自动控制理论 A

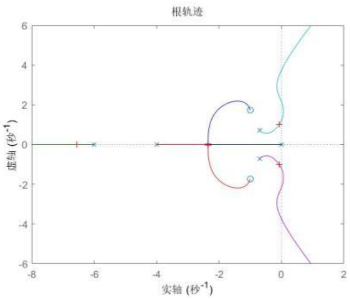
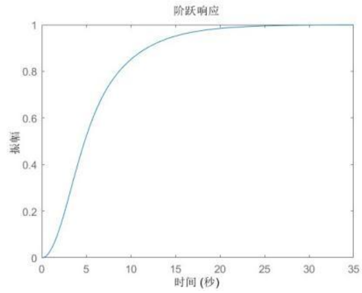
Matlab 仿真实验报告

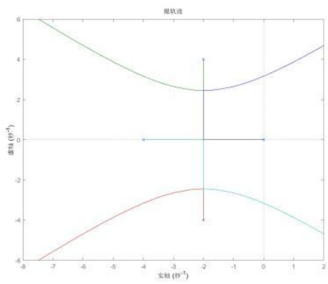
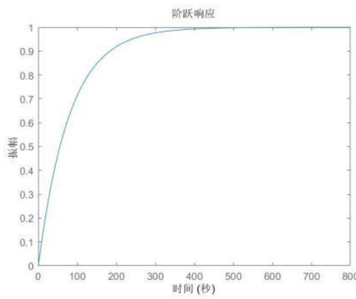
实 验 名 称	：根轨迹与频率特性分析
姓　　　名	：
学　　　号	：
班　　　级	：工科试验班（自动化与电气工程）
撰 写 日 期	：2025 年 4 月 29 日

哈尔滨工业大学（深圳）

一、 基于根轨迹的性能分析

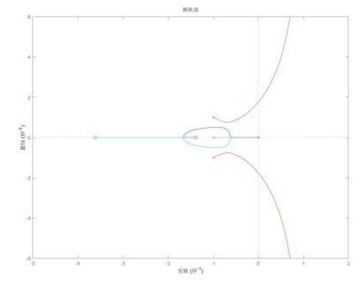
1.对开环传递函数 $G(s)$、$G_1(s)$和 $G_2(s)$分别画出关于根轨迹增益 k 的闭环根轨迹图，给出根轨迹的分离点、与虚轴的交点，给出使闭环系统稳定的参数 k 的范围。

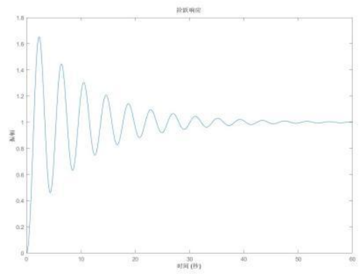
<table>
<tr><th>.m 文件代码</th><th>根轨迹图</th><th>单位阶跃响应</th></tr>
<tr><td><pre>num = [1, 2, 4];
den = conv(conv([1, 4, 0], [1, 6]), [1, 1.4, 1]);
sys = tf(num, den);
figure(1);
step(sys / (1 + sys));
figure(2);
rlocus(sys);
axis([-8, 2, -6, 6])</pre></td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">稳定的参数 k 的范围：$0 < k < 15.0$ 或 $66.6 < k < 164$</td></tr>
<tr><td colspan="3">分离点：$(-2.36, 0)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">与虚轴的交点：$(0, \pm 1.19j)$，$(0, \pm 2.14j)$和$(0, \pm 3.77j)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>.m 文件代码</th><th>根轨迹图</th><th>单位阶跃响应</th></tr>
<tr><td><pre>num1 = 1;
den1 = conv([1, 4, 0], [1, 4, 20]);
sys1 = tf(num1, den1);
figure(3);
step(sys1 / (1 + sys1));
figure(4);
rlocus(sys1);
axis([-8, 2, -6, 6])</pre></td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">稳定的参数 k 的范围：$0 < \mathrm{k} < 261$</td></tr>
<tr><td colspan="3">分离点：$(-2, 0)$和$(-2, \pm 2.45j)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">与虚轴的交点：$(0, \pm 3.16j)$</td></tr>
</table>

.m 文件代码	根轨迹图	单位阶跃响应

```
num2 = [1 5 5];
den2 = conv([1, 1, 0], [1, 2, 2]);
sys2 = tf(num2, den2);
figure(5);
step(sys2 / (1 + sys2));
figure(6);
rlocus(sys2);
axis([-5, 2, -6, 6])
```





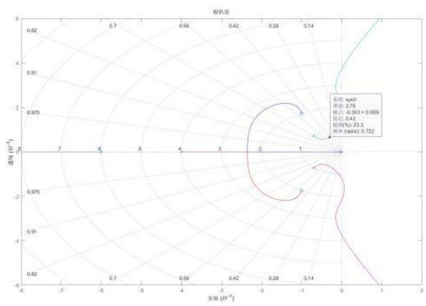
稳定的参数 k 的范围：$0 < k < 1.46$
分离点：$(-0.614, 0)$和$(-1.66, 0)$
与虚轴的交点：$(0, \pm 1.76j)$

2.对开环传递函数 $G(s)$、$G_1(s)$和 $G_2(s)$，借助等阻尼比射线，找出使闭环主导极点的阻尼比在 0.3～0.8 之间的某一根轨迹增益，画出在该增益下单位反馈闭环系统的阶跃响应。比较从阶跃响应上得到超调与从根轨迹信息框里的超调，进而给出简单的结论。

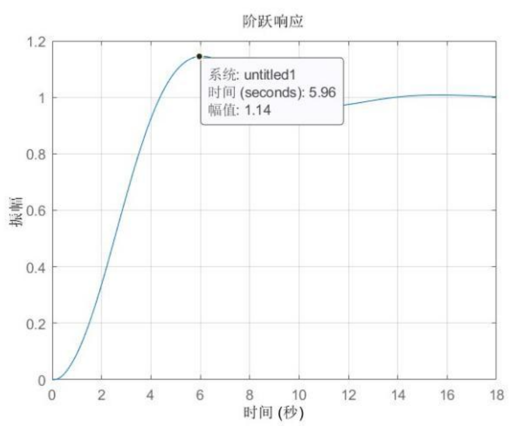
.m 文件代码

```
num0 = [1, 2, 4];
den0 = conv(conv([1, 4, 0], [1, 6]), [1, 1.4, 1]);
sys0 = tf(num0, den0);
figure(7);
rlocus(sys0);
grid("on");
axis([-8, 2, -6, 6])
figure(8);
%阻尼比0.42
step(2.78 * sys0 / (1 + 2.78 * sys0));
grid on;
```

等阻尼比射线根轨迹图



单位反馈闭环系统的阶跃响应

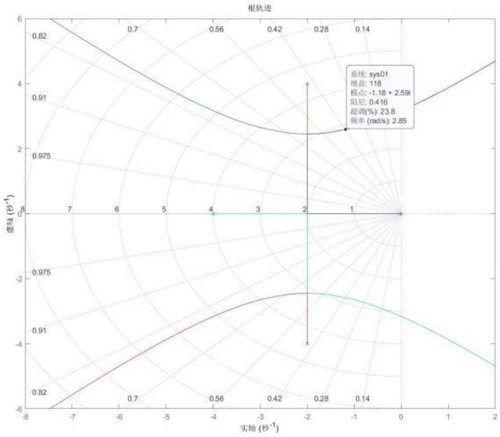


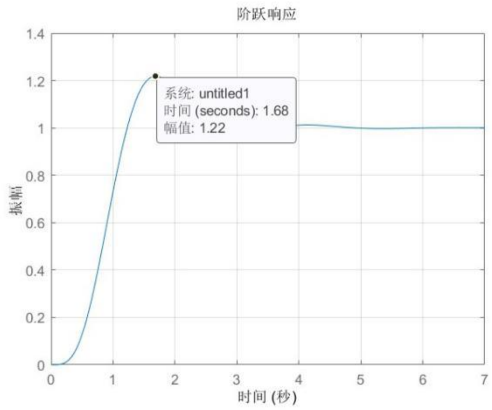
结论

选择增益$k = 2.78$，此时阻尼比$\zeta = 0.42$，根轨迹图得主导极点的超调量$\sigma_0 = 23.3\%$，单位阶跃响应图中实际超调量为$\sigma = 14\%$

.m 文件代码	等阻尼比射线根轨迹图

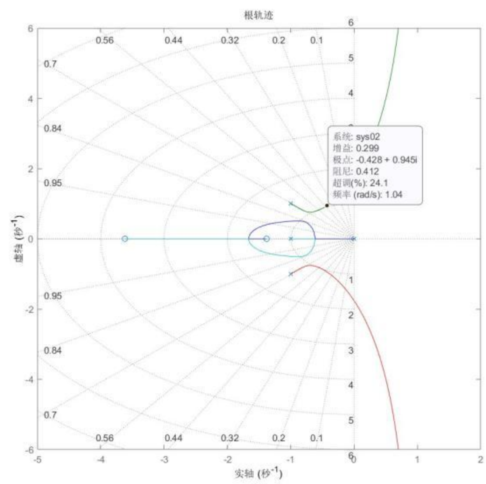
```
num01 = 1;
den01 = conv([1, 4, 0], [1, 4, 20]);
sys01 = tf(num01, den01);
figure(9);
rlocus(sys01);
grid("on");
axis([-8, 2, -6, 6])
grid on;
figure(10);
%阻尼比0.416
step((118 * sys01) / (1 + 118 * sys01));
grid on;
```

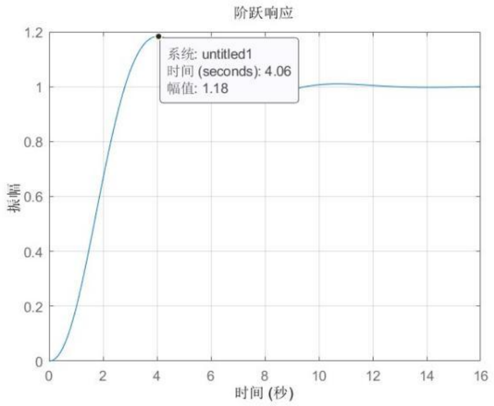


单位反馈闭环系统的阶跃响应	结论
	选择增益 k = 118，此时阻尼比 $\zeta = 0.416$，根轨迹图得主导极点的超调量 $\sigma_0 = 23.8\%$，单位阶跃响应图中实际超调量为 $\sigma = 22\%$

.m 文件代码	等阻尼比射线根轨迹图

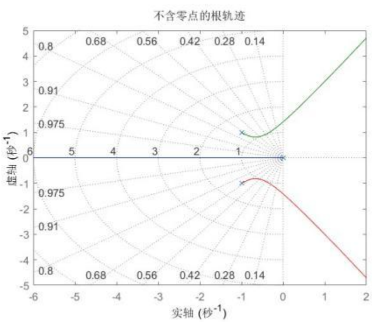
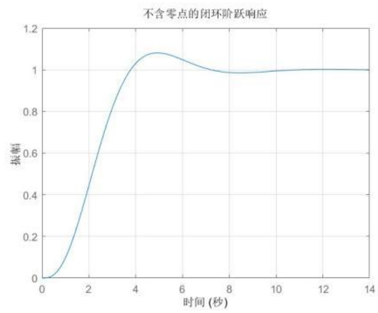
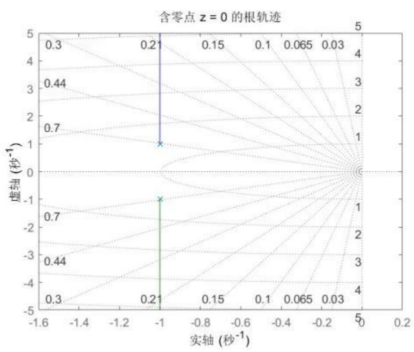
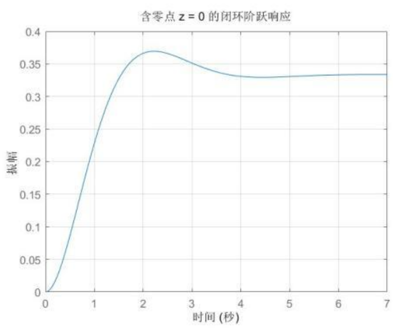
```
num02 = [1 5 5];
den02 = conv([1, 1, 0], [1, 2, 2]);
sys02 = tf(num02, den02);
figure(11);
rlocus(sys02);
axis([-5, 2, -6, 6])
grid on;
figure(12);
%阻尼比0.412
step((0.299*sys02)/(1+0.299*sys02));
grid on;
```

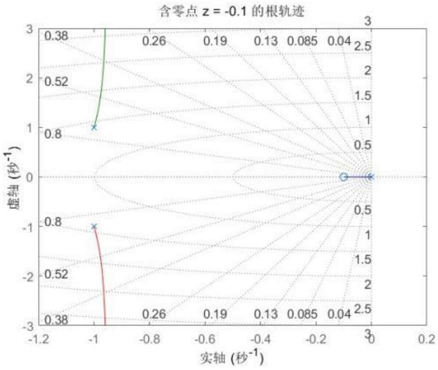
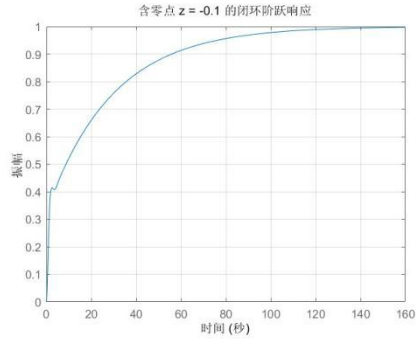
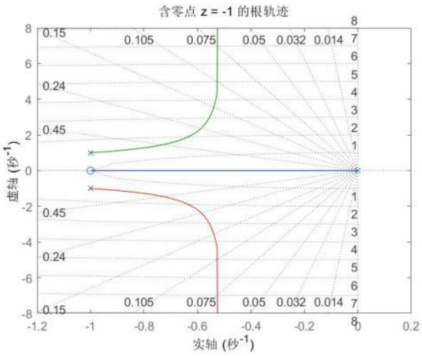
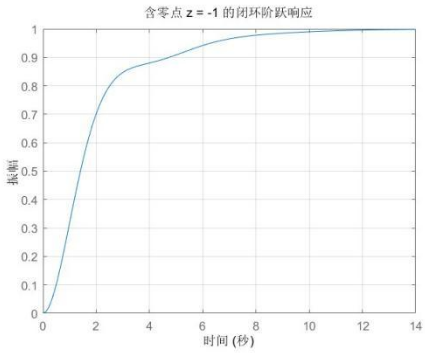
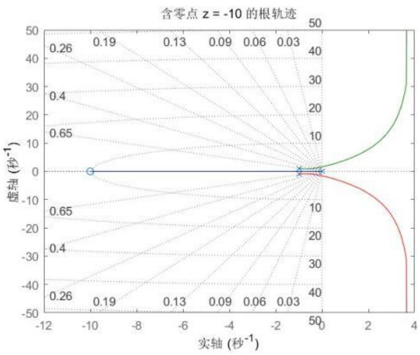
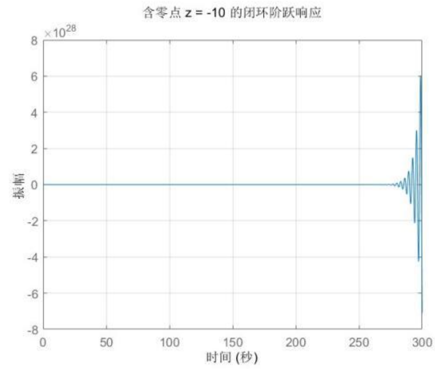
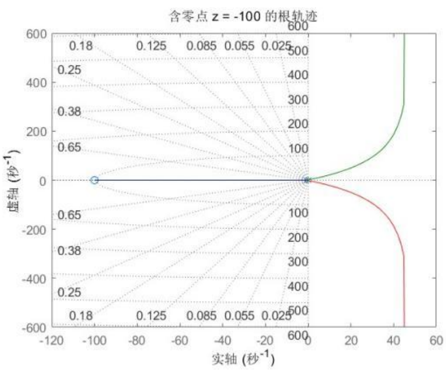
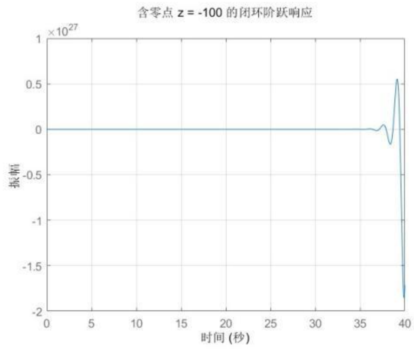


单位反馈闭环系统的阶跃响应	结论
	选择增益 k = 0.299，此时阻尼比 ξ = 0.412， 根轨迹图得主导极点的超调量 $\sigma_0 = 24.1\%$， 单位阶跃响应图中实际超调量为 $\sigma = 18\%$

由上述实验，比较阶跃响应曲线图得到的实际超调量与根轨迹图得到的主导极点超调量可得：高阶系统阶跃响应的超调量主要有系统的闭环主导极点决定，二者在一定误差范围内接近。

3.对开环传递函数 $G_3(s)$画出不同零点时的根轨迹，并与不含零点时的根轨迹进行比较，给出简单的结论。

零点	根轨迹	单位阶跃相应
不含零点		
$z = 0$		

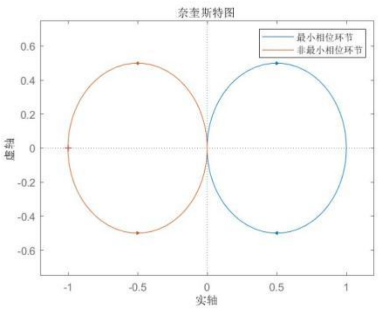
z = - 0.1		
z = - 1		
z = - 10		
z = - 100		

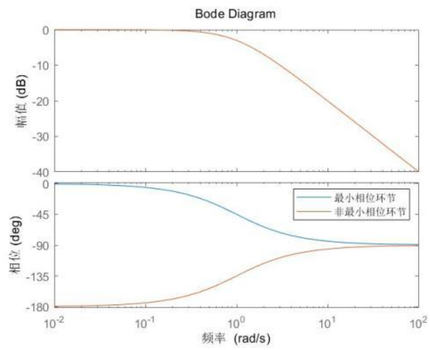
<table>
<tr>
<td>.m 代码</td>
<td><pre>
% 不含零点的开环传递函数
den = [1 2 2 0];
sys_no_zero = tf(1, den);
figure;
rlocus(sys_no_zero);
title('不含零点的根轨迹');
grid on;
figure;
step(sys_no_zero / (1 + sys_no_zero));
title('不含零点的闭环阶跃响应');
grid on;

% 对每个零点画出根轨迹并与不含零点时的根轨迹进行比较
for z = [-100, -10, -1, -0.1, 0]
    num = [1 -z];
    sys = tf(num, den);
    % 画出含零点的根轨迹
    figure;
    rlocus(sys);
    title(['含零点 z = ', num2str(z), ' 的根轨迹']);
    grid on;
    % 画出闭环系统的阶跃响应
    figure;
    step(sys / (1 + sys));
    title(['含零点 z = ', num2str(z), ' 的闭环阶跃响应']);
    grid on;
end
</pre></td>
<td>结论</td>
<td>当开环传函的零点距离虚轴越来越远，即z的模在增大时，实轴上的根轨迹越来越长，左半平面根轨迹逐渐与虚轴出现交点，使得部分根轨迹增益的闭环系统不再稳定。由单位阶跃响应曲线可以看出，系统开环传函的零点位置会影响闭环系统的响应速度、稳态增益和稳定性。</td>
</tr>
</table>

二、 线性系统的频率特性分析

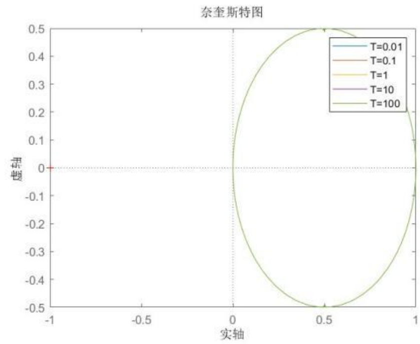
1.固定 K 和 T，在同一幅图里绘制一阶惯性环节$G(s)=\frac{K}{Ts+1}$和非最小相位的惯性环节$G(s)=\frac{K}{Ts-1}$的 Nyquist 图，说明它们的 Nyquist 图的关系；固定 K 和 T，在同一幅图里绘制一阶惯性环节$G(s)=\frac{K}{Ts+1}$和非最小相位的惯性环节$G(s)=\frac{K}{Ts-1}$的 Bode 图，说明它们的 Bode 图的关系。

<table>
<tr><th>固定 K、T</th><th>图像</th><th>关系</th><th>.m 代码</th></tr>
<tr><td>Nyquist 图</td><td>
</td><td>最小相位系统和非最小相位系统的 Nyquist 图关于虚轴对称。</td><td>K = 1;
T = 1;

% 最小相位系统的惯性环节
den1 = [T, 1];
sys1 = tf(K, den1);
% 绘制最小相位系统的惯性环节的 Nyquist 曲线
nyquist(sys1);
hold on;
% 非最小相位系统的惯性环节
den2 = [T, -1];
sys2 = tf(K, den2);
% 绘制非最小相位系统的惯性环节的 Nyquist 曲线
nyquist(sys2);
axis([-1.2, 1.2, -0.75, 0.75]);
legend('最小相位环节', '非最小相位环节');
hold off;</td></tr>
<tr><td>Bode 图</td><td>
</td><td>最小相位系统和非最小相位系统的对数幅频特性相同，对数相频特性关于-90°对称，非最小相位系统相位绝对值大于最小相位系统的。</td><td>K = 1;
T = 1;
% 定义最小相位系统的惯性环节
den1 = [T, 1];
sys1 = tf(K, den1);
% 绘制最小相位惯性环节 Bode 图
bode(sys1);
hold on;
% 定义非最小相位系统的惯性环节
den2 = [T, -1];
sys2 = tf(K, den2);
% 绘制非最小相位惯性环节 Bode 图
bode(sys2);
legend('最小相位环节', '非最小相位环节');
hold off;</td></tr>
</table>

2.固定 K，分别在同一幅图绘制不同 T 时一阶惯性环节$G(s)=\frac{K}{Ts+1}$的 Nyquist 图和 Bode 图；固定 T，分别在同一幅图绘制不同 K 时一阶惯性环节$G(s)=\frac{K}{Ts+1}$的 Nyquist 图和 Bode 图，分析 T 和 K 的变化对 Nyquist 曲线和 Bode 图的影响。

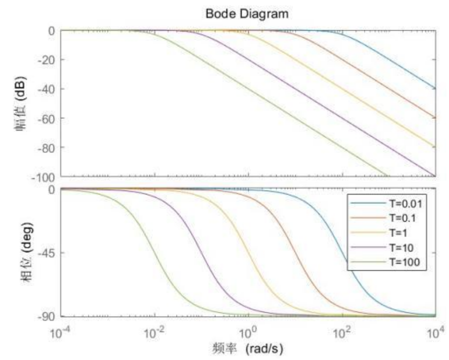
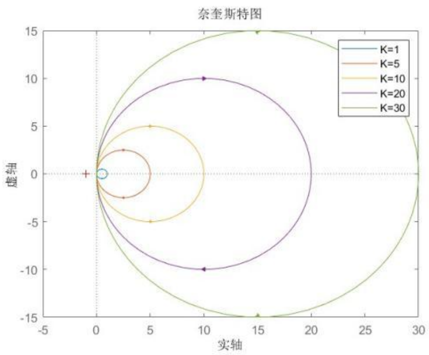
K 固定	图像	影响	.m 代码

<table>
<tr><td>Nyquist 图</td><td>
</td><td>时间常数 T 的增大不影响 Nyquist 图，只会影响曲线绘制的速度（即参量变化的速度）。</td><td rowspan="2">K = 1;

%绘制 Nyquist 图
for T1 = [0.01, 0.1, 1, 10, 100]
    den3 = [T1, 1];
    sys3 = tf(K, den3);
    figure(1);
    nyquist(sys3);
    hold on;
end

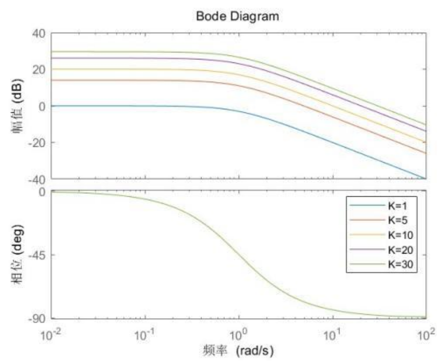
figure(1);
legend('T=0.01', 'T=0.1', 'T=1', 'T=10', 'T=100');
hold off;

%绘制 Bode 图
for T1 = [0.01, 0.1, 1, 10, 100]
    den3 = [T1, 1];
    sys3 = tf(K, den3);
    figure(2);
    bode(sys3);
    hold on;
end

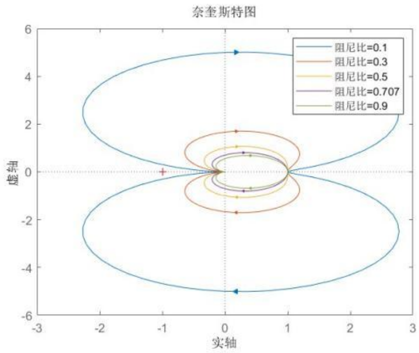
figure(2);
legend('T=0.01', 'T=0.1', 'T=1', 'T=10', 'T=100');
hold off;</td></tr>
<tr><td>Bode 图</td><td>
</td><td>时间常数 T 的增大使 Bode 图幅频和相频均左移。</td></tr>
<tr><td>T 固定</td><td>图像</td><td>影响</td><td>.m 代码</td></tr>
<tr><td>Nyquist 图</td><td>
</td><td>增益 K 的增加使得 Nyquist 曲线圆心右移，半径增大，但是终点仍为原点。</td><td rowspan="2">K = 1;
T = 1;

%绘制 Nyquist 图
for K1 = [1, 5, 10, 20, 30]
    den4 = [T, 1];
    sys4 = tf(K1, den4);
    figure(1);
    nyquist(sys4);
    hold on;
end

figure(1);
legend('K=1', 'K=5', 'K=10', 'K=20', 'K=30');
hold off;
%绘制 Bode 图
for K1 = [1, 5, 10, 20, 30]
    den4 = [T, 1];
    sys4 = tf(K1, den4);
    figure(2);
    bode(sys4);
    hold on;
end

figure(2);
legend('K=1', 'K=5', 'K=10', 'K=20', 'K=30');
hold off;</td></tr>
<tr><td>Bode 图</td><td>
</td><td>增益 K 的增加不影响对数相频特性，使得对数幅频特性上移。</td></tr>
</table>

3.T 固定，分别在同一幅图绘制不同阻尼比时二阶振荡环节$G(s)=\frac{1}{Ts^2+2T\xi s+1}$的 Nyquist 图和 Bode 图；阻尼比固定，分别在同一幅图绘制不同时间常数时$G(s)=\frac{1}{Ts^2+2T\xi s+1}$的 Nyquist 图和 Bode 图，分析阻尼比和时间常数 T 的变化对 Nyquist 曲线和 Bode 图的影响。

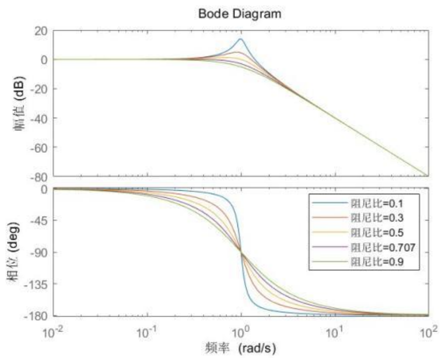
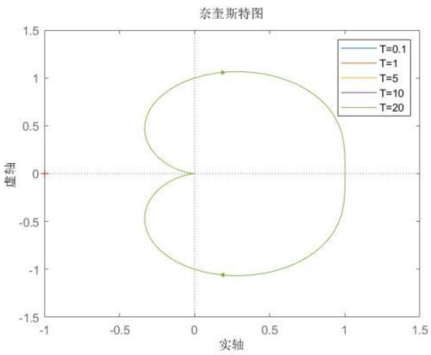
<table>
<tr><th>T 固定</th><th>图像</th><th>影响</th><th>.m 代码</th></tr>
<tr><td>Nyquist 图</td><td>
</td><td>阻尼比减小时，Nyquist 曲线向外扩展。</td><td rowspan="2">T = 1;

%绘制 Nyquist 图
for ksi1 = [0.1, 0.3, 0.5, 0.707, 0.9]
    den5 = [T * T, 2 * T * ksi1, 1];
    sys5 = tf(1, den5);
    figure(1);
    nyquist(sys5);
    hold on;
end

figure(1);
legend('阻尼比=0.1', '阻尼比=0.3', '阻尼比=0.5',
'阻尼比=0.707', '阻尼比=0.9');

hold off;
%绘制 Bode 图
for ksi1 = [0.1, 0.3, 0.5, 0.707, 0.9]
    den5 = [T * T, 2 * T * ksi1, 1];
    sys5 = tf(1, den5);
    figure(2);
    bode(sys5);
    hold on;
end

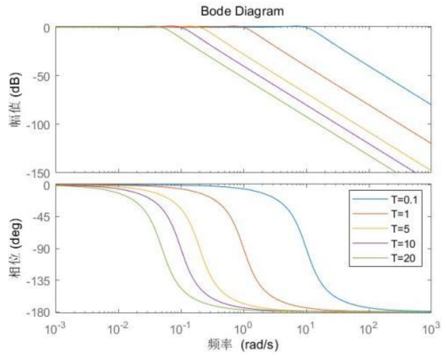
figure(2);
legend('阻尼比=0.1', '阻尼比=0.3', '阻尼比=0.5',
'阻尼比=0.707', '阻尼比=0.9');

hold off;</td></tr>
<tr><td>Bode 图</td><td>
</td><td>阻尼比减小时，对数相频曲线越来越接近矩形波，跳变处斜率增加。当阻尼比小于 0.707 时，对数幅频曲线会出现谐振峰。</td></tr>
<tr><th>ζ 固定</th><th>图像</th><th>影响</th><th>.m 代码</th></tr>
<tr><td>Nyquist 图</td><td>
</td><td>时间常数 T 增加时，Nyquist 曲线不变。</td><td>ksi = 0.5;

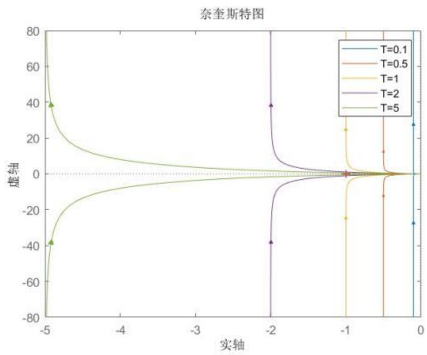
%绘制 Nyquist 图
for T2 = [0.1, 1, 5, 10, 20]
    %定义二阶振荡环节传递函数
    den6 = [T2 * T2, 2 * T2 * ksi, 1];
    sys6 = tf(1, den6);
    figure(1);
    nyquist(sys6);
    hold on;
end

figure(1);
legend('T=0.1', 'T=1', 'T=5', 'T=10', 'T=20');
hold off;
%绘制 Bode 图
for T2 = [0.1, 1, 5, 10, 20]
    %定义二阶振荡环节传递函数
    den6 = [T2 * T2, 2 * T2 * ksi, 1];
    sys6 = tf(1, den6);
    figure(2);
    bode(sys6);
    hold on;
end

figure(2);
legend('T=0.1', 'T=1', 'T=5', 'T=10', 'T=20');
hold off;</td></tr>
</table>

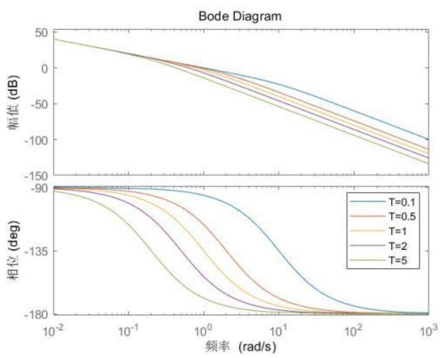
<table>
<tr><td>Bode 图</td><td>
</td><td>时间常数 T 增加时，Bode 图曲线左移。</td><td></td></tr>
</table>

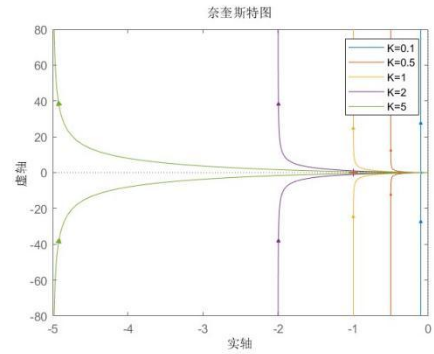
4.K 固定，分别在同一幅图绘制不同时间常数 T 时 $G(s)=\frac{K}{s(Ts+1)}$ 的 Nyquist 图和 Bode 图；T 固定，分别在同一幅图绘制不同开环增益 K 时 $G(s)=\frac{K}{s(Ts+1)}$ 的 Nyquist 图和 Bode 图，分析时间常数 T 和开环增益 K 的变化对 Nyquist 曲线和 Bode 图的影响。对给定的 K 和 T，判断单位反馈闭环系统的稳定性。

<table>
<tr><td>K 固定</td><td>图像</td><td>影响</td><td>.m 代码</td></tr>
<tr><td>Nyquist 图</td><td>
</td><td>时间常数 T 增加时，Nyquist 图渐近线左移。</td><td rowspan="2">K = 1;

% 绘制 Nyquist 图
for T3 = [0.1, 0.5, 1, 2, 5]
    den7 = [T3, 1, 0];
    sys7 = tf(K, den7);
    figure(1);
    nyquist(sys7);
    hold on;
end

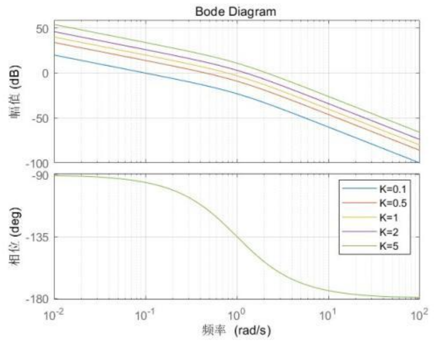
figure(1);
legend('T=0.1', 'T=0.5', 'T=1', 'T=2', 'T=5');
hold off;
% 绘制 Bode 图
for T3 = [0.1, 0.5, 1, 2, 5]
    den7 = [T3, 1, 0];
    sys7 = tf(K, den7);
    figure(2);
    bode(sys7);
    hold on;
end

figure(2);
legend('T=0.1', 'T=0.5', 'T=1', 'T=2', 'T=5');
hold off;</td></tr>
<tr><td>Bode 图</td><td>
</td><td>时间常数 T 增加时，Bode 图曲线左移。</td></tr>
<tr><td>T 固定</td><td>图像</td><td>影响</td><td>.m 代码</td></tr>
</table>

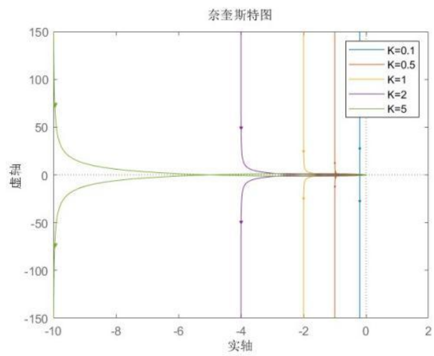
<table>
<tr><td>Nyquist 图</td><td>
</td><td>K 增大时，Nyquist 曲线左移。</td><td rowspan="2"><pre>T = 1;

% 绘制 Nyquist 图
for K3 = [0.1, 0.5, 1, 2, 5]
    den8 = [T, 1, 0];
    sys8 = tf(K3, den8);
    figure(1);
    nyquist(sys8);
    hold on;
end

figure(1);
legend('K=0.1', 'K=0.5', 'K=1', 'K=2', 'K=5');
hold off;
%绘制 Bode 图
for K3 = [0.1, 0.5, 1, 2, 5]
    % 定义传递函数
    den8 = [T, 1, 0];
    sys8 = tf(K3, den8);
    figure(2);
    bode(sys8);
    hold on;
end

figure(2);
legend('K=0.1', 'K=0.5', 'K=1', 'K=2', 'K=5');
grid on;
hold off;</pre></td></tr>
<tr><td>Bode 图</td><td>
</td><td>K 增大时，对数幅频曲线上移，对数相频曲线不变。</td></tr>
<tr><td colspan="4">单位负反馈闭环系统的稳定性：右半平面开环极点数$P=0$，补画-90°，在 Bode 图中$L(\omega)>0$时未穿过-180°线，$N=0$，$Z=P-2N=0$，系统稳定。</td></tr>
</table>

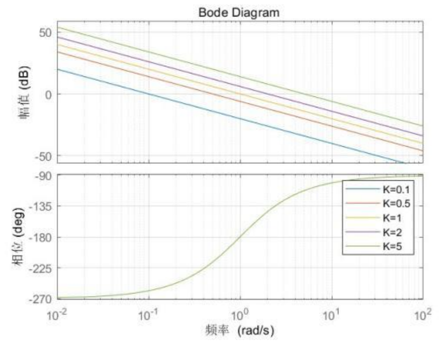
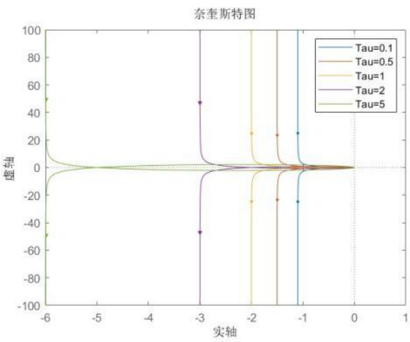
5.固定 T 和τ，分别在同一幅图绘制不同 K 时$G(s)=\frac{K(\tau s+1)}{s(Ts-1)}$的 Nyquist 图和 Bode 图；固定 T 和 K，分别在同一幅图绘制不同τ时$G(s)=\frac{K(\tau s+1)}{s(Ts-1)}$的 Nyquist 图和 Bode 图。分析 K 和τ的变化对 Nyquist 曲线和 Bode 图的影响，并分析单位反馈闭环系统的稳定性。注意$K\tau=1$ 这一分界点。

<table>
<tr><th>固定 T、τ</th><th>图像</th><th>影响</th><th>.m 代码</th></tr>
<tr><td>Nyquist 图</td><td>
</td><td>K 增大时，Nyquist 曲线左移。</td><td><pre>T = 1;
tau = 1;

%绘制 Nyquist 图
for K4 = [0.1, 0.5, 1, 2, 5]
    num9 = [K4 * tau, K4];
    den9 = [T, -1, 0];
    sys9 = tf(num9, den9);
    figure(1);
    nyquist(sys9);
    hold on;
end

figure(1);
legend('K=0.1', 'K=0.5', 'K=1', 'K=2', 'K=5');
hold off;
%绘制 Bode 图
for K4 = [0.1, 0.5, 1, 2, 5]
    num9 = [K4 * tau, K4];
    den9 = [T, -1, 0];
    sys9 = tf(num9, den9);
    figure(2);
    bode(sys9);
    hold on;
end

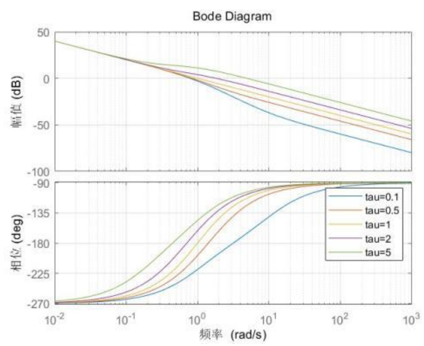
figure(2);
legend('K=0.1', 'K=0.5', 'K=1', 'K=2', 'K=5');
grid on;
hold off;</pre></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Bode 图</td><td>
</td><td>K 增大时，对数幅频特性上移，对数相频特性不变。</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">单位负反馈闭环系统的稳定性：当$T=\tau=1$ 时右半平面开环极点数$P=1$，补画-90°，在 Bode 图中$L(\omega)>0$ 时，若$K\leq 1$，$N^{+}=0, N^{-}=\frac{1}{2}$，$Z=P-2N=2$，系统不稳定；若$K>1$，$N^{+}=1, N^{-}=\frac{1}{2}$，$Z=P-2N=0$，系统稳定。</td></tr>
<tr><td>固定 T、K</td><td>图像</td><td>影响</td><td>.m 代码</td></tr>
<tr><td>Nyquist 图</td><td>
</td><td>τ 增大时，Nyquist 曲线左移且与 τ 成比例。</td><td rowspan="2"><pre>
T = 1;
K = 1;
tau = 1;

% 绘制 Nyquist 图
for tau2 = [0.1, 0.5, 1, 2, 5]
    % 定义传递函数
    num10 = [K * tau2, K];
    den10 = [T, -1, 0];
    sys10 = tf(num10, den10);
    figure(1);
    nyquist(sys10);
    hold on;
end

figure(1);
legend('Tau=0.1', 'Tau=0.5', 'Tau=1', 'Tau=2', 'Tau=5');
hold off;

% 绘制 Bode 图
for tau2 = [0.1, 0.5, 1, 2, 5]
    % 定义传递函数
    num10 = [K * tau2, K];
    den10 = [T, -1, 0];
    sys10 = tf(num10, den10);
    figure(2);
    bode(sys10);
    hold on;
end

figure(2);
legend('tau=0.1', 'tau=0.5', 'tau=1', 'tau=2', 'tau=5');
grid on;
hold off;
</pre></td></tr>
<tr><td>Bode 图</td><td>
</td><td>τ 增大时，对数幅频特性低频部分几乎不变，高频部分上移，对数相频特性左移。特别的，当$K\tau=1$ 时，对数幅频曲线为斜率为-20dB/dec 的直线。</td></tr>
<tr><td colspan="4">单位负反馈闭环系统的稳定性：当$T=K=1$ 时右半平面开环极点数 $\mathrm{P}=1$，补画-90°，在 Bode 图中 $\mathrm{L}(\omega)>0$ 时，若$\tau\leq 1$，$N^{+}=0, N^{-}=\frac{1}{2}$，$\mathrm{Z}=\mathrm{P}-2\mathrm{N}=2$，系统不稳定；若$\tau>1$，$\mathrm{N}^{+}=1, \mathrm{N}^{-}=\frac{1}{2}$，$Z=P-2N=0$，系统稳定。</td></tr>
<tr><td colspan="4">单位负反馈闭环系统的特征方程$D(s)=\tau s^{2}+(KT-1)s+K=0$，由 Routh 判据得$KT>1$ 时系统稳定，$KT=1$ 时系统临界稳定，$KT<1$ 时系统不稳定。</td></tr>
</table>