2024秋季学期线性代数期末考试（回忆版）

回忆整理：24学术讨论群 [syhanjin 老汉 离谱 潜伏 浮萍 東牆 天赐 卡基米 黄鹂 Yasumi Speculator Schwarz Fun10165 Jaaack]

一、填空题

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$ ________.

2. 点 $(2,0,1)^T$ 到平面 $5x+3y-4z+4=0$ 的距离为________.

3. 三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $1,-1,\dfrac{1}{5}$，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似，$|\boldsymbol{B}^{-1}-2\boldsymbol{E}|=$ ________.

4. 过曲线 $\begin{cases} x^2+2y^2+3z^2=6 \\ x^2-y^2+z^2=0 \end{cases}$ 且母线平行于 y 轴的柱面方程为 ________.

5. $\boldsymbol{A}$ 是一个二阶方阵，其中 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^5\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=$ ________.

二、单选题

1. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解，$R(\boldsymbol{A})=2$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=(4,5,5)^T$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 (　　).

   $(A).\ \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix},k\in\mathbb{R}$　　$(B).\ \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},k\in\mathbb{R}$

   $(C).\ \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix},k\in\mathbb{R}$　　$(D).$ 不重要

2. $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，下列说法错误的是 (　　).

   $(A).\ \boldsymbol{A}$ 可逆　$(B).\ k\boldsymbol{A}$ 也为正定矩阵（$k\in\mathbb{R}$）　$(C).\ \boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵　$(D).\ \boldsymbol{A}^k$ 为正定矩阵

3. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-2&0\\3&0&3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$ 则 (　　).

   $(A).\ \boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似且合同　　$(B).\ \boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似不合同

   $(C).\ \boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同不相似　　$(D).\ \boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 既不相似也不合同

4. 直线 $L_1:\dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{z-c_2}{c_1}$，与直线 $L_2:\begin{cases}x=a_3+a_2t\\y=b_3+b_2t\\z=c_3+c_2t\end{cases}$ 相交，$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_i,b_i,c_i)^T$，则线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3$ 的解的情况为 (　　).

   $(A).$ 有唯一解　　$(B).$ 有无数解　　$(C).$ 无解　　$(D).$ 不确定

5. （数据是编的）甲、乙二人约定用矩阵乘法对通讯信息进行加密。用可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘一个明文矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可得密文矩阵 $\boldsymbol{C}$。接收方只要用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 左乘密文矩阵就可以得到明文矩阵。现有一条信息，其明文矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和密文矩阵 $\boldsymbol{C}$ 分别为：$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}6&19&7&4\\17&50&19&11\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$，则明文矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为 (　　).

$(A).\begin{pmatrix}1 & -7 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 3 & 2\end{pmatrix}$ $(B).\begin{pmatrix}1 & 7 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 3 & 2\end{pmatrix}$ $(C).\begin{pmatrix}1 & 7 & 2 & 1\\ 4 & -5 & 3 & 2\end{pmatrix}$ $(D).\begin{pmatrix}1 & 7 & 2 & 1\\ 4 & 5 & -3 & 2\end{pmatrix}$

三、多选题

1. $\boldsymbol{AX}_i=\lambda_i\boldsymbol{X}_i, i=1,2,3$，下列说法错误的是

(A). $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 线性无关

(B). 若 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 都不相等，则 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化

(C). 若 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$，则 $\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化

(D). 若 $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$，则 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2, k_3\boldsymbol{X}_3$，$k_1,k_2$ 不全为零，$k_3\neq 0$

2. 下列说法错误的是

(A). $r\leq s$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 不能线性表示向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$

(B). $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$，$k_1,k_2,\cdots,k_r$ 不全为零

(C). 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 等价，则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

(D). 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 两两正交，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 的一组基

四、 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ 为线性空间 V 的一组基

(1). $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 为 V 的标准正交基，$\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1}{|\boldsymbol{\alpha}_1|}$，求 $\boldsymbol{\gamma}_2$

(2). 求基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 到 (1) 中所求标准正交基的过渡矩阵

五、已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ -1 & -3 & 0\\ 2 & 6 & -2\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$.

六、讨论线性方程组$\begin{cases}x_1 & +2x_2 & +x_3 & =1\\ & +x_2 & +ax_3 & =2\\ x_1 & +ax_2 & & =b\end{cases}$ 何时无解，何时有唯一解，何时有无数解，有无数解时写出其通解

七、二次型 $f=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{AX}$，$\boldsymbol{A}$ 每行数之和为 2，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个解为 $(1,0,-1)^T$，$tr(\boldsymbol{A})=8$

(1). 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值

(2). 求正交线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 化 f 为标准型

(3). 求 $\boldsymbol{A}$

八、以下结论是否正确，正确的给出证明，错误的说明理由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1 & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_m) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_1 & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_1 & (\boldsymbol{\alpha}_m\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_m\boldsymbol{\alpha}_m) \end{pmatrix} \tag{1}$$

(1). $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则 $|\boldsymbol{A}|=0$.

(2). $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则 $|\boldsymbol{A}|>0$.