

矩阵分析试题

（牛牧青老师班）（回忆版）

注意：本次考试为闭卷考试，考试时间为 120 分钟，总分 100 分。不允许使用计算器。

一、判断题：对的划“√”，错的划“×”。（10 分，每小题 2 分）

1. 设三个向量 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 线性相关，则其中任意一个向量都可以由另外两个向量线性表示。 ()
2. 矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ，则其像空间 $\text{im } A$ 是 \mathbb{C}^n 的线性子空间。 ()
3. 对于数字矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ，其特征矩阵的不变因子作为多项式的次数之和为 n 。 ()
4. 上三角矩阵若是正规的，则一定为对角矩阵。 ()
5. 正规矩阵的初等因子一定都是一次因式。 ()

二、填空题

1. 对于复线性空间 \mathbb{C} ，若将其视为复数域上的线性空间，则其是 _____ 维的；而若将其视为实数域上的线性空间，则其是 _____ 维的。（4 分）
2. 设 V 为酉空间， $\alpha, \beta \in V$ ， $\|\alpha\| = 1, \|\beta\| = 2$ ，内积 $(\alpha, \beta) = 1 + i$ ， σ 为 V 上的酉变换，则向量组 $\{\alpha, \beta\}$ 的 Gram 矩阵是 _____； $\|\sigma(-3\beta)\| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（6 分）
3. 设复矩阵 A 的特征矩阵的初等因子为 $\lambda, (\lambda + 1)^2, \lambda + 1, \lambda + 1$ ，则其非常数不变因子有 _____ 个，4 阶行列式因子是 _____。（4 分）

三、

设 V 为三维线性空间，其中有两组基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 和 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ ，且满足 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 。定义 V 上的线性变换 σ ，其在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下

的矩阵表示是 $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 。

- （1）求出从基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 到基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 的过渡矩阵 P ；（4 分）
- （2）求线性变换 σ 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 下的矩阵表示 C ；（5 分）
- （3）若向量 ξ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的坐标为 $[0, 1, 1]^T$ ，求 $\sigma(\xi)$ 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 下的坐标；（4 分）
- （4）求线性变换 σ 的特征值和特征向量。（6 分）

四、

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}。$$

- (1) 多项式矩阵的初等变换有哪几种? (3 分)
- (2) 求矩阵 A 的特征矩阵的 Smith 标准形和初等因子; (6 分)
- (3) 求 A 的 Jordan 标准形和相似变换矩阵。(8 分)

五、(8 分)

设 Hermite 矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 。证明: A 是正定矩阵的充要条件是 A 的 n 个特征值全为正实数。

六、

$$\text{设矩阵 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

- (1) 将 A 的列向量组标准正交化。(6 分)
- (2) 将 A 分解为 $A = UR$, 其中 U 是酉矩阵, R 是上三角矩阵。(5 分)
- (3) 求向量 $[0, 2, 1]^T$ 在线性空间 $\text{span}\{[1, i, 0]^T\}$ 上的正交投影。(5 分)
- (4) 若 \mathbb{C}^3 中的向量 ξ 可以被 A 的列向量线性表示, 那么 ξ 在线性子空间 $\text{im } A$ 的正交投影是多少? (2 分)

七、(14 分)

$$\text{求 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ 的奇异值分解。}$$

矩阵分析试题参考答案

（牛牧青老师班，学生版）

一、判断题

1. **解答** 错误。容易举出 \mathbb{R}^3 中的反例： $\alpha_1 = [1, 0, 0]^T, \alpha_2 = [0, 1, 0]^T, \alpha_3 = [0, 2, 0]^T$ 。这三个向量线性相关，但是 α_1 无法由 α_2 和 α_3 线性表示。
2. **解答** 错误。其像空间由 $m \times 1$ 列向量构成，所以是 \mathbb{C}^m 的子空间。
3. **解答** 正确。 n 阶特征矩阵的所有不变因子之积等于其行列式（ n 次多项式），因此所有不变因子的次数之和为 n 。
4. **解答** 正确。可以在“正规矩阵一定可以酉相似对角化”的证明中找到。过程如下：对矩阵的大小用归纳法。 1×1 矩阵的情形是平凡的，因为任意 1×1 矩阵都是对角阵。

假设我们已经证明任意 $(n-1) \times (n-1)$ 上三角正规矩阵都是对角的，现在要证明这对于 $n \times n$ 矩阵也是成立的。令 N 是 $n \times n$ 上三角正规矩阵。可将其写为

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & N_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

其中 N_1 是 $(n-1) \times (n-1)$ 上三角矩阵。

我们来比较 N^*N 和 NN^* 左上角（第一行第一列）的项。直接计算表明

$$(N^*N)_{1,1} = \bar{a}_{1,1}a_{1,1} = |a_{1,1}|^2$$

且有

$$(NN^*)_{1,1} = |a_{1,1}|^2 + |a_{1,2}|^2 + \cdots + |a_{1,n}|^2.$$

因此， $(N^*N)_{1,1} = (NN^*)_{1,1}$ 当且仅当 $a_{1,2} = \cdots = a_{1,n} = 0$ 。因此，矩阵 N 形如

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & N_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

从上述表达式可得

$$N^*N = \left(\begin{array}{c|ccc} |a_{1,1}|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & N_1^*N_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right), \quad NN^* = \left(\begin{array}{c|ccc} |a_{1,1}|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & N_1N_1^* & \\ 0 & & & \end{array} \right),$$

因此 $N_1^*N_1 = N_1N_1^*$, 这意味着矩阵 N_1 是正规的, 由归纳假设可得它是对角的。于是矩阵 N 也是对角的。

5. **解答** 正确。正规矩阵一定可以酉相似对角化, 所以其初等因子一定都是一次因式。

二、填空题

1. **解答** 一; 二

2. **解答** $\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 4 \end{bmatrix}$; 6。 $G = \begin{bmatrix} (\alpha, \alpha) & (\alpha, \beta) \\ (\beta, \alpha) & (\beta, \beta) \end{bmatrix}$; 酉变换保持范数, 所以 $\|\sigma(-3\beta)\| = \|(-3\beta)\| = \sqrt{(-3\beta, -3\beta)} = \sqrt{9(\beta, \beta)} = \sqrt{36} = 6$ 。

3. **解答** 3; $(\lambda+1)^2$ 。初等因子次数之和为 5, 所以 A 是 5 阶矩阵。从高次往低次构造不变因子: $d_5(\lambda) = (\lambda+1)^2\lambda$ (取各因式中的最高次并组合); $d_4(\lambda) = \lambda+1$ (在剩下的初等因子中取各因式中的最高次并组合), $d_3(\lambda) = \lambda+1$, 此时初等因子已用完, 所以 $d_2 = d_1 = 1$, 非常数不变因子共有 3 个。4 阶行列式因子等于 $d_1d_2d_3d_4 = (\lambda+1)^2$ 。

三、

解答

- (1) 题目给出了用 α 表示 β 的方法。故由过渡矩阵定义 $\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} P^{-1}$,

$$\text{依题意得 } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 所以 } P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

- (2)

$$\begin{bmatrix} \sigma(\beta_1) & \sigma(\beta_2) & \sigma(\beta_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} C \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma(\alpha_1) & \sigma(\alpha_2) & \sigma(\alpha_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} B \quad (2)$$

而

$$\begin{bmatrix} \sigma(\beta_1) & \sigma(\beta_2) & \sigma(\beta_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma(\alpha_1) & \sigma(\alpha_2) & \sigma(\alpha_3) \end{bmatrix} P^{-1}$$

故由(2)得到

$$\begin{bmatrix} \sigma(\beta_1) & \sigma(\beta_2) & \sigma(\beta_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} B P^{-1}$$

由(1)得到

$$\begin{bmatrix} \sigma(\beta_1) & \sigma(\beta_2) & \sigma(\beta_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} P^{-1} C$$

结合上述两式和同一基下坐标唯一性有 $C = P B P^{-1}$, 计算得

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

(计算技巧: 注意 P 和 P^{-1} 都是初等矩阵, 左乘 P 对应一系列行变换: 先将第一行减去第二行, 再将第二行减去第三行。右乘 P^{-1} 则代表一系列列变换: 先将第一列加到第二列, 再将第二列加到第三列)

(3) $\xi = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, 则

$$\begin{aligned} \sigma(\xi) &= \begin{bmatrix} \sigma(\alpha_1) & \sigma(\alpha_2) & \sigma(\alpha_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} P B \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

故坐标为

$$P B \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

(4) 可以借助求线性变换矩阵表示的特征值和特征向量来完成。

$$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 2 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$$

因此 B 的特征值为 2, 1 (二重)。

求对应于特征值的特征向量:

解 $(2I - B)x = 0$, 有 $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 可知 $x_2 = 0$, 进而 $x_1 = 0$, x_3 没有限制, 因

此特征向量可取为 $[0, 0, 1]^T$ 。

解 $(I - B)x = 0$, 有 $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, 可知仅有一个自由变量, 选为 x_1 。取 $x_1 = 1$,

则 $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, 因此特征向量可取为 $[1, -1, 1]^T$ 。

综上, 线性变换 σ 的特征值和特征向量为: $\lambda_1 = 2$, 特征向量是 α_3 ; $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 特征向量是 $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$ 。

四、

解答

(1) 有三种:

(a) 将两行互换位置;

(b) 将某行乘以非零常数;

(c) 将某行乘以多项式加到另外一行。

(2) 特征矩阵

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

为求其 Smith 标准形, 先求其行列式因子: $D_1(\lambda) = 1$; $D_2(\lambda) = 1$ (前两行前两列的子式 $(\lambda - 1)(\lambda - 2)$, 后两行后两列的子式 $(\lambda - 2)^2$, 第一三列前两行的子式 $-(\lambda - 1)$); $D_3(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ 。

因此不变因子为 $d_1(\lambda) = D_1(\lambda) = 1$; $d_2(\lambda) = D_2(\lambda)/D_1(\lambda) = 1$; $d_3(\lambda) = D_3(\lambda)/D_2(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$, 则 Smith 标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 \end{bmatrix}$$

初等因子组为 $(\lambda - 1), (\lambda - 2)^2$ 。

(3) 由初等因子组知 Jordan 标准形为

$$J = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

下面求相似变换矩阵。根据 $AP = PJ$ 有 $[Ap_1, Ap_2, Ap_3] = [p_1, p_2, p_3]J$, 则 $Ap_1 = p_1$, $Ap_2 = 2p_2$, $Ap_3 = p_2 + 2p_3$ 。依次求解这三个方程:

解第一个方程即解 $(A - I)p_1 = 0$ 。 $A - I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 可知 $p_{1,3} = 0$, 进而

$p_{1,2} = 0$, 则 $p_1 = [1, 0, 0]^T$ 。

解第二个方程即解 $(A - 2I)p_2 = 0$ 。 $A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $p_{2,3} = 0$ 且

$p_{2,2} + p_{2,1} = 0$, 则 $p_2 = [1, -1, 0]^T$ 。

解第三个方程即解 $(A - 2I)p_3 = p_2$ 。可将这个方程看作: p_3 各坐标是 $A - 2I$ 的各列线性组合的系数, 则须取 $p_{3,3} = -1$, 再取 $p_{3,1} = 1, p_{3,2} = 0$ 即可。 $p_3 = [1, 0, -1]^T$ 。

因此变换矩阵是

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

五、

证明. A 是 Hermite 矩阵, 则 A 的特征值全为实数, $A = A^H$ 。

“ \Rightarrow ”: 设 A 正定, 则对任意非零的 $z \in \mathbb{C}^n$ 有 $z^H A z > 0$ 。特别地, 对特征向量 $z \neq 0$ 也有 $z^H A z > 0$ 。由于 $Az = \lambda z$, 所以 $z^H(\lambda z) = \lambda z^H z > 0$ 。因为 $z^H z > 0$, 所以 $\lambda > 0$, 则 A 的特征值全为正实数, 此方向得证。

“ \Leftarrow ”: 现设 A 的 n 个特征值全为正实数。由于 A 为 Hermite 矩阵, 所以其一定可以酉相似对角化, 即存在酉矩阵 $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得

$$U^H D U = A, D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

则 $A = U D U^H$ 。对 $z \neq 0$, 考察 $z^H A z$:

$$z^H A z = z^H U D U^H z = (U^H z)^H D U^H z$$

由于 U 是酉矩阵, 所以 U 可逆, 所以 $U^H z \neq 0$ 。记其为 y , 则上式写为

$$z^H A z = y^H D y = \sum_i \lambda_i \bar{y}_i y_i$$

由于 $\bar{y}_i y_i \geq 0$ (且不全为零), 且 $\lambda_i > 0$, 所以 $z^H A z > 0$ 。 $z = 0$ 时 $z^H A z = 0$ 为显然。因此 A 为正定, 此方向得证。 \square

六、

解答

(1) 运用 Schmidt 正交化过程:

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \alpha_1 = \alpha_2 - \frac{\alpha_1^H \alpha_2}{\alpha_1^H \alpha_1} \alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}(1 \times 0 + (-i \times 2) + 0 \times 1) \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

再进行标准化得到:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2)

$$U = [e_1, e_2] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}i}{3} \\ \frac{\sqrt{2}i}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

再根据上述过程:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \sqrt{2} e_1$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\beta_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\alpha_2 + i \alpha_1) \Rightarrow \alpha_2 = \sqrt{3} e_2 - \sqrt{2} i e_1$$

因此

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2}i \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(3) 方法一: 注意到待求的就是 α_2 在 α_1 张成的空间上的正交投影, 而 Schmidt 正交化过程中从 α_2 减掉的部分就是 α_2 在 α_1 张成的空间上的正交投影。因此该投影为

$$\frac{1}{2}(1 \times 0 + (-i \times 2) + 0 \times 1) \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

方法二：求正交投影矩阵 $P = [1, i, 0]^T([1, -i, 0][1, i, 0]^T)^{-1}[1, -i, 0]$ ，再用该矩阵乘以 $[0, 2, 1]^T$ ，得到相同答案。

(4) 即为 ξ 本身。

七、

解答 首先，计算 $A^H A$ 的特征值并将其对角化：

$$A^H A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |\lambda I - A^H A| = (\lambda - 5)^2 - 1 = (\lambda - 4)(\lambda - 6)$$

则 A 的奇异值是 $\sqrt{6}$ 和 2。解方程 $(6I - A^H A)v_1 = 0$ ，得到 $v_1 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]^T$ ；解方程 $(4I - A^H A)v_2 = 0$ ，得到 $v_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^T$ 。因此

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

下面求 U 。首先，根据 $AV = U \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，有

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

记 $U_r = [u_1, u_2]$ ，解 $U_r^H u_3 = 0$ （正交性），补全 U 的第三列：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} u_3 = 0 \Rightarrow u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

因此

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

因此 A 的奇异值分解是 $A = U \Sigma V^H$ ，其中 U, V 如上所示， $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。