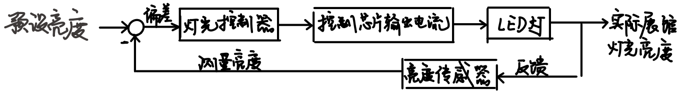
1. (10’) 请参考教材图 1.3 所示的控制框图，描述一个生活或工程中存在的闭环控制系统的例子。

展馆灯光控制系统是一个闭环自动控制的例子



2. (20’) 利用 Laplace 变换的定义求$f(t) = \sin at$，$t \geq 0$的 Laplace 变换，其中 a 为实数。

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} \sin at \, e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i} e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\int_0^{\infty} e^{-(s-ia)t} dt - \int_0^{+\infty} e^{-(s+ia)t} dt \right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia} \right) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

3. (10’) 求函数 $F(s) = \dfrac{2s+2}{s^2+2s+5}$ 的 Laplace 逆变换。

$$F(s) = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+4}$$

由于 $\mathcal{L}[\cos wt] = \dfrac{s}{s^2+w^2}$ 和 频移性质 $\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$ 得.

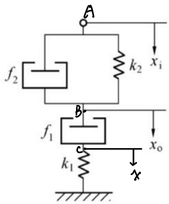
$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right] = 2e^{-t}\cos 2t$$

4. (20’) 求函数$f(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin\tau \, d\tau$，$t > 0$的 Laplace 变换。

$$f(t) = e^{-t} * \sin t.$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[e^{-t} * \sin t] = \mathcal{L}[e^{-t}] \cdot \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$$

5. (20) 求下列机械系统的传递函数$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)}$，其中位移$x_i$为输入量，位移$x_o$为输出量，$f$为阻尼器的阻尼系数，$k$为弹簧的弹性系数（假设弹簧工作在线性区间）。



对B. $f_2(\dot{x}_i - \dot{x}_o) + k_2(x_i - x_o) = f_1(\dot{x}_o - \dot{x})$

对C. $f_1(\dot{x}_o - \dot{x}) = k_1 x$

拉氏变换得 $sf_2 X_i(s) - sf_2 X_o(s) + k_2 X_i(s) - k_2 X_o(s) = sf_1 X_o(s) - sf_1 X(s)$

$sf_1 X_o(s) - sf_1 X(s) = k_1 X(s)$

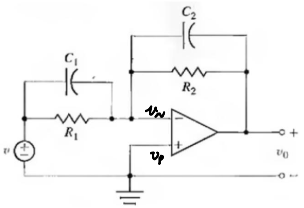
由下式得 $X(s) = \dfrac{sf_1}{sf_1+k_1} X_o(s)$

代入上式得 $(sf_2+k_2)X_i(s) = \left(sf_2+k_2+sf_1-\dfrac{s^2f_1^2}{sf_1+k_1}\right)X_o(s)$

故传递函数 $G(s) = \dfrac{X_o(s)}{X_i(s)} = \dfrac{sf_2+k_2}{sf_2+k_2+sf_1-\dfrac{s^2f_1^2}{sf_1+k_1}} = \dfrac{f_1f_2s^2+(f_1k_2+f_2k_1)s+k_1k_2}{f_1f_2s^2+(f_1k_2+f_1k_1+f_2k_1)s+k_1k_2}$

$$= \frac{\frac{f_1f_2}{k_1k_2}s^2+\left(\frac{f_1}{k_1}+\frac{f_2}{k_2}\right)s+1}{\frac{f_1f_2}{k_1k_2}s^2+\left(\frac{f_1}{k_1}+\frac{f_2}{k_2}+\frac{f_1}{k_2}\right)s+1}$$

6. (20’) 下图是一个典型的运算放大器电路。假设电路是理想放大器，且各参数为R_1=R_2=100 kΩ，C_1=10 μF, C_2=5 μF，请计算电路的传递函数$G(s)=\frac{V_O(s)}{V(s)}$.



由电路知识得 R与C并联的阻抗 $Z(s) = R \,/\!/\, \frac{1}{sC} = \frac{R}{1+sRC}$

由虚短得: $V_N = V_P = 0$ 由虚断得 $\frac{V_i(s)}{R_1 \,/\!/\, \frac{1}{sC_1}} = \frac{-V_o(s)}{R_2 \,/\!/\, \frac{1}{sC_2}}$

得 $G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{-R_2 \,/\!/\, \frac{1}{sC_2}}{R_1 \,/\!/\, \frac{1}{sC_1}} = -\frac{R_2(1+sR_1C_1)}{R_1(1+sR_2C_2)} = -\frac{2+2s}{2+s}$