哈尔滨工业大学（深圳）2025 年秋季学期

矩阵分析试题

（牛牧青老师班）（回忆版）

注意：本次考试为闭卷考试，考试时间为 120 分钟，总分 100 分。不允许使用计算器。

一、判断题：对的划“✓”，错的划“×”。(10 分，每小题 2 分)

1. 设三个向量 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 线性相关，则其中任意一个向量都可以由另外两个向量线性表示。（　　）
2. 矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，则其像空间 $\operatorname{im} A$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的线性子空间。（　　）
3. 对于数字矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，其特征矩阵的不变因子作为多项式的次数之和为 n。（　　）
4. 上三角矩阵若是正规的，则一定为对角矩阵。（　　）
5. 正规矩阵的初等因子一定都是一次因式。（　　）

二、填空题

1. 对于复线性空间 $\mathbb{C}$，若将其视为复数域上的线性空间，则其是 ______ 维的；而若将其视为实数域上的线性空间，则其是 ______ 维的。（4 分）
2. 设 V 为酉空间，$\alpha, \beta \in V$，$\|\alpha\| = 1, \|\beta\| = 2$，内积 $(\alpha, \beta) = 1 + \mathrm{i}$，$\sigma$ 为 V 上的酉变换，则向量组 $\{\alpha, \beta\}$ 的 Gram 矩阵是 ____________；$\|\sigma(-3\beta)\| =$ ______。（6 分）
3. 设复矩阵 A 的特征矩阵的初等因子为 $\lambda, (\lambda+1)^2, \lambda+1, \lambda+1$，则其非常数不变因子有 ____ 个，4 阶行列式因子是 ________。（4 分）

三、

设 V 为三维线性空间，其中有两组基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 和 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$，且满足 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$。定义 V 上的线性变换 σ，其在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的矩阵表示是 $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$。

（1） 求出从基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 到基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 的过渡矩阵 P；（4 分）

（2） 求线性变换 σ 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 下的矩阵表示 C；（5 分）

（3） 若向量 ξ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的坐标为 $[0, 1, 1]^T$，求 $\sigma(\xi)$ 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 下的坐标；（4 分）

（4） 求线性变换 σ 的特征值和特征向量。（6 分）

四、

设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$。

（1） 多项式矩阵的初等变换有哪几种？（3 分）

（2） 求矩阵 A 的特征矩阵的 Smith 标准形和初等因子；（6 分）

（3） 求 A 的 Jordan 标准形和相似变换矩阵。（8 分）

五、(8 分)

设 Hermite 矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$。证明：$A$ 是正定矩阵的充要条件是 A 的 n 个特征值全为正实数。

六、

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \mathrm{i} & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$。

（1） 将 A 的列向量组标准正交化。（6 分）

（2） 将 A 分解为 $A=UR$，其中 U 是次酉矩阵，R 是上三角矩阵。（5 分）

（3） 求向量 $[0,2,1]^T$ 在线性空间 $\mathrm{span}\{[1,\mathrm{i},0]^T\}$ 上的正交投影。（5 分）

（4） 若 $\mathbb{C}^3$ 中的向量 ξ 可以被 A 的列向量线性表示，那么 ξ 在线性子空间 $\mathrm{im}\,A$ 的正交投影是多少？（2 分）

七、(14 分)

求 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ 的奇异值分解。

哈尔滨工业大学（深圳）2025 年秋季学期

矩阵分析试题参考答案

（牛牧青老师班，学生版）

一、判断题

1. **解答** 错误。容易举出 $\mathbb{R}^3$ 中的反例：$\alpha_1=[1,0,0]^T,\alpha_2=[0,1,0]^T,\alpha_3=[0,2,0]^T$。这三个向量线性相关，但是 α_1 无法由 α_2 和 α_3 线性表示。

2. **解答** 错误。其像空间由 $m\times 1$ 列向量构成，所以是 $\mathbb{C}^m$ 的子空间。

3. **解答** 正确。n 阶特征矩阵的所有不变因子之积等于其行列式（n 次多项式），因此所有不变因子的次数之和为 n。

4. **解答** 正确。可以在“正规矩阵一定可以酉相似对角化”的证明中找到。过程如下：对矩阵的大小用归纳法。1×1 矩阵的情形是平凡的，因为任意 1×1 矩阵都是对角阵。
   假设我们已经证明任意 $(n-1)\times(n-1)$ 上三角正规矩阵都是对角的，现在要证明这对于 $n\times n$ 矩阵也是成立的。令 N 是 $n\times n$ 上三角正规矩阵。可将其写为

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & N_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

   其中 N_1 是 $(n-1)\times(n-1)$ 上三角矩阵。
   我们来比较 N^*N 和 NN^* 左上角（第一行第一列）的项。直接计算表明

$$(N^*N)_{1,1}=\overline{a}_{1,1}a_{1,1}=|a_{1,1}|^2$$

   且有

$$(NN^*)_{1,1}=|a_{1,1}|^2+|a_{1,2}|^2+\cdots+|a_{1,n}|^2.$$

   因此，$(N^*N)_{1,1}=(NN^*)_{1,1}$ 当且仅当 $a_{1,2}=\cdots=a_{1,n}=0$。因此，矩阵 N 形如

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & N_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

从上述表达式可得

$$N^*N=\left(\begin{array}{c|ccc}|a_{1,1}|^2 & 0 & \cdots & 0\\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & N_1^*N_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right),\quad NN^*=\left(\begin{array}{c|ccc}|a_{1,1}|^2 & 0 & \cdots & 0\\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & N_1N_1^* & \\ 0 & & & \end{array}\right),$$

因此 $N_1^*N_1=N_1N_1^*$，这意味着矩阵 N_1 是正规的，由归纳假设可得它是对角的。于是矩阵 N 也是对角的。

5. **解答** 正确。正规矩阵一定可以酉相似对角化，所以其初等因子一定都是一次因式。

二、填空题

1. **解答** 一；二

2. **解答** $\begin{bmatrix}1 & 1-\mathrm{i}\\ 1+\mathrm{i} & 4\end{bmatrix}$；6。$G=\begin{bmatrix}(\alpha,\alpha) & (\beta,\alpha)\\ (\alpha,\beta) & (\beta,\beta)\end{bmatrix}$；酉变换保持范数，所以 $\|\sigma(-3\beta)\|=\|(-3\beta)\|=\sqrt{(-3\beta,-3\beta)}=\sqrt{9(\beta,\beta)}=\sqrt{36}=6$。

3. **解答** 3；$(\lambda+1)^2$。初等因子次数之和为 5，所以 A 是 5 阶矩阵。从高次往低次构造不变因子：$d_5(\lambda)=(\lambda+1)^2\lambda$（取各因式中的最高次并组合）；$d_4(\lambda)=\lambda+1$（在剩下的初等因子中取各因式中的最高次并组合），$d_3(\lambda)=\lambda+1$，此时初等因子已用完，所以 $d_2=d_1=1$，非常数不变因子共有 3 个。4 阶行列式因子等于 $d_1d_2d_3d_4=(\lambda+1)^2$。

三、

解答

（1） 题目给出了用 α 表示 β 的方法。故由过渡矩阵定义 $\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}P^{-1}$，依题意得 $P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，所以 $P=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$。

（2）

$$\begin{bmatrix}\sigma(\beta_1) & \sigma(\beta_2) & \sigma(\beta_3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{bmatrix}C \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma(\alpha_1) & \sigma(\alpha_2) & \sigma(\alpha_3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}B \tag{2}$$

而

$$\begin{bmatrix}\sigma(\beta_1) & \sigma(\beta_2) & \sigma(\beta_3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma(\alpha_1) & \sigma(\alpha_2) & \sigma(\alpha_3)\end{bmatrix} P^{-1}$$

故由(2)得到

$$\begin{bmatrix}\sigma(\beta_1) & \sigma(\beta_2) & \sigma(\beta_3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix} BP^{-1}$$

由(1)得到

$$\begin{bmatrix}\sigma(\beta_1) & \sigma(\beta_2) & \sigma(\beta_3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix} P^{-1}C$$

结合上述两式和同一基下坐标唯一性有 $C = PBP^{-1}$，计算得

$$C = \begin{bmatrix}3 & 4 & 4\\ 1 & 2 & 0\\ -2 & -3 & -1\end{bmatrix}$$

（计算技巧：注意 P 和 P^{-1} 都是初等矩阵，左乘 P 对应一系列行变换：先将第一行减去第二行，再将第二行减去第三行。右乘 P^{-1} 则代表一系列列变换：先将第一列加到第二列，再将第二列加到第三列）

（3） $\xi = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$，则

$$\begin{aligned}\sigma(\xi) &= \begin{bmatrix}\sigma(\alpha_1) & \sigma(\alpha_2) & \sigma(\alpha_3)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\\ &= \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix} B \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\\ &= \begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{bmatrix} PB \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

故坐标为

$$PB\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$$

（4） 可以借助求线性变换矩阵表示的特征值和特征向量来完成。

$$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ 1 & \lambda & 0\\ 2 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

因此 B 的特征值为 2，1（二重）。

求对应于特征值的特征向量：

解 $(2I-B)x=0$，有 $\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$，可知 $x_2=0$，进而 $x_1=0$，x_3 没有限制，因此特征向量可取为 $[0,0,1]^T$。

解 $(I-B)x=0$，有 $\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$，可知仅有一个自由变量，选为 x_1。取 $x_1=1$，则 $x_2=-1$，$x_3=1$，因此特征向量可取为 $[1,-1,1]^T$。

综上，线性变换 σ 的特征值和特征向量为：$\lambda_1=2$，特征向量是 α_3；$\lambda_2=\lambda_3=1$，特征向量是 $\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$。

四、

解答

（1） 有三种：

（a）将两行互换位置；

（b）将某行乘以非零常数；

（c）将某行乘以多项式加到另外一行。

（2） 特征矩阵

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-1 & 1 & 2\\ 0 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}$$

为求其 Smith 标准形，先求其行列式因子：$D_1(\lambda)=1$；$D_2(\lambda)=1$（前两行前两列的子式 $(\lambda-1)(\lambda-2)$，后两行后两列的子式 $(\lambda-2)^2$，第一三列前两行的子式 $-(\lambda-1)$）；$D_3(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$。

因此不变因子为 $d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1$；$d_2(\lambda)=D_2(\lambda)/D_1(\lambda)=1$；$d_3(\lambda)=D_3(\lambda)/D_2(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$，则 Smith 标准形为

$$\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-1)(\lambda-2)^2\end{bmatrix}$$

初等因子组为 $(\lambda-1),(\lambda-2)^2$。

（3） 由初等因子组知 Jordan 标准形为

$$J = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

下面求相似变换矩阵。根据 $AP = PJ$ 有 $[Ap_1, Ap_2, Ap_3] = [p_1, p_2, p_3]J$，则 $Ap_1 = p_1$，$Ap_2 = 2p_2$，$Ap_3 = p_2 + 2p_3$。依次求解这三个方程：

解第一个方程即解 $(A-I)p_1 = 0$。$A - I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，可知 $p_{1,3} = 0$，进而 $p_{1,2} = 0$，则 $p_1 = [1,0,0]^T$。

解第二个方程即解 $(A-2I)p_2 = 0$。$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则 $p_{2,3} = 0$ 且 $p_{2,2} + p_{2,1} = 0$，则 $p_2 = [1,-1,0]^T$。

解第三个方程即解 $(A-2I)p_3 = p_2$。可将这个方程看作：p_3 各坐标是 $A-2I$ 的各列线性组合的系数，则须取 $p_{3,3} = -1$，再取 $p_{3,1} = 1, p_{3,2} = 0$ 即可。$p_3 = [1,0,-1]^T$。

因此变换矩阵是

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

五、

证明. A 是 Hermite 矩阵，则 A 的特征值全为实数，$A = A^H$。

"$\Longrightarrow$"：设 A 正定，则对任意非零的 $z \in \mathbb{C}^n$ 有 $z^H Az > 0$。特别地，对特征向量 $z \neq 0$ 也有 $z^H Az > 0$。由于 $Az = \lambda z$，所以 $z^H(\lambda z) = \lambda z^H z > 0$。因为 $z^H z > 0$，所以 $\lambda > 0$，则 A 的特征值全为正实数，此方向得证。

"$\Longleftarrow$"：现设 A 的 n 个特征值全为正实数。由于 A 为 Hermite 矩阵，所以其一定可以酉相似对角化，即存在酉矩阵 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$U^H DU = A, D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

则 $A = UDU^H$。对 $z \neq 0$，考察 $z^H Az$：

$$z^H Az = z^H UDU^H z = (U^H z)^H DU^H z$$

由于 U 是酉矩阵，所以 U 可逆，所以 $U^H z \neq 0$。记其为 y，则上式写为

$$z^H A z = y^H D y = \sum_i \lambda_i \overline{y_i} y_i$$

由于 $\overline{y_i} y_i \geqslant 0$（且不全为零），且 $\lambda_i > 0$，所以 $z^H A z > 0$。$z = 0$ 时 $z^H A z = 0$ 为显然。因此 A 为正定，此方向得证。 □

六、

解答

（1） 运用 Schmidt 正交化过程：

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1, \alpha_1)}\alpha_1 = \alpha_2 - \frac{\alpha_1^H \alpha_2}{\alpha_1^H \alpha_1}\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}(1\times 0 + (-\mathrm{i}\times 2) + 0\times 1)\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

再进行标准化得到：

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

（2）

$$U = [e_1, e_2] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}\mathrm{i}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

再根据上述过程：

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 \implies \alpha_1 = \sqrt{2}e_1$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\beta_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_2 + \mathrm{i}\alpha_1) \implies \alpha_2 = \sqrt{3}e_2 - \sqrt{2}\mathrm{i}e_1$$

因此

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2}\mathrm{i} \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

（3） *方法一*：注意到待求的就是 α_2 在 α_1 张成的空间上的正交投影，而 Schmidt 正交化过程中从 α_2 减掉的部分就是 α_2 在 α_1 张成的空间上的正交投影。因此该投影为

$$\frac{1}{2}(1\times 0 + (-\mathrm{i}\times 2) + 0\times 1)\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

方法二：求正交投影矩阵 $P=[1,\mathrm{i},0]^T([1,-\mathrm{i},0][1,\mathrm{i},0]^T)^{-1}[1,-\mathrm{i},0]$，再用该矩阵乘以 $[0,2,1]^T$，得到相同答案。

（4） 即为 ξ 本身。

七、

解答 首先，计算 A^HA 的特征值并将其对角化：

$$A^HA=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix} \implies |\lambda I-A^HA|=(\lambda-5)^2-1=(\lambda-4)(\lambda-6)$$

则 A 的奇异值是 $\sqrt{6}$ 和 2。解方程 $(6I-A^HA)v_1=0$，得到 $v_1=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^T$；解方程 $(4I-A^HA)v_2=0$，得到 $v_2=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^T$。因此

$$V=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

下面求 U。首先，根据 $AV=U\begin{bmatrix}\Delta_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，有

$$u_1=\frac{1}{\sigma_1}Av_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}$$

$$u_2=\frac{1}{\sigma_2}Av_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

记 $U_r=[u_1,u_2]$，解 $U_r^Hu_3=0$（正交性），补全 U 的第三列：

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}u_3=0 \implies u_3=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}$$

因此

$$U=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}$$

因此 A 的奇异值分解是 $A=U\Sigma V^H$，其中 U,V 如上所示，$\Sigma=\begin{bmatrix}\sqrt{6} & 0\\ 0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$。