

# 矩阵分析试题

(樊一民老师班) (回忆版)

注意：本次考试为闭卷考试，考试时间为 120 分钟，总分 100 分。不允许使用计算器。

## 一、判断题：对的划“√”，错的划“×”。(10分，每小题2分)

1. 设三个向量  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  线性相关，则其中任意一个向量都可以由另外两个向量线性表示。 ( )
2. 若一个矩阵是正规矩阵，则它的酉相似矩阵也为正规矩阵。 ( )
3.  $\lambda$  矩阵的一种初等行变换是将一行乘以非零多项式。 ( )
4. 若一组基的 Gram 矩阵等于单位阵，则这组基为标准正交基。 ( )
5. Hermite 矩阵的特征值为正实数。 ( )

## 二、填空题

1. 矩阵  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\ker A$  是 \_\_\_\_\_ 的子空间,  $\text{im } A$  是 \_\_\_\_\_ 的子空间; 若  $n$  阶方阵  $B$  满秩, 则  $\ker B = \underline{\quad}$ ,  $\text{im } B = \underline{\quad}$ 。
2. 设  $\mathbb{R}^2$  中的子空间  $V_1 = \text{span}\{[2, 0]^\top\}, V_2 = \text{span}\{[0, 384]^\top\}$ , 则  $V_1 \cap V_2 = \underline{\quad}$ ,  $V_1 \cup V_2 = \underline{\quad}$ 。
3. 设  $A$  为 4 阶方阵,  $A$  的特征矩阵的初等因子组为  $\lambda, \lambda + 1, (\lambda + 1)^2$ , 则  $A$  的不变因子分别为 \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_。
4. 一个非零  $\lambda$  矩阵通过初等变换能化成的最简形式为 \_\_\_\_\_。
5. 矩阵  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  能次酉分解 ( $A = UR$ ,  $U$  为次酉矩阵,  $R$  为正线上三角矩阵) 的条件是 \_\_\_\_\_。

## 三、

已知线性空间  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$  的子空间

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & -x \\ y & -y \end{bmatrix} : \forall x, y \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{和} \quad V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -x & -y \end{bmatrix} : \forall x, y \in \mathbb{C} \right\}$$

- (1) 求  $V_1$  和  $V_2$  的基;
- (2) 求  $V_1 \cap V_2$  的基;
- (3) 求  $V_1 + V_2$  的基。

四、

已知  $\mathbb{R}^3$  中的线性变换  $\sigma$  在向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  下的矩阵表示为  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ <sup>①</sup>;

$\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_3$ 。

(1) 求  $\sigma$  在向量组  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  下的矩阵表示  $C$ ;

(2) 已知  $\xi$  在  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  下的坐标为  $[1, -1, 0]^\top$ , 求  $\sigma(\xi)$  在  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  下的坐标。

五、

已知  $\mathbb{C}^3$  上的向量  $\alpha_1 = [1, i, 0]^\top, \alpha_2 = [i, -1, 0]^\top, \alpha_3 = [1, 0, 1]^\top$ , 求  $\alpha_3$  在空间  $\text{span}\{\alpha_1, \alpha_2\}$  上的正交投影, 并简要说明所求的正交投影是否唯一?

六、

已知矩阵  $A$  为  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

(1) 求  $A$  的特征矩阵的行列式因子和 Smith 标准型;

(2) 求  $A$  的 Jordan 标准型和相似变换矩阵。

七、

已知复矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 求  $A$  的奇异值分解。

---

① 一个  $3 \times 3$  矩阵, 数字忘了。此处随便放了一个矩阵。

# 矩阵分析试题参考答案

(樊一民老师班, 学生版)

## 一、判断题：对的划“√”，错的划“×”。(10分，每小题2分)

- 解答 错误。容易举出  $\mathbb{R}^3$  中的反例： $\alpha_1 = [1, 0, 0]^T, \alpha_2 = [0, 1, 0]^T, \alpha_3 = [0, 2, 0]^T$ 。这三个向量线性相关，但是  $\alpha_1$  无法由  $\alpha_2$  和  $\alpha_3$  线性表示。
- 解答 正确。若矩阵  $A$  为正规的，则  $A^H A = A A^H$ 。其酉相似矩阵可表示为  $B = U^H A U$ ，其中  $U$  为酉矩阵。则  $B^H B = U^H A^H U U^H A U = U^H A^H A U = B B^H$ ，因此  $B^H B = B B^H$ 。
- 解答 错误。 $\lambda$  矩阵的初等行变换有三种：将两行互换位置；将某行乘以非零常数；将某行乘以多项式加到另外一行。
- 解答 正确。基  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  的 Gram 矩阵是

$$\begin{bmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_n, \alpha_1) & (\alpha_n, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{bmatrix}$$

其等于单位阵意味着

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

这就意味着这组基是标准正交基。

- 解答 错误。Hermite 矩阵的特征值为实数；正定 Hermite 矩阵的特征值为正实数。

## 二、填空题

- 解答  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \{0\}, \mathbb{R}^n$
- 解答  $\{0\}, \{[x \ y]^T \mid x, y \in \mathbb{R}, x = 0 \text{ 或 } y = 0\}$ 。注意和与并的区别。
- 解答  $1, 1, \lambda + 1, \lambda(\lambda + 1)^2$ 。从高次往低次构造不变因子： $d_4(\lambda) = (\lambda + 1)^2 \lambda$  (取各因式中的最高次并组合)； $d_3(\lambda) = \lambda + 1$  (在剩下的初等因子中取各因式中的最高次并组合)，此时初等因子已用完，所以  $d_2 = d_1 = 1$ ，
- 解答 Smith 标准形
- 解答  $n < m$  且  $A$  列满秩

### 三、

解答

(1)

$$\begin{bmatrix} x & -x \\ y & -y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

并且容易验证  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  和  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  线性无关 (这两个矩阵不为彼此的数倍), 因此这两个矩阵即构成  $V_1$  的一组基。同理,

$$\begin{bmatrix} x & y \\ -x & -y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

同样容易验证上述两个矩阵线性无关, 因此这两个矩阵构成  $V_2$  的一组基。

(2)  $V_1 \cap V_2$  的元素  $v$  满足

$$v = x_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

整理得下述联立方程:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ -x_1 = x_4 \\ x_2 = -x_3 \\ -x_2 = -x_4 \end{cases} \implies x_1 = -x_2 = x_3 = -x_4$$

特别地, 有  $x_2 = -x_1$ 。故

$$v = x_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - x_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

则  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$  是  $V_1 \cap V_2$  的基。

(3)  $V_1 + V_2$  由下面四个向量张成:  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 。注意  
到

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

结合维数公式得到  $\dim(V_1 + V_2) = 3$ , 因此可选取后三个矩阵组成  $V_1 + V_2$  的一组基。

(这四个矩阵的线性相关关系, 可以通过将它们都表示成  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  的线性组合, 转化成系数矩阵为  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  的齐

次线性方程组来考虑)

#### 四、

解答 设从基  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  到基  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  的过渡矩阵为  $P$ 。依题意得  $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1)

$$[\sigma(\beta_1) \ \sigma(\beta_2) \ \sigma(\beta_3)] = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3] C \quad (1)$$

$$[\sigma(\alpha_1) \ \sigma(\alpha_2) \ \sigma(\alpha_3)] = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3] B \quad (2)$$

而

$$[\sigma(\beta_1) \ \sigma(\beta_2) \ \sigma(\beta_3)] = [\sigma(\alpha_1) \ \sigma(\alpha_2) \ \sigma(\alpha_3)] P$$

故由(2)得到

$$[\sigma(\beta_1) \ \sigma(\beta_2) \ \sigma(\beta_3)] = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3] BP$$

由(1)得到

$$[\sigma(\beta_1) \ \sigma(\beta_2) \ \sigma(\beta_3)] = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3] PC$$

结合上述两式和同一基下坐标唯一性有  $C = P^{-1}BP$ , 因此

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 坐标为

$$C[1, -1, 0]^T = [3, -1, 0]^T.$$

## 五、

**解答** 注意到  $i\alpha_1 = \alpha_2$ , 因此实际上要求的是往  $\text{span}\{\alpha_1\}$  上的正交投影。正交投影矩阵

$$P = [1, i, 0]^T ([1, -i, 0][1, i, 0]^T)^{-1} [1, -i, 0] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则正交投影为  $w = P\alpha_3 = \frac{1}{2}[1, i, 0]^T$ 。（正交投影矩阵的推导可考虑法方程  $A^H A x = A^H b$ ）。

所求正交投影是唯一的。论证：设  $x \in \text{span}\{\alpha_1\}$ 。令  $y = w - x \in \text{span}\{\alpha_1\}$ 。那么

$$\alpha_3 - x = \alpha_3 - w + w - x = \alpha_3 - w + y.$$

因为  $\alpha_3 - w \perp \text{span}\{\alpha_1\}$ , 所以有  $y \perp \alpha_3 - w$ , 故由毕达哥拉斯定理（勾股定理）

$$\|\alpha_3 - x\|^2 = \|\alpha_3 - w\|^2 + \|y\|^2 \geq \|\alpha_3 - w\|^2.$$

注意等号成立仅当  $y = 0$ , 即  $x = w$ , 能最小化  $\alpha_3$  到  $\text{span}\{\alpha_1\}$  之距离的向量是唯一的。

## 六、

**解答**

(1) 特征矩阵

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

求其行列式因子:  $D_1(\lambda) = 1$ ;  $D_2(\lambda) = 1$  (前两行前两列的子式  $\lambda(\lambda - 3)$ , 第一、三行第一、三列的子式  $(\lambda - 2)(\lambda + 2)$ );  $D_3(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3)$ 。

因此不变因子为  $d_1(\lambda) = D_1(\lambda) = 1$ ;  $d_2(\lambda) = D_2(\lambda)/D_1(\lambda) = 1$ ;  $d_3(\lambda) = D_3(\lambda)/D_2(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3)$ , 则 Smith 标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3) \end{bmatrix}$$

(2) 初等因子组为  $(\lambda - 2), (\lambda + 2), (\lambda - 3)$ 。因此 Jordan 标准形是

$$J = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

下面求相似变换矩阵。根据  $AP = PJ$  有  $[Ap_1, Ap_2, Ap_3] = [p_1, p_2, p_3]J$ , 则  $Ap_1 = -2p_1$ ,  $Ap_2 = 2p_2$ ,  $Ap_3 = 3p_3$ 。依次求解这三个方程:

解第一个方程即解  $(A + 2I)p_1 = 0$ 。 $A + 2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ , 则  $p_1 = [1, 0, -1]^T$ 。

解第二个方程即解  $(A - 2I)p_2 = 0$ 。 $A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ , 则  $p_2 = [1, 0, 1]^T$ 。

解第三个方程即解  $(A - 3I)p_3 = 0$ 。 $A - 3I = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ , 则  $p_3 = [0, 1, 0]^T$ 。

因此变换矩阵是

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

## 七、

首先, 计算  $A^H A$  的特征值并将其对角化:

$$A^H A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |\lambda I - A^H A| = (\lambda - 4)(\lambda - 1)$$

则  $A$  的奇异值是 2 和 1。上述矩阵已经是对角阵, 则容易得到  $A^H A$  相应于两个特征值的特征向量  $v_1 = [1, 0]^T$ ,  $v_2 = [0, 1]^T$ 。因此  $V = I$ 。

下面求  $U$ 。首先, 根据  $AV = U \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 有

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} Av_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = Av_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$$

记  $U_r = [u_1, u_2]$ , 解  $U_r^H u_3 = 0$  (正交性), 补全  $U$  的第三列:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} u_3 = 0 \Rightarrow u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此  $A$  的奇异值分解是  $A = U\Sigma V^H$ , 其中  $U, V$  如上所示,  $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。