哈尔滨工业大学（深圳）2025 年秋季学期

矩阵分析试题

（朱萍萍老师班）（回忆版）

注意：本次考试为闭卷考试，考试时间为 120 分钟，总分 100 分。不允许使用计算器。

一、

$\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上定义空间 $W:\{A\in\mathbb{R}^{2\times 2}\mid AP=PA\}$，$P$ 为固定矩阵。

(1) 证明 W 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的线性子空间。

(2) 给定 $P=\begin{bmatrix}1&3\\0&2\end{bmatrix}$，求 W 的一组基，并写出维数。

(3) 在 (2) 基础上，给出 W 中元素 A 的一般形式。

二、

$$A=\begin{bmatrix}-1&-2&-1&0\\2&-1&0&-1\\0&0&-1&-2\\0&0&2&-1\end{bmatrix}。$$

(1) 求特征矩阵 $\lambda I-A$ 的各阶行列式因子。

(2) 求特征矩阵 $\lambda I-A$ 的不变因子，并写出 Smith 标准型。

(3) 在复数域 $\mathbb{C}$ 上写出 A 的 Jordan 标准型 J。

三、

$f_1(x)=1-x, f_2(x)=1+x^2, f_3(x)=x+2x^2$ 在包括次数不大于 2 的多项式及零多项式的集合 $\mathbb{R}[x]_2$ 上。

(1) 证明 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$ 是 $\mathbb{R}[x]_2$ 的一组基。

(2) 有变换 $\sigma:\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}[x]_2$，使得 $\sigma(f_1(x))=2+x^2, \sigma(f_2(x))=x, \sigma(f_3(x))=1+x+x^2$。求变换 σ 的矩阵表示 A（入口基与出口基均为 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$）。

(3) 求 $\sigma(1+2x+3x^2)$。

(4) 在 $\mathbb{R}[x]_2$ 上定义内积 $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$，求基 $1,x,x^2$ 的度量矩阵。

四、

在 $\mathbb{C}^3$ 上，给定 $\beta=\begin{bmatrix}-2\mathrm{i}\\1\\-\mathrm{i}\end{bmatrix}$ 与 $\alpha_1=\begin{bmatrix}-\mathrm{i}\\1\\1\end{bmatrix}, \alpha_2=\begin{bmatrix}0\\0\\\mathrm{i}\end{bmatrix}$，子空间 $W=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}$，求 β 在 W 上的正交投影 α^*，并求解 $\min\limits_{x_1,x_2\in\mathbb{C}}\|\beta-x_1\alpha_1-x_2\alpha_2\|$。

五、

(1) 说明 $A=\begin{bmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$ 能否酉相似于对角阵。

(2) B 为 n 维正规矩阵，且有 $B^2-3B+2E=0$，证明 B 为 Hermite 矩阵。

六、

(1) 什么是矩阵的奇异值分解？

(2) 有映射 $y=Ax$，其中 $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$。给出一组 $\mathbb{R}^2$ 上的标准正交基 v_1, v_2 与一组 $\mathbb{R}^3$ 上的标准正交基 u_1, u_2, u_3，使得在这两组下 $\tilde{y}$ 与 $\tilde{x}$ 解耦，即 $\tilde{y}$ 的各分量仅取决于 $\tilde{x}$ 中的对应方向分量或不受输入影响。