

矩阵分析试题

（樊一民老师班）（回忆版）

注意：本次考试为闭卷考试，考试时间为 120 分钟，总分 100 分。不允许使用计算器。

一、判断题：对的划“√”，错的划“×”。(10 分，每小题 2 分)

1. 设三个向量 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 线性相关，则其中任意一个向量都可以由另外两个向量线性表示。 ()
2. 若一个矩阵是正规矩阵，则它的酉相似矩阵也为正规矩阵。 ()
3. λ 矩阵的一种初等行变换是将一行乘以非零多项式。 ()
4. 若一组基的 Gram 矩阵等于单位阵，则这组基为标准正交基。 ()
5. Hermite 矩阵的特征值为正实数。 ()

二、填空题

1. 矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ， $\ker A$ 是 _____ 的子空间， $\operatorname{im} A$ 是 _____ 的子空间；若 n 阶方阵 B 满秩，则 $\ker B =$ _____， $\operatorname{im} B =$ _____。
2. 设 \mathbb{R}^2 中的子空间 $V_1 = \operatorname{span}\{[2, 0]^\top\}$ ， $V_2 = \operatorname{span}\{[0, 384]^\top\}$ ，则 $V_1 \cap V_2 =$ _____， $V_1 \cup V_2 =$ _____。
3. 设 A 为 4 阶方阵， A 的特征矩阵的初等因子组为 $\lambda, \lambda + 1, (\lambda + 1)^2$ ，则 A 的不变因子分别为 _____，_____，_____，_____。
4. 一个非零 λ 矩阵通过初等变换能化成的最简形式为 _____。
5. 矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 能次酉分解 ($A = UR$ ， U 为次酉矩阵， R 为正线上三角矩阵) 的条件是 _____。

三、

已知线性空间 $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ 的子空间

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & -x \\ y & -y \end{bmatrix} : \forall x, y \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{和} \quad V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -x & -y \end{bmatrix} : \forall x, y \in \mathbb{C} \right\}$$

- (1) 求 V_1 和 V_2 的基；
- (2) 求 $V_1 \cap V_2$ 的基；
- (3) 求 $V_1 + V_2$ 的基。

四、

已知 \mathbb{R}^3 中的线性变换 σ 在向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵表示为 $B =$ (一个 3×3 矩阵, 数忘了); $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_3$ 。

(1) 求 σ 在向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的矩阵表示;

(2) 已知 ξ 在 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为 $[1, -1, 0]^\top$, 求 $\sigma(\xi)$ 在 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标。

五、

已知 \mathbb{C}^3 上的向量 $\alpha_1 = [1, i, 0]^\top, \alpha_2 = [i, -1, 0]^\top, \alpha_3 = [1, 0, 1]^\top$, 求 α_3 在空间 $\text{span}\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 上的正交投影, 并简要说明所求的正交投影是否唯一?

说明: (数字可能有差池, 但是 $i\alpha_1 = \alpha_2$, 是线性相关的)

六、

已知矩阵 A 为 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

(1) 求 A 的特征矩阵的行列式因子和 Smith 标准型;

(2) 求 A 的 Jordan 标准型和相似变换矩阵。

七、

已知复矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 A 的奇异值分解。