

2025 秋 机器人学基础 期末考试回忆版

回忆者：冰原沙漠气候

本试题系离开考场后回忆，不存在任何作弊行为；

本试题不保证题干、选项与原题一致，但考察的中心思想一致。

如无特殊说明，「参数表示」或「表达式」指将各变量用符号表示出来，而不是数值计算。

一、

1. 给出机器人关节和末端状态的表示方法，包括位置、速度、加速度和力四类状态。注意维数。
2. 给出机器人关节空间和操作空间状态映射关系图，体现对应的运动学、动力学、静力学关系。

二、

1. 给出机器人运动学正问题和逆问题的定义；
2. 绘制体现机器人位置级、速度级、加速度级运动学正问题和逆问题的关系图。

三、如图所示，坐标系 $\{a\}$ 为世界坐标系， $\{b\}$ 为某刚体的固联坐标系，其原点 O_b 在坐标系 $\{a\}$ 中的坐标为 $(-100, 400, 150)$ ，单位为 mm。已知坐标系 $\{b\}$ 相对于坐标系 $\{a\}$ 的 Z-Y-Z 欧拉角姿态为 $[20^\circ, -30^\circ, 40^\circ]$ ，刚体上的点 P 在坐标系 $\{b\}$ 中的坐标为 $(-20, 30, -30)$ 。

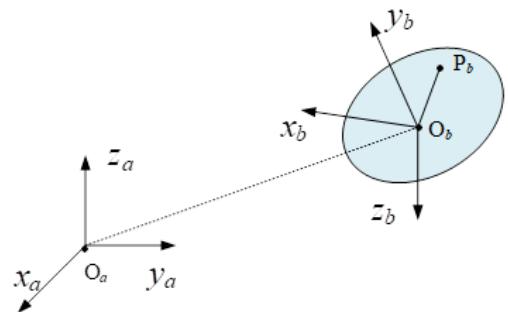
计算：

(1) 从坐标系 $\{a\}$ 到坐标系 $\{b\}$ 的齐次变换矩阵；

(2) 点 P 分别在坐标系 $\{a\}$ 和 $\{b\}$ 中的齐次坐标；

(3) 若欧拉角采用 Z-Y-Z 表示，请推导出从坐标系 $\{a\}$ 到坐标系 $\{b\}$ 的姿态变换矩阵 R 的表达式；

(4) 若 $R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ，请给出 Z-Y-Z 欧拉角表示下的逆运动学表达式，并指出运动学奇异条件。

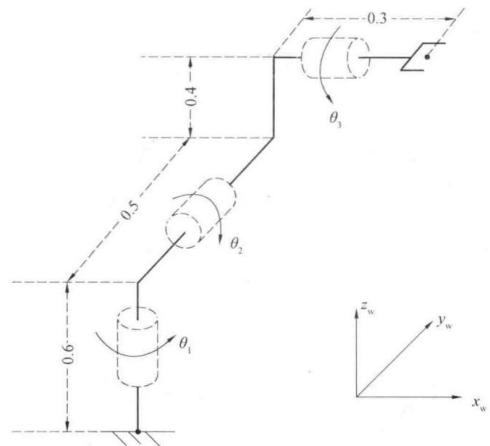


四、3R 机械臂构型如图。

1. 根据经典 D-H 规则，在图上建立坐标系、给出 D-H 参数表。

2. 推导 ${}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3$ 齐次变换矩阵的参数形式表达式；

3. 在图示初始条件下直接给出末端位姿矩阵数值，并计算末端位姿矩阵的表达式，将两个结果对比验证表达式的正确性。



五、简答题。

1. 拉格朗日方程的形式？并指出惯性项、非线性项、重力项；
2. 给出多关节线性解耦的控制方程和框图；
3. 柔顺控制定义是？并给出基于位置的柔顺控制的控制方程和框图。

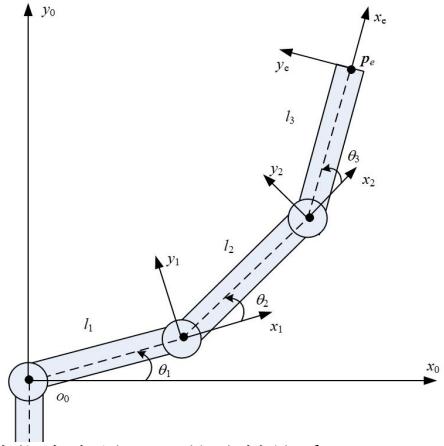
六、对于空间 3R 肘机械臂，取 $d_1 = 0.5 \text{ m}$, $a_2 = 0.4 \text{ m}$, $a_3 = 0.6 \text{ m}$ 。初始时刻机器人关节角为 Θ_0 , 相应的末端处于点 P_0 处。请规划机器人末端从点 P_0 沿圆弧经过点 P_i 运动到点 P_f 的轨迹（圆心为 O_c ），运动时间 $t_f = 100 \text{ s}$, 采样周期 $dt = 0.1 \text{ s}$, 关节初值及各点在 $\{0\}$ 系的坐标为

$$\Theta_0 = \begin{bmatrix} 26^\circ \\ -126^\circ \\ 87^\circ \end{bmatrix}, P_0 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \\ 1.2 \end{bmatrix}, P_f = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.2 \\ 0.8 \end{bmatrix}, O_c = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}.$$

1. 建立圆面坐标系 $\{c\}$, 并推导 $\{c\}$ 系到 $\{0\}$ 系的变换矩阵;
2. 给出规划轨迹的参数化表示。
3. 给出笛卡尔轨迹规划函数。

七、某平面 3 自由度机械臂臂型如图所示，该机器人由 3 个关节和 3 个连杆组成（除基座外），连杆 1~ 连杆 3 的长度依次表示为 $l_1 \sim l_3$ 。 $l_1 = 0.5m, l_2 = 0.5m, l_3 = 1m$ 。

基坐标系和末端工具坐标系分别为 $\{x_0y_0z_0\}$ 和 $\{x_e y_e z_e\}$ ，机器人所有关节轴均与 z_0 轴平行。定义关节位置变量为 $\Theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$ ，末端位姿变量为 $\mathbf{X}_e = [p_{ex}, p_{ey}, \psi_e]^T$ ，其中 (p_{ex}, p_{ey}) 为末端点在基坐标系中的坐标（即末端位置矢量 $\mathbf{p}_e = [p_{ex}, p_{ey}]^T$ ）， ψ_e 为 x_0 轴绕 z_0 轴旋转后与 x_e 重合所需的转角。



1. 推导该机器人的位置级正运动学方程，建立从关节变量 Θ 到末端位姿变量 \mathbf{X}_e 的映射关系。
2. 推导该机器人的速度级正运动学方程，建立从关节变量 $\dot{\Theta}$ 到末端速度变量 $\dot{\mathbf{x}}_e$ 的映射关系。
3. 若关节末端受力为 $[\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y]^T = [10N, 15N]^T$ ，受力矩为 $M = 15 N \cdot m$ ，请求出该机器人的关节力/力矩 $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T$ 。