系统与控制—作业 3

1. (10’) 已知系统的单位阶跃响应为 $y(t) = 1 + e^{-t} - e^{-2t} \quad (t \geq 0)$，试求该系统的传递函数 $G(s) = Y(s)/R(s)$.

由于 $y(0)$ 知 为非零的初始状态，设零状态单位阶跃响应为 $h(t) = 1 + c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$.

令 $\begin{cases} h(0) = 1 + c_1 + c_2 = 0 \\ h'(0) = -c_1 - 2c_2 = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 1 \end{cases}$ 故 $h(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}$

$$Y(s) = \mathcal{L}[h(t)] = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

2. (30’) 某伺服系统如图 1 所示，其中 L 为测速发电机的速度反馈系统，$J = 2kg \cdot m^2$ 为转动惯量。

   (1). 要保证该系统单位阶跃响应的超调量不超过 20%，峰值时间为 1 秒，则参数 K 和 L 应取何值？

   (2). 该值下，系统单位阶跃响应的调节时间（2%）为多少？

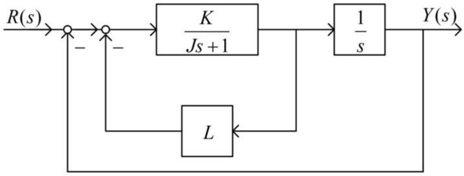

图 1 系统的结构框图

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{2}K}{s^2 + \frac{1}{2}(1+KL)s + \frac{1}{2}K} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{2}} \qquad \zeta = \frac{1+KL}{\sqrt{8K}}$$

(1) 由题得 $\begin{cases} \sigma\% = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \leq 20\% \\ t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 1 \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} \zeta = \sqrt{\frac{(\ln 5)^2}{\pi^2 + (\ln 5)^2}} = 0.456 \\ \omega_n = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 3.530 \end{cases}$

则 $K = 2\omega_n^2 = 24.92$ $\quad L = \frac{\zeta\sqrt{8K} - 1}{K} = 0.218$

(2) $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 2.485s$

3. (20’) 某系统结构如图 2 所示。当 $K = 2$ 时，求 T 的取值，使得系统的单位阶跃响应的超调量 $\sigma\% = 16.3\%$。此时，系统的峰值时间 T_p 为多少？

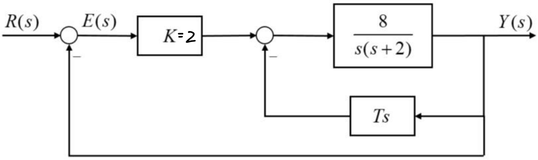

图 2 系统的结构框图

$$G(s) = \frac{16}{s^2 + (2+8T)s + 16} \qquad \omega_n = 4 \qquad \zeta = \frac{1+4T}{4}$$

$\sigma\% = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 16.3\% \Rightarrow \zeta = 0.50$ 故 $T = 0.25$

则 $t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.91s$

4. (40′) 设有二阶系统，其方框图如图 3(a)所示。图中符号“+”“-”分别表示正负反馈，“0”代表无反馈；K_1和K_2为正的常值增益。图 3(b)-3(d)所示为该系统可能出现的单位阶跃响应。试确定与每种单位阶跃响应相对应的主反馈和内反馈的极性（即：应为正反馈、负反馈或无反馈），并说明理由。

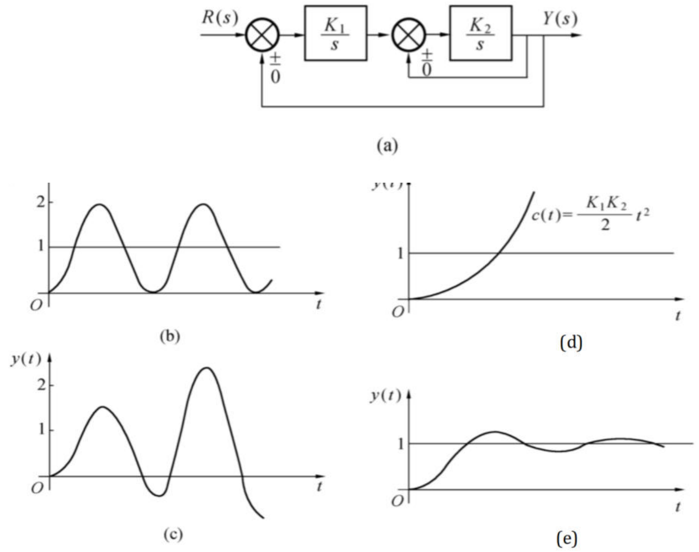

图 3 二阶系统的方框图及其阶跃响应

(b) 主反馈为负反馈，内反馈为零反馈

此时 $G(s)=\dfrac{K_1K_2}{s^2+K_1K_2}$ $\omega_n=\sqrt{K_1K_2}$. $\zeta=0$.

零阻尼等幅振荡 $y(t)=1-\cos\omega_n t$.

(c) 主反馈为负反馈，内反馈为正反馈

此时 $G(s)=\dfrac{K_1K_2}{s^2-K_2s+K_1K_2}$ $\omega_n=\sqrt{K_1K_2}$. $\zeta=-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{K_2}{K_1}}<0$.

负阻尼 $y(t)=1+e^{-\zeta\omega_n t}\dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\dfrac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}t+\arccos\zeta\right)$

(d) 主反馈和内反馈均为零反馈.

此时 $G(s)=\dfrac{K_1K_2}{s^2}$. $C(s)=G(s)R(s)=\dfrac{K_1K_2}{s^3}$. $c(t)=\mathcal{L}^{-1}[C(s)]=\dfrac{1}{2}K_1K_2t^2$

(e) 主反馈和内反馈均为负反馈

此时 $G(s)=\dfrac{K_1K_2}{s^2+K_2s+K_1K_2}$. $\omega_n=\sqrt{K_1K_2}$. $\zeta=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{K_2}{K_1}}$

当$0<\zeta<1$ 即 $K_2<4K_1$时 欠阻尼振荡 $y(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}\dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\dfrac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}t+\arccos\zeta\right)$