一、(20 分)

(1) 什么是线性映射?(5 分)

(2) 什么是线性映射的矩阵表示?(5 分)

(3) 设 $\mathbb{R}[x]_4$ 为次数小于 4 的实系数多项式的集合，它是 $\mathbb{R}$ 上的 4 维线性空间，且 $1, x, x^2, x^3$ 是它的基，(这不需要证明)，定义映射 $\mathbb{R}[x]_4 \to \mathbb{R}[x]_4$ 如下:

$$\mathcal{A} : f(x) \mapsto f''(x) + 2f'(x) + f(x+1).$$

证明 $\mathcal{A}$ 是线性映射。

(4) 求 $\mathcal{A}$ 在上面给出的基下的矩阵表示式。

(1) 设 V_1, V_2 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\mathscr{A} : V_1 \to V_2$ 称为线性映射，如果对 $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in V_1$，$k_1, k_2 \in \mathbb{F}$，成立

$$\mathscr{A}(\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2) = \mathscr{A}(\alpha_1)k_1 + \mathscr{A}(\alpha_2)k_2$$

(2) 同 (1)，设 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 构成 V_1 的一个基，$y_1, \cdots, y_m$ 构成 V_2 的一个基，若

$$\mathscr{A}([\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n]) = [y_1, \cdots, y_m]A$$

则称 A 为 $\mathscr{A}$ 在入口基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 和出口基 $y_1, \cdots, y_m$ 下的矩阵表示。

(3) 验证

$$\begin{aligned} &\mathscr{A}(k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)) \\ =&[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]'' + 2[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]' + k_1 f_1(x+1) + k_2 f_2(x+1) \\ =&k_1 \mathscr{A}(f_1(x)) + k_2 \mathscr{A}(f_2(x)) \end{aligned}$$

(4)

$$\mathscr{A}[1,x,x^2,x^3]=[1,x,x^2,x^3]\begin{bmatrix}1&3&3&1\\0&1&6&9\\0&0&5&9\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

二、(10 分)

矩阵 $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ 的三个特征值为：1,1,2，相应的特征向量分别为：

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},$$

求矩阵 A。

$$A[p_1,p_2,p_3]=[p_1,p_2,p_3]\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{bmatrix}7\text{ 分},A=\begin{bmatrix}0&1&-1\\-2&3&-2\\0&0&1\end{bmatrix}3\text{ 分}$$

三、（15 分）

（1）什么是矩阵的正交-三角分解（QR 分解）?（5 分）

（2）求矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

的正交-三角分解。（10 分）

（1）$A \in \mathbb{C}^{m\times r}$, $\mathrm{rank}(A) = r$（列满秩）, 则存在唯一的 U 与 R, 使得 $A = UR$, 其中 R 是对角线为正实数的上三角矩阵, $U^H U = I_r$。

（2）令 $\beta_1 = [1, -1, 0, 1]^H, \beta_2 = [0, 1, 1, 2]^H$，对 β_1, β_2 实施 Gram-Schmidt 正交化：

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2 - \alpha_1 \frac{\beta_1^H \beta_2}{\beta_1^H \beta_1} = \beta_2 - \alpha_1 \frac{1}{3} = [-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1, \frac{5}{3}]^H$$

$$\|\alpha_1\| = \sqrt{3}, \|\alpha_2\| = \frac{\sqrt{51}}{3}$$

从而

$$[\beta_1, \beta_2] = [\alpha_1, \alpha_1\frac{1}{3} + \alpha_2] = [\alpha_1, \alpha_2] \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\alpha_1 \frac{1}{\sqrt{3}}, \alpha_2 \frac{3}{\sqrt{51}}] \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{51}}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{51}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{51}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{51}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{51}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{51}}{3} \end{bmatrix}$$

四、(20 分)

(1) 写出标准酉空间 $\mathbb{C}^n$ 中内积和长度的定义。(5 分)

(2) 写出矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的列向量组的 Gram 矩阵。(5 分)

(3) 什么是 $\mathbb{C}^n$ 的标准正交基?(5 分)

(4) 证明矩阵 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的列向量组是 $\mathbb{C}^n$ 的标准正交基,当且仅当线性变换:$\tau : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 是保持长度的,这里 $\tau(x) = Ux$。(5 分)必要性($\Rightarrow$)2 分,充分性($\Leftarrow$)3 分。

(1) 内积:$\langle x, y\rangle = x^H y$,$\|x\| = \sqrt{x^H x} = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$。

(2) $A^H A$。

(3) 由列向量 $p_1, \cdots, p_n$ 组成的矩阵 P 满足 $P^H P = I$。

(4)

必要性($\Rightarrow$):已知 $U^H U = I$,$\|\tau(x)\|^2 = \|Ux\|^2 = (Ux)^H(Ux) = x^H U^H U x = x^H x = \|x\|^2$。

充分性($\Leftarrow$):已知 $\|\tau(x)\|^2 = \|x\|^2$ 对 $\forall x \in \mathbb{C}^n$,于是

$$x^H(U^H U)x = x^H x = \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$$

于是 $\|\tau(x + y)\| = \|x + y\|, \|\tau(x)\| = \|x\|, \|\tau(y)\| = \|y\|$ 可以推出

$$\mathrm{Re}(x^H U^H U y) = \mathrm{Re}(x^H y), \mathrm{Re}(x^H U^H U(yi)) = \mathrm{Re}(x^H(yi))$$

从而

$$-\mathrm{Im}(x^H U^H U y) = -\mathrm{Im}(x^H y)$$

于是 $x^H U^H U y = x^H y$,从而 $U^H U = I$。

五、(15 分)

(1) 什么是矩阵的奇异值分解?(5 分)

（2）设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，定义

$$\sigma(A) = \max\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{C}^{n\times n}, x \neq 0\right\}.$$

记 A 的第一行为 α_1，证明 $\sigma(A) \geqslant \|\alpha_1^T\|$。（5 分）

（3）记 A 的第一列为 a_1，证明 $\sigma(A) \geqslant \|a_1\|$。（5 分）

（1）设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，则存在 m 阶和 n 阶酉矩阵 V 及 U，使得

$$V^H A U = \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

其中 $\mathrm{rank}(A) = r$，$\sigma_i > 0, i = 1, 2, \ldots, r$。

（2）显然，$A\alpha_1^H = \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_1^H \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\alpha_1\|^2 \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}$，因此 $\|A\alpha_1^H\| \geqslant \|\alpha_1^H\|^2 = \|\alpha_1^T\|^2$，从而

$$\sigma(A) \geqslant \frac{\|A\alpha_1^H\|}{\|\alpha_1^H\|} \geqslant \|\alpha_1^H\| = \|\alpha_1^T\|$$

（3）设 $e_1 = [1, 0, \cdots, 0]^T$，于是 $Ae_1 = a_1$，从而

$$\sigma(A) \geqslant \frac{\|Ae_1\|}{\|e_1\|} = \|a_1\|$$

六、（10 分）

（1）什么是 λ 矩阵的 Smith 标准型？（2 分）

（2）什么是单位模阵？（3 分）

（3）证明 $U(\lambda)$ 是单位模阵的充分必要条件时 $U(\lambda)$ 可以写成有限个初等 λ 矩阵的乘积。（必要性 ($\Leftarrow$)2 分，充分性 ($\Rightarrow$3 分)）。

（1）$A(\lambda)$ 的 Smith 标准型是指 $A(\lambda)$ 可经过初等变换化为

$$\left[\begin{array}{ccc|c} d_1(\lambda) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & d_r(\lambda) & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

其中 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda), i=1,2,\cdots,r-1.$

（2）$n\times n$ 的 λ 矩阵 $U(\lambda)$，若存在 $n\times n$ 的 λ 矩阵 $V(\lambda)$，使得 $U(\lambda)V(\lambda)=I$，则称 $U(\lambda)$ 为单位模阵。

（3）充分性（$\Leftarrow$）：已知 $U(\lambda)=P_1(\lambda)\cdots P_t(\lambda)$，这里 $P_i(\lambda)$ 是初等矩阵，则 $|U(\lambda)|=|P_1(\lambda)|\cdots|P_t(\lambda)=$ 非零常数，故 $U(\lambda)$ 为单位模阵。

必要性（$\Rightarrow$）：已知 $U(\lambda)$ 为单位模阵，故 $|U(\lambda)|=$ 非零常数。设 $U(\lambda)$ 的 Smith 标准型为

$$\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n(\lambda) \end{bmatrix} = P_s(\lambda)\cdots P_1(\lambda)U(\lambda)Q_1(\lambda)\cdots Q_t(\lambda)$$

此处 $P_i(\lambda), Q_j(\lambda)$ 分别是与初等行列变换对应的初等矩阵，由于初等变换不改变 λ 矩阵的行列式因子，且 $|U(\lambda)|=C$，从而 $d_i(\lambda)$ 为非参常数，所以 $d_i(\lambda)=1, i=1,2,\cdots,n$。从而

$$P_s(\lambda)\cdots P_1(\lambda)U(\lambda)Q_1(\lambda)\cdots Q_t(\lambda)=I$$

$$U(\lambda)=P_1^{-1}(\lambda)\cdots P_s^{-1}(\lambda)Q_t^{-1}(\lambda)\cdots Q_t^{-1}(\lambda)$$

命题得证。

七、(10 分)

(1) 什么是矩阵的初等因子?(2 分)

(2) 设 $A \in \mathbb{C}^{10\times 10}$ 的初等因子为:

$$\lambda, \lambda, (\lambda-2)^2, (\lambda-2)^3, (\lambda-5)^3,$$

写出 $\lambda I - A$ 的所有行列式因子。(3 分)

(3) 写出 A 的 Jordan 标准型。(5 分)

(1) $\lambda I - A$ 的所有不变因子做质因式分解时，出现的不可约因式的方幂称为初等因子。

(2) $\lambda I - A$ 的 Smith 标准型为 $\begin{bmatrix} I_8 & & \\ & \lambda(\lambda-2)^2 & \\ & & \lambda(\lambda-2)^3(\lambda-5)^3 \end{bmatrix}$。

因此，10 级行列式因子为 $\lambda^2(\lambda-2)^5(\lambda-5)^3$，9 阶行列式因子为 $\lambda(\lambda-2)^2$，1 到 8 阶行列式因子为 1。

(3) $J_2(2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, J_3(2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, J_3(5) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$

$\mathrm{diag}\{0, 0, J_2(2), J_3(2), J_3(5)\}$。