横截面为带有一缺口的矩形导体板，其中两面 ($x=0, y=0$) 由接地导体板构成，如图所示，槽的其它边界分别接直流电压100V、50V、50V，右侧边界是为零的第二类边界条件，求此导体板的电位分布。

