# 2025 春季学期微积分 B 期末考试（回忆版）

**声明：卷子为回忆版，不保证选项和题目完全一样，但不影响答案和做题**

回忆（按 Unicode 编码排序)

2000-Hours, Fun10165, Hurricane, fruly_ZERO, syhanjin, yasumi, 卡其米, 歪比巴卜, 船, 钱浮, ^__·

排版：syhanjin

一、选择题（每题 2 分，共 10 分）

(1). 隐函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $F(x-z,y-2z)=0$ 确定，则 (　　).

$A.\ \dfrac{\partial z}{\partial x}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$　　$B.\ \dfrac{\partial z}{\partial x}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$　　$C.\ -\dfrac{\partial z}{\partial x}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$　　$D.\ -\dfrac{\partial z}{\partial x}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$

(2). $C:\begin{cases}x-y+z &=2\\ x^2+y^2 &=1\end{cases}$，从 $z$ 轴正向看为顺时针，$\oint_C (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z=($　　$)$.

$A.\ 2\pi$　　$B.\ -2\pi$　　$C.\ 4\pi$　　$D.\ -4\pi$

(3). $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$ (　　).

$A.$ 与 $C$ 的方向无关，与 $a,b$ 的大小有关 $B.$ 与 $C$ 的方向无关，与 $a,b$ 的大小无关

$C.$ 与 $C$ 的方向有关，与 $a,b$ 的大小有关 $D.$ 与 $C$ 的方向有关，与 $a,b$ 的大小无关

(4). $P(x,y),Q(x,y)$ 为定义在复（多）连通区域 $G$ 上的可微函数，下列说法与另外三项不等价的是 (　　).

$A.$ 在 $G$ 上有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$　　$B.\ \int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关

$C.\ G$ 上存在函数 $u(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$　　$D.$ 对于任意闭合回路 $C$ 都有 $\oint_c P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$

(5). $a_n<bn$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛，则“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛”是“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛”的 (　　).

$A.$ 充分必要条件　$B.$ 充分不必要条件　$C.$ 必要不充分条件　$D.$ 既不充分也不必要条件

二、填空题（每题 2 分，共 10 分）

(1). $u=(1-xz-y^2)\arctan xyz$，$\nabla\cdot(\nabla\times(\boldsymbol{\nabla} u))=$ ________.

(2). 曲线 $L: x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, z=e^t(0\le t\le 2)$，$\displaystyle\int_L \frac{\mathrm{d}s}{x^2+y^2+z^2}=$ ________.

(3). 曲面 $1=z\cos xy$ 在 $(0,0,1)$ 的切平面方程为 ________.

(4). $f(x)=\begin{cases}2, & 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ x^2, & \frac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases}$ 的周期为 $2\pi$ 的余弦级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(\pi)=$ ________.

(5). $\Sigma$ 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $z=1$ 所截的曲面（不包括顶面的圆），$\displaystyle\iint_\Sigma \frac{(x+y+z+1)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}S=$ ________.

三（每小题 5 分，共 10 分）

(1) 设 $z=f(y^3,e^{2x}\cos y)$，$z$ 有一阶连续偏导，$f'(0,e^2)=1$，求 $\mathrm{d}z|_{x=1,y=0}$.

(2) 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln^2 n}{n^2}$ 的敛散性（若收敛，请指出是绝对收敛还是条件收敛），再说明理由。

四（6 分）将 $\arctan x^2$ 展开为 $x$ 的幂级数，并指出收敛域 .

五（6 分） $L$：$y=1-|x|$ 从 $(-1,0)$ 到 $(1,0)$，求 $\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y.$

六（4 分） $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1,\int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=3$，求 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^y f(z)\mathrm{d}z.$

七（4 分）设 $f(x,y,z)$ 在 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$ 上具有连续的一阶偏导，且在边界上为零。$M$ 为 $\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2+(\frac{\partial f}{\partial z})^2}$ 在 $\Omega$ 上的最大值。证明:

(1). $\iiint_\Omega\left(3f(x,y,z)+x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$

(2). $\left|\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right|\le\dfrac{\pi}{3}M.$