

矩阵分析试题

（樊一民老师班）（回忆版）

注意：本次考试为闭卷考试，考试时间为 120 分钟，总分 100 分。不允许使用计算器。

一、判断题：对的划“√”，错的划“×”。（10 分，每小题 2 分）

1. 设三个向量 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 线性相关，则其中任意一个向量都可以由另外两个向量线性表示。 ()
2. 若一个矩阵是正规矩阵，则它的酉相似矩阵也为正规矩阵。 ()
3. λ 矩阵的一种初等行变换是将一行乘以非零多项式。 ()
4. 若一组基的 Gram 矩阵等于单位阵，则这组基为标准正交基。 ()
5. Hermite 矩阵的特征值为正实数。 ()

二、填空题

1. 矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ， $\ker A$ 是 _____ 的子空间， $\operatorname{im} A$ 是 _____ 的子空间；若 n 阶方阵 B 满秩，则 $\ker B =$ _____， $\operatorname{im} B =$ _____。
2. 设 \mathbb{R}^2 中的子空间 $V_1 = \operatorname{span}\{[2, 0]^\top\}$ ， $V_2 = \operatorname{span}\{[0, 384]^\top\}$ ，则 $V_1 \cap V_2 =$ _____， $V_1 \cup V_2 =$ _____。
3. 设 A 为 4 阶方阵， A 的特征矩阵的初等因子组为 $\lambda, \lambda + 1, (\lambda + 1)^2$ ，则 A 的不变因子分别为 _____，_____，_____，_____。
4. 一个非零 λ 矩阵通过初等变换能化成的最简形式为 _____。
5. 矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 能次酉分解（ $A = UR$ ， U 为次酉矩阵， R 为正线上三角矩阵）的条件是 _____。

三、

已知线性空间 $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ 的子空间

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & -x \\ y & -y \end{bmatrix} : \forall x, y \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{和} \quad V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -x & -y \end{bmatrix} : \forall x, y \in \mathbb{C} \right\}$$

- (1) 求 V_1 和 V_2 的基；
- (2) 求 $V_1 \cap V_2$ 的基；
- (3) 求 $V_1 + V_2$ 的基。

四、

已知 \mathbb{R}^3 中的线性变换 σ 在向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵表示为 $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ^①;

$\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_3$ 。

(1) 求 σ 在向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的矩阵表示 C ;

(2) 已知 ξ 在 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为 $[1, -1, 0]^\top$, 求 $\sigma(\xi)$ 在 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标。

五、

已知 \mathbb{C}^3 上的向量 $\alpha_1 = [1, i, 0]^\top, \alpha_2 = [i, -1, 0]^\top, \alpha_3 = [1, 0, 1]^\top$, 求 α_3 在空间 $\text{span}\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 上的正交投影, 并简要说明所求的正交投影是否唯一?

六、

已知矩阵 A 为 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

(1) 求 A 的特征矩阵的行列式因子和 Smith 标准型;

(2) 求 A 的 Jordan 标准型和相似变换矩阵。

七、

已知复矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 A 的奇异值分解。

① 一个 3×3 矩阵, 数字忘了。此处随便放了一个矩阵。

矩阵分析试题参考答案

（樊一民老师班，学生版）

一、判断题：对的划“√”，错的划“×”。（10 分，每小题 2 分）

1. 解答 错误。容易举出 \mathbb{R}^3 中的反例： $\alpha_1 = [1, 0, 0]^T, \alpha_2 = [0, 1, 0]^T, \alpha_3 = [0, 2, 0]^T$ 。这三个向量线性相关，但是 α_1 无法由 α_2 和 α_3 线性表示。
2. 解答 正确。若矩阵 A 为正规的，则 $A^H A = A A^H$ 。其酉相似矩阵可表示为 $B = U^H A U$ ，其中 U 为酉矩阵。则 $B^H B = U^H A^H U U^H A U = U^H A^H A U$ ， $B B^H = U^H A U U^H A^H U = U^H A A^H U$ ，因此 $B^H B = B B^H$ 。
3. 解答 错误。 λ 矩阵的初等行变换有三种：将两行互换位置；将某行乘以非零常数；将某行乘以多项式加到另外一行。
4. 解答 正确。基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 的 Gram 矩阵是

$$\begin{bmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_n, \alpha_1) & (\alpha_n, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{bmatrix}$$

其等于单位阵意味着

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

这就意味着这组基是标准正交基。

5. 解答 错误。Hermite 矩阵的特征值为实数；正定 Hermite 矩阵的特征值为正实数。

二、填空题

1. 解答 $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \{0\}, \mathbb{R}^n$
2. 解答 $\{0\}, \{[x \ y]^T \mid x, y \in \mathbb{R}, x = 0 \text{ 或 } y = 0\}$ 。注意和与并的区别。
3. 解答 $1, 1, \lambda + 1, \lambda(\lambda + 1)^2$ 。从高次往低次构造不变因子： $d_4(\lambda) = (\lambda + 1)^2 \lambda$ （取各因式中的最高次并组合）； $d_3(\lambda) = \lambda + 1$ （在剩下的初等因子中取各因式中的最高次并组合），此时初等因子已用完，所以 $d_2 = d_1 = 1$ ，
4. 解答 Smith 标准形
5. 解答 $n < m$ 且 A 列满秩

三、

解答

(1)

$$\begin{bmatrix} x & -x \\ y & -y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

并且容易验证 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 线性无关 (这两个矩阵不为彼此的数乘倍), 因此这两个矩阵即构成 V_1 的一组基。同理,

$$\begin{bmatrix} x & y \\ -x & -y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

同样容易验证上述两个矩阵线性无关, 因此这两个矩阵构成 V_2 的一组基。

(2) $V_1 \cap V_2$ 的元素 v 满足

$$v = x_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

整理得下述联立方程:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ -x_1 = x_4 \\ x_2 = -x_3 \\ -x_2 = -x_4 \end{cases} \implies x_1 = -x_2 = x_3 = -x_4$$

特别地, 有 $x_2 = -x_1$ 。故

$$v = x_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - x_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

则 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ 是 $V_1 \cap V_2$ 的基。

(3) $V_1 + V_2$ 由下面四个向量张成: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 。注意

到

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

结合维数公式得到 $\dim(V_1 + V_2) = 3$, 因此可选取后三个矩阵组成 $V_1 + V_2$ 的一组基。

(这四个矩阵的线性相关关系, 可以通过将它们都表示成 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的线性组合, 转化成系数矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 的齐

次线性方程组来考虑)

四、

解答 设从基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 到基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 的过渡矩阵为 P 。依题意得 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

(1)

$$[\sigma(\beta_1) \quad \sigma(\beta_2) \quad \sigma(\beta_3)] = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3] C \quad (1)$$

$$[\sigma(\alpha_1) \quad \sigma(\alpha_2) \quad \sigma(\alpha_3)] = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3] B \quad (2)$$

而

$$[\sigma(\beta_1) \quad \sigma(\beta_2) \quad \sigma(\beta_3)] = [\sigma(\alpha_1) \quad \sigma(\alpha_2) \quad \sigma(\alpha_3)] P$$

故由(2)得到

$$[\sigma(\beta_1) \quad \sigma(\beta_2) \quad \sigma(\beta_3)] = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3] BP$$

由(1)得到

$$[\sigma(\beta_1) \quad \sigma(\beta_2) \quad \sigma(\beta_3)] = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3] PC$$

结合上述两式和同一基下坐标唯一性有 $C = P^{-1}BP$, 因此

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 坐标为

$$C[1, -1, 0]^T = [3, -1, 0]^T.$$

五、

解答 注意到 $i\alpha_1 = \alpha_2$, 因此实际上要求的是往 $\text{span}\{\alpha_1\}$ 上的正交投影。正交投影矩阵

$$P = [1, i, 0]^T ([1, -i, 0][1, i, 0]^T)^{-1} [1, -i, 0] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则正交投影为 $w = P\alpha_3 = \frac{1}{2}[1, i, 0]^T$ 。(正交投影矩阵的推导可考虑法方程 $A^H Ax = A^H b$)。

所求正交投影是唯一的。论证：设 $x \in \text{span}\{\alpha_1\}$ 。令 $y = w - x \in \text{span}\{\alpha_1\}$ 。那么

$$\alpha_3 - x = \alpha_3 - w + w - x = \alpha_3 - w + y.$$

因为 $\alpha_3 - w \perp \text{span}\{\alpha_1\}$, 所以有 $y \perp \alpha_3 - w$, 故由毕达哥拉斯定理 (勾股定理)

$$\|\alpha_3 - x\|^2 = \|\alpha_3 - w\|^2 + \|y\|^2 \geq \|\alpha_3 - w\|^2.$$

注意等号成立仅当 $y = 0$, 即 $x = w$, 能最小化 α_3 到 $\text{span}\{\alpha_1\}$ 之距离的向量是唯一的。

六、

解答

(1) 特征矩阵

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

求其行列式因子: $D_1(\lambda) = 1$; $D_2(\lambda) = 1$ (前两行前两列的子式 $\lambda(\lambda - 3)$, 第一、三行第一、三列的子式 $(\lambda - 2)(\lambda + 2)$); $D_3(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3)$ 。

因此不变因子为 $d_1(\lambda) = D_1(\lambda) = 1$; $d_2(\lambda) = D_2(\lambda)/D_1(\lambda) = 1$; $d_3(\lambda) = D_3(\lambda)/D_2(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3)$, 则 Smith 标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3) \end{bmatrix}$$

(2) 初等因子组为 $(\lambda - 2), (\lambda + 2), (\lambda - 3)$ 。因此 Jordan 标准形是

$$J = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

下面求相似变换矩阵。根据 $AP = PJ$ 有 $[Ap_1, Ap_2, Ap_3] = [p_1, p_2, p_3]J$, 则 $Ap_1 = -2p_1$, $Ap_2 = 2p_2$, $Ap_3 = 3p_3$ 。依次求解这三个方程:

$$\text{解第一个方程即解 } (A+2I)p_1 = 0. A+2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 则 } p_1 = [1, 0, -1]^T.$$

$$\text{解第二个方程即解 } (A-2I)p_2 = 0. A-2I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \text{ 则 } p_2 = [1, 0, 1]^T.$$

$$\text{解第三个方程即解 } (A-3I)p_3 = 0. A-3I = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \text{ 则 } p_3 = [0, 1, 0]^T.$$

因此变换矩阵是

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

七、

首先, 计算 $A^H A$ 的特征值并将其对角化:

$$A^H A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |\lambda I - A^H A| = (\lambda - 4)(\lambda - 1)$$

则 A 的奇异值是 2 和 1。上述矩阵已经是对角阵, 则容易得到 $A^H A$ 相应于两个特征值的特征向量 $v_1 = [1, 0]^T$, $v_2 = [0, 1]^T$ 。因此 $V = I$ 。

下面求 U 。首先, 根据 $AV = U \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 有

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = A v_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$$

记 $U_r = [u_1, u_2]$, 解 $U_r^H u_3 = 0$ (正交性), 补全 U 的第三列:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} u_3 = 0 \Rightarrow u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此 A 的奇异值分解是 $A = U\Sigma V^H$ ，其中 U, V 如上所示， $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。