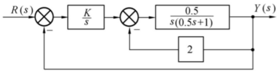
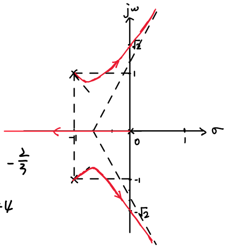
系统与控制—作业 7

2025/04/15

4.1　某反馈系统的方框图如题 4.1 图所示。试绘制 K 从 0 变到 ∞ 时该系统的根轨迹图。



题 4.1 图　反馈系统方框图



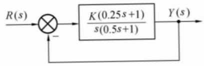
开环传函：$G(s)=\frac{K}{s}\cdot\frac{\frac{0.5}{s(0.5s+1)}}{1+2\frac{0.5}{s(0.5s+1)}}=\frac{K}{s^3+2s^2+2s}=\frac{K}{s(s+1-j)(s+1+j)}$

$n=3$　$p_1=0$, $p_{2,3}=-1\pm j$　$m=0$. 无开环零点.

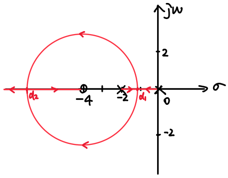
渐近线　$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}=\frac{2k+1}{3}\pi=\pm\frac{\pi}{3},\pi$,　$\sigma_a=\frac{\sum p_i-\sum z_j}{n-m}=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}p_i=-\frac{2}{3}$

$D(s)=s^3+2s^2+2s+K=0$　令 $s=j\omega$ 得　$\omega=0$, $K=0$ 或 $\omega=\pm\sqrt{2}$　$K=4$

4.2　试应用根轨迹法确定题 4.2 图所示系统无超调响应时的开环增益 K。



题 4.2 图　反馈系统方框图



开环传函　$G(s)=\frac{K(0.25s+1)}{s(0.5s+1)}=\frac{K(s+4)}{2s(s+2)}$

$n=2$, $p_1=0$, $p_2=-2$.　$m=1$　$z_1=-4$　　$K^*=\frac{1}{2}K$

渐近线.　$\sigma_a=\frac{\sum p_i-\sum z_j}{n-m}=2$　$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}=(2k+1)\pi$

分离点　$\sum_i\frac{1}{d-p_i}=\sum_j\frac{1}{d-z_j}$　得 $d_{1,2}=-4\pm2\sqrt{2}$

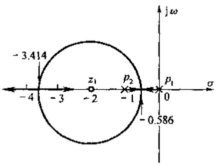
$d_1=-4+2\sqrt{2}$ 时. $K^*_{d_1}=6-4\sqrt{2}$,　$d_2=-4-2\sqrt{2}$ 时. $K^*_{d_2}=6+4\sqrt{2}$

在复平面内. 轨迹为以 $(z_1,0)$ 为圆心 $R=2\sqrt{2}$ 的圆弧

系统无超调则处于过阻尼状态 $\zeta>1$. 根位于负实轴上. 对应 $[0,K^*_{d_1}]$ 和 $[K^*_{d_2},\infty)$ 两部分

故开环增益范围为　　$[0,12-8\sqrt{2}]\cup[12+8\sqrt{2},+\infty)$

5. 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$，其根轨迹图见图。试从数学上证明：复数根轨迹部分是以 $(-2,j0)$ 为圆心，以 $\sqrt{2}$ 为半径的一个圆。



$D(s)=s(s+1)+K^*(s+2)=s^2+(1+K^*)s+2K^*=0$

得解　$p_{1,2}=\frac{-(1+K^*)\pm\sqrt{(1+K^*)^2-8K^*}}{2}=-\frac{1+K^*}{2}\pm j\frac{\sqrt{8K^*-(1+K^*)^2}}{2}\triangleq\sigma+j\omega$,

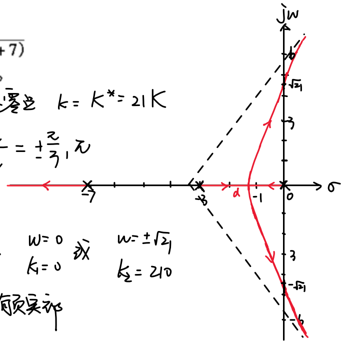
则　$K^*=-2\sigma-1$　和　$4\omega^2=8K^*-(1+K^*)^2=8(-2\sigma-1)-(1-2\sigma-1)^2=-4(\sigma^2+4\sigma+2)$.

即　$\omega^2+(\sigma+2)^2=(\sqrt{2})^2$　因此圆心为 $(-2,j0)$, 半径为 $R=\sqrt{2}$, 得证

10.单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{k}{s(s+3)(s+7)}$$

试确定使系统具有欠阻尼阶跃响应特性的的取值范围。



$n=3,\ p_1=0\ \ p_2=-3\ \ p_3=-7.\ \ m=0$ 无开环零点 $k=K^*=21K$

渐近线 $\sigma_a=\frac{\sum p_i-\sum z_j}{n-m}=-\frac{10}{3}.\ \ \varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}=\pm\frac{\pi}{3},\pi$

分离点 $d=\frac{-10+\sqrt{47}}{3}$ (另一解不在范围内) $k_d=12.18$

$D(s)=s^3+10s^2+21s+K=0$ 令 $s=j\omega$ 得 $\omega=0,\ K_1=0$ 或 $\omega=\pm\sqrt{21},\ k_2=210$

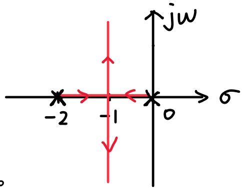
具有欠阻尼特性 即 $0<\zeta<1$. 存在一对共轭复根且具有负实部

即 $12.18<k<210$. 因此 $0.58<K<10$

11. 单位负反馈系统的开环传递函为

$$G(s)=\frac{K}{s(0.5s+1)}$$

用根轨迹法分析开环放大系数 K 对系统性能的影响，计算 K =5 时系统动态指标 σ_p,t_r,t_p,t_s。



开环传函 $G(s)=\frac{K}{s(0.5s+1)}=\frac{2K}{s(s+2)}$ $K^*=2K$

$n=2.\ p_1=0.\ p_2=-2.\ m=0.$ 无开环零点.

渐近线 $\sigma_a=\frac{\sum p_i-\sum z_j}{n-m}=-1.\ \ \varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}=\frac{2k+1}{2}\pi=\pm\frac{\pi}{2}$

分离点 $\frac{1}{d-p_1}+\frac{1}{d-p_2}=0$ 得 $d=-1$ $K^*=1$

与虚轴交点 (0,0)

根轨迹的分布图 $\underbrace{K=0\xrightarrow[\sigma\%=0]{\text{过阻尼}}K=\frac{1}{2}\xrightarrow[\zeta\downarrow\ \sigma\%\uparrow]{\text{欠阻尼}}K=\infty}_{\text{稳定}}$

$K=5$时 $D(s)=s^2+2s+10=0.$ $s_{1,2}=-1\pm j3,$ $\omega_n=\sqrt{10}.$ $\zeta=\frac{1}{\sqrt{10}}$ $\zeta\omega_n=1.\ \omega_d=3$

故 $\sigma_p=e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}\times100\%=35.09\%$ $t_r=\frac{\pi-\arccos\zeta}{\omega_d}=0.63s$

$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=1.05s$ $t_s(2\%)=\frac{4}{\zeta\omega_n}=4s$

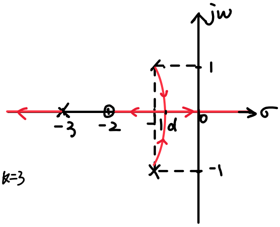
4.5 设某正反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{k(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

试为该系统绘制以 k 为参变量的根轨迹图。

绘制零度根轨迹 $\angle G(s)H(s)=2k\pi$

开环传函 $G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{(s+3)(s+1-j)(s+1+j)}$



$n=3,\ p_1=-3,\ p_{2,3}=-1\pm j$ $m=1.\ z_1=-2.$

渐近线. $\sigma_a=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m}=-\frac{3}{2}$ $\varphi_a=\frac{2k\pi}{n-m}=\pm k\pi$ 即实轴

出射角 $45°-(\theta+\arctan\frac{1}{2}+90°)=2k\pi$ 得 $\theta=-71.6°$

与虚轴交点 $D(s)=(s+3)(s^2+2s+2)-k(s+2)=0$ 令 $s=j\omega$ 得 $\omega=0,k=3$

分离点. $\frac{1}{d+3}+\frac{1}{d+1-j}+\frac{1}{d+1+j}=\frac{1}{d+2}$ 得 $d=-0.80$.