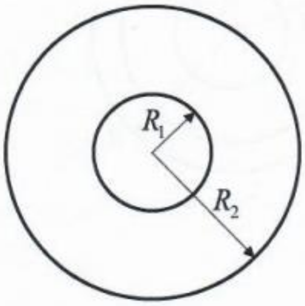
恒定电场作业

1．（1 分）在导电媒质中，电荷的体密度为$\rho=\nabla(\frac{\varepsilon}{\gamma})\cdot\vec{J}$。当导电媒质为均匀媒质时，$\varepsilon$和$\gamma$都不随空间位置变化，因此电荷密度为零。另一方面，由定义可知，体电流密度为电荷体密度乘以电荷的运动速度。试解释均匀导电媒质中体电流密度不为零而体电荷密度为零这一“矛盾”。

答：不矛盾。因为体电流密度指的是运动电荷的密度，不是全部电荷的密度；而体电荷密度指全部的自由电荷，(包括静止的)。

2．（4 分）球形电容器内半径$R_1=5\text{cm}$，外半径$R_2=10\text{cm}$，内外导体间的非理性电介质的电导率$\gamma=10^{-9}\text{S/m}$，若内外导体间电压$U_0=1000\text{V}$，求内外导体间的φ、$\vec{E}$、$\vec{J}$和绝缘电阻R。



解：假设内、外导体间的漏电流为 I．则内外导体间的电流密度为：$\vec{J}=\frac{I}{4\pi\rho^2}\cdot\vec{e}_\rho$

则内外导体之间的电场为：$\vec{J}=\gamma\vec{E}\Rightarrow\vec{E}=\frac{\vec{J}}{\gamma}=\frac{I}{4\pi\gamma\rho^2}\cdot\vec{e}_\rho$

∴内外导体之间的电压为：$U_0=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{\rho}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{I}{4\pi\gamma\rho^2}d\rho$

$\Rightarrow U_0=\frac{I}{4\pi\gamma}\left(-\frac{1}{\rho}\right)\Big|_{R_1}^{R_2}=\frac{I}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{I}{4\pi\gamma}\frac{(R_2-R_1)}{R_1R_2}$

$\Rightarrow\frac{I}{4\pi\gamma}=\frac{U_0R_1R_2}{R_2-R_1}=\frac{1000\times50\times10^{-4}}{5\times10^{-2}}=100$

内外导体之间的电位为：

$$\varphi = \int_{\rho}^{R_2} \frac{I}{4\pi\gamma\rho^2}\, d\rho = \frac{I}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R_2}\right)$$

∴内外导体之间的电位：$\varphi = 100\left(\frac{1}{\rho} - 10\right)$ V.

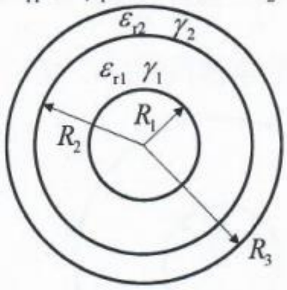
内外导体之间的电场：$\vec{E} = \frac{100}{\rho^2}\vec{e}_\rho$ V/m.

内外导体之间的电流密度：$\vec{J} = \frac{10^{-7}}{\rho^2}\vec{e}_\rho$ A/m²

内外导体之间的绝缘电阻：

$$R = \frac{U_0}{I} = \frac{1}{4\pi\gamma}\frac{(R_2 - R_1)}{R_1 R_2} = 7.96\times10^{8}\ \Omega.$$

3． （5 分）同轴电缆内导体半径为 R_1，外导体半径为 R_3，内外导体之间有两层媒质。内层从 R_1 到 R_2，媒质的参数为 ε_{r1} 和 γ_1；外层从 R_2 到 R_3，媒质的参数为 ε_{r2} 和 γ_2，如图所示。求



(1) 每层单位长度的电容；

(2) 每层单位长度的电导；

(3) 单位长度的总电容；

(4) 单位长度的总电导；

(5) 当同轴电缆长度为 L，内外导体之间的电压为 U，忽略边缘效应，利用边界上的衔接条件分别求界面 R_1、R_2 和 R_3 上的电荷面密度。

解：(1) 由阻容对比可知：

第一层单位长度电容为：$C_1' = \dfrac{2\pi\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$

第二层单位长度电容为：$C_2' = \dfrac{2\pi\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}{\ln\frac{R_3}{R_2}}$

(2) 假设同轴电缆内外导体之间的漏电流为 I，则

当 $R_1<\rho<R_2$ 时（第一层）

$$\vec{J}_1=\frac{I}{2\pi\rho L}\vec{e}_\rho \Rightarrow \vec{E}_1=\frac{\vec{J}_1}{\gamma_1}=\frac{I}{2\pi\gamma_1\rho L}\cdot\vec{e}_\rho$$

$$U_1=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}_1\cdot d\vec{\rho}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{I}{2\pi\gamma_1 L\rho}d\rho=\frac{I}{2\pi\gamma_1 L}\ln\frac{R_2}{R_1}$$ ，令 $L=1\,m$，

∴ 第一层单位长度电导为：$G_1'=\frac{I}{U_1}=\frac{2\pi\gamma_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$

同理：第二层单位长度电导为 $G_2'=\frac{2\pi\gamma_2}{\ln\frac{R_3}{R_2}}$

(3). 单位长度总电容为：

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{1}{\varepsilon_{r2}}\ln\frac{R_3}{R_2}}$$

(4). 单位长度总电导为：

$$G=\frac{I}{U_1+U_2}=\frac{I}{\frac{I}{2\pi\gamma_1}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{I}{2\pi\gamma_2}\ln\frac{R_3}{R_2}}=\frac{2\pi}{\frac{1}{\gamma_1}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{1}{\gamma_2}\ln\frac{R_3}{R_2}}$$

(5). 欲求界面上的电荷密度，需求介质中的 $\vec{E}$ 和 $\vec{D}$

已知内外导体之间的电压为 U，则

$$U=U_1+U_2=\frac{I}{2\pi\gamma_1 L}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{I}{2\pi\gamma_2 L}\ln\frac{R_3}{R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{I}{2\pi L}=\frac{U}{\frac{1}{\gamma_1}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{1}{\gamma_2}\ln\frac{R_3}{R_2}}$$

$$\therefore \vec{E}_1=\frac{I}{2\pi\gamma_1 L\rho}\cdot\vec{e}_\rho=\frac{U}{(\frac{1}{\gamma_1}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{1}{\gamma_2}\ln\frac{R_3}{R_2})\gamma_1\rho}\vec{e}_\rho \qquad R_1<\rho<R_2$$

$$\therefore \vec{E}_2=\frac{I}{2\pi\gamma_2 L\rho}\cdot\vec{e}_\rho=\frac{U}{(\frac{1}{\gamma_1}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{1}{\gamma_2}\ln\frac{R_3}{R_2})\gamma_2\rho}\vec{e}_\rho \qquad R_2<\rho<R_3$$

则：$$\vec{D}_1=\frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 U}{(\frac{1}{\gamma_1}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{1}{\gamma_2}\ln\frac{R_3}{R_2})\gamma_1\rho}\vec{e}_\rho \qquad R_1<\rho<R_2$$

$$\vec{D}_2=\frac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 U}{(\frac{1}{\gamma_1}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{1}{\gamma_2}\ln\frac{R_3}{R_2})\gamma_2\rho}\vec{e}_\rho \qquad R_2<\rho<R_3$$

$\rho=R_1$ 部分界面是内导体和电介质的分界面，分界面的法向方向为 $\vec{e}_\rho$

$$\therefore \sigma\big|_{\rho=R_1}=D_1=\frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 U}{(\frac{1}{\gamma_1}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{1}{\gamma_2}\ln\frac{R_3}{R_2})\gamma_1 R_1}$$

$\rho=R_2$的分界面是两电介质的分界面，分界面的法向方向为$\vec{e}_\rho$

$$\therefore \sigma\big|_{\rho=R_2}=D_{2n}-D_{1n}=\frac{\varepsilon_0 U}{\left(\frac{1}{\gamma_1}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{1}{\gamma_2}\ln\frac{R_3}{R_2}\right)R_2}\left(\frac{\varepsilon_{r2}}{\gamma_2}-\frac{\varepsilon_{r1}}{\gamma_1}\right)$$

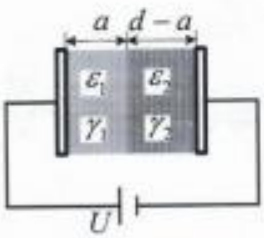
$\rho=R_3$的分界面是介质和导体的分界面，分界面的法向方向为$(-\vec{e}_\rho)$

$$\therefore \sigma\big|_{\rho=R_3}=-D_{2n}=\frac{-\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 U}{\left(\frac{1}{\gamma_1}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{1}{\gamma_2}\ln\frac{R_3}{R_2}\right)\gamma_2 R_3}$$

4．（1分）假设大地为均匀导电媒质，浅埋于地下的不规则形状接地体电流流入大地。在远离接地体的大地内，电流如何分布？

解：接地体为良导体，大地为不良导体，根据良导体和不良导体分界面条件，良导体的电流垂直进入不良导体，所以接地体电流垂直流入大地，在远离接地体的大地内，电流可近似地看做呈半球对称分布。

5．（3分）图示平行平板电容器，两极板间距为，极板之间有两种电介质，第一种电介质厚度为，介电常数为，电导率为；第二种电介质厚度为，介电常数为，电导率为。若两极板间加电压，求电介质中的电场强度、漏电流密度和电介质分界面上的自由电荷面密度。



根据衔接条件可知：
两种介质中的J相等

$$\begin{cases} E_1 a+E_2(d-a)=U \\ \gamma_1 E_1=\gamma_2 E_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1=\dfrac{U\gamma_2}{(\gamma_2-\gamma_1)a+\gamma_1 d} \\ E_2=\dfrac{U\gamma_1}{(\gamma_2-\gamma_1)a+\gamma_1 d} \end{cases}$$

漏电流密度：$J_1=J_2=\dfrac{\gamma_1\gamma_2 U}{(\gamma_2-\gamma_1)a+\gamma_1 d}$

电介质分界面上自由电荷面密度为：

$$\sigma_f=D_{2n}-D_{1n}=\frac{(\varepsilon_2\gamma_1-\varepsilon_1\gamma_2)U}{(\gamma_2-\gamma_1)a+\gamma_1 d}.$$

6. （2分）在恒定电场的电源中，总的电场强度闭合线积分为零吗？局外电场强度的闭合线积分为零吗？库仑电场强度的闭合线积分为零吗？在电源之外，上述3个闭合线积分是否为零？

在恒定电场的电源中，有局外场，所以总场强闭合线积分不为零；局外电场强度的闭合线积分不为零。

库仑电场强度的闭合线积分为零。

电源之外，只存在库仑场，所以闭合线积分为0

7. （2分）请依据电流密度矢量$\vec{J}$的定义及电流连续性定理，分别给出电路理论中焦耳定律（微分形式）与基尔霍夫电流定律的推导过程。

证明：(1) 焦耳定律

导体内的电荷dq，以速度$\vec{v}$运动，则电场力对其做的功：

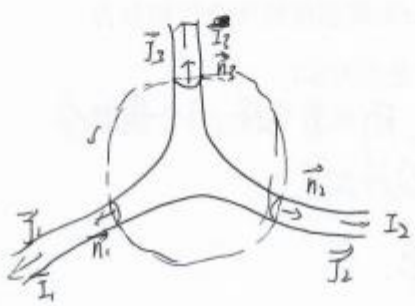
$$\left.\begin{array}{l} dA=\vec{F}\cdot d\vec{l}=dq\vec{E}\cdot d\vec{l} \\ d\vec{l}=\vec{v}dt \end{array}\right] \Rightarrow dA=dq\vec{E}\cdot\vec{v}\cdot dt \Rightarrow dA=\rho dV\vec{E}\cdot\vec{v}dt$$

则单位时间的功为：$dP=\frac{dA}{dt}=\vec{E}\cdot\rho\vec{v}dV=\vec{J}\cdot\vec{E}\cdot dV$

$$\Rightarrow p=\frac{dP}{dV}=\vec{J}\cdot\vec{E}$$

证明：

(2) KCL



在恒定场中，$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}=0$

$$\Rightarrow 0=\int_{S_1}\vec{J}_1\cdot d\vec{S}_1+\int_{S_2}\vec{J}_2\cdot d\vec{S}_2+\int_{S_3}\vec{J}_3\cdot d\vec{S}_3$$

$$\Rightarrow 0=I_1+I_2+I_3$$

即流出节点电流代数和为零。