

目录

1	自动控制系统的基本概念	1
1.1	控制系统的分类	1
1.2	控制系统的元件和信号	1
1.3	控制系统的基本要求	1
2	线性连续系统的数学模型	2
2.1	微分方程与传递函数	2
2.1.1	微分方程模型	2
2.1.2	拉普拉斯变换 (Laplace Transform)	2
2.1.3	复数域模型	3
2.1.4	典型环节	3
2.2	系统框图	3
2.2.1	框图的结构变换	3
2.2.2	梅森 (Mason) 公式	4
3	线性连续系统的时域分析	5
3.1	动态性能指标	5
3.2	一阶系统	5
3.2.1	单位阶跃相应	5
3.2.2	一阶系统单位响应的特点	6
3.3	二阶系统	6
3.3.1	二阶系统的单位阶跃响应	6
3.3.2	具有零点的二阶系统的单位阶跃响应	8
3.3.3	二阶系统的单位脉冲响应	8
3.3.4	二阶系统的单位斜坡响应	9
3.4	高阶系统	9
3.4.1	典型三阶系统	9
3.4.2	一般的高阶系统	9
3.5	时域稳定性分析	10
3.5.1	劳斯 (Routh) 判据	10
3.6	稳态误差	11
3.6.1	静态稳态误差	11
3.6.2	动态误差系数	12
3.6.3	稳态误差的改善	12
4	根轨迹分析	12
4.1	绘制根轨迹的基本规则	13
4.2	根轨迹分析系统性能	13
4.3	特殊根轨迹	13
4.3.1	正反馈系统的根轨迹 (零度根轨迹)	13
4.3.2	参数根轨迹	14

5	线性连续系统的频域分析	14
5.1	控制系统的频率特性	14
5.1.1	三种图形表示	14
5.1.2	典型环节的频率特性	14
5.1.3	系统开环频率特性绘制	15
5.2	闭环系统频域稳定性分析	16
5.2.1	奈奎斯特（Nyquist）稳定判据	16
5.2.2	对数频率稳定判据	16

1 自动控制系统的基本概念

1.1 控制系统的分类

按是否满足叠加性和齐次性分为：线性系统 or 非线性系统

按参数是否随时间变化分为：定常（时不变）系统 or 时变系统（非线性系统：自治系统 or 非自治系统）

按信号的连续性分为：连续系统 or 离散系统

按输入输出的数目分为：单输入单输出系统（SISO）or 多输入多输出系统（MIMO）

按是否存在反馈回路分为：开环控制系统 or 闭环控制系统

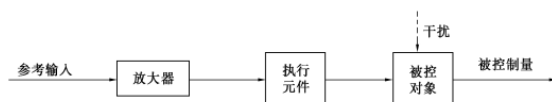


图 1.2.1 开环控制系统

图 1: 开环控制系统结构框图

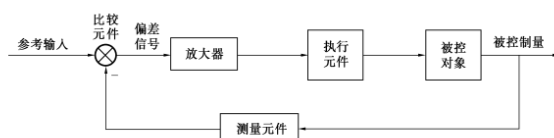


图 1.2.2 闭环控制系统

图 2: 闭环控制系统结构框图

1.2 控制系统的元件和信号

表 1

测量元件	检测被控制的物理量
给定元件	给出与期望的被控量相对应的系统输入量
比较元件	求出测量元件测量的被控量实际值与给定元件给出的输入量的偏差
放大元件	将比较元件给出的偏差信号进行放大，推动执行元件控制被控对象
执行元件	直接推动被控对象使其被控量发生变化
校正元件	用串联或反馈的方式连接在系统中，以改善系统的性能

表 2: 系统的信号

输入信号	$r(t)$
输出信号	$y(t)$
反馈信号	$b(t)$
偏差信号	$\varepsilon(t) = r(t) - f(t)$
误差信号	$e(t) = y_r(t) - y(t)$
干扰信号	$f(t)$

1.3 控制系统的基本要求

(1) 稳定性；(2) 快速性；(3) 平稳性；(4) 准确性。

2 线性连续系统的数学模型

2.1 微分方程与传递函数

2.1.1 微分方程模型

根据实际物理规律列出微分方程，通式为：

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b_m r^{(m)} + b_{m-1} r^{(m-1)} + \cdots + b_1 r' + b_0 r$$

Type of Element	Physical Element	Governing Equation	Energy E or Power \mathcal{P}	Symbol
Inductive storage	Electrical inductance	$v_{21} = L \frac{di}{dt}$	$E = \frac{1}{2} L i^2$	
	Translational spring	$v_{21} = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$	$E = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k}$	
	Rotational spring	$\omega_{21} = \frac{1}{k} \frac{dT}{dt}$	$E = \frac{1}{2} \frac{T^2}{k}$	
	Fluid inertia	$P_{21} = I \frac{dQ}{dt}$	$E = \frac{1}{2} I Q^2$	
Capacitive storage	Electrical capacitance	$i = C \frac{dv_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2} C v_{21}^2$	
	Translational mass	$F = M \frac{dv_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2} M v_2^2$	
	Rotational mass	$T = J \frac{d\omega_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2} J \omega_2^2$	
	Fluid capacitance	$Q = C_f \frac{dP_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2} C_f P_{21}^2$	
	Thermal capacitance	$q = C_t \frac{d\mathcal{T}_2}{dt}$	$E = C_t \mathcal{T}_2^2$	
Energy dissipators	Electrical resistance	$i = \frac{1}{R} v_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R} v_{21}^2$	
	Translational damper	$F = b v_{21}$	$\mathcal{P} = b v_{21}^2$	
	Rotational damper	$T = b \omega_{21}$	$\mathcal{P} = b \omega_{21}^2$	
	Fluid resistance	$Q = \frac{1}{R_f} P_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R_f} P_{21}^2$	
	Thermal resistance	$q = \frac{1}{R_t} \mathcal{T}_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R_t} \mathcal{T}_{21}^2$	

图 3: 三种常见系统的模型

2.1.2 拉普拉斯变换 (Laplace Transform)

正变换: $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$

逆变换: $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$

拉普拉斯变换的性质

- 线性: $a f(t) + b g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} a F(s) + b G(s)$
- 时移性质: $f(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} F(s)$
- 尺度变换: $f(at) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
- 频移性质: $e^{-at} f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s + a)$
- 微分性质: $\frac{d^n}{dt^n} f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-)$
- 积分性质: $\int_0^t f(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(s)}{s}$
- 卷积定理: $f(t) * g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s) G(s)$
- 初值定理: $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$

- 终值定理: $F(s)$ 在虚轴和右半平面不存在极点且在原点处至多有一阶极点, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

2.1.3 复数域模型

在零初始值的条件下, 对微分方程进行拉氏变换得到复数域模型:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)R(s)$$

$$\text{则传递函数 } G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

两种常用形式:

- 尾 1 标准型 (时间常数形式): $G(s) = \frac{b_0}{a_0} \frac{d_m s^m + d_{m-1} s^{m-1} + \cdots + d_1 s + 1}{c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \cdots + c_1 s + 1} = K \frac{\prod_{i=1}^m (T_i s + 1)}{\prod_{j=1}^n (t_j s + 1)}$
- 首 1 标准型 (零极点形式): $G(s) = \frac{b_n}{a_n} \frac{s^n + h_{m-1} s^{m-1} + \cdots + h_1 s + h_0}{s^n + l_{n-1} s^{n-1} + \cdots + l_1 s + l_0} = K_g \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - s_j)}$

传递函数一般为有理真分式, 分母次数大于等于分子次数, 传递函数只取决于系统的结构和参数, 与输入、输出的位置有关, 但与输入信号无关, 与单位脉冲响应互为拉氏变换对。

2.1.4 典型环节

1. 比例环节: $y(t) = Kr(t), G(s) = K$
2. 惯性环节: $Ty'(t) + y(t) = r(t), G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$
3. 积分环节: $Ty'(t) = r(t), G(s) = \frac{1}{Ts}$
4. 振荡环节: $T^2 y''(t) + 2T\zeta y'(t) + y(t) = r(t) (0 < \zeta < 1), G(s) = \frac{1}{Ts^2 + 2\zeta Ts + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
5. 微分环节: $y(t) = Tr'(t), G(s) = Ts$
6. 一阶复合微分环节: $G(s) = \frac{T_1 s}{T_2 s + 1}$
7. 延迟环节: $y(t) = r(t - \tau), G(s) = e^{-\tau s}$

2.2 系统框图

2.2.1 框图的结构变换

$$\text{开环传递函数 } G(s)H(s), \text{ 闭环传递函数 } \Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

方框图: 每个环节用方框表示, 框中表明环节的传递函数, 根据信号传递关系将各方框连接起来。

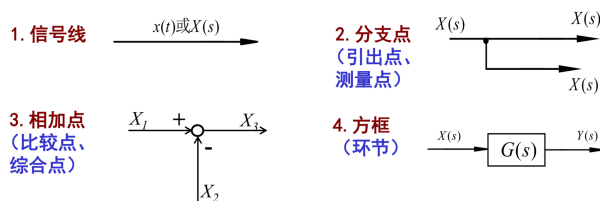


图 4: 方框图的基本单元

节点：用以表示信号或变量的点。节点所表示的变量等于流入该节点的信号之和，从节点流出的每一条分支的信号都等于该节点所表示的变量。

支路：连接两个节点，并在中间用箭头标出信号流向的定向线段。支路的增益称为传输。

通路：沿箭头所指方向从一个节点穿过各相连支路到另一个节点。

前向通路：信号从输入节点向输出节点传递且每个节点只通过一次的通路。

回路：起点和终点是同一节点且信号通过每个节点不多于一次的闭合通路。

变换	原框图	等效框图
1 分支点前移		
2 分支点后移		
3 相加点前移		
4 相加点后移		
5 变单位反馈		
6 相加点		
7 变换		

(a) 方框图的结构变换

方框图	信号流图

(b) 方框图和信号流图的转换

2.2.2 梅森 (Mason) 公式

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum P_k \Delta_k$$

Δ 系统框图的特征式, $\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{bc} L_b L_c - \sum_{def} L_d L_e L_f + \dots$

$\sum_a L_a$ 所有回路增益之和;

$\sum_{bc} L_b L_c$ 每两个互不接触的回路增益乘积之和; $\sum_{def} L_d L_e L_f$ 每三个互不接触回路增益乘积之和;

P_k 第 k 条前向通路的通路增益;

Δ_k 在 Δ 中去除与第 k 条前向通路相接触的 (有公共节点) 回路后的特征式, 称为余因式;

3 线性连续系统的时域分析

表 3: 典型输入信号

信号名称	像原函数	像函数
单位冲激信号	$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$	1
单位阶跃信号	$u(t) = 1(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}$
单位斜坡信号	$r(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s^2}$
单位加速度信号	$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s^3}$

线性定常系统 (LTI) 的特性：系统对输入信号导数的响应等于系统对该输入信号响应的导数；系统对输入信号积分的响应等于系统对该输入信号响应的积分。

3.1 动态性能指标

- 延迟时间 t_d ：系统响应从 0 上升到稳态值的 50% 所需的时间。
- 上升时间 t_r ：对于振荡系统，系统响应从 0 上升到稳态所需的时间；对于无振荡系统，系统响应从稳态值的 10% 上升到 90% 所需的时间。
- 峰值时间 t_p ：系统响应第一次达到最大峰值的时间。
- 调节时间 t_s ：系统响应与稳态值之差达到并维持误差 Δ 所需的最小时间。
- (最大) 超调量 $\sigma\%$ ：系统响应超出稳态值的最大偏移量， $\sigma\% := \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$
- 振荡次数 N ：调节时间 t_s 内，响应偏离稳态值的次数。

3.2 一阶系统

3.2.1 单位阶跃相应

系统闭环传递函数 $G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$
输入 $r(t) = u(t), R(s) = \frac{1}{s}$
输出 $Y(s) = G(s)R(s) = \frac{1}{(Ts + 1)s}, y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$
误差 $e(t) = 1 - y(t) = e^{-\frac{t}{T}}$

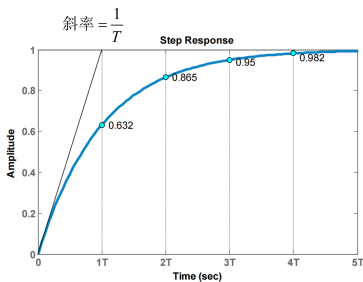


图 6: 单位阶跃响应

单位阶跃响应动态指标

$$t_d = -T \ln 0.5 = 0.69T$$

$$t_r = t_{0.9} - t_{0.1} = -T \ln \frac{0.1}{0.9} = 2.2T$$

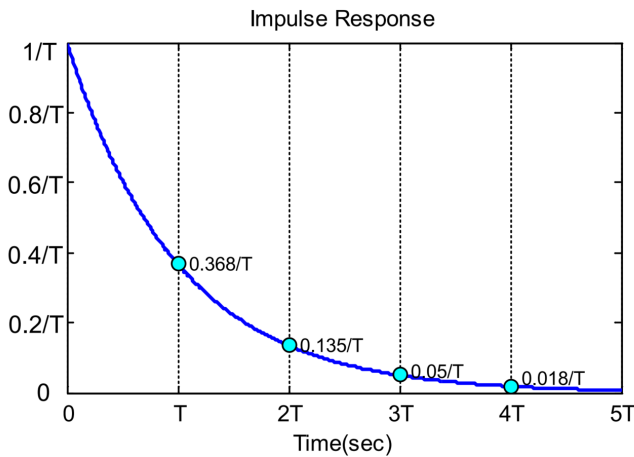
$$t_s = 3T (\Delta = 5\%)$$

3.2.2 一阶系统单位响应的特点

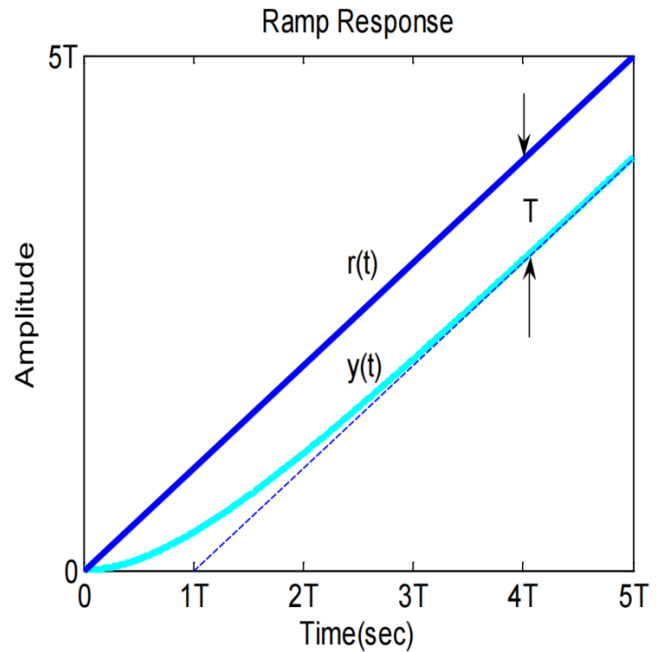
单位阶跃响应: $y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$, 输出 $y(t)$ 是初值为 0、终值为 1 的单调连续上升过程, 稳态误差为 0.

单位脉冲响应: $y(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$, 输出 $y(t)$ 是初值为 $1/T$ 、终值为 0 的单调连续下降过程, 稳态误差为 0.

单位斜坡响应: $y(t) = t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}})$, 输出 $y(t)$ 是初值为 0 的单调连续上升过程, 终值趋于 $r(t) - T$, 稳态误差为 T .



(a) 单位脉冲响应



(b) 单位斜坡响应

3.3 二阶系统

闭环传递函数: $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$, 其中 ω_n 为无阻尼振荡频率, ζ 为阻尼比

特征方程: $D(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$, 极点 $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$

3.3.1 二阶系统的单位阶跃响应

3.3.1.1 过阻尼 ($\zeta > 1$)

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} (T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}})$$

$$\text{其中时间常数 } T_1 = -\frac{1}{s_1} = \frac{1}{\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}, T_2 = -\frac{1}{s_2} = \frac{1}{\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

以负指数上升至稳态值 1, 无振荡, 无稳态误差。

3.3.1.2 临界阻尼 ($\zeta = 1$)

$$s_{1,2} = -\omega_n, y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$

3.3.1.3 欠阻尼 ($0 < \zeta < 1$)

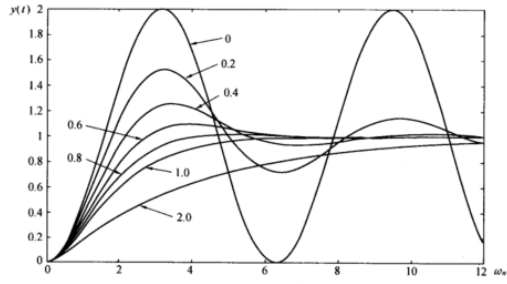


图 8: 二阶系统的单位阶跃响应

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \arccos \zeta)$$

以指数为包络线衰减的正弦振荡, 衰减速度取决于阻尼系数 $\sigma = \zeta\omega_n$, 稳态分量为 1, 无稳态误差。

欠阻尼过程的动态性能:

峰值时间: 令 $\frac{dy(t)}{dt}\bigg|_{t=t_p} = 0$, 得 $t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

超调量: $\sigma\% = (y(t_p) - 1) \times 100\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$

上升时间: $t_r = \frac{\pi - \arccos \zeta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

调节时间: 取 $\frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \approx \Delta$, 得 $t_s = \frac{1}{\zeta\omega_n} (\ln \frac{1}{\Delta\sqrt{1-\zeta^2}})$

忽略 $\frac{1}{2} \ln(1-\zeta^2)$ 项, 近似认为 $t_s(2\%) \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$, $t_s(5\%) \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$

延迟时间: 由隐函数决定, $\omega_n t_d = \frac{1}{\zeta} \ln \frac{2 \sin(\omega_d t_d + \arccos \zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

振荡次数: 阻尼振荡周期 $\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$, 故 $N = \frac{t_s}{\tau_d} = \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta} & \Delta = 2\% \\ \frac{1.5\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta} & \Delta = 5\% \end{cases}$

3.3.1.4 零阻尼 ($\zeta = 0$)

正弦等幅振荡无衰减。

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n, y(t) = 1 - \cos \omega_n t, \text{ 动态指标 } \sigma\% = 100\%, t_s = \infty$$

3.3.1.5 负阻尼 ($\zeta < 0$)

当 $-1 < \zeta < 0$ 时,

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma_n \pm j\omega_d$$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \arccos \zeta)$$

以指数为包络线发散的正弦振荡, 发散速度取决于 $-\zeta\omega_n$ 。

当 $\zeta < -1$ 时,

$$s_{1,2} = \omega_n(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

$$y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{1}{s_1} e^{s_1 t} + \frac{1}{s_2} e^{s_2 t} \right)$$

指数发散, 发散速度取决于两个极点 s_1, s_2 的大小。

3.3.2 具有零点的二阶系统的单位阶跃响应

$$\text{闭环传递函数 } G(s) = \frac{\omega_n^2(\tau s + 1)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$Y_Z(s) = Y(s) + \frac{s}{z}Y(s), y_z(t) = y(t) + \frac{1}{z}\dot{y}(t), \text{ 其中系统零点 } -z = -\frac{1}{\tau}$$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{l}{z} \sin(\omega_d t + \arccos \zeta + \psi)$$

$$\text{其中 } \psi = \arccos \frac{z - \zeta\omega_n}{l}, l = \sqrt{(z - \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} = \sqrt{D(z)}, \frac{l}{z} = \frac{\sqrt{\zeta^2 - 2r\zeta^2 + r^2}}{\zeta},$$

$$r = \frac{\zeta\omega_n}{z} \text{ 为复极点实部与零点之比。}$$

添加左半平面的零点对动态性能的影响：

$$\text{上升时间: } t_{rz} = \frac{\pi - \arccos \zeta - \phi}{\omega_d} = t_r - \frac{\psi}{\omega_d}$$

$$\text{峰值时间: } t_{pz} = \frac{\pi - \psi}{\omega_d} = t_p - \frac{\psi}{\omega_d}$$

$$\text{超调量: } \sigma\% = \frac{l}{z} e^{-\zeta\omega_n t_{pz}} = \frac{l}{z} e^{-\frac{\zeta\psi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times \sigma\%$$

$$\text{调节时间: } \frac{1}{\zeta\omega_n} \left(\ln \frac{1}{\Delta(1-\zeta^2)} - \ln \frac{l}{z} \right) = t_s - \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln \frac{l}{z}$$

总而言之，峰值时间提前；超调量增大，振荡加剧； $r = \frac{\zeta\omega_n}{z}$ 越大影响越大。

3.3.3 二阶系统的单位脉冲响应

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

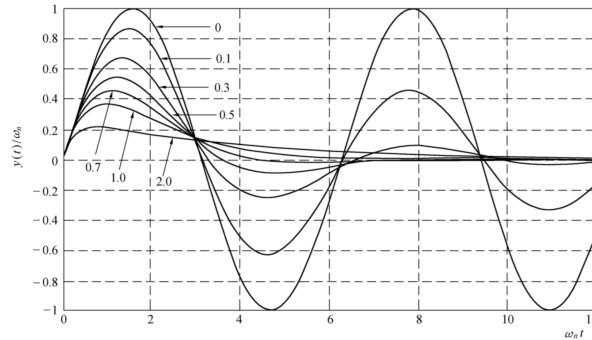


图 9: 二阶系统的单位脉冲响应

- 无阻尼: $y(t) = \omega_n \sin(\omega_n t)$
- 欠阻尼: $y(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t)$
- 临界阻尼: $y(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$
- 过阻尼: $y(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} \left[e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} - e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} \right]$

单位脉冲响应是单位阶跃响应对时间的导数，第一次过零点时间是单位脉冲响应的峰值时间。单位脉冲响应是系统传递函数的拉氏变换，可以反映系统的全部特性。

3.3.4 二阶系统的单位斜坡响应

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} G(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2\zeta}{\omega_n s} + \frac{2\zeta(s + \zeta\omega_n) + \omega_n(2\zeta^2 - 1)}{\omega_n(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

- 欠阻尼: $y(t) = t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \arctan \frac{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}{2\zeta^2 - 1})$
- 临界阻尼: $y(t) = t - \frac{2}{\omega_n} + \frac{2}{\omega_n} e^{-\omega_n t} (1 + \frac{\omega_n t}{2})$
- 过阻尼: $y(t) = t - \frac{2\zeta}{\omega_n} - \frac{2\zeta^2 - 1 - 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + \frac{2\zeta^2 - 1 + 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}$

3.4 高阶系统

3.4.1 典型三阶系统

以惯性环节和二阶环节串联的三阶典型系统分析:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(Ts + 1)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\beta\zeta\omega_n t}}{\zeta^2\beta(\beta - 2) + 1} - \frac{\beta\zeta}{\sqrt{\zeta^2\beta(\beta - 2) + 1}} \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_d t + \gamma)$$

$$\text{其中 } \gamma = \arctan \frac{\zeta(\beta - 2)\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta^2(\beta - 2) + 1}, \beta = \frac{p}{\zeta\omega_n} = \frac{1}{T\zeta\omega_n}$$

$\beta \gg 1$, 共轭复数极点为主导极点, 响应主要呈现二阶特性; $\beta \ll 1$, 实极点为主导极点, 响应主要呈现一阶特性

当 $\beta \geq 5$ 或 $\beta \leq \frac{1}{5}$ 时, 可按照主导共轭复数极点或主导实极点估算暂态特性。

实极点使系统振荡性减弱, 超调量减小, 响应速度变慢, 增加了系统的惯性。

3.4.2 一般的高阶系统

对于一般的高阶系统, 传递函数如下:

$$Y(s) = \frac{k \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^q (s - s_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{A_j}{s - s_j} + \sum_{k=1}^r \frac{B_k(s + \zeta_k \omega_{nk}) + C_k \omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2}$$

$$\text{经过拉式反变换得 } y(t) = 1 + \sum_{j=1}^q \frac{A_j}{s - s_j} + \sum_{k=1}^r D_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \sin(\omega_{nk} t + \theta_k)$$

$$A_j = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{s(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)} (s - s_j) \Big|_{s=s_j}, D_k = 2 \left| k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{s(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)} (s - s_k) \right|_{s=s_k}$$

高阶系统的定性分析

(1) 如果高阶系统的闭环极点全部具有负实部, 即极点全部在复平面的左半平面, 则系统单位阶跃响应的暂态分量最终全部衰减为 0, 系统最终有稳态值

(2) 在暂态分量中, 每一项衰减的快慢取决于相应实数闭环极点的绝对值 $|s_i|$ 或复数闭环极点的实部绝对值 $|\zeta_k \omega_{nk}|$, 系统闭环极点在复平面左半平面离虚轴越远, 相对应的指数项衰减越快

(3) 如果某一闭环极点靠近一零点, 且与其他极点相距较远, 则相应项的系数较小, 在暂态分量中影响较小; 一对非常接近的闭环零极点称作一对偶极子, 偶极子对暂态过程几乎没有影响

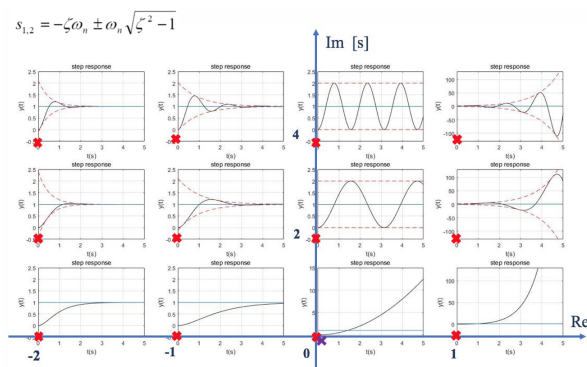


图 10: 系统阶跃响应和极点的关系

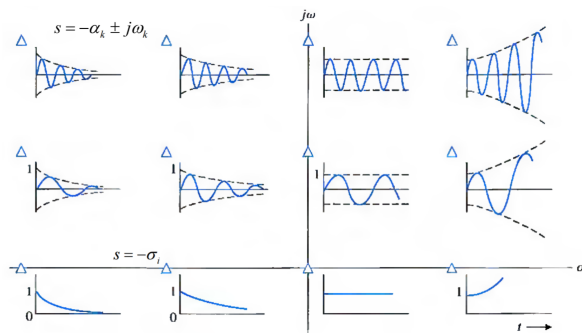


图 11: 系统脉冲响应和极点的关系

3.5 时域稳定性分析

稳定性定义：在扰动作用下系统偏离原来的平衡状态，扰动消除后系统能够恢复到原来的平衡状态。

判定线性定常系统稳定性的数学依据是： $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0$ 。

线性定常系统稳定的充要条件是：闭环系统特征方程的根全部具有负实部，或者说闭环传递函数的极点全部在复平面的左半平面。

3.5.1 劳斯（Routh）判据

(1) 特征方程不缺项；(2) 各项系数全是正实数；(3) 劳斯表第一列各元均大于零。

表 4: 劳斯表

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	\cdots
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	\cdots
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	\cdots	\cdots
\vdots	c_1	c_2	\cdots	\cdots	\cdots
s^2	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	
s^1	\vdots	\vdots	\vdots		\ddots
s^0	\vdots	\vdots	\vdots	\cdots	\cdots

其中, $b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$, $b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$, $b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$
 $c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$, $c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$, 其他项以此类推

劳斯表的特征：(1) 劳斯表的某一行的所有元同乘（除）一个正数不改变 Routh 稳定判据的判定结果；(2) 劳斯表第一列元自上而下符号改变的次数等于具有正实部根的极点的个数。

特殊情况：

- 劳斯表某一行的第一项为 0：

以小量 ε 代替 0，列写劳斯表完成后令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 判断符号。

- 劳斯表的某一行各项全为 0：

利用全零行上一行的系数构造一个辅助方程 $F(s) = 0$ ，对辅助方程求导后的系数作为全零行各元。其中辅助方程的根是系统虚轴上的极点。

3.6 稳态误差

按输入端定义， $E(s) = R(s) - H(s)Y(s)$ ，按输出端定义， $E'(s) = \frac{R(s)}{H(s)} - Y(s)$ 。对单位反馈系统， $E(s) = E'(s)$

稳态误差：稳定系统在输入/干扰作用后，在 $t \rightarrow \infty$ 时响应的期望值与实际值的误差。

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_r(t) - y(t)$$

对于单位负反馈系统， $H(s) = 1$ ， $e(t) = \varepsilon(t)$ ，则 $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ ，以下仅讨论单位负反馈系统稳态误差。

3.6.1 静态稳态误差

$$\text{开环传递函数 } G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^v \prod_{j=1}^q (T_j s + 1) \prod_{k=1}^r (T_k^2 s^2 + 2\zeta_k T_k s + 1)}$$

其中 v 是开环传递函数中串联积分环节的个数。

$$\begin{aligned} \varepsilon(s) &= \Phi_\varepsilon(s)R(s) \text{ 故 } e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi_\varepsilon(s)R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} R(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^v \prod_{j=1}^q (T_j s + 1) \prod_{k=1}^r (T_k^2 s^2 + 2\zeta_k T_k s + 1)}{s^v \prod_{j=1}^q (T_j s + 1) \prod_{k=1}^r (T_k^2 s^2 + 2\zeta_k T_k s + 1) + K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)} R(s) \end{aligned}$$

由此看出，只要 $R(s)$ 分母阶次小于等于 v ，系统稳态误差就等于 0，把偏差闭环传递函数分母 s 因子的阶数 v 称作系统的无差度，称系统是 v 阶无静差。 $v = 0, 1, 2$ 的系统分别称作 0 型、I 型、II 型系统。

$$\text{单位阶跃响应, } e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+G(s)} = \frac{1}{1+K_p},$$

$$\text{其中静态位置误差系数 } K_p := \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \begin{cases} K & v = 0 \\ \infty & v \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{单位斜坡响应, } e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s(1+G(s))} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)} = \frac{1}{K_v},$$

$$\text{其中静态速度误差系数 } K_v := \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \begin{cases} 0 & v = 0 \\ K & v = 1 \\ \infty & v = 2 \end{cases}$$

$$\text{单位加速度响应, } e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2(1+G(s))} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 G(s)} = \frac{1}{K_a},$$

$$\text{其中静态加速度误差系数 } K_a := \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = \begin{cases} 0 & v = 0, 1 \\ K & v = 2 \end{cases}$$

表 5: 静态误差和型别的关系

型别	K_p	K_v	K_a	$r = A \cdot 1(t)$	$r = At$	$r = \frac{1}{2}At^2$
0	K	0	0	$\frac{A}{1+K}$	∞	∞
I	∞	K	0	0	$\frac{A}{K}$	∞
II	∞	∞	K	0	0	$\frac{A}{K}$

若输入信号是几种典型函数的组合，由叠加原理将每一个输入分量作用的分量稳态误差分量叠加即可。

干扰信号作用下的稳态误差为输入信号和干扰信号分别产生的稳态误差分量之和 $e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssf}$ ，其中 $e_{ssf} = \lim_{t \rightarrow \infty} s\Phi_{ef}(s)F(s)$ 。

3.6.2 动态误差系数

将 $\Phi_e(s)$ 展开成 Taylor 级数得 $\Phi_e(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \Phi_e^{(i)}(0) s^i$ 。

定义 $c_i = \frac{1}{i!} \Phi_e^{(i)}(0)$ ，称为系统的动态误差系数。

直接求导不便求解，一般将有理分式写成升幂级数形式，利用多项式除法即可得到动态误差系数。

3.6.3 稳态误差的改善

1. 增大开环增益或增大扰动点前的前向通道增益；
2. 在扰动点前的前向通道加入串联积分；
3. 使用前馈补偿增加零点；
4. 串级控制，用内环抑制扰动信号。

4 根轨迹分析

当系统的某一或某些参量变化时，特征方程的根（闭环极点）在 s 平面上运动的轨迹称为根轨迹。通过根轨迹图可以看出系统参量变化对系统闭环极点分布的影响，以及它们与系统性能的关系。

以系统开环增益为可变参量的根轨迹称为常规根轨迹。

由 $G(s)H(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_{z_j} s + 1)}{\prod_{i=1}^n (\tau_{p_i} s + 1)} = \frac{K_1 \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$ 其中 $K = \frac{\prod_{j=1}^m |z_j|}{\prod_{i=1}^n |p_i|} K_1$ ，得

- 幅值条件： $|G(s)H(s)| = \frac{K_1 \prod_{j=1}^m |s - z_j|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = 1$
- 相角条件： $\angle G(s)H(s) = \sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = \pm(2k+1)\pi$

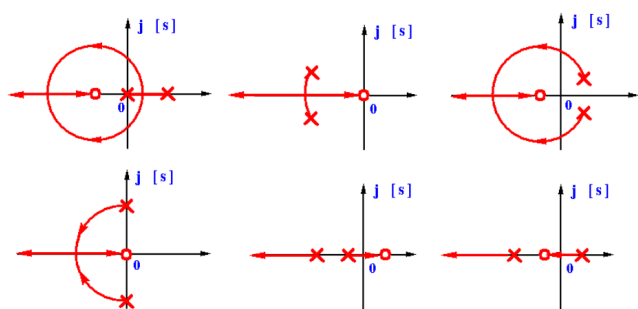
相角条件是位于根轨迹上的充要条件，幅值条件确定开环增益 K_1 。

闭环零点由前向通道 $G(s)$ 的零点与反馈通道 $H(s)$ 的零点构成，闭环极点与开环零极点和开环增益有关。

4.1 绘制根轨迹的基本规则

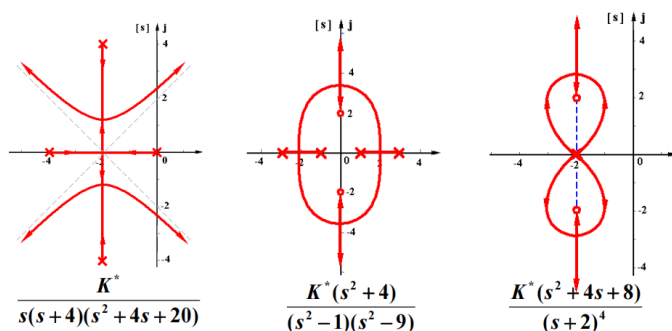
1. 对称性、连续性和分支数：系统根轨迹分支数等于开环极点数，各条分支是连续的且对称于实轴。
2. 起终点：根轨迹的 n 条分支从开环极点出发，有 m 条分支趋向开环零点，有 $n-m$ 条分支趋向无穷远处。
3. 实轴根轨迹：对于实轴上的线段，若右侧的开环零极点数目之和为奇数，则该线段存在根轨迹。
4. 根轨迹渐近线：相位角为 $\varphi_a = \pm \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$ ，和实轴交点的坐标 $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$ 。
5. 分离点：满足方程 $\frac{dD(s)}{ds} = 0$ 或 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d-z_j}$ ，分离角为 $\frac{(2q+1)\pi}{r}, q=0, 1, \dots, r-1$ 。
6. 入、出射角：令 $\varphi = \sum_{j=1}^m \angle(s-z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s-p_i)$ ，极点出射角 $\varphi_{p_i} = \mp\pi + \varphi$ ，零点入射角 $\varphi_{z_j} = \pm\pi - \varphi$ 。
7. 虚轴的交点：令 $s = j\omega$ ，即 $D(j\omega) = 0$ 求出的解即为交点坐标，此时系统处于临界稳定状态。
8. 根之和：若 $n-m \geq 2$ ， $\sum_{i=1}^n p_i = -a_{n-1}$ 。

定理：若系统有2个开环极点，1个开环零点，且在复平面存在根轨迹，则复平面的根轨迹一定是以该零点为圆心的圆弧。



(a) 圆弧根轨迹定理

若开环零极点均为偶数个，且关于一条平行于虚轴的直线左右对称分布，则根轨迹一定关于该直线左右对称。



(b) 根轨迹对称性定理

4.2 根轨迹分析系统性能

根据根轨迹确定系统稳定性对应的参数范围，根据系统型和极点确定系统的稳态误差。根据幅值条件确定系统的参数，计算系统的动态性能。

4.3 特殊根轨迹

4.3.1 正反馈系统的根轨迹（零度根轨迹）

- 幅值条件： $|G(s)H(s)| = 1$
- 相角条件： $\angle G(s)H(s) = \pm 2k\pi$

因此，修改常规根轨迹法则中关于相角条件的部分：

- 规则 3：对于实轴上的线段，若右侧的开环零极点数目之和为偶数，则该线段存在根轨迹。

- 规则 4: 相位角为 $\varphi_a = \pm \frac{2k\pi}{n-m}$
- 规则 7: $\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = 2k\pi$

4.3.2 参数根轨迹

对于参变量 λ , 将特征方程写为 $D(s) = Q(s) + \lambda P(s) = 0$, 等效传递函数 $\bar{G}(s)\bar{H}(s) = \frac{\lambda P(s)}{Q(s)}$, 则闭环极点与原系统相同, 而闭环零点通常不同。

5 线性连续系统的频域分析

在正弦输入信号作用下, 输出的稳态分量称为频率响应, 频率响应与正弦输入信号的关系称为频率特性。

将传递函数中的 s 以 $j\omega$ 代替得到频率特性 $G(j\omega) = |G(j\omega)|\angle G(j\omega)$, 其中 $|G(j\omega)|$ 是输出与输入信号幅值之比, 称为幅值特性; $\angle G(j\omega)$ 是输出与输入信号相角之差, 称为相频特性。

对数幅频特性 $L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)|$, 对数相频特性 $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$ 。

系统传递函数的极点和零点都在 s 平面左半平面的系统称为最小相位系统。对于幅频特性相同的系统, 最小相位系统具有的相位滞后是最小的。最小相位系统的幅频特性对应唯一的相频特性。

5.1 控制系统的频率特性

5.1.1 三种图形表示

奈奎斯特 (Nyquist) 图: 以 $|G(j\omega)|$ 为极径, 以 $\angle G(j\omega)$ 为极角绘制的极坐标频率特性图。

伯德 (Bode) 图: 以为对数幅频、相频特性为纵轴、以十倍频程为横轴绘制的对数坐标图。

尼柯尔斯 (Nichols) 图: 以对数幅频为纵轴、以相频为横轴并绘制等幅 M 线和等相 α 线的半对数坐标图。

5.1.2 典型环节的频率特性

$$\text{比例环节: } G(s) = K \begin{cases} L(\omega) = 20 \lg K \\ \varphi(\omega) = 0 \end{cases}$$

$$\text{惯性环节: } G(s) = \frac{1}{1 + Ts} \begin{cases} L(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2} \\ \varphi(\omega) = -\arctan T\omega \end{cases}$$

$$\text{积分环节: } G(s) = \frac{1}{s} \begin{cases} L(\omega) = -20 \lg \omega \\ \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

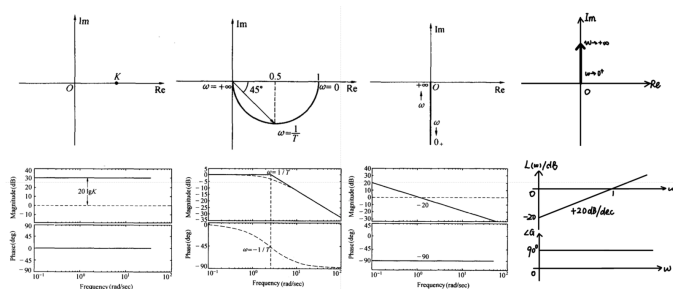
$$\text{微分环节: } G(s) = s \begin{cases} L(\omega) = 20 \lg \omega \\ \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{一阶比例微分环节: } G(s) = 1 + Ts \begin{cases} L(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2} \\ \varphi(\omega) = \arctan T\omega \end{cases}$$

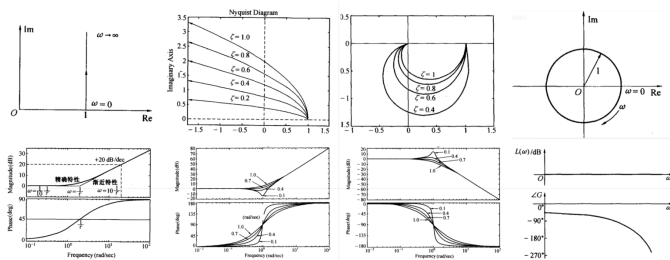
$$\text{二阶微分环节: } G(s) = T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1 \begin{cases} L(\omega) = 20 \lg \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2} \\ \varphi(\omega) = \begin{cases} \arctan(\frac{2\zeta T\omega}{1 - T^2\omega^2}) & \omega \leq \frac{1}{T} \\ \pi - \arctan(\frac{2\zeta T\omega}{1 - T^2\omega^2}) & \omega > \frac{1}{T} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{振荡环节: } G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} \begin{cases} L(\omega) = -20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\zeta T \omega)^2} \\ \varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan(\frac{2\zeta T \omega}{1 - T^2 \omega^2}) & \omega \leq \frac{1}{T} \\ -\pi + \arctan(\frac{2\zeta T \omega}{1 - T^2 \omega^2}) & \omega > \frac{1}{T} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{延迟环节: } G(s) = e^{-\tau s} \begin{cases} L(\omega) = 0 \\ \varphi(\omega) = -57.3^\circ \tau \omega \end{cases}$$



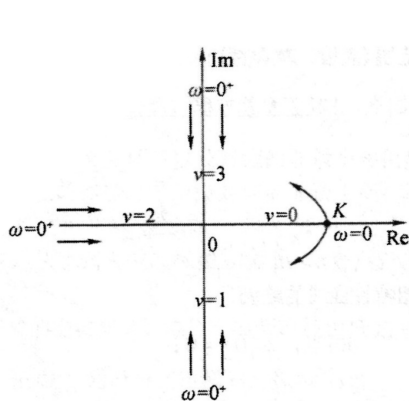
(a) 比例、惯性、积分、微分



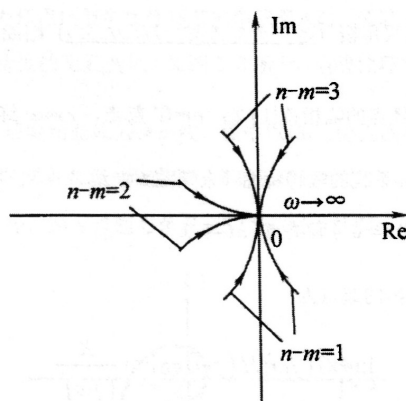
(b) 一阶微分、二阶微分、振荡、延迟

5.1.3 系统开环频率特性绘制

最小相位系统 Nyquist 图的绘制：起点 $\angle G(j\omega) \rightarrow -90^\circ \cdot \nu$ ，若 $n > m$ 终点在坐标原点，令 $\text{Im}[G(j\omega)] = 0$ 求出与实轴交点，关注象限。



(a) Nyquist 曲线起点



(b) Nyquist 曲线终点

系统 Bode 图的绘制： $L(\omega) = \sum_{i=1}^n L_i(\omega)$, $\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega)$ ，由各环节的 Bode 图相加得到。

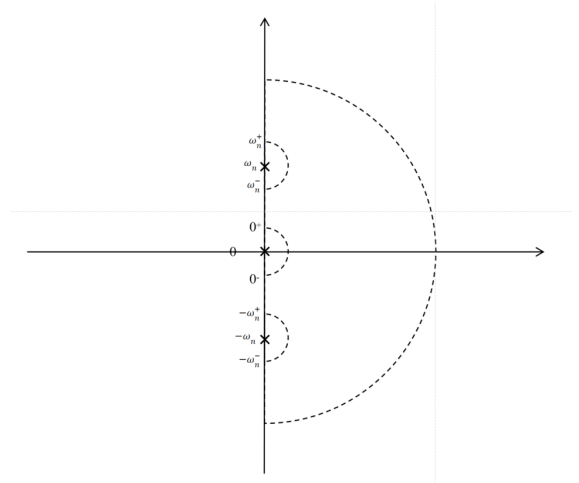
1. 基准线：低频段的斜率为 $-20\nu \text{ dB/dec}$ ， ν 为串联积分环节数，低频段或其延长线 $\omega = 1$ 处为 $20 \lg K$ 。
2. 转折频率：一阶环节在 $\frac{1}{T}$ 处斜率变化 $\pm 20 \text{ dB/dec}$ ；二阶环节在 ω_n 处斜率变化 $\pm 40 \text{ dB/dec}$ 。
3. 二阶环节修正：转折频率处为 $20 \lg(2\zeta) \text{ dB}$ ；谐振频率 $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ 处为 $20 \lg \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$ 。

5.2 闭环系统频域稳定性分析

5.2.1 奈奎斯特 (Nyquist) 稳定判据

奈奎斯特回线：沿虚轴由下向上移动的直线段 C_1 和半径为无穷大的半圆 C_2 组成，包围右半平面所有的零极点。当 s 平面虚轴上存在开环极点时，奈奎斯特回线要从右边绕过无穷小半径的圆弧。

沿虚轴 $s = 0$ 到 ∞ 对应的映射为开环 Nyquist 曲线，无穷大的半圆对应的映射为原点，沿虚轴 $s = -\infty$ 到 0 对应的映射与 Nyquist 曲线关于实轴对称，无穷小半径圆弧对应映射为无穷大半径的圆弧。



$Z = P - R = P - 2N$ ，若 $Z = 0$ ，闭环系统稳定，若 $Z > 0$ ，闭环系统不稳定。其中 P 为右半平面开环极点个数， R 为映射曲线包围 $(-1, j0)$ 点的圈数， N 为开环 Nyquist 曲线包围 $(-1, j0)$ 点的圈数， Z 为右半平面闭环极点个数。

$N = N_+ - N_-$ ，其中 N_+ 为 Nyquist 曲线由上而下穿越次数， N_- 为 Nyquist 曲线由下而上穿越次数。若起始或终止于 $(-1, j0)$ 点左侧的负实轴，则穿越次数为半次。

5.2.2 对数频率稳定判据

单位圆外对应 0dB 以上的部分，单位圆内对应 0dB 以下的部分。负实轴对应相频特性的 -180° 线。当 s 平面虚轴上存在开环极点时，在对数相频曲线最低频率处，由下向上补画一条通过相角 $\nu \cdot 90^\circ$ 的曲线。

$\varphi(\omega_c) \neq (2k+1)\pi$ 和 $L(\omega) > 0$ 时，若 $Z = P - 2N = 0$ ，系统稳定。

$N = N_+ - N_-$ ，其中在 $L(\omega) > 0$ dB 范围内， N_+ 为相频特性由下向上穿越 -180° 次数， N_- 为相频特性由上向下穿越 -180° 次数。若起始或终止于 -180° 线，则穿越次数为半次。