哈尔滨工业大学（深圳）2025 年秋季学期

优化算法试题(回忆版)

注意：本次考试为闭卷考试，考试时间为 120 分钟，总分 100 分。

一、

利用 K-T 条件验证 $(1,0)$ 是否为下列优化问题的最优解：

$$\min_{x} \quad f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 1 - x_1 - x_2 \leqslant 0 \\ x_1 - 2 \leqslant 0 \\ x_2 \leqslant 0 \end{cases}$$

二、

利用 0.618 法迭代二次：

$$\max_{\theta} A = 4\sin\theta(1+\cos\theta)$$

三、

利用共轭梯度法求解下列优化问题：

$$\min_{x} f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1 - 3x_2 + 8$$

四、

求解下列线性规划问题：

$$\max_{x_1,x_2,x_3} \quad z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 15 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqslant 12 \end{cases}$$

五、

利用罚函数外点法解下列非线性优化问题：

$$\min_{x} \quad f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 - 1 \geqslant 0$$

哈尔滨工业大学（深圳）2025 年秋季学期

优化算法试题参考答案(学生版)

一、

解析：记约束函数：

$$g_1(x) = 1 - x_1 - x_2 \leqslant 0,\ g_2(x) = x_1 - 2 \leqslant 0,\ g_3(x) = x_2 \leqslant 0.$$

目标函数 $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ 是凸函数，约束为线性，故为凸规划。若 $(1,0)$ 满足 K-T 条件，则其为全局最优解。

在 $x^* = (1,0)$ 处：

$$\nabla f(x^*) = (2,0),$$

$$g_1(1,0) = 0,\ \nabla g_1 = (-1,-1);$$

$$g_2(1,0) = -1,\ \nabla g_2 = (1,0);$$

$$g_3(1,0) = 0,\ \nabla g_3 = (0,1).$$

紧约束为 g_1, g_3。设乘子 $u_1, u_2, u_3 \geqslant 0$，K-T 条件为：

$$\nabla f + u_1 \nabla g_1 + u_2 \nabla g_2 + u_3 \nabla g_3 = 0, \quad u_i g_i = 0.$$

由 $g_2 < 0$ 得 $u_2 = 0$，代入得：

$$(2,0) + u_1(-1,-1) + u_3(0,1) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2 - u_1 = 0, \\ -u_1 + u_3 = 0. \end{cases}$$

解得 $u_1 = 2,\ u_3 = 2$。乘子非负，且满足互补松弛条件。约束梯度线性无关，约束规格成立。故 $(1,0)$ 满足 K-T 条件，为全局最优解。

二、

解析：（可能有些许误差）

选取初始区间 $[a,b] = [0,\pi/2]$。令 $f(\theta) = 4\sin\theta(1+\cos\theta)$。

第一次迭代：

$$\theta_1 = a + 0.382(b-a) = 0.382 \times \frac{\pi}{2} \approx 0.600, \quad \theta_2 = a + 0.618(b-a) = 0.618 \times \frac{\pi}{2} \approx 0.971.$$

计算函数值：

$$A(\theta_1) \approx 4.123, \quad A(\theta_2) \approx 5.165.$$

因 $A(\theta_1) < A(\theta_2)$，故新区间为 $[\theta_1, b] = [0.600, 1.571]$。

第二次迭代：

$$\theta_1' = 0.600 + 0.382 \times 0.971 \approx 0.971, \quad \theta_2' = 0.600 + 0.618 \times 0.971 \approx 1.200.$$

计算函数值：

$$A(\theta_1') \approx 5.165, \quad A(\theta_2') \approx 5.079.$$

因 $A(\theta_1') > A(\theta_2')$，故新区间为 $[0.600, 1.200]$。

两次迭代后，搜索区间从 $[0, \pi/2]$ 缩小为 $[0.600, 1.200]$。

三、

解析：首先，将目标函数写成二次型形式。二次项部分为 $2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$，对应矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

使得 $x^\top Qx = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$。线性项为 $x_1 - 3x_2$，即 $p^\top x$ 其中 $p = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$。因此

$$f(x) = x^\top Qx + p^\top x + 8.$$

其梯度为 $\nabla f(x) = 2Qx + p$。令梯度为零得 $2Qx = -p$。令 $A = 2Q = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$，$b = -p = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$，则优化问题等价于求解线性方程组

$$Ax = b,$$

其中 A 对称正定。共轭梯度法适用于求解此类问题。

选取初始点 $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，并按照共轭梯度法迭代。

迭代步骤

第一步（$k = 0$）：

$$r_0 = b - Ax_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$p_0 = r_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
Ap_0 &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \\
r_0^\top r_0 &= (-1)^2 + 3^2 = 10, \\
p_0^\top Ap_0 &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -2 + 12 = 10, \\
\alpha_0 &= \frac{r_0^\top r_0}{p_0^\top Ap_0} = \frac{10}{10} = 1, \\
x_1 &= x_0 + \alpha_0 p_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \\
r_1 &= r_0 - \alpha_0 Ap_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \\
r_1^\top r_1 &= (-3)^2 + (-1)^2 = 10, \\
\beta_0 &= \frac{r_1^\top r_1}{r_0^\top r_0} = \frac{10}{10} = 1, \\
p_1 &= r_1 + \beta_0 p_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

第二步（$k = 1$）：

$$
\begin{aligned}
Ap_1 &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -4 \end{bmatrix}, \\
p_1^\top Ap_1 &= \begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 \\ -4 \end{bmatrix} = 48 - 8 = 40, \\
\alpha_1 &= \frac{r_1^\top r_1}{p_1^\top Ap_1} = \frac{10}{40} = 0.25, \\
x_2 &= x_1 + \alpha_1 p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 0.25 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3.5 \end{bmatrix}, \\
r_2 &= r_1 - \alpha_1 Ap_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} - 0.25 \cdot \begin{bmatrix} -12 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

残差 $r_2 = 0$，迭代停止。

结果: 共轭梯度法求得的最优解为

$$
x^* = \begin{bmatrix} -2 \\ 3.5 \end{bmatrix}.
$$

代入原函数可得最小值：

$$
\begin{aligned}
f(x^*) &= 2(-2)^2+(3.5)^2+2(-2)(3.5)+(-2)-3(3.5)+8 \\
&= 8+12.25-14-2-10.5+8=1.75.
\end{aligned}
$$

验证梯度：$\nabla f(x^*)=2Qx^*+p=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 3.5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$，确认其为极小点。

使用 LINGO 软件验证的代码是：

```
min = 2*x1^2+x2^2+2*x1*x2+x1-3*x2+8;
@free(x1);
@free(x2);
```

四、

解析：

方法一：几何法

由第一式得 $x_3=9-2x_1-x_2$，代入目标函数和约束：

$$
z=4x_1+3x_2+2(9-2x_1-x_2)=18+x_2,
$$

$$
\begin{aligned}
&3x_1+2x_2+(9-2x_1-x_2)\leqslant 15 \Rightarrow x_1+x_2\leqslant 6,\\
&x_1+2x_2+2(9-2x_1-x_2)\leqslant 12 \Rightarrow 3x_1\geqslant 6 \Rightarrow x_1\geqslant 2.
\end{aligned}
$$

又由 $x_3=9-2x_1-x_2\geqslant 0$ 得 $2x_1+x_2\leqslant 9$。

于是问题转化为：

$$
\max \quad z=18+x_2
$$

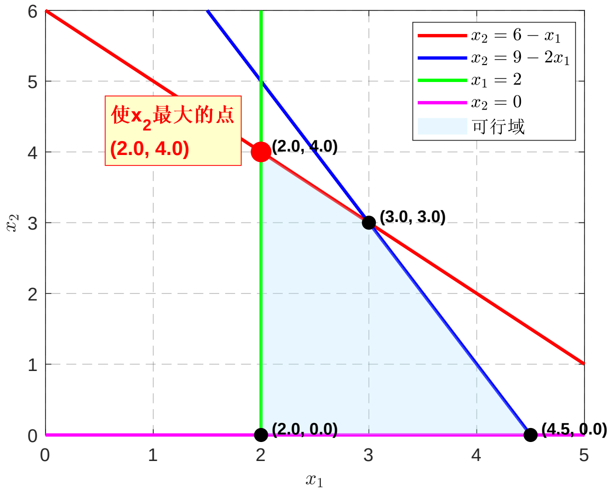
$$
\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1+x_2\leqslant 6,\\ x_1\geqslant 2,\\ 2x_1+x_2\leqslant 9,\\ x_2\geqslant 0.\end{cases}
$$

由于目标函数只与 x_2 正相关，故应在可行域内最大化 x_2。

在 x_1-x_2 平面上，可行域由以下不等式围成：

$$
\begin{aligned}
&x_2\leqslant 6-x_1,\\
&x_2\leqslant 9-2x_1,\\
&x_1\geqslant 2,\ x_2\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

绘制出可行域如图所示。



可见 x_2 最大为 4，对应 $x_1 = 2$。此时 $x_3 = 9 - 2 \times 2 - 4 = 1$，目标函数值 $z = 18 + 4 = 22$。

验证原约束：

$$2 \times 2 + 4 + 1 = 9,$$

$$3 \times 2 + 2 \times 4 + 1 = 15 \leqslant 15,$$

$$2 + 2 \times 4 + 2 \times 1 = 12 \leqslant 12.$$

故最优解为 $x^* = (2, 4, 1)$，最优值 $z^* = 22$。

方法二：单纯形法

使用两阶段单纯形法求解。

第一阶段：引入人工变量 x_6，处理等式约束。再引入松弛变量 x_4, x_5 处理不等式约束。构造辅助问题：

$$\min \quad w = x_6$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0 \end{cases}$$

初始单纯形表为：

基	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	右端
x_6	2	1	1	0	0	1	9
x_4	3	2	1	1	0	0	15
x_5	1	2	2	0	1	0	12
w	-2	-1	-1	0	0	0	9

选择 x_1 入基，x_6 出基，主元为 2。转轴（pivoting）后得：

基	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	右端
x_1	1	1/2	1/2	0	0	1/2	9/2
x_4	0	1/2	−1/2	1	0	−3/2	3/2
x_5	0	3/2	3/2	0	1	−1/2	15/2
w	0	0	0	0	0	1	0

此时 $w=0$，人工变量 x_6 已非基，第一阶段结束，得到原问题的一个基本可行解：$x_1=\dfrac{9}{2}$，$x_4=\dfrac{3}{2}, x_5=\dfrac{15}{2}, x_2=x_3=0$.

第二阶段：去掉人工变量 x_6，考虑原目标函数 $z=4x_1+3x_2+2x_3$。初始单纯形表为：

基	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端
x_1	1	1/2	1/2	0	0	9/2
x_4	0	1/2	−1/2	1	0	3/2
x_5	0	3/2	3/2	0	1	15/2
z	0	1	0	0	0	18

选择 x_2 入基，x_4 出基，主元为 1/2。转轴后得：

基	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端
x_1	1	0	1	−1	0	3
x_2	0	1	−1	2	0	3
x_5	0	0	3	−3	1	3
z	0	0	1	−2	0	21

选择 x_3 入基，x_5 出基，主元为 3。转轴后得：

基	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端
x_1	1	0	0	0	−1/3	2
x_2	0	1	0	1	1/3	4
x_3	0	0	1	−1	1/3	1
z	0	0	0	−1	−1/3	22

此时所有检验数非正，达到最优。最优解为 $x_1^*=2, x_2^*=4, x_3^*=1, x_4^*=0, x_5^*=0$，最优值 $z^*=22$.

使用 LINGO 软件验证的代码是

```
max = 4*x1 + 3*x2 + 2*x3;
2*x1 + x2 + x3 = 9;
3*x1 + 2*x2 + x3 <= 15;
x1 + 2*x2 + 2*x3 <= 12;
```

五、

解析：构造罚函数：

$$P(x,\sigma) = f(x) + \sigma\big[\min(0, g(x))\big]^2, \quad g(x) = 2x_1 + x_2 - 1.$$

当 $g(x) < 0$ 时，$P(x,\sigma) = x_1^2 + x_2^2 + \sigma(2x_1 + x_2 - 1)^2$。令梯度为零：

$$\begin{cases} 2x_1 + 4\sigma(2x_1 + x_2 - 1) = 0, \\ 2x_2 + 2\sigma(2x_1 + x_2 - 1) = 0. \end{cases}$$

解得：

$$x_1(\sigma) = \frac{2\sigma}{1+5\sigma}, \quad x_2(\sigma) = \frac{\sigma}{1+5\sigma}.$$

此时 $g(x(\sigma)) = -\dfrac{1}{1+5\sigma} < 0$，与假设一致。当 $\sigma \to +\infty$，

$$x_1^* = \lim_{\sigma\to\infty} x_1(\sigma) = \frac{2}{5}, \quad x_2^* = \lim_{\sigma\to\infty} x_2(\sigma) = \frac{1}{5}.$$

且 $g(x^*) = 0$，满足约束。故原问题最优解为 $(2/5, 1/5)$。

使用 LINGO 软件验证的代码是

```
min = x1^2 + x2^2;
2*x1 + x2 - 1 >= 0;
@free(x1);
@free(x2);
```