普通天文学
第二次作业

1. 定义辐射能量密度为辐射场中某一点，单位体积内所包含的单位频率间隔的辐射能：

$$U_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu$$

证明对于黑体辐射，总光子密度有：

$$N_{photon} = \int_0^\infty \frac{U_\nu}{h\nu} d\nu \approx 20T^3[cm^{-3}]$$

（注：对于黑体辐射，$B_\nu = I_\nu$；$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1.202$）

参考答案：

由于黑体辐射各向同性，有$J_\nu = \frac{1}{4\pi}\oint I_\nu d\omega = \frac{1}{4\pi}4\pi I_\nu = I_\nu$

所以能量密度$U_\nu = \frac{4\pi}{c}I_\nu = \frac{4\pi}{c}B_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{exp(\frac{h\nu}{kT})-1}$

设$x = \frac{h\nu}{kT}$，则有$dx = \frac{h}{kT}d\nu$，所以总光子密度：

$$\begin{aligned}N_p &= \frac{8\pi}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^2}{exp(\frac{h\nu}{kT})-1}d\nu \\ &= \frac{8\pi k^3T^3}{h^3c^3}\int_0^\infty \frac{x^2}{exp\ x-1}dx \\ &= \frac{8\pi k^3T^3}{h^3c^3}A\end{aligned}$$

接下来计算积分A：

$$\frac{x^2}{e^x-1} = \frac{x^2e^{-x}}{(e^x-1)e^{-x}} = \frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}}$$
$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^\infty e^{-nx}$$

所以A等于：

$$A = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty x^2e^{-x}e^{-nx}dx = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty x^2e^{-(n+1)x}dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^2e^{-nx}dx$$

其中：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^2e^{-nx}dx &= -\frac{1}{n}\int_0^\infty x^2de^{-nx} \\ &= -\frac{1}{n}x^2e^{-nx}\Big|_0^\infty + \frac{2}{n}\int_0^\infty e^{-nx}xdx \\ &= -\frac{2}{n^2}\int_0^\infty xde^{-nx} \\ &= -\frac{2}{n^2}xe^{-nx}\Big|_0^\infty + \frac{2}{n^2}\int_0^\infty e^{-nx}dx \\ &= -\frac{2}{n^3}e^{-nx}\Big|_0^\infty \\ &= \frac{2}{n^3}\end{aligned}$$

所以

$$A = \sum_{n=1}^\infty \frac{2}{n^3} = 2.404$$

所以

$$N_p = \frac{8\pi k^3T^3}{h^3c^3} * 2.404 \approx 20.256[cm^{-3}K^{-3}]T^3$$

2. 在天文学中，热改正（Bolometric correction）是将天体的视星等修正为热星等（或称全波段星等）的差值，即$BC = m_v - m_{bol}$，其中m_{bol}是热星等（bolometric magnitude），m_v是视星等（visual magnitude）。已知天狼星的角直径为$\theta = 5.89 \times 10^{-3}$角秒，天狼星的视星等为$m_v = -1.46$，其热改正为$BC \approx 0.15$。太阳热星等为$m_{bol} = -26.85$，太阳常数（地球位置测量到的太阳辐射度）$S = 1.38 \times 10^6\, rg \cdot cm^{-2} \cdot s^{-1}$
求天狼星的有效温度T_{eff}。

参考答案：

天狼星的热星等为$m_{bol}(Sirius) = m_v - BC = -1.46 - 0.15 = -1.61$

由星等与辐射度的关系可得：

$$m_{bol}(Sirius) - m_{bol}(Sun) = -2.5lg\frac{f(Sirius)}{S}$$

可得地球位置观测到的天狼星辐射度为$f(Sirius) = 1.106 \times 10^{-4}\ erg \cdot cm^{-2} \cdot s^{-1}$

天狼星表面的辐射度为

$$F = f(\frac{d}{r})^2 = f \times \frac{4}{\theta^2} = 5.43 \times 10^{11}\ erg \cdot cm^{-2} \cdot s^{-1} = 5.43 \times 10^8\ W/m^2$$

斯忒藩-波耳兹曼定律：$F = \sigma T^4 = 5.67 \times 10^{-8} \times T_{eff}^4\ W/m^2 = 5.43 \times 10^8\ W/m^2$

可得$T_{eff} = 9892\ K$

3. 秒差距（pc）是一个距离单位，来源于三角视差法，定义为 1 天文单位的对角为 1 角秒时的距离。对于一个星体，已知其三角视差为θ = 0.03角秒，视星等为$m_v = 3.0$，求该星体的距离以及绝对星等M_v。

参考答案：

距离（单位秒差距）为：$d = 1/\theta = 1/0.03'' = 33.3\, pc$

绝对星等根据公式：

$$m_v - M_v = 5lg\, r - 5$$

可得$M_v = 0.39$

4. 一个 1m 和一个 10cm 口径望远镜，均要在衍射极限分辨率情况下观测目标。请分别计算在 400nm 波长上，两台望远镜各自的衍射极限分辨率是多少？两者收集星光的能力差距多少倍？

参考答案：

由瑞利判据可以得：

$$\theta_1 = 1.22\frac{\lambda}{D_1} = 4.88 \times 10^{-7} \approx 0.1''$$
$$\theta_2 = 1.22\frac{\lambda}{D_2} = 4.88 * 10^{-6} \approx 1''$$

分别是0.1和1角秒

望远镜收集星光的能力和物镜面积成正比，因此二者聚光能力之比为$(D_1/D_2)^2 = (1/0.1)^2 = 100$，即1m口径的望远镜的聚光能力是10cm口径的100倍。

5. 主动光学和自适应光学分别通过什么手段消除什么误差？

参考答案：112-113页，主动光学调整仪器的镜面形状和位置，以消除由重力、温度、机械应力等导致的镜面形变；自适应光学实时检测并校正光波波前畸变，校正大气扰动。

6. 太阳结构大致分几层，分别是什么？太阳大气分几层，分别是什么？太阳核心通过什么机制产生能量？太阳日冕的温度可达到多少？太阳黑子的活动周期是多少？日冕物理中的两个未解之迷是什么？

参考答案：太阳结构分4层，分别是核心、辐射层、对流层、大气层；大气分4层，分别是光球层、色球和过渡区、日冕、行星际（太阳风）；核聚变（质子-质子链反应）；日冕温度可达到100-250万开尔文；太阳黑子的活动周期是11.1年；日冕加热问题和太阳风加速问题