哈尔滨工业大学（深圳）2025 年秋季学期

矩阵分析试题

（朱萍萍老师班）（回忆版）

注意：本次考试为闭卷考试，考试时间为 120 分钟，总分 100 分。不允许使用计算器。

一、

$\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上定义空间 $W:\{A\in\mathbb{R}^{2\times 2}\mid AP=PA\}$，$P$ 为固定矩阵。

(1) 证明 W 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的线性子空间。

(2) 给定 $P=\begin{bmatrix}1&3\\0&2\end{bmatrix}$，求 W 的一组基，并写出维数。

(3) 在 (2) 基础上，给出 W 中元素 A 的一般形式。

二、

$$A=\begin{bmatrix}-1&-2&-1&0\\2&-1&0&-1\\0&0&-1&-2\\0&0&2&-1\end{bmatrix}。$$

(1) 求特征矩阵 $\lambda I-A$ 的各阶行列式因子。

(2) 求特征矩阵 $\lambda I-A$ 的不变因子，并写出 Smith 标准型。

(3) 在复数域 $\mathbb{C}$ 上写出 A 的 Jordan 标准型 J。

三、

$f_1(x)=1-x, f_2(x)=1+x^2, f_3(x)=x+2x^2$ 在包括次数不大于 2 的多项式及零多项式的集合 $\mathbb{R}[x]_2$ 上。

(1) 证明 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 是 $\mathbb{R}[x]_2$ 的一组基。

(2) 有变换 $\sigma:\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}[x]_2$，使得 $\sigma(f_1(x))=2+x^2, \sigma(f_2(x))=x, \sigma(f_3(x))=1+x+x^2$。求变换 σ 的矩阵表示 A（入口基与出口基均为 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$）。

(3) 求 $\sigma(1+2x+3x^2)$。

(4) 在 $\mathbb{R}[x]_2$ 上定义内积 $\langle f,g\rangle=\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$，求基 $1,x,x^2$ 的度量矩阵。

四、

在 $\mathbb{C}^3$ 上，给定 $\beta=\begin{bmatrix}-2\mathrm{i}\\1\\-\mathrm{i}\end{bmatrix}$ 与 $\alpha_1=\begin{bmatrix}-\mathrm{i}\\1\\1\end{bmatrix}, \alpha_2=\begin{bmatrix}0\\0\\\mathrm{i}\end{bmatrix}$，子空间 $W=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}$，求 β 在 W 上的正交投影 α^*，并求解 $\displaystyle\min_{x_1,x_2\in\mathbb{C}}\|\beta-x_1\alpha_1-x_2\alpha_2\|$。

五、

(1) 说明 $A=\begin{bmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$ 能否酉相似于对角阵。

(2) B 为 n 维正规矩阵，且有 $B^2-3B+2E=0$，证明 B 为 Hermite 矩阵。

六、

(1) 什么是矩阵的奇异值分解？

(2) 有映射 $y=Ax$，其中 $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$。给出一组 $\mathbb{R}^2$ 上的标准正交基 v_1,v_2 与一组 $\mathbb{R}^3$ 上的标准正交基 u_1,u_2,u_3，使得在这两组基下 $\tilde{y}$ 与 $\tilde{x}$ 解耦，即 $\tilde{y}$ 的各分量仅取决于 $\tilde{x}$ 中的对应方向分量或不受输入影响。

哈尔滨工业大学（深圳）2025 年秋季学期

矩阵分析试题参考答案

（朱萍萍老师班，学生版）

注意：以下记单位阵为 I。

一、

解答

(1) 只需验证三点：零元素、加法封闭性和数乘封闭性。

(i) 零元素：即为零矩阵。因为零矩阵满足 $0P = P0$。

(ii) 加法封闭性：设 A, B 满足 $AP = PA, BP = PB$，则 $(A+B)P = AP + BP = PA + PB = P(A+B)$。

(iii) 数乘封闭性：设 A 满足 $AP = PA$，对于数 $k \in \mathbb{R}$，有 $(kA)P = kAP = kPA = P(kA)$。

(2) 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，则

$$PA = \begin{bmatrix} a & 3a+2b \\ c & 3c+2d \end{bmatrix}, \quad AP = \begin{bmatrix} a+3c & b+3d \\ 2c & 2d \end{bmatrix}$$

则可得方程组

$$\begin{cases} a = a + 3c \\ 3a + 2b = b + 3d \\ c = 2c \\ 3c + 2d = 2d \end{cases} \implies \begin{cases} c = 0 \\ 3a + b = 3d \end{cases}$$

上述第二个方程有两个自由变量，不妨取为 a, b，则分别令 $a = 1, b = 0$ 和 $a = 0, b = 3$ 可得 W 的一个基是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

且 $\dim W = 2$。

(3) 对于题意有两种理解方式：如果将 P 理解为第 (2) 问中的矩阵，则 A 的表达式即为上问所求基的线性组合；

如果理解成“用上问作为引子来对一般的 P 进行讨论”，则解法为：对于一般的 P，设 $P=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$，则

$$PA=\begin{bmatrix} aa_1+b_1c & a_1b+b_1d \\ c_1a+d_1c & c_1b+dd_1 \end{bmatrix}, \quad AP=\begin{bmatrix} aa_1+bc_1 & ab_1+bd_1 \\ ca_1+dc_1 & cb_1+dd_1 \end{bmatrix}$$

则可得方程组

$$\begin{cases} aa_1+b_1c=aa_1+bc_1 \\ a_1b+b_1d=ab_1+bd_1 \\ c_1a+d_1c=ca_1+dc_1 \\ c_1b+dd_1=cb_1+dd_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_1c=bc_1 \\ a_1b+b_1d=ab_1+bd_1 \\ c_1a+d_1c=ca_1+dc_1 \end{cases}$$

当 $b_1=c_1=0$ 时，上述第一个方程未对 b,c 作出限制，而后两个方程可整理为

$$\begin{cases} a_1b=bd_1 \\ d_1c=ca_1 \end{cases}$$

则若 $a_1=d_1$，b,c 可任取，$W=\mathbb{R}^{2\times 2}$；否则，$b=c=0$，W 由所有对角矩阵构成。

若 b_1,c_1 不全为 0（或全不为 0），上述第一个方程的解具有形式

$$c=kc_1, b=kb_1, k\in\mathbb{R}$$

将其代入下面两个方程有

$$\begin{cases} ka_1b_1+b_1d=ab_1+kb_1d_1 \\ c_1a+kd_1c_1=kc_1a_1+dc_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_1(ka_1+d-a-kd_1)=0 \\ c_1(ka_1+d-a-kd_1)=0 \end{cases}$$

则必有 $k(a_1-d_1)=a-d$。则可取 $a=ka_1+l, d=kd_1+l$（可验证这就是该方程的通解），因此 W 中的矩阵形如

$$\begin{bmatrix} ka_1+l & kb_1 \\ kc_1 & kd_1+l \end{bmatrix}=kP+lI$$

验证得上述 $b_1=c_1=0$ 且 $a_1\neq d_1$ 的情况也满足此情形。因此 A 的一般形式是

$$\begin{cases} \mathbb{R}^{2\times 2}\text{ 中的任意矩阵}, & \text{若 } P \text{ 为纯量矩阵（单位阵的数乘倍）} \\ kP+lI, k,l\in\mathbb{R} & \text{其余情况} \end{cases}$$

二、

解答

(1) 特征矩阵

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & \lambda+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

则 1 阶行列式因子 $D_1(\lambda)=1$；注意到右上角 2×2 的块可知 2 阶行列式因子 $D_2(\lambda)=1$；注意到由第 1、3、4 列，前三行构成的子式为 $-(\lambda+1)^2+4$，而由后三列前三行构成的子式为 $-4(\lambda+1)$，因此 3 阶行列式因子 $D_3(\lambda)=1$；注意到该矩阵为分块上三角矩阵，所以 4 阶行列式因子 $D_4(\lambda)=[(\lambda+1)^2+4]^2=(\lambda^2+2\lambda+5)^2=[\lambda-(-1+2\mathrm{i})]^2[\lambda-(-1-2\mathrm{i})]^2$。

(2) 不变因子为 $d_1=D_1=1, d_2=D_2/D_1=1, d_3=D_3/D_2=1, d_4=D_4/D_3=[\lambda-(-1+2\mathrm{i})]^2[\lambda-(-1-2\mathrm{i})]^2$。

Smith 标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & [\lambda-(-1+2\mathrm{i})]^2[\lambda-(-1-2\mathrm{i})]^2 \end{bmatrix}$$

(3) 初等因子组为 $[\lambda-(-1+2\mathrm{i})]^2, [\lambda-(-1-2\mathrm{i})]^2$，所以 Jordan 标准形

$$J = \begin{bmatrix} -1-2\mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+2\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1+2\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

三、

解答

(1) 线性无关性：设数 $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$，令

$$a_1(1-x)+a_2(1+x^2)+a_3(x+2x^2)=0$$

比较两边的系数可得

$$\begin{cases} a_1+a_2=0 \\ -a_1+a_3=0 \\ a_2+2a_3=0 \end{cases}$$

由前两个式子得出 $a_1=a_3=-a_2$，代入第三个式子可得 $a_1=a_2=a_3=0$。则 f_1,f_2,f_3 线性无关。

张成 $\mathbb{R}[x]_2$：对于任意次数不大于 2 的多项式 $k_0+k_1x+k_2x^2$，有

$$a_1(1-x)+a_2(1+x^2)+a_3(x+2x^2)=k_0+k_1x+k_2x^2$$

则

$$\begin{cases} a_1+a_2=k_0 \\ -a_1+a_3=k_1 \\ a_2+2a_3=k_2 \end{cases}$$

可解得 $a_3=k_2-(k_0+k_1)$，$a_1=a_3-k_1=k_2-(k_0+2k_1)$，$a_2=k_0-a_1=-k_2+2k_0+2k_1$。因此任给一个次数不大于 2 的多项式，其总能用 f_1,f_2,f_3 线性表示。

(2) 根据上问，可以将 $\sigma(f_1(x)),\sigma(f_2(x)),\sigma(f_3(x))$ 线性表示为

$$\begin{cases} \sigma(f_1(x))=2+x^2=-f_1(x)+3f_2(x)-f_3(x) \\ \sigma(f_2(x))=x=-2f_1(x)+2f_2(x)-f_3(x) \\ \sigma(f_3(x))=1+x+x^2=-2f_1(x)+3f_2(x)-f_3(x) \end{cases}$$

将这些表示系数组合起来即得矩阵表示

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(3) $1+2x+3x^2=-2f_1(x)+3f_2(x)$，则利用上述矩阵表示可得

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

得到 $\sigma(1+2x+3x^2)=-4+3x-2x^2$。

(4) $\langle 1,1\rangle=\int_0^1 \mathrm{d}x=1$，$\langle 1,x\rangle=\langle x,1\rangle=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=1/2$，$\langle x,x\rangle=\langle 1,x^2\rangle=\langle x^2,1\rangle=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=1/3$，$\langle x,x^2\rangle=\langle x^2,x\rangle=\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x=1/4$，$\langle x^2,x^2\rangle=\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x=1/5$。

则度量矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

四、

解答

α_1, α_2 的 Gram 矩阵为

$$G = \begin{bmatrix} 3 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}$$

其逆为

$$G^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 3 \end{bmatrix}$$

又有

$$(\alpha_1, \beta) = (\mathrm{i})(-2\mathrm{i}) + 1 + (-\mathrm{i}) = 3 - \mathrm{i}, (\alpha_2, \beta) = -1$$

因此由 $[x_1, x_2]^T = G^{-1}[(\alpha_1, \beta), (\alpha_2, \beta)]^T$，有

$$x_1 = 3/2, x_2 = (3\mathrm{i} - 2)/2$$

则正交投影是

$$\alpha^* = 3/2 \times \alpha_1 + (3\mathrm{i} - 2)/2 \times \alpha_2 = [-3\mathrm{i}/2, 3/2, -\mathrm{i}]^T$$

距离为

$$\|\beta - \alpha^*\| = \|[-\mathrm{i}/2, -1/2, 0]^T\| = \sqrt{2}/2.$$

五、

(1) **解答** 复矩阵酉相似于对角阵当且仅当其为正规矩阵。

$$A^H A = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1-\mathrm{i} & 1 \\ 1+\mathrm{i} & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AA^H = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

则 $A^H A \neq AA^H$，A 不是正规的，因此 A 不能酉相似对角化。

(2)

证明. 由 $B^2 - 3B + 2I = 0$ 可得 $(B-2I)(B-I) = 0$，则对于任意向量 $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$，均有 $(B-2I)(B-I)x = 0$。则仅有以下两种情况，且至少发生其中之一：i) 若 $(B-I)x = 0$，则 1 是 B 的特征值，x 是对应于该特征值的特征向量；ii) 若 $(B-I)x \neq 0$，则 2 是 B 的

特征值，$(B-I)x$ 是对应于该特征值的特征向量。则 B 的特征值为 1 和（或）2，且没有其他特征值。因此 B 的特征值全为实数。

由于 B 是正规的，因此存在酉矩阵 $U\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$B=U^HDU, D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

特别地，D 为实矩阵，则 $D^H=D$。则 $B^H=U^HD^HU=U^HDU=B$，则 B 是 Hermite 矩阵。 □

六、

解答

(1) 对于复矩阵 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，存在酉矩阵 $U\in\mathbb{C}^{m\times m}, V\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$AV=U\begin{bmatrix}\varDelta & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

其中 $\varDelta=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)$，$\sigma_1,\cdots,\sigma_r$ 称为矩阵 A 的奇异值，定义为 A^HA 的特征值的算术平方根。

(2) 此即计算 A 的奇异值分解，并将奇异值分解中的矩阵 U 的各列作为 u_1,u_2,u_3，V 的各列作为 v_1,v_2。这是因为若令

$$y=U\tilde{y}, x=V\tilde{x}$$

则 $y=Ax$ 可改写为

$$U\tilde{y}=AV\tilde{x} \implies U\tilde{y}=U\begin{bmatrix}\varDelta & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^HV\tilde{x} \implies \tilde{y}=\begin{bmatrix}\varDelta & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\tilde{x}$$

对于 $\varDelta$ 的部分，$\tilde{y}$ 取决于 $\tilde{x}$ 中的对应方向分量；对于零矩阵的部分，$\tilde{y}$ 不受输入影响。

下面进行计算。首先，计算 A^HA 的特征值并将其对角化：

$$A^HA=\begin{bmatrix}6 & 1\\ 1 & 6\end{bmatrix} \implies |\lambda I-A^HA|=(\lambda-6)^2-1=(\lambda-5)(\lambda-7)$$

则 A 的奇异值是 $\sqrt{5}$ 和 $\sqrt{7}$。解方程 $(7I-A^HA)v_1=0$，得到 $v_1=\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]^T$；解方程 $(5I-A^HA)v_2=0$，得到 $v_2=\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]^T$。

下面求 u_1, u_2, u_3。首先，根据 $AV = U \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，有

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7}} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{7}} \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

记 $U_r = [u_1, u_2]$，解 $U_r^H u_3 = 0$（正交性），补全 U 的第三列：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} u_3 = 0 \implies u_3 = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{35}} \\ -\frac{3}{\sqrt{35}} \end{bmatrix}$$

则上述 u_1, u_2, u_3 和 v_1, v_2 即为所求。