

课后题一：

1. 写出下列随机试验的样本空间及下列事件中的样本点：

- (1) 掷一颗骰子, 记录出现点数, $A =$ “出现奇数点”;
- (2) 将一颗骰子掷两次, 记录出现点数, $A =$ “两次点数之和为 10”, $B =$ “第一次的点数比第二次的点数大 2”;
- (3) 一个口袋中有 5 只外形完全相同的球, 编号分别为 1,2,3,4,5; 从中同时取出 3 只球, 观察其结果, $A =$ “球的最小号码为 1”;
- (4) 将 a, b 两个球随机地放到甲、乙、丙三个盒子中去, 观察放球情况, $A =$ “甲盒中至少有一球”;
- (5) 记录在一段时间内通过某桥的汽车流量, $A =$ “通过汽车不足 5 辆”, $B =$ “通过的汽车不少于 3 辆”.

2. 设 A, B, C 是随机试验 E 的三个事件, 试用 A, B, C 表示下列事件：

- (1) 仅 A 发生;
- (2) A, B, C 中至少有两个发生;
- (3) A, B, C 中不多于两个发生;
- (4) A, B, C 中恰有两个发生;
- (5) A, B, C 中至多有一个发生.

3. 一个工人生产了三件产品, 以 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 表示第 i 件产品是正品, 试用 A_i 表示下列事件：

- (1) 没有一件产品是次品;
- (2) 至少有一件产品是次品;
- (3) 恰有一件产品是次品;
- (4) 至少有两件产品不是次品.

4. 从一副扑克牌的 13 张梅花中, 一张接一张地有放回地抽取三张, 求:

- (1) 没有同号的概率;
- (2) 有同号的概率;
- (3) 三张中至多有两张同号的概率.

5. 设 11 片药片中有 5 片安慰剂, 采用不放回抽样.

- (1) 从中任意抽取 4 片, 求其中至少有 2 片是安慰剂的概率;
- (2) 从中每次取一片, 求前 3 次都取到安慰剂的概率.

6. 袋中有编号为 1 到 10 的 10 个球, 今从袋中任取 3 个球, 求:

- (1) 3 个球的最小号码为 5 的概率;
- (2) 3 个球的最大号码为 5 的概率.

7.

- (1) 教室里有 r 个学生, 求他们的生日都不相同的概率;
- (2) 房间里有 4 个人, 求至少有 2 个人的生日在同一个月内的概率.

8. 设一个人的生日在星期几是等可能的, 求 6 个人的生日都集中在一个星期中的某 2 天但不是都在同 1 天的概率.

9. 将 C,C,E,E,I,N,S 这 7 个字母随机地排成一行, 那么恰好排成英文单词 SCIENCE 的概率是多少?

10. 从 $0,1,2,\dots,9$ 这 10 个数字中任意选出三个不同数字, 试求下列事件的概率: $A_1 =$ “三个数字中不含 0 和 5”, $A_2 =$ “三个数字中不含 0 或 5”, $A_3 =$ “三个数字中含 0, 但不含 5”.

11. 将 n 双大小各不相同的鞋子随机分成 n 堆, 每堆两只. 求事件 $A =$ “每堆各成一双”的概率.

12. 从五双不同的鞋子中任取 4 只, 求此 4 只鞋子中至少有 2 只鞋子配成一双的概率.

13. 三封信随机地投向标号为 A,B,C,D 的四个邮筒, 问 B 邮筒恰好投入一封信的概率为多少?

14. 袋中有 9 个球 (4 个白球,5 个黑球), 现从中任取两个, 求:

- (1) 两个均为白球的概率;
- (2) 两个球中一个是白球, 另一个是黑球的概率;
- (3) 至少有一个黑球的概率.

15. 从 2,3,4,5 这四个数中, 有放回地取三次, 每次任取一个数, 求所取得的三个数之积能被 10 整除的概率.

16. 设事件 A 与 B 互不相容, $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$, 求 $P(\overline{A}\overline{B})$ 与 $P(\overline{A} \cup B)$.

17. 若 $P(AB) = P(\overline{A}\overline{B})$ 且 $P(A) = p$, 求 $P(B)$.

18. 设事件 A, B 及 $A \cup B$ 的概率分别为 p, q 及 r , 求 $P(AB)$ 与 $P(A \cup \overline{B})$.

19. 设 $P(A) + P(B) = 0.7$ 且 A, B 仅发生一个的概率为 0.5, 求 A, B 都发生的概率.

20. 设 $P(A) = 0.7$, $P(A - B) = 0.3$, $P(B - A) = 0.2$, 求 $P(\overline{A}\overline{B})$ 与 $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

21. 设 $AB \subset C$, 试证: $P(A) + P(B) - P(C) \leq 1$.

22. 对任意三事件 A, B, C , 试证: $P(AB) + P(AC) - P(BC) \leq P(A)$.

23. 设 $A \supset B, A \supset C, P(A) = 0.9, P(\overline{B} \cup \overline{C}) = 0.8$, 求 $P(A - BC)$.

24. 随机地向半圆 $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$ (a 为正常数) 内掷一点, 点落在圆内任何区域的概率与区域的面积成正比, 求原点至该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\pi/4$ 的概率.

25. 把长度为 a 的棒任意折成三段, 求它们可以构成一个三角形的概率.

26. 随机地取两个正数 x 和 y , 这两个数中的每一个都不超过 1, 试求 x 与 y 之和不超过 1, 积不小于 0.09 的概率.

*27. (比丰投针问题) 在平面上画出等距离 $a(a > 0)$ 的一些平行线, 向平面上随机地投掷一根长 $l(l < a)$ 的针, 试求针与任一平行线相交的概率.

28. 甲、乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头, 它们在一昼夜内到达的时间是等可能的. 若甲船停泊的时间是一小时, 乙船停泊的时间是两小时, 求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率是多少?

习题二：1. 假设一批产品中一、二、三等品各占 60%,30%,10%, 从中任取一件, 发现它不是三等品, 求它是一等品的概率.

2. 设 10 件产品中有 4 件不合格品, 从中任取两件, 已知所取两件中有一件是不合格品, 求另一件也是不合格品的概率.

3. 袋中有 5 个白球,6 个黑球, 从袋中一次取出 3 个球, 发现都是同一颜色. 求这颜色是黑色的概率.

4. 从 52 张扑克牌中任意抽取 5 张, 求在至少有 3 张黑桃的条件下,5 张都是黑桃的概率.

5. 设 $P(A) = 0.5, P(B) = 0.6, P(B|A) = 0.8$, 求 $P(A \cup B)$ 与 $P(B - A)$.

6. 甲袋中有 3 个白球 2 个黑球, 乙袋中有 4 个白球 4 个黑球. 今从甲袋中任取 2 球放入乙袋, 再从乙袋中任取一球, 求该球是白球的概率.

7. 在第 6 题中已知从乙袋中取得的球是白球, 求从甲袋中取出的球是一白一黑的概率.

8. 已知甲袋中有 2 个黑球和 3 个白球, 乙袋中有 1 个黑球和 4 个白球, 丙袋中有 3 个黑球和 2 个白球. 先从甲、乙袋中各任取一球放入丙袋, 然后再从丙袋任取一球, 求从丙袋中取出球为白球的概率.

9. 在一盒子中装有 15 个乒乓球, 其中 9 个新球. 在第一次比赛时任意抽取 3 个球, 比赛后仍放回原盒中; 在第二次比赛时同样地任意取 3 个球, 求第二次取出的 3 个球均为新球的概率.

10. 电报发射台发出 “.” 和 “-” 的比例为 5:3, 由于干扰, 传送 “.” 时失真率为 $\frac{2}{5}$, 传送 “-” 时失真率为 $\frac{1}{3}$. 求接收台收到 “.” 时发出信号恰是 “.” 的概率.

11. 已知一批产品中 96% 是合格品, 检查产品时, 一合格品被误认为是次品的概率是 0.02, 一个次品被误认为是合格品的概率是 0.05, 求在被检查后认为是合格品的产品确是合格品的概率.

12. 假设有两箱同种零件: 第一箱内装 50 件, 其中 10 件一等品; 第二箱内装 30 件, 其中 18 件一等品. 现从两箱中随意挑出一箱, 然后从该箱中先后随机取出两个零件 (取出的零件均不放回). 试求:

- (1) 先取出的零件是一等品的概率;
- (2) 在先取出的零件是一等品的条件下, 第二次取出的零件仍然是一等品的概率.

13. 玻璃杯成箱出售, 每箱 20 只, 假设各箱含 0,1,2 只残次品的概率分别为 0.8,0.1,0.1. 一顾客欲购一箱玻璃杯, 在购买时, 售货员随意取一箱, 而顾客开箱随意地察看 4 只, 若无残次品, 则买下该箱玻璃杯, 否则退回. 试求:

- (1) 顾客买下该箱玻璃杯的概率 α ;
- (2) 在顾客买下的一箱中, 确实没有残次品的概率 β .

14. 设有分别来自三个地区的 10 名、15 名和 25 名考生的报名表, 其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份. 随机地取一个地区的报名表, 从中先后抽出两份.

- (1) 求先抽到的一份是女生表的概率 p ;
- (2) 已知后抽到的一份是男生表, 求先抽到的一份是女生表的概率 q .

15. 一袋中装有 m 枚正品硬币, n 枚次品硬币 (次品硬币的两面均印有数字). 在袋中任取一枚, 已知将它投掷 r 次, 每次都得到数字, 问这枚硬币是正品的概率是多少?

16. 甲、乙两人独立地对同一目标各射击一次, 其命中率分别为 0.6 和 0.5. 现已知目标被击中, 求它是甲射中的概率.

17. 三人独立地去破译一个密码, 他们能译出的概率分别是 $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. 求他们将此密码译出的概率.

18. 甲、乙、丙三人向一架飞机进行射击, 他们的命中率分别为 0.4, 0.5, 0.7. 又设飞机中一弹而被击落的概率为 0.2, 中两弹而被击落的概率为 0.6, 中三弹必然被击落. 今三人各射击一次, 求飞机被击落的概率.

19. 某考生想借一本书, 决定到三个图书馆去借, 对每一个图书馆而言, 有无这本书的概率相等; 若有, 能否借到的概率也相等. 假设这三个图书馆采购、出借图书相互独立, 求该生能借到此书的概率.

20. 设 B, C 及 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是具有正概率的事件, 且 $A_i A_j = \emptyset, i \neq j (i, j = 1, 2, \dots, n), \bigcup_{i=1}^n A_i = S$. 若 $P(A_i), P(B|A_i)$ 及 $P(C|BA_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ 已知, 求 $P(C|B)$.

21. 设 $P(A) > 0$, 证明: $P(B|A) \geq 1 - \frac{P(\bar{B})}{P(A)}$.

22. 设 A, B, C 是三个事件, A, B 相互独立; A, C 相互独立; B, C 互不相容, 且 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P(AC|(AB \cup C)) = \frac{1}{4}$, 求 $P(C)$.

23. 证明: 若三事件 A, B, C 相互独立, 则 $A \cup B$ 及 $A - B$ 都与 C 独立.

24. 设有三个事件 A, B, C , 其中 $P(B) > 0, 0 < P(C) < 1$, 且 B 与 C 相互独立, 证明: $P(A|B) = P(A|BC)P(C) + P(A|B\bar{C})P(\bar{C})$.

25. 一个教室里有 4 名一年级男生, 6 名一年级女生, 6 名二年级男生, 若干名二年级女生. 为了在随机地选择一名学生时, 性别与年级是相互独立的, 教室里的二年级女生应为多少名?

26. 一射手对同一目标独立地进行四次射击. 若至少命中一次的概率为 $80/81$, 求该射手的命中率.

27. 设一批晶体管的次品率为 0.01, 今从这批晶体管中抽取 4 个, 求其中恰有 1 个次品和恰有 2 个次品的概率.

28. 考试时有 4 道选择题, 每题附有 4 个答案, 其中只有一个是正确的, 一个考生随意地选择每题的答案, 求他至少答对 3 道题的概率.

29. 设在伯努利试验中, 成功的概率为 p , 求第 n 次试验时得到第 r 次成功的概率.

30. 设一厂家生产的每台仪器, 以概率 0.7 可以直接出厂; 以概率 0.3 需进一步调试, 经调试后以概率 0.8 可以出厂, 以概率 0.2 定为不合格品, 不能出厂. 现该厂生产了 $n(n \geq 2)$ 台仪器 (假定各台仪器的生产过程相互独立). 求:

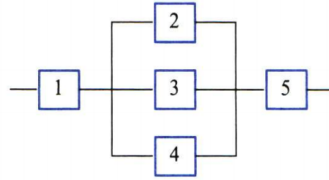
- (1) 全部能出厂的概率 α ;
- (2) 其中恰有两台不能出厂的概率 β ;
- (3) 其中至少有两台不能出厂的概率 θ .

31. 某人有两盒火柴, 吸烟时从任一盒中取一根火柴. 经过若干时间后, 发现一盒火柴已经用完. 如果最初两盒中各有 n 根火柴, 求这时另一盒中还有 r 根火柴的概率.

32. 设一个系统由 5 个元件组成, 连接方式如图 2.6 所示. 元件 1,5 的可靠性均为 $r(0 < r < 1)$, 元件 2,3,4 的可靠性均为 $p(0 < p < 1)$, 且各元件能否正常工作是相互独立的. 试求:

(1) 这个系统的可靠性;

(2) 在这个系统正常工作时, 元件 2,3,4 中仅有一个在正常工作的概率.



33. 设昆虫产 k 个卵的概率 $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, 又设一个虫卵能孵化成昆虫的概率为 p . 若卵的孵化是相互独立的, 问此昆虫的下一代有 L 条的概率是多少?

34. 一台仪器中装有 2000 个同样的元件, 每个元件损坏的概率为 0.0005. 如果任一元件损坏, 则仪器停止工作, 求仪器停止工作的概率.

35. 设实验室器皿中产生甲、乙两类细菌的机会相等, 且产生 k 个细菌的概率为 $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. 求:

(1) 产生了乙类细菌但没有甲类细菌的概率;

(2) 在已产生了细菌且没有乙类细菌的条件下, 有 2 个甲类细菌的概率.

习题三：

1. 掷一枚非均匀的硬币，出现正面的概率为 p ($0 < p < 1$)。若以 X 表示直至掷到正、反面都出现时为止所需投掷次数，求 X 的分布列。

2. 袋中有 a 个白球， b 个黑球，从袋中任意取出 r 个球，求 r 个球中黑球个数 X 的分布列。

3. 一实习生用一台机器接连独立地制造了 3 个同种零件，第 i 个零件是不合格品的概率 $P_i = \frac{1}{i+1}$ ($i = 1, 2, 3$)。以 X 表示 3 个零件中合格品的个数，求 X 的分布列。

4. 一汽车沿一街道行驶，需通过三个设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿与其他信号灯为红或绿相互独立，且每一信号灯红绿两种信号显示的概率均为 $1/2$ 。以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数，求 X 的概率分布。

5. 将一枚硬币连掷 n 次，以 X 表示这 n 次中出现正面的次数，求 X 的分布列。

6. 一电话交换台每分钟接到的呼叫次数服从参数为 4 的泊松分布。求：(1) 每分钟恰有 8 次呼叫的概率；(2) 每分钟的呼叫次数大于 10 的概率。

7. 设某商店每月销售某种商品的数量服从参数为 5 的泊松分布，问在月初要至少库存多少此种商品才能保证当月不脱销的概率在 0.99977 以上？

8. 已知离散型随机变量 X 的分布列为: $P(X = 1) = 0.2, P(X = 2) = 0.3, P(X = 3) = 0.5$, 试写出 X 的分布函数。

9. 设随机变量 X 的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} C \sin x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

求: (1) 常数 C ; (2) 使 $P(X > a) = P(X < a)$ 成立的 a 。

10. 设随机变量 X 的分布函数

$$F(x) = A + B \arctan x, \quad -\infty < x < +\infty,$$

求: (1) 系数 A 与 B ; (2) $P(-1 < X < 1)$; (3) X 的概率密度。

11. 已知随机变量 X 的概率密度

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

求 X 的分布函数。

12. 设随机变量 X 的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 X 的分布函数。

13. 设连续型随机变量 X 的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ ax^2 + bx, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

且已知 $P(X > \frac{1}{3}) = P(X < \frac{1}{3})$, 求常数 a, b 。

14. 设电子管寿命 X 的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{100}{x^2}, & x > 100, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

若一架收音机上装有三个这种电子管，求：（1）使用的最初 150 小时内至少有两个电子管被烧坏的概率；（2）在使用的最初 150 小时内烧坏的电子管数 Y 的分布列；（3） Y 的分布函数。

15. 设随机变量 X 的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

现对 X 进行 n 次独立重复观测，以 V_n 表示观测值不大于 0.1 的次数，试求随机变量 V_n 的概率分布。

16. 设随机变量 $X \sim U(1, 6)$, 求方程 $x^2 + Xx + 1 = 0$ 有实根的概率。
17. 设随机变量 $X \sim U[2, 5]$ 。现对 X 进行三次独立观测, 试求至少有两次观测值大于 3 的概率。
18. 设顾客在某银行窗口等待服务的时间 X (单位: min) 服从参数为 $1/5$ 的指数分布。若等待时间超过 10min, 则他就离开。设他一个月内要来银行 5 次, 以 Y 表示一个月内他没有等到服务而离开窗口的次数, 求 Y 的分布列及 $P(Y \geq 1)$ 。
19. 设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布。求: (1) 相继两次故障之间时间间隔 T 的分布; (2) 在设备已经无故障工作了 8h 的情形下, 再无故障运行 8h 的概率。
20. 设随机变量 $X \sim N(108, 3^2)$ 。求:
- (1) $P(101.1 < X < 117.6)$;
 - (2) 常数 a , 使 $P(X < a) = 0.90$;
 - (3) 常数 a , 使 $P(|X - a| > a) = 0.01$ 。

21. 设随机变量 $X \sim N(2, \sigma^2)$, 且 $P(2 < X < 4) = 0.3$, 求 $P(X < 0)$ 。
22. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 且二次方程 $y^2 + 4y + X = 0$ 无实根的概率为 0.5, 求 μ 。
23. 某地抽样调查结果表明, 考生的外语成绩 (百分制) 近似服从正态分布, 平均成绩 (即参数 μ 之值) 为 72 分, 96 分以上的占考生总数的 2.3%, 试求考生的外语成绩在 60 分至 84 分之间的概率。
24. 假设测量的随机误差 $X \sim N(0, 10^2)$, 试求在 100 次重复测量中, 至少有三次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率 α , 并利用泊松分布求出 α 的近似值 (要求小数点后取两位有效数字)。
25. 在电源电压不超过 200V, 200~240V 和超过 240V 三种情况下, 某种电子元件损坏的概率分别为 0.1, 0.001 和 0.2。假设电源电压 X 服从正态分布 $N(220, 25^2)$, 试求: (1) 该电子元件损坏的概率 α ; (2) 该电子元件损坏时, 电源电压在 200~240V 的概率 β 。
26. 假设随机变量 X 的绝对值不大于 1, $P(X = -1) = \frac{1}{8}, P(X = 1) = \frac{1}{4}$ 。在事件 $\{-1 < X < 1\}$ 出现的条件下, X 在 $(-1, 1)$ 内任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比。试求: (1) X 的分布函数; (2) X 取负值的概率 p 。

27. 已知离散型随机变量 X 的分布列为

X	-2	-1	0	1	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

求 $Y = X^2$ 的分布列。

28. 设随机变量 X 的概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

求 $Y = e^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$ 。

29. 设随机变量 X 的概率密度

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

求随机变量 $Y = 1 - \sqrt[3]{X}$ 的概率密度 $f_Y(y)$ 。

30. 设 $X \sim U(0, 1)$, 求: (1) $Y = e^X$ 的概率密度; (2) $Y = -2 \ln X$ 的概率密度。

31. 设 $X \sim N(0, 1)$, 求 $Y = |X|$ 的概率密度。

32. 设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布, 试证: $Y = 1 - e^{-2X}$ 在区间 $(0, 1)$ 上服从均匀分布。

33. 设随机变量 X 的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi^2}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

求 $Y = \sin X$ 的概率密度。

34. 设随机变量 X 服从参数为 $\frac{3}{4}$ 的几何分布, 求 $Y = X^2$ 的分布列。

35. 设随机变量 X 的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 1 \leq x \leq 8, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$F(x)$ 是 X 的分布函数, 求随机变量 $Y = F(X)$ 的分布函数。

36. 设随机变量 $X \sim U[0, 1]$, 随机变量 $Y = X^2 - 4X + 1$, 求随机变量 Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 。

37. 设随机变量 X 的概率密度

$$f(x) = Ce^{-\frac{|x|}{a}} \quad (a > 0).$$

(1) 试确定常数 C ; (2) 求 X 的分布函数; (3) 求 $P(|X| < 2)$; (4) 求 $Y = \frac{1}{4}X^2$ 的概率密度。

习题四:

1. 一个袋子中装有四个球, 它们上面分别标有数字 1,2,2,3。今从袋中任取一球后不放回, 再从袋中任取一球, 以 X, Y 分别表示第一次、第二次取出的球上的标号, 求 (X, Y) 的分布列。

2. 将一硬币连掷三次, 以 X 表示在三次中出现正面的次数, 以 Y 表示在三次中出现正面次数与出现反面次数之差的绝对值, 试写出 (X, Y) 的分布列及边缘分布列。

3. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(6 - x - y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

又 (1) $D = \{(x, y) \mid x < 1, y < 3\}$; (2) $D = \{(x, y) \mid x + y < 3\}$ 。求 $P((X, Y) \in D)$ 。

4. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} C(R - \sqrt{x^2 + y^2}), & x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求: (1) 系数 C ; (2) (X, Y) 落在圆 $x^2 + y^2 \leq r^2 (r < R)$ 内的概率。

5. 已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 X 和 Y 的联合分布函数。

6. 设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D: 0 < x < 1, |y| < x$ 内服从均匀分布, 求边缘概率密度。

7. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求边缘概率密度和概率 $P(X + Y \leq 1)$ 。

8. 一电子仪器由两个部件组成, 以 X 和 Y 分别表示两个部件的寿命 (单位: 10^3h), 已知 X, Y 的联合分布函数

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5x} - e^{-0.5y} + e^{-0.5(x+y)}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 问 X, Y 是否独立? 为什么? (2) 求两个部件的寿命都超过 100h 的概率。

9. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

问 X 与 Y 是否独立?

10. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \leq x < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

问 X 与 Y 是否独立?

11. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1+xy}{4}, & |x| < 1, |y| < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

试证: X 与 Y 不独立, 但 X^2 与 Y^2 是相互独立的。

12. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 表 4.2 列出了二维随机变量 (X, Y) 的分布列及关于 X 和关于 Y 的边缘分布列中的部分数值, 试将其余值填入表 4.2 中的空白处。

表 4.2 (X, Y) 的分布列

X	Y			$P(X=x_i)=p_i$
	y_1	y_2	y_3	
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P(Y=y_j)=p_j$	$\frac{1}{6}$			1

13. 已知随机变量 X_1 和 X_2 的概率分布为

$$X_1 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad X_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

而且 $P(X_1 X_2 = 0) = 1$ 。(1) 求 X_1 和 X_2 的联合分布; (2) 问 X_1 和 X_2 是否独立? 为什么?

14. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从 $(-b, b)$ 上的均匀分布, 求方程 $t^2 + tX + Y = 0$ 有实根的概率。

15. 已知随机变量 X 和 Y 的联合概率分布如下所示。试求: (1) X 的概率分布; (2) $X + Y$ 的概率分布。

(x, y)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)	(2, 0)	(2, 1)
$P(X = x, Y = y)$	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.15

16. 设 X 与 Y 为独立同分布的离散型随机变量, 其概率分布列为 $P(X = n) = P(Y = n) = \frac{1}{2^n} (n = 1, 2, \dots)$, 求 $X + Y$ 的分布列。

17. 设 X, Y 是相互独立的随机变量, 它们都服从参数为 n, p 的二项分布, 证明: $Z = X + Y$ 服从参数为 $2n, p$ 的二项分布。

18. 设随机变量 X, Y 相互独立, 其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

求 $X + Y$ 的概率密度。

19. 在例 4.5.6 中, 若系统 L_1 与 L_2 按图 4.11 联结, 即当系统 L_1 损坏时, 系统 L_2 开始工作, 求系统 L 的寿命 Z 的概率密度。

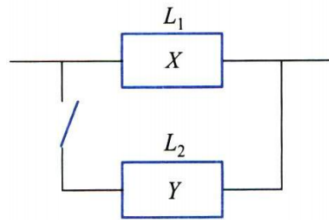


图 4.11

20. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 < y < x, 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $Z = X - Y$ 的概率密度。

21. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x, y < +\infty),$$

求 $Z = X^2 + Y^2$ 的概率密度。

22. 设随机变量 X 与 Y 独立, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y \sim U[-\pi, \pi]$, 试求 $Z = X + Y$ 的概率密度。

23. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $Z = X + 2Y$ 的分布函数。

24. 设二维随机变量 (X, Y) 在矩形 $G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ 上服从均匀分布, 试求边长为 X 和 Y 的矩形面积 S 的概率密度 $f(s)$ 。

25. 设 X 和 Y 为两个随机变量, 且 $P(X \geq 0, Y \geq 0) = \frac{3}{7}, P(X \geq 0) = P(Y \geq 0) = \frac{4}{7}$, 求 $P(\max\{X, Y\} \geq 0)$ 。

26. 设 ξ, η 是相互独立且服从同一分布的两个随机变量, 已知 ξ 的分布列 $P(\xi = i) = \frac{1}{3} (i = 1, 2, 3)$, 又设 $X = \max\{\xi, \eta\}, Y = \min\{\xi, \eta\}$, 试写出二维随机变量 (X, Y) 的分布列及边缘分布列, 并求 $P(\xi = \eta)$ 。

27. 假设一电路装有三个同种电器元件, 其工作状态相互独立, 且无故障工作时间都服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布。当三个元件都无故障时, 电路正常工作, 否则整个电路不能正常工作。试求电路正常工作的时间 T 的分布。

28. 设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 独立同分布: $P(X_i = 0) = 0.6, P(X_i = 1) = 0.4 (i = 1, 2, 3, 4)$ 。求行列式

$$X = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$$

的概率分布。

29. 设 A, B 为两个随机事件, 且 $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}$ 。令

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{发生}, \\ 0, & A \text{不发生}, \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{发生}, \\ 0, & B \text{不发生}. \end{cases}$$

求: (1) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布; (2) $Z = X^2 + Y^2$ 的概率分布。

30. 设随机变量 X 和 Y 的联合分布是正方形域 $G = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3\}$ 上的均匀分布, 试求随机变量 $Z = |X - Y|$ 的概率密度。

31. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求: (1) (X, Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$; (2) $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$; (3) $P(Y \leq \frac{1}{2} \mid X \leq \frac{1}{2})$ 。

32. 设随机变量 X 与 Y 独立, 其中 X 的分布列为

X	1	2
P	0.3	0.7

而 Y 的概率密度为 $f_Y(y)$, 求随机变量 $Z = X + Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$ 。

33. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求: (1) $Z = X + Y$ 的概率密度; (2) $M = \max\{X, Y\}$ 和 $N = \min\{X, Y\}$ 的概率密度。

34. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 求随机变量 $Y = \min\{X, 2\}$ 的分布函数。

35. 在第 7 题中, 求条件概率密度。

36. 设随机变量 X 关于随机变量 Y 的条件概率密度

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} 3x^2/y^3, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

而 Y 的概率密度

$$f_Y(y) = \begin{cases} 5y^4, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $P(X > 1/2)$ 。

37. 设随机变量 $X \sim U(0, 1)$, 在 $X = x(0 < x < 1)$ 的条件下, 随机变量 Y 在区间 $(0, x)$ 上服从均匀分布, 求: (1) 随机变量 X 和 Y 的联合概率密度; (2) Y 的概率密度; (3) $P(X+Y > 1)$ 。

习题五：

1. 假设有 10 只同种电器元件，其中有两只废品。从这批元件中任取一只，若是废品，则扔掉重新取一只，若仍是废品，则扔掉再取一只。试求在取到正品之前，已取出的废品只数的数学期望和方差。

2. 假设一部机器在 1 天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作。若 1 周 5 个工作日里无故障，可获利润 10 万元；发生一次故障仍可获利润 5 万元；发生两次故障无利可获；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元。求 1 周内期望利润是多少？

3. 假设自动线加工的某种零件的内径 X (单位:mm) 服从正态分布 $N(\mu, 1)$ ，内径小于 10 或大于 12 的为不合格品，其余为合格品。销售每件合格品获利，销售每件不合格品亏损，已知销售利润 T (单位: 元) 与销售零件的内径 X 有如下关系：

$$T = \begin{cases} -1, & X < 10, \\ 20, & 10 \leq X \leq 12, \\ -5, & X > 12. \end{cases}$$

问平均内径 μ 取何值时，销售一个零件的平均利润最大？

4. 从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗，假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的，并且概率都是 $\frac{2}{5}$ 。设 X 为途中遇到红灯的次数，求随机变量 X 的分布列、分布函数和数学期望。

5. 设随机变量 X 服从几何分布 $G(p)$, 其分布列

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p \quad (0 < p < 1, k = 1, 2, 3, \dots).$$

求 $E(X)$ 与 $D(X)$ 。

6. 设随机变量 X 分别具有下列概率密度, 求其数学期望与方差:

(1) $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|};$

(2) $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} \frac{15}{16}x^2(x-2)^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$

(4) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

7. 设 X 是取非负整数值的随机变量, 且 X 的数学期望存在. 证明:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k).$$

8. 掷一枚非均匀的硬币, 出现正面的概率为 $p(0 < p < 1)$ 。若以 X 表示直至掷到正、反面都出现时为止所需投掷次数, 求随机变量 X 的数学期望 (提示: 利用习题 7)。

9. 设连续型随机变量 X 的所有可能取值在区间 $[a, b]$ 上, 证明: (1) $a \leq E(X) \leq b$; (2) $D(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$ 。

10. 在习题 3 的第 4 题中, 求 $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$ 。

11. 设随机变量 X 的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 0 < x < 2, \\ cx + b, & 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

已知 $E(X) = 2, P(1 < X < 3) = \frac{3}{4}$, 求: (1) a, b, c 的值; (2) 随机变量 $Y = e^X$ 的数学期望与方差。

12. 已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品。从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，求：(1) 乙箱中次品件数 X 的数学期望；(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率。

13. 设随机变量 X 的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

对 X 独立地重复观测 4 次，用 Y 表示观测值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，求 Y^2 的数学期望。

14. (超几何分布的数学期望) 设 N 件产品中有 M 件次品，从中任取 n 件进行检查. 求查得的次品数 X 的数学期望。

15. 对三台仪器进行检验，各台仪器产生故障的概率分别为 p_1, p_2, p_3 ，求产生故障的仪器的台数 X 的数学期望与方差。

16. 一袋中有 n 张卡片, 分别记有号码 $1, 2, \dots, n$ 。从中有放回地抽取 k 张来, 以 X 表示所得号码之和, 求 $E(X), D(X)$ 。

17. 将 n 只球 (编号为 $1, 2, \dots, n$) 随机地放入 n 个盒子 (编号为 $1, 2, \dots, n$) 中去. 一个盒子放一只球, 将一只球放入与球同号的盒子中算为一个配对, 记 X 为配对的个数, 求 $E(X)$ 。

18. 从 10 双不同的鞋子中任取 8 只, 记 X 为这 8 只鞋子中成双的对数, 求 $E(X)$ 。

19. 一商店经销某种商品, 每周进货量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量, 且都服从区间 $[10, 20]$ 上的均匀分布。商店每售出一单位商品可得利润 1000 元; 若需求量超过了进货量, 商店可从其他商店调剂供应, 这时每单位商品获利润为 500 元。试计算此商店经销该种商品每周所得利润的期望值。

20. 游客乘电梯从底层到电视塔顶层观光, 电梯于每个整点的第 5 分钟、25 分钟和 55 分钟从底层起行。假设一游客在早 8 点的第 X 分钟到达底层候梯处, 且 X 在 $[0, 60]$ 上服从均匀分布, 求该游客等候时间的数学期望。

21. 设某种商品每周的需求量 X 是服从区间 $[10, 30]$ 上均匀分布的随机变量, 而经销商店进货数量为区间 $[10, 30]$ 中的某一整数。商店每销售一单位商品可获利 500 元; 若供大于求则削价处理, 每处理一单位商品亏损 100 元; 若供不应求, 则从外部调剂供应, 此时每一单位商品仅获利 300 元。为使商品所获利润期望值不少于 9280 元, 试确定最少进货量。

22. 设随机变量 X 与 Y 同分布, 且 X 的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 已知事件 $A = \{X > a\}$ 和事件 $B = \{Y > a\}$ 独立, 且 $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, 求常数 a ; (2) 求 $E\left(\frac{1}{X^2}\right)$ 。

23. 在习题 4 的第 15 题中, 求 $Z = \sin \frac{\pi(X+Y)}{2}$ 的数学期望。

24. 设二维随机变量 (X, Y) 的分布列为

X	Y		
	-1	0	1
1	0.2	0.1	0.1
2	0.1	0	0.1
3	0	0.3	0.1

(1) 求 $E(X), E(Y)$; (2) 设 $Z = Y/X$, 求 $E(Z)$; (3) 设 $W = (X - Y)^2$, 求 $E(W)$ 。

25. 设二维离散型随机变量 (X, Y) 在点 $(1, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}), (-1, -1)$ 取值的概率均为 $\frac{1}{4}$, 求 $E(X), E(Y), D(X), D(Y), E(XY)$ 。

26. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的数学期望。

27. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $E(X), E(Y), E(XY), D(2X + 1)$ 。

28. 设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda = 1$ 的指数分布, 随机变量

$$X_k = \begin{cases} 0, & Y \leq k, \\ 1, & Y > k \end{cases} \quad (k = 1, 2).$$

求: (1) X_1 和 X_2 的联合概率分布; (2) $E(X_1 + X_2)$ 。

29. 设 X, Y 是两个相互独立的随机变量, 其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-(y-5)}, & y > 5, \\ 0, & y \leq 5. \end{cases}$$

求 $E(XY), D(XY)$ 。

30. 在长为 l 的线段上, 任取两点, 求两点间距离的数学期望与方差。

31. 设随机变量 X 与 Y 独立, 且 X 服从均值为 1, 标准差 (均方差) 为 $\sqrt{2}$ 的正态分布, 而 Y 服从标准正态分布, 试求随机变量 $Z = 2X - Y + 3$ 的概率密度。

32. 设 X, Y 是两个相互独立的且均服从正态分布 $N(0, \frac{1}{2})$ 的随机变量, 求 $E|X - Y|$ 与 $D|X - Y|$ 。

33. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 试证:

$$E[\max\{X, Y\}] = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

34. 设随机变量 $Z \sim U[-2, 2]$, 随机变量

$$X = \begin{cases} -1, & Z \leq -1, \\ 1, & Z > -1, \end{cases} \quad Y = \begin{cases} -1, & Z \leq 1, \\ 1, & Z > 1. \end{cases}$$

求: (1) X 和 Y 的联合分布; (2) $D(X + Y)$ 。

35. 已知 $D(X) = 25, D(Y) = 36, \rho_{XY} = 0.4$, 求 $D(X + Y)$ 及 $D(X - Y)$ 。

36. 设 X, Y, Z 为三个随机变量, 且 $E(X) = E(Y) = 1, E(Z) = -1, D(X) = D(Y) = D(Z) = 1, \rho_{XY} = 0, \rho_{XZ} = \frac{1}{2}, \rho_{YZ} = -\frac{1}{2}$ 。若 $W = X + Y + Z$, 求 $E(W), D(W)$ 。

37. 设 X, Y, Z 是三个两两不相关的随机变量, 数学期望都是 0, 方差都是 1, 求 $X - Y$ 与 $Y - Z$ 的相关系数。

38. 某箱装有 100 件产品, 其中一、二和三等品分别为 80、10 和 10 件。现在从中随机抽取一件, 记

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{抽到 } i \text{ 等品,} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3).$$

试求: (1) 随机变量 X_1 与 X_2 的联合分布; (2) 随机变量 X_1 与 X_2 的相关系数 ρ 。

39. 设二维随机变量 (X, Y) 在矩形区域 $G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ 上服从均匀分布。记

$$U = \begin{cases} 0, & X \leq Y, \\ 1, & X > Y, \end{cases} \quad V = \begin{cases} 0, & X \leq 2Y, \\ 1, & X > 2Y. \end{cases}$$

求: (1) U 和 V 的联合分布; (2) U 和 V 的相关系数 ρ 。

40. 设 X 与 Y 为具有二阶矩的随机变量, 且记 $Q(a, b) = E[(Y - (a + bX))^2]$, 求 a, b , 使得 $Q(a, b)$ 达到最小值 Q_{\min} , 并证明:

$$Q_{\min} = D(Y)(1 - \rho_{XY}^2).$$

41. 设随机变量 X 和 Y 在圆域 $x^2 + y^2 \leq r^2$ 上服从二维均匀分布。(1) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ ; (2) 问 X 与 Y 是否独立? 为什么?

42. 设 A, B 是两个随机事件, 随机变量

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{ 出现}, \\ -1, & A \text{ 不出现}, \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 出现}, \\ -1, & B \text{ 不出现}. \end{cases}$$

试证明: 随机变量 X 与 Y 不相关的充要条件是 A 与 B 相互独立。

43. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} (-\infty < x < +\infty)$, 试证: X 与 $|X|$ 不相关, 也不独立。

44. 设 (X, Y) 为二维正态随机变量, $E(X) = 1, E(Y) = 0, D(X) = 4, D(Y) = 9, \text{Cov}(X, Y) = 3$, 求 (X, Y) 的概率密度。

45. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = \frac{1}{2} [\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)],$$

其中 $\varphi_1(x, y)$ 和 $\varphi_2(x, y)$ 都是二维正态概率密度, 且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $-\frac{1}{3}$, 它们的边缘概率密度所对应的随机变量的数学期望都是 0, 方差都是 1。(1) 求随机变量 X 和 Y 的密度 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$, 以及 X 和 Y 的相关系数 ρ (提示: 可以直接利用二维正态概率密度的性质); (2) 问 X 与 Y 是否独立? 为什么?

46. 设 X 为随机变量, $E[|X|^r](r > 0)$ 存在, 试证明: 对任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[|X|^r]}{\varepsilon^r}.$$

47. 若 $D(X) = 0.004$, 利用切比雪夫不等式估计概率 $P(|X - E(X)| < 0.2)$ 。

48. 给定 $P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 0.9, D(X) = 0.009$, 利用切比雪夫不等式估计 ε 。

49. 用切比雪夫不等式确定掷一匀称硬币时, 需掷多少次, 才能保证正面出现的频率在 0.4 至 0.6 之间的概率不小于 0.9。

50. 若随机变量序列 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 满足条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} D \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = 0,$$

试证明: $\{X_n\}$ 服从大数定律。

51. 设有 30 个电子器件 D_1, D_2, \dots, D_{30} , 它们的使用情况如下: D_1 损坏, D_2 立即使用; D_2 损坏, D_3 立即使用, 等等。设器件 D_i 的寿命 (单位:h) 是服从参数为 $\lambda = 0.1$ 的指数分布的随机变量, 令 T 为 30 个器件使用的总时间, 问 T 超过 350 h 的概率是多少?

52. 某计算机系统有 100 个终端, 每个终端有 20% 的时间在使用。若各个终端使用与否是相互独立的, 试求有 10 个或更多个终端在使用的概率。

53. 某保险公司多年的资料表明, 在索赔户中, 被盗索赔户占 20%。以 X 表示在随机抽查的 100 个索赔户中因被盗而向保险公司索赔的户数, 试求 $P(14 \leq X \leq 30)$ 。

习题六:

1. 某厂生产玻璃板, 以每块玻璃上的泡疵点个数为数量指标, 已知它服从均值为 λ 的泊松分布. 从产品中抽一个容量为 n 的样本 X_1, X_2, \dots, X_n , 求样本的分布.

2. 加工某种零件时, 每一件需要的时间服从均值为 $1/\lambda$ 的指数分布. 今以加工时间为零件的数量指标, 任取 n 件零件构成一个容量为 n 的样本, 求样本分布.

3. 一批产品中有成品 L 个, 次品 M 个, 总计 $N = L + M$ 个. 今从中取容量为 2 的样本 (非简单样本), 求样本分布, 并验证: 当 $N \rightarrow \infty, M/N \rightarrow p$ 时, 样本分布为式 (6.1) 中 $n = 2$ 的情况.

$$p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \quad (6.1)$$

4. 设总体 X 的容量为 100 的样本观测值如下:

15	20	15	20	25	25	30	15	30	25
15	30	25	35	30	35	20	35	30	25
20	30	20	25	35	30	25	20	30	25
35	25	15	25	35	25	25	30	35	25
35	20	30	30	15	30	40	30	40	15
25	40	20	25	20	15	20	25	25	40
25	25	40	35	25	30	20	35	20	15
35	25	25	30	25	30	25	30	43	25
43	22	20	23	20	25	15	25	20	25
30	43	35	45	30	45	30	45	45	35

作总体 X 的直方图.

5. 某射手独立重复地进行 20 次打靶试验, 击中靶子的环数如表 6.2 所示. 用 X 表示此射手对靶射击一次所命中的环数, 求 X 的经验分布函数, 并作出其图像.

表 6.2 打靶试验数据

环数	10	9	8	7	6	5	4
频数	2	3	0	9	4	0	2

6. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, 已知 $E(X^k) = \alpha_k (k = 1, 2, 3, 4)$, 证明: 当 n 充分大时, 随机变量 $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 近似服从正态分布, 并指出其分布参数.

7. 设 X_1, \dots, X_n 是来自总体 X 的一个样本, X 服从参数为 λ 的指数分布. 证明: $2\lambda \sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2(2n)$.

8. 由附表查下列各值: $\chi_{0.05}^2(20), \chi_{0.95}^2(20), t_{0.01}(10), F_{0.05}(12, 15), F_{0.95}(15, 12), u_{0.1}$.

9. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(0, 2^2)$ 的简单随机样本, $X = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$, 求常数 a, b , 使得 $X \sim \chi^2(2)$.

10. 设 $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+m}$ 是总体 $N(0, \sigma^2)$ 的容量为 $n+m$ 的样本, 试求下列统计量的分布: (1) $Y_1 = \frac{\sqrt{m} \sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2}}$ (2) $Y_2 = \frac{m \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2}$

11. 设 X_1, \dots, X_n, X_{n+1} 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^{*2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 试求统计量 $T = \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S^*} \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ 的分布.

12. 设样本 X_1, \dots, X_{n_1} 和 Y_1, \dots, Y_{n_2} 分别来自相互独立的总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 已知 $\sigma_1 = \sigma_2, \alpha$ 和 β 是两个实数. 求随机变量

$$\frac{\alpha(\bar{X} - \mu_1) + \beta(\bar{Y} - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \left(\frac{\alpha^2}{n_1} + \frac{\beta^2}{n_2} \right)}}$$

的分布.

13. 从正态总体 $N(3.4, 6^2)$ 中抽取容量为 n 的样本, 如果要求样本均值位于区间 $(1.4, 5.4)$ 内的概率不小于 0.95, 问样本容量 n 至少应多大?

14. 设总体 $X \sim N(80, 20^2)$, 从总体 X 中抽取一个容量为 100 的样本, 问样本均值与总体均值之差的绝对值大于 3 的概率是多少?

15. 求总体 $N(20, 3)$ 的容量分别为 10, 15 的两个独立样本均值差的绝对值大于 0.3 的概率.

16. 设在总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取一容量为 16 的样本, 这里 μ, σ^2 均为未知, 求: (1) $P(S^2/\sigma^2 \leq 2.041)$; (2) $D(S^2)$.

17. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$, 从该总体中抽取简单随机样本 $X_1, X_2, \dots, X_{2n} (n \geq 2)$, 其样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$, 求统计量 $Y = \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2$ 的数学期望 $E(Y)$.

18. 设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma^2), X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ 和 Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本, 计算 $E \left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \bar{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2} \right]$.

习题七:

1. 对某一距离进行 5 次测量, 结果 (单位: m) 如下: 2781, 2836, 2807, 2763, 2858. 已知测量结果服从 $N(\mu, \sigma^2)$, 求参数 μ 和 σ^2 的矩估计值。

2. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自对数级数分布

$$P(X = k) = -\frac{1}{\ln(1-p)} \cdot \frac{p^k}{k} \quad (0 < p < 1, k = 1, 2, \dots)$$

的一个样本, 求参数 p 的矩估计量。

3. 设总体 X 服从参数为 N 和 p 的二项分布, X_1, X_2, \dots, X_n 为取自 X 的样本, 试求参数 N 和 p 的矩估计量。

4. 设总体 X 的概率密度

$$f(x; \theta) = \begin{cases} c^{\frac{1}{\theta}} \frac{1}{\theta} x^{-(1+\frac{1}{\theta})}, & x \geq c, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中参数 $0 < \theta < 1$, c 为已知常数, 且 $c > 0$ 。从中抽得一个样本 x_1, x_2, \dots, x_n , 求 θ 的矩估计。

5. 设总体 X 的概率密度

$$f(x; \alpha) = \begin{cases} (\alpha + 1)x^\alpha, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\alpha > -1).$$

试用样本 x_1, x_2, \dots, x_n 求参数 α 的矩估计和最大似然估计。

6. 已知总体 X 在 $[\theta_1, \theta_2]$ 上服从均匀分布, x_1, x_2, \dots, x_n 是取自 X 的一个样本, 求 θ_1, θ_2 的矩估计和最大似然估计。

7. 设总体的概率密度如下, 试利用样本 x_1, x_2, \dots, x_n 求参数 θ 的最大似然估计:

$$(1) f(x; \theta) = \begin{cases} (\theta\alpha)x^{\alpha-1}e^{-\theta x^\alpha}, & x > 0, \alpha \text{ 已知}, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$
$$(2) f(x; \theta) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|} \quad (-\infty < \theta < +\infty, -\infty < x < +\infty)。$$

8. 设总体 X 服从指数分布

$$f(x; \theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x \geq \theta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

试利用样本 x_1, x_2, \dots, x_n 求参数 θ 的最大似然估计。

9. 设总体 X 服从几何分布

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots; 0 < p < 1),$$

试利用样本 x_1, x_2, \dots, x_n 求未知参数 p 的最大似然估计。

10. 罐中有 N 个硬币，其中有 θ 个是普通的硬币（掷出正面与反面的概率各为 0.5），其余 $N - \theta$ 个硬币两面都是正面。从罐中随机取出一个硬币，把它连掷两次，记下结果，但不去查看它属于哪一种硬币，又把它放回罐中，如此重复 n 次。若掷出 0 次、1 次、2 次正面的次数分别为 n_0, n_1, n_2 ，利用 (1) 矩估计法；(2) 最大似然估计法去估计参数 θ 。

11. 设总体 X 的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{\theta^3}(\theta - x), & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 X 的简单随机样本，求：(1) θ 的矩估计 $\hat{\theta}$ ；(2) $\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$ 。

12. 设总体 X 的概率密度

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1, \\ 1 - \theta, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数 ($0 < \theta < 1$)。 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 N 为样本值 x_1, x_2, \dots, x_n 中小于 1 的个数, 求: (1) θ 的矩估计; (2) θ 的最大似然估计。

13. 设总体的分布为截尾几何分布

$$P(X = k) = \theta^{k-1}(1 - \theta) \quad (k = 1, 2, \dots, r), \quad P(X = r + 1) = \theta^r,$$

从中抽得样本 X_1, X_2, \dots, X_n , 其中有 M 个取值为 $r + 1$, 求 θ 的最大似然估计。

14. 设总体 X 的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta, \\ 0, & x \leq \theta, \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 是未知参数。从总体 X 中抽取简单随机样本 X_1, X_2, \dots, X_n , 记 $\hat{\theta} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 。

(1) 求总体 X 的分布函数 $F(x)$; (2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$; (3) 若用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计, 讨论它是否具有无偏性。

15. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其样本均值为 \bar{X} 。记 $Y_i = X_i - \bar{X} (i = 1, 2, \dots, n)$ 。若 $C(Y_1 + Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量, 求常数 C 。

16. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 是其样本。(1) 求 c 使得 $\hat{\sigma}^2 = c \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计量; (2) 求 k 使得 $\hat{\sigma} = k \sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|$ 为 σ 的无偏估计量。

17. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自参数为 λ 的泊松分布总体的样本, 试证: 对任意常数 k , 统计量 $k\bar{X} + (1-k)S^2$ 是 λ 的无偏估计量。

18. 设总体 X 有期望 μ , X_1, X_2, \dots, X_n 为一个样本, 问下列统计量是否为 μ 的无偏估计量:
(1) $\frac{1}{2}(X_1 + X_2)$; (2) $-X_1 + 2X_2$; (3) $\frac{1}{10}(2X_1 + 3X_2 + 3X_{n-1} + 2X_n)$; (4) $X_{(1)}$; (5) $X_{(n)}$;
(6) $\frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})$ 。

19. 设 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计量, 且 $D(\hat{\theta}) > 0$, 试证: $\hat{\theta}^2 = (\hat{\theta})^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量。

20. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, X_3 是来自 X 的样本, 试证: 估计量

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{5}X_1 + \frac{3}{10}X_2 + \frac{1}{2}X_3,$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{5}{12}X_3,$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{2}X_3,$$

都是 μ 的无偏估计, 并指出它们中哪一个最有效。

21. 设总体 X 服从区间 $[1, \theta]$ 上的均匀分布, $\theta > 1$ 未知, X_1, X_2, \dots, X_n 是取自 X 的样本。

(1) 求 θ 的矩估计和最大似然估计量; (2) 上述两个估计量是否为无偏估计量, 若不是请修正为无偏估计量; (3) 问在 (2) 中的两个无偏估计量哪一个更有效?

22. 设总体 X 的数学期望 $\mu = E(X)$ 已知, 试证: 统计量 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 是总体方差 $\sigma^2 = D(X)$ 的无偏估计。

23. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自 X 的样本, 试证: $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是 σ^2 的相合 (一致) 估计。

24. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $F(x; \theta)$ 的一个样本, $\hat{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是 θ 的一个估计量。若 $E(\hat{\theta}_n) = \theta + k_n$, $D(\hat{\theta}_n) = \sigma_n^2$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2 = 0$, 试证: $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的相合 (一致) 估计。

25. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自均匀分布在 $(0, \theta)$ 上的一个样本, 试证: $T_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 是 θ 的相合 (一致) 估计。

26. 从一批钉子中抽取 16 枚, 测得其长度 (单位: cm) 为 2.14, 2.10, 2.13, 2.15, 2.13, 2.12, 2.13, 2.10, 2.15, 2.12, 2.14, 2.10, 2.13, 2.11, 2.14, 2.11。设钉长分布为正态, 试在下列情况下求总体期望 μ 的置信水平为 0.90 的置信区间: (1) 已知 $\sigma = 0.01$; (2) σ 为未知。

27. 生产一个零件所需时间 (单位: s) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 观察 25 个零件的生产时间得 $\bar{x} = 5.5$, $s = 1.73$, 试以 0.95 的可靠性求 μ 和 σ^2 的置信区间。

28. 零件的尺寸与规定尺寸的偏差 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 今测得 10 个零件, 得偏差值 (单位: μm) 2, 1, -2, 3, 2, 4, -2, 5, 3, 4。试求 μ 和 σ^2 的无偏估计值和置信水平为 0.90 的置信区间。

29. 对某农作物两个品种计算了 8 个地区的单位面积产量如下: 品种 A 86, 87, 56, 93, 84, 93, 75, 79; 品种 B 80, 79, 58, 91, 77, 82, 74, 66。假定两个品种的单位面积产量分别服从正态分布, 且方差相等。试求平均单位面积产量之差置信水平为 0.95 的置信区间。

30. 设 A 和 B 两批导线是用不同工艺生产的, 今随机地从每批导线中抽 5 根测量电阻算得 $s_1^2 = 1.07 \cdot 10^{-7}$, $s_2^2 = s_B^2 = 5.3 \cdot 10^{-7}$ 。若 A 批导线的电阻服从 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, B 批导线的电阻服从 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 求 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为 0.90 的置信区间。

31. 两台机床加工同一种零件, 分别抽取 6 个和 9 个零件, 测零件长度计算得 $s_1^2 = 0.245$, $s_2^2 = 0.375$ 。假定各台机床零件长度服从正态分布, 试求两个总体方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间 (置信水平为 0.95)。

32. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自参数为 λ 的指数分布总体的一个样本, 试求 λ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间。

33. 设总体 X 服从区间 $[0, \theta]$ 上均匀分布 ($\theta > 0$), X_1, X_2, \dots, X_n 为来自 X 的一个样本。试利用 $\frac{X_{(n)}}{\theta}$ 的分布导出未知参数 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间。

34. 设 0.50, 1.25, 0.80, 2.00 是来自总体 X 的一个样本值, 已知 $Y = \ln X$ 服从正态分布 $N(\mu, 1)$ 。
(1) 求 X 的数学期望 $E(X)$ (记为 b); (2) 求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间; (3) 利用上述结果求 b 的置信水平为 0.95 的置信区间。

35. 从一台机床加工的轴中随机取 200 根, 测量其椭圆度, 由测量值 (单位: mm) 计算得平均值 $\bar{x} = 0.081$, 标准差 $s = 0.025$ 。求此机床加工的轴平均椭圆度的置信水平为 0.95 的置信区间。

36. 在一批货物的容量为 100 的样本中，经检验发现 16 个次品，试求这批货物次品率的置信区间（置信水平近似为 0.95）。

37. 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为来自参数为 λ 的泊松分布的样本。试求 λ 的置信水平近似为 0.95 的置信区间。