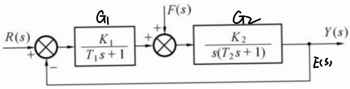
系统与控制—作业 6

2025/04/8

3.39 某控制系统方框图如题 3.39 图所示。已知 $r(t)=t, f(t)=-1(t)$，试计算该系统的稳态误差。



对 r(t)，开环传函 $G_1(s)G_2(s)=\frac{K_1K_2}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$ 为I型系统

特征方程 $D(s)=T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+s+K_1K_2=0$

Routh表如下.

s^3 T_1T_2 1

s^2 T_1+T_2 K_1K_2

s^1 $\frac{T_1+T_2-T_1T_2K_1K_2}{T_1+T_2}$

s^0 K_1K_2

系统稳定条件：$T_1>0$ $T_2>0$ $K_1K_2>0$ $T_1+T_2-T_1T_2K_1K_2>0$

$K_v=\lim_{s\to0} sG_1(s)G_2(s)=\lim_{s\to0}\frac{K_1K_2}{(T_1s+1)(T_2s+1)}=K_1K_2$.

$e_{ssr}=\frac{A}{K_v}=\frac{1}{K_1K_2}$

对 f(t) 由 $E(s)=-Y(s)=-G_2(s)[F(s)+G_1(s)E(s)]$ 得 $\frac{E(s)}{F(s)}=\frac{-G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}=\frac{-K_2(T_1s+1)}{T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+s+K_1K_2}$

Routh表如下,

s^3 T_1T_2 1

s^2 T_1+T_2 K_1K_2

s^1 $\frac{T_1+T_2-T_1T_2K_1K_2}{T_1+T_2}$

s^0 K_1K_2

Routh表同上 故稳定条件相同

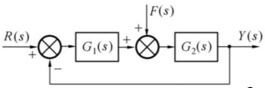
$e_{ssf}=\lim_{s\to0} s\Phi_f(s)F(s)=\lim_{s\to0}-\frac{E(s)}{F(s)}=\frac{1}{K_1}$

因此，由叠加原理得 $e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssf}=\frac{1}{K_1K_2}+\frac{1}{K_1}$

3.40 某控制系统的方框图如题 3.40 图所示。当扰动信号分别为 $f(t)=1(t), f(t)=t$ 时，试计算下列两种情况下系统响应扰动信号 $f(t)$ 的稳态误差：

(1) $G_1(s)=K_1 \quad G_2(s)=\frac{K_2}{s(T_2s+1)}$

(2) $G_1(s)=\frac{K_1(T_1s+1)}{s} \quad G_2(s)=\frac{K_2}{s(T_2s+1)} \quad (T_1>T_2)$



开环传函 $G(s)=G_1(s)G_2(s)$. $\Phi_f(s)=\frac{E(s)}{F(s)}=\frac{-G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$

(1) $G(s)=\frac{K_1K_2}{s(T_2s+1)}$ $\Phi_f(s)=\frac{-K_2}{T_2s^2+s+K_1K_2}$ 稳定条件是 $T_2>0$ 且 $K_1K_2>0$

f(t)=1(t)时. $e_{ss}=\lim_{s\to0} s\Phi_f(s)F(s)=\lim_{s\to0}\frac{-K_2}{T_2s^2+s+K_1K_2}=-\frac{1}{K_1}$

f(t)=t 时 $e_{ss}=\lim_{s\to0} s\Phi_f(s)F(s)=\lim_{s\to0}\frac{K_2}{T_2s^3+s^2+K_1K_2s}=-\infty$

(2) $G(s)=\frac{K_1K_2(T_1s+1)}{s^2(T_2s+1)}$ $\Phi_f(s)=\frac{-K_2s}{T_2s^3+s^2+K_1K_2T_1s+K_1K_2}$ 稳定条件是 $T_1>T_2>0$ 且 $K_1K_2>0$

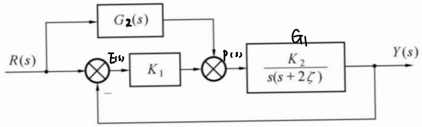
f(t)=1(t)时. $e_{ss}=\lim_{s\to0} s\Phi_f(s)F(s)=\lim_{s\to0}\frac{-K_2s}{T_2s^3+s^2+K_1K_2T_1s+K_1K_2}=0$

f(t)=t 时 $e_{ss}=\lim_{s\to0} s\Phi_f(s)F(s)=\lim_{s\to0}\frac{-K_2}{T_2s^3+s^2+K_1K_2T_1s+K_1K_2}=-\frac{1}{K_1}$

3.41 设有控制系统，其方框图如题 3.41 图所示。为提高系统跟踪控制信号的准确度，要求系统由原来的 Ⅰ 型提高到 Ⅲ 型，为此在系统中增置了顺馈通道，设其传递函数为

$$G_2(s) = \frac{\lambda_2 s^2 + \lambda_1 s}{Ts + 1}$$

若已知系统参数为 $K_1 = 2, K_2 = 50, \zeta = 0.5, T = 0.2$，试确定顺馈参数 λ_1 及 λ_2。



由 $E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - G_1(s)[K_1E(s) + G_2(s)R(s)]$ 得 $E(s) = \frac{1-G_1(s)G_2(s)}{1+K_1G_1(s)}R(s)$

闭环传函 $\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{R(s)-E(s)}{R(s)} = \frac{K_1G_1(s)+G_1(s)G_2(s)}{1+K_1G_1(s)} = \frac{K_2\lambda_2 s^2 + (K_2\lambda_1 + K_1K_2T)s + K_1K_2}{Ts^3 + (1+2T\zeta)s^2 + (2\zeta + K_1K_2T)s + K_1K_2}$

$D(s) = Ts^3 + (1+2T\zeta)s^2 + (2\zeta + K_1K_2T)s + K_1K_2 = 0.2s^3 + 1.2s^2 + 21s + 100 = 0$

特征根 $p_1 = -5$. $p_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j9.99$ 均具有负实部，系统稳定。

由于是单位负反馈，$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$ 得 $G(s) = \frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)} = \frac{K_2\lambda_2 s^2 + (K_2\lambda_1 + K_1K_2T)s + K_1K_2}{Ts^3 + (1+2T\zeta - K_2\lambda_2)s^2 + (2\zeta - K_2\lambda_1)s}$

要使系统为Ⅲ型系统，则 $\begin{cases} 1+2T\zeta - K_2\lambda_2 = 1.2 - 50\lambda_2 = 0 \\ 2\zeta - K_2\lambda_1 = 1 - 50\lambda_1 = 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \lambda_1 = 0.02 \\ \lambda_2 = 0.024 \end{cases}$

7.已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10(2s+1)}{s^2(s^2+6s+100)}$$

试求输入分别为 $r(t) = 2t$ 和 $r(t) = 2 + 2t + t^2$ 时，系统的稳态误差。

由于是单位反馈系统，闭环传函 $\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{10(2s+1)}{s^4+6s^3+100s^2+20s+10}$

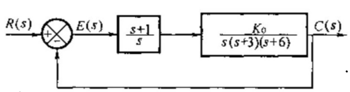
特征根 $p_{1,2} = -0.098 \pm j0.383$ $p_{3,4} = -2.902 \pm j9.605$ 均具有负实部，系统稳定

系统为Ⅱ型系统 $K_p = K_v = \infty$ $K_a = K = \frac{10}{100} = 0.1$

$r(t) = 2t$ 时，$e_{ss} = \frac{2}{K_v} = 0$.

$r(t) = 2+2t+t^2$ 时，由叠加原理得 $e_{ss} = e_{ss1} + e_{ss2} + e_{ss3} = \frac{2}{1+K_p} + \frac{2}{K_v} + \frac{2}{K_a} = 20$

9.已知系统结构图如题 9 图所示，要求系统在 $r(t) = t^2$ 作用时，稳态误差 $e_{ss} < 0.5$，试确定满足要求的开环增益 K 的范围。



开环传函 $G(s) = \frac{K_0(s+1)}{s^2(s+3)(s+6)}$ 系统为Ⅱ型系统 $K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s) = \frac{K_0}{18}$，开环增益 $K = \frac{K_0}{18}$

闭环传函 $\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K_0(s+1)}{s^4+9s^3+18s^2+K_0s+K_0}$

劳斯表如下

s^4	1	18	K_0
s^3	9	K_0	
s^2	$18-\frac{K_0}{9}$	K_0	
s^1	$\frac{81K_0-K_0^2}{162-K_0}$		
s^0	K_0		

由Routh判据得 $\begin{cases} 18-\frac{K_0}{9} > 0 \\ \frac{81K_0-K_0^2}{162-K_0} > 0 \\ K_0 > 0 \end{cases}$ 解得 $0 < K_0 < 81$

稳态误差：$r(t) = 2 \cdot \frac{1}{2}t^2$. $e_{ss} = \frac{4}{K_a} = \frac{36}{K_0} < 0.5$. 得 $K_0 > 72$

综上，$72 < K_0 < 81$ 则 $4 < K < 4.5$