综合练习100题 填空选择详解，

一、填空题.

1. $AA'=E \Rightarrow |A||A'|=|E| \Rightarrow |A||A|=1$ 又 $|A|<0 \Rightarrow |A|=-1$

$|A+E|=|A+AA'|=|AE+AA'|=|A(E+A')|=|A||E+A'|=-|A'+E'|=-|A+E|$

$\Rightarrow |A+E|=0$

2. 设D的第i行所有元素及其余子式都相等，$a_{ij}=a$，$M_{ij}=M$，$1\le j\le 4$

$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}+a_{i4}A_{i4}$

$=a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1}+a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2}+a_{i3}(-1)^{i+3}M_{i3}+a_{i4}(-1)^{i+4}M_{i4}$

$=(-1)^{i+1}aM+(-1)^{i+2}aM+(-1)^{i+3}aM+(-1)^{i+4}aM=0$

3. $D=\sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}\underline{a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}}$ ⟵不同行不同列元素的乘积

D中一共有$n^2$个元素，多于$n^2-n$个为零，D中不存在不同行不同列的n个非零元，

所以$D=0$

4. $A_{m\times n}$、$B_{n\times m}$ $R(AB)\le R(A)\le \min(m,n)=n<m$

$AB$是$m\times m$矩阵 $R(AB)<m \Rightarrow |AB|=0$

5. $AB=B \Rightarrow AB-B=0$ $(A-E)B=0$. $|A-E|\ne 0 \Rightarrow A-E$ 可逆

$(A-E)^{-1}(A-E)B=(A-E)^{-1}0 \Rightarrow B=0$

6. $A+AB=E$ $A(E+B)=E$ $A^{-1}=E+B$，$A^{-1}A=E \Rightarrow (E+B)A=E$

$\Rightarrow A+BA=E$

7. $ABC=E \Rightarrow (AB)C=E$，$C^{-1}=AB$ $CC^{-1}=E \Rightarrow C(AB)=E$

$(CAB)'=E' \Rightarrow B'A'C'=E$

8. 由 $|A^*|=|A|^{n-1}$（A是n阶方阵） $|B^{-1}|=\frac{1}{|B|}$

$|3A^*B^{-1}|=3^n|A^*||B^{-1}|=3^n|A|^{n-1}|B|^{-1}=3^n 1^{n-1}\frac{1}{(-3)}=-3^{n-1}$

9. $|A|=0$ $A_{n\times n}$ $\Rightarrow$ A的n阶子式$=0$. $A^*\ne 0 \Rightarrow$ A有 $n-1$阶非零子式.

A的非零子式的最大阶数为$n-1$. 由秩的定义 $R(A)=n-1$

10. $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A\end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2} \begin{vmatrix} A+B & A+B \\ B & A\end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & E \\ B & A\end{pmatrix}\right|$

$=\begin{vmatrix} A+B & 0 \\ 0 & E\end{vmatrix}\begin{vmatrix} E & E \\ B & A\end{vmatrix}=|A+B|\begin{vmatrix} E & E \\ B & A\end{vmatrix} \xlongequal{r_2+(-B)r_1} |A+B|\begin{vmatrix} E & E \\ 0 & A-B\end{vmatrix}$

$=|A+B||A-B|=1(2)=2$

11. $|A|=1(2)(3)=6\neq 0$ A可逆，由 $AA^*=|A|E$ $\frac{A}{|A|}A^*=E \Rightarrow (A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}$

$$(A^*)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

12. $A_{m\times m}, B_{n\times n}$ $\begin{vmatrix}0 & A\\ B & C\end{vmatrix} \xlongequal{r_i \leftrightarrow r_j} (-1)^{mn}\begin{vmatrix}B & C\\ 0 & A\end{vmatrix} = (-1)^{mn}|B||A| = (-1)^{mn}ab$

13. $A^2+A-4E=0$ $(A-E)(A+2E)=A^2+A-2E \Rightarrow (A-E)(A+2E)=4E-2E=2E$

$(A-E)\frac{A+2E}{2}=E. \Rightarrow (A-E)^{-1}=\frac{A+2E}{2}$

14. $f(A)=A^2+E$ 的特征值为 $f(\lambda)=\lambda^2+1$ 为 $3^2+1=10, (-1)^2+1=2, 2^2+1=5$.

$|A^2+E|=10(2)(5)=100.$ (由特征值的性质)

15. $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a\end{bmatrix} \xrightarrow{r_5+r_1} \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & a+1\end{bmatrix} \xrightarrow{r_5+r_2} \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & a+2\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{r_5+r_3} \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & a+3\end{bmatrix} \xrightarrow{r_5+r_4} \begin{bmatrix}\boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+4\end{bmatrix}$ $R(A)=\begin{cases}4 & a=-4\\ 5 & a\neq -4\end{cases}$

16. A的各行元素和为0. 于是

$A\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}=\vec{0}$, $R(A)=n-1$. $A_{n\times n}$ $\Rightarrow \dim N(A)=n-(n-1)=1$. $AX=\vec{0}$ 的

基础解系只含有1个向量. 通解为 $k\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$. $k$为任意常数.

17. $A_{m\times n}$, $AA'$是 $m\times m$ 矩阵. $|AA'|\neq 0$, $\Rightarrow R(AA')=m$

$R(A)\geq R(AA')=m$ 又A是 $m\times n$ 矩阵. $R(A)\leq m$ $\Rightarrow R(A)=m$.

$\dim N(A)=n-R(A)=n-m$, 基础解系有 $n-m$ 个解向量,

18. $A^3=A \Rightarrow A^3-A=0$, 若 $AX=\lambda X$. $X\neq 0$.

[一般地. $f(A)=0 \Rightarrow f(\lambda)=0$ ]

$(A^3-A)X=\vec{0}$

$A^3X-AX=\vec{0}$

$\lambda^3X-\lambda X=\vec{0}$ $(\lambda^3-\lambda)X=\vec{0}$ $X\neq 0 \Rightarrow \lambda^3-\lambda=0$ $\lambda(\lambda^2-1)=0$

$\lambda=0, 1$ 或 $-1$.

19. $A\xi=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\a+2\\b+1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\\\lambda\\-\lambda\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-1\\a=-3\\b=0\end{cases}$

20. A与B相似 ∃可逆阵 T 使得 $A=T^{-1}BT$

$$|\lambda A^2-A|=|\lambda(T^{-1}BT)^2-T^{-1}BT|=|\lambda T^{-1}BTT^{-1}BT-T^{-1}BT|$$

$$=|T^{-1}\lambda B^2T-T^{-1}BT|$$

$B=\begin{bmatrix}3&0\\2&1\end{bmatrix}$ $B^2=\begin{bmatrix}9&0\\8&1\end{bmatrix}$

$$=|T^{-1}|\,|\lambda B^2-B|\,|T|$$

$$=|\lambda B^2-B|$$

$$=\left|\lambda\begin{bmatrix}9&0\\8&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&0\\2&1\end{bmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix}9\lambda-3&0\\8\lambda-2&\lambda-1\end{vmatrix}=3(3\lambda-1)(\lambda-1)$$

21. 设 $AX=\lambda X$、$X\neq0$　$A^{-1}X=\frac{1}{\lambda}X$　$A^*X=\frac{|A|}{\lambda}X$

$\Rightarrow(A^{-1}+A^*)X=(\frac{1}{\lambda}+\frac{|A|}{\lambda})X$

A的特征值为 1.2.3.　$A^{-1}+A^*$的特征值为　$1+6$, $\frac{1}{2}+\frac{6}{2}$, $\frac{1}{3}+\frac{6}{3}$,

$|A|=1(2)(3)=6$　　　$7$, $\frac{7}{2}$, $\frac{7}{3}$

$|A^{-1}+A^*|=7(\frac{7}{2})(\frac{7}{3})=\frac{7^3}{6}$

22. $A^2+A-6E=(A+3E)(A-2E)$. 2是A的一个特征值 $\Rightarrow|2E-A|=0$.

$|A^2+A-6E|=|A+3E||A-2E|=0$

23. $|\lambda E-\alpha\beta'|\xlongequal[\text{公式}]{\text{由降阶}}\lambda^{n-1}|\lambda-\beta'\alpha|=\lambda^{n-1}(\lambda-0)=\lambda^n=0$　$\lambda=0.(n重)$

24. $A_{n\times n}$ 行向量组线性相关 $\Rightarrow R(A)<n\Rightarrow|A|=0\Rightarrow$ 0是A的特征值

25. $\xi=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\10&2&-2\\1&1&-1\end{vmatrix}=0\cdot\vec{i}+8\vec{j}+8\vec{k}$　$\frac{\xi}{|\xi|}=\frac{(0,8,8)}{\sqrt{0^2+8^2+8^2}}=\frac{1}{8\sqrt{2}}(0,8,8)$

单位方向向量有两个. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$

26. $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D&i=j\\0&i\neq j\end{cases}$

$a_{21}A_{41}+a_{22}A_{42}+a_{23}A_{43}+a_{24}A_{44}=0$

$4(A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44})=0\Rightarrow A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=0$

27. $AP=[AX,A^2X,A^3X]=[X,AX,A^2X]\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}$　$X,AX,A^2X$ 线性无关 ⇒ P可逆

$AX=0X+1AX+0A^2X$

$A^2X=0X+0AX+1A^2X$

$A^3X=0X+3AX-2A^2X$

$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}$

28. $|a+b|=|a-b| \Rightarrow |a+b|^2=|a-b|^2 \Rightarrow (a+b, a+b)=(a-b, a-b)$

$\Rightarrow (a,a)+2(a,b)+(b,b)=(a,a)-2(a,b)+(b,b)$

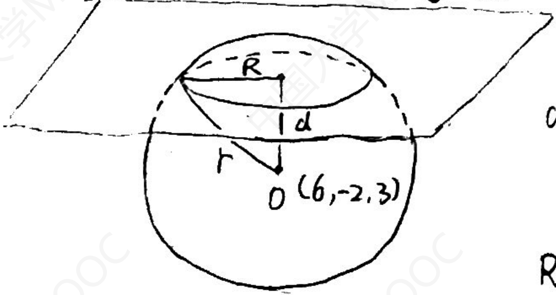
$\Rightarrow 2(a,b)=-2(a,b) \Rightarrow (a,b)=0 \Rightarrow a\perp b$, 夹角 $\frac{\pi}{2}$

29. $L=\begin{cases}\pi_1: x+2y-z-6=0 & n_1(1,2,-1)\\ \pi_2: 2x-y+z-1=0 & n_2(2,-1,1)\end{cases}$ $\quad s=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$

$\vec{s}=(1,-3,-5)$ 或 $(-1,3,5)$ (两向量是平行的)

取 $z=0$ 代入 L $\begin{cases}x+2y-6=0\\ 2x-y-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{8}{5}\\ y=\frac{11}{5}\end{cases}$ $\quad L:\begin{cases}x=\frac{8}{5}-t\\ y=\frac{11}{5}+3t\\ z=5t\end{cases}$

30. $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0 \Rightarrow (x-6)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$




$r=5$.

$d=O$ 到平面的距离

$=\frac{|2(6)+2(-2)+3+1|}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=\frac{12}{3}=4$

$R=\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

二.选择题

1. $n$元方程 $\Rightarrow$ A有 $n$列 $AX=\vec{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A)<n$

$R(A)<n$. A不是列满秩 $\Rightarrow$ A的列向量组线性相关. (C).

2. $A_{m\times n}$ $\quad B=(A \vdots \vec{\beta})$

$AX=\vec{\beta}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(B)=n$

$AX=\vec{\beta}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow R(A)=R(B)<n$

$AX=\vec{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow R(A)=n$

$AX=\vec{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A)<n$

(A)选项, 反例 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix}$ $\vec{\beta}=\begin{bmatrix}1\\ 5\\ 4\end{bmatrix}$ $B=[A\vdots\vec{\beta}]=\begin{bmatrix}1 & 1 & \vdots & 1\\ 2 & 3 & \vdots & 5\\ 3 & 3 & \vdots & 4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$R(A)=2$. $R(B)=3$, 无解

(B)选项 反例 $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & \vdots & 1\\ 2 & 2 & \vdots & 3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & \vdots & 1\end{bmatrix}$ $R(A)=1<2$. $AX=\vec{0}$ 有非零解

$R(B)=2\neq R(A)$ $\quad AX=\vec{\beta}$ 无解.

✓(C) $AX=\vec{\beta}$ 有无穷多解 $R(A)=R(B)<n$, $R(A)<n \Rightarrow$ A有非零解.

(D) $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2$ 是 $AX=\vec{\beta}$ 的解. $A(\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2)=A\vec{\eta}_1+A\vec{\eta}_2=\vec{\beta}+\vec{\beta}=2\vec{\beta}\neq\vec{\beta}$ 不是 $AX=\vec{\beta}$ 的解

选择

3. $|A|=0$, $A_{n\times n}$ $\Rightarrow R(A)<n$, $B=(A\vdots\vec{\beta})$

若 $R(A)=R(B)<n$，方程组有解，且有无穷多解；若 $R(A)\neq R(B)$，方程组无解. [C]

4. $A_{m\times n}$

√(A) 若 $R(A)=m$, A是行满秩. $B=(A\vdots\vec{\beta})$ B是 $m\times(n+1)$ 矩阵. $R(B)\le m$

A是B的子矩阵, $m=R(A)\le R(B)$ $\Rightarrow R(B)=m$. $\Rightarrow R(A)=R(B)$. $AX=\vec{\beta}$ 有解

(B) $R(A)<n$, 若 $R(A)\neq R(B)$ 方程组无解.

(C) $R(A)=n$, 若 $R(A)\neq R(B)$ 方程组无解.

(D) 反例. $\left[\begin{array}{cc|c}1&1&2\\2&2&4\\3&3&6\end{array}\right]$ 增广阵 有解 $x_1=1$. $x_2=1$ (不是唯一解)

5. $A_{5\times5}$. $R(A)=3$, A没有非零4阶子式. $M_{ij}=0$, $\Rightarrow A_{ij}=0$ $1\le i,j\le4$

$\Rightarrow A^*=0$ $\Rightarrow R(A)=0$ 选 [C]

$A_{n\times n}$ $R(A^*)=\begin{cases}n, & R(A)=n\\1 & R(A)=n-1\\0 & R(A)<n-1\end{cases}$

6. (A) $AA^*=|A|E$

√(B) $|A^*|=|A|^{n-1}$, $|A|\neq0$ $\Rightarrow |A^*|\neq0$

(C) 不正确, (D) 当 $R(A)=n,0$ 时 $R(A)=R(A^*)$

7. 矩阵乘法有零因子, 即 $\exists A\neq0$、$B\neq0$. 但 $AB=0$.

(A) 错误

(B) $A=\begin{bmatrix}2&4\\-3&6\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}-2&4\\1&-2\end{bmatrix}$ $AB=0$ $BA=\begin{bmatrix}-2&4\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\-3&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-16&-32\\-8&16\end{bmatrix}\neq0$

(C) $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A(A+B)+B(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$

√(D) $AB=0$, 若 $|B|\neq0$ B可逆. $ABB^{-1}=0B^{-1}$ $\Rightarrow A=0$ 矛盾,

所以 $|B|=0$

8. $R\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{bmatrix}=2$. $\pi_1$与$\pi_2$不平行 但不一定垂直, 选 [D]

9. $\lambda$是A的特征根, $\exists X\neq0$ $AX=\lambda X$. $A^*AX=\lambda A^*X$ $A^*A=|A|E$

$|A|EX=\lambda A^*X$, A可逆 $\Rightarrow \lambda\neq0$, 所以 $A^*X=\dfrac{|A|}{\lambda}X$. 选 [D]

10. 选 B，由定理 6.3，推论 6.2

$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 可以相似对角化，$E^{-1}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}E=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 有两个相同的特征值，（不是必要条件）

11. 选 [C]，由定理 6.3　$\begin{bmatrix}2&3\\0&1\end{bmatrix}$ 可以相似对角化，不是实对称阵 (B) 错误，

(D) 是实对称阵的性质

12. (A) 中的线性无关应改为线性相关

(B) $1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\vec{0}$，但 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 线性相关，B 错误

(C) 中存在一组数，应改为存在一组不全为零的数，

✓ (D) 若向量的个数 > 向量的维数，向量组线性相关．（推论 4.2）

13. 选 (D)

若 $A'=A$，$B'=B$，A，B 是实二次型的矩阵，由 $X'AX=X'BX$，$\forall X$，两个二次型相同，所以对应的矩阵也相同

14. A，B 是正定阵，即 A，B 是实二次型的矩阵，A，B 是对称阵．

$(AB)'=B'A'=BA$ 不一定等于 AB，AB 不一定对称，则 AB 不一定是正定阵 [A] 错．

$(A^2+B)'=(A^2)'+B'=(A')^2+B'=A^2+B$．是对称阵．$(A^2)'=(A')^2=A^2$．$A^2$ 对称

A 是实对称，则存在正交阵 P．$P'AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}$　$\lambda_1,\cdots\lambda_n$ 是 A 的特征值，A 正定 $\lambda_i>0$

$P'A^2P=P^{-1}A^2P=P^{-1}APP^{-1}AP=(P'AP)^2=\begin{bmatrix}\lambda_1^2&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n^2\end{bmatrix}\Rightarrow\lambda_1^2\cdots\lambda_n^2$ 是 $A^2$ 的特征值．$\lambda_i^2>0$，$1\le i\le n$

由推论 8.1．$A^2$ 正定

$X\neq\vec{0}$，$X'(A^2+B)X=X'A^2X+X'BX>0$．因为 $X'A^2X>0$，$X'BX>0$　[B] 正确，

(C) 若 $A=B$，$A-B=0$，不正定

(D) 若 $k=0$，$kA=0$，不正定．

15. (A)，$\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}^2=E$．但 $\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$，特征值：-1，1，不是全大于零，不正定

(B) $A=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}$　$A^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，但 $A'A\neq E$，A 不是正交阵．

✓ (C) $AA^*=|A|E$　$A^2=E$　$A\cdot A=E\Rightarrow A=A^{-1}$

$A^*=|A|A^{-1}$．$(A^*)^2=(|A|A^{-1})^2=|A|^2(A^{-1})^2=|A^2|\,A^2=|E|\,A^2=A^2=E$

(D) 若 $A=E$，$A^2=E$，但，$tr(A)=n\neq n^2$

16.(A) $A$.$B$ 都可逆 $\Rightarrow |A|\neq 0$. $|B|\neq 0$ $|A^{-1}B^*| = |A^{-1}||B^*| = |A|^{-1}|B|^{n-1} \neq 0$ $\Rightarrow A^{-1}B^*$ 可逆 结论正确.

(B) $A$.$B$ 实对称正定 $\Rightarrow$ $A$.$B^{-1}$ 实对称正定 $\Rightarrow$ $A+B^{-1}$ 实对称正定. 结论正确.

(C) $A$.$B$ 正交, $A'A = E$. $B'B = E$ $(AB)'AB = B'A'AB = B'EB = B'B = E$. 结论正确.

✓(D) $A$.$B$ 实对称, $(AB)' = B'A' = BA$ 不一定是 $AB$. 结论错误

17. (A) 初等变换不改变矩阵的秩, 结论正确.

✓(B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 可逆 可经初等行变换化为 $E$. 但 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq E^{-1}$ 结论错误

(C) $A \xrightarrow{行} B$, $\exists$ 可逆 $P$ $PA = B$ $AX = 0 \Rightarrow PAX = 0 \Rightarrow BX = 0$

$BX = 0 \Rightarrow PAX = 0 \Rightarrow P^{-1}PAX = 0 \Rightarrow AX = 0$

(D) $A \xrightarrow{列} B$ $\exists$ 可逆 $Q$ $AQ = B$ $\Rightarrow B$ 的列可由 $A$ 的列线性表示

$A = BQ^{-1}$ $\Rightarrow A$ 的列可由 $B$ 的列线性表示,

$\Rightarrow A$ 的列向量组与 $B$ 的列向量组等价.

18. 由 $A$ 到 $B$ 经过两次初等行变换, $r_3 + r_1$, 和 $r_1 \leftrightarrow r_2$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_2, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_1.$$

行变换, 初等阵乘在左, 先做的变换先乘. $B = P_1P_2A$ 选 [C]

19. $A$ 与 $B$ 相似

(A) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 相似, ( $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 实对称, 可相似于 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ )

但 $\lambda E - A \neq \lambda E - B$. ( $\lambda E - A = \lambda E - B \Rightarrow A = B$ )

✓(B) $A$ 与 $B$ 相似 $\exists$ 可逆 $T$. $B = T^{-1}AT$

$$|\lambda E + B| = |\lambda E + T^{-1}AT| = |T^{-1}\lambda T + T^{-1}AT| = |T^{-1}||\lambda E + A||T| = |\lambda E + A|$$

(C) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $A^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. $B^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $A^* \neq B^*$

(D) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. $A^{-1} \neq B^{-1}$

20. (A) $(-E)^2 = E$ 但 $-E + E = 0$ 不可逆

(B) $E^2 = E$ 但 $A - E = E - E = 0$ 不可逆

(C) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $A^2 = E$, 但 $A + E \neq 0$. $A - E \neq 0$.

✓ (D) $A^2 = E$. $A^2 - E = 0$ $(A+E)(A-E) = 0$. 若 $A+E$ 可逆

$$(A+E)^{-1}(A+E)(A-E) = (A+E)^{-1}0 = 0$$

$$(A-E) = 0$$

$A = E$, 矛盾, $A \neq E$ 时 $A+E$ 可逆

21. $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$  $B=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

A与B 都是实对称阵，A,B可以相似对角化.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1&-1\\-1&-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}\lambda-4&\lambda-4&\lambda-4&\lambda-4\\-1&\lambda-1&-1&-1\\-1&-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-4)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-1&\lambda-1&-1&-1\\-1&-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\r_4+r_1}]{r_2+r_1}(\lambda-4)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-4)\lambda^3=0$$

$\lambda_1=4,\ \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$

$\exists$ 正交 $P$, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\lambda_3&\\&&&\lambda_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{bmatrix}=B$

$P$是正交阵 $P^{-1}=P'$.  $P'AP=B$,  $\Rightarrow$ A与B 既相似又合同. 选(A)

22. (A) 由定理8.3. 结论错误，$f$的正惯性指数是$n$. $\Rightarrow$ $f$的秩是$n$，且负惯性指数为0.

由推论8.2. (B) (D) 错误 (C) 正确.

23. (A) "$\Rightarrow$" $A'=(B'B)'=B'(B')'=B'B=A$, A对称.

$\forall X\neq\vec{0}$  $X'AX=X'B'BX=(BX)'(BX)=|BX|^2$

由 $BX=\vec{0}$ 只有零解, $X\neq\vec{0}\Rightarrow BX\neq\vec{0}$.  $X'AX=|BX|^2>0$. A 正定

"$\Leftarrow$": 若 A 正定. $X'AX>0$. $\forall X\neq\vec{0}$

即 $X'B'BX=|BX|^2>0$, $\Rightarrow BX\neq\vec{0}$. 对 $\forall X\neq\vec{0}$

$\Rightarrow BX=\vec{0}$ 只有零解.

(B) $BX=\vec{0}\Rightarrow B'BX=\vec{0}$

$B'BX=\vec{0}\Rightarrow X'B'BX=\vec{0}\Rightarrow (BX)'(BX)=\vec{0}\Rightarrow |BX|^2=0\Rightarrow BX=\vec{0}$

所以 $N(B)=N(B'B)$  $B_{m\times n}$  $(B'B)_{n\times n}$

$n-R(B)=n-R(B'B)\Rightarrow R(B)=R(B'B)=R(A)$

(C) 若 $AX=\lambda X$  $X\neq\vec{0}$  $|X|\neq 0$

$B'BX=\lambda X\Rightarrow X'B'BX=\lambda X'X$  $|BX|^2=\lambda|X|^2$.  $\lambda=\frac{|BX|^2}{|X|^2}\geq 0$

✓(D) 由A, $R(B)=n\Leftrightarrow$ A正定.

24. $|A^*A^{-1}|=|A^*||A^{-1}|=|A|^{n-1}\frac{1}{|A|}=|A|^{n-2}=a^{n-2}$ 选[C]

25. $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ $B^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

(A) $|A+B^{-1}|=\left|\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}0&0\\0&0\end{vmatrix}=0$. $|A|+|B|^{-1}=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&0\\0&-1\end{vmatrix}=2$

$|A+B^{-1}|\neq|A|+|B|^{-1}$

(B) 选项应为 $(A+B)^{-1}=B^{-1}+A^{-1}$. $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

$(A+B)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ $B^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

$B^{-1}+A^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\neq(A+B)^{-1}$

(C) $(AB)^2=ABAB$ $A^2B^2=AABB$、 $AB$不一定等于$BA$，$(AB)^2$不一定等于$A^2B^2$

√ (D) $|A'B|=|A'||B|=|A||B|$. $|BA|=|B||A|=|A||B|\Rightarrow|A'B|=|BA|$

26. $\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2$是$AX=\vec{\beta}$的两个解. $A\left(\frac{\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2}{2}\right)=\frac{1}{2}A(\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2)=\frac{1}{2}(A\vec{\eta}_1+A\vec{\eta}_2)=\frac{1}{2}(\vec{\beta}+\vec{\beta})=\vec{\beta}$

$\frac{\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2}{2}$是$AX=\vec{\beta}$的特解， $\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2$线性无关

若 $c_1\vec{\xi}_1+c_2(\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2)=\vec{0}$ $\Rightarrow(c_1+c_2)\vec{\xi}_1+c_2\vec{\xi}_2=\vec{0}$ $\Rightarrow c_2=0$ $c_1+c_2=0$

$\Rightarrow c_1=c_2=0$, $\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2$线性无关. 也是$AX=\vec{0}$的基础解系.

通解. $k_1\vec{\xi}_1+k_2(\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2)+\frac{\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2}{2}$ 选[B]

27. $\vec{s}_1=(1,-2,1)$ $\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&0\\0&2&1\end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}=(-1,-1,2)$

$$\cos\theta=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{1(-1)+(-2)(-1)+1(2)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.\quad\theta=\frac{\pi}{3}.\ 选[C]$$

28. $|\vec{\alpha}_3\ \vec{\alpha}_2\ \vec{\alpha}_1\ \vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2|$ （习题全解打印错误）

$=|\vec{\alpha}_3\ \vec{\alpha}_2\ \vec{\alpha}_1\ \vec{\beta}_1|+|\vec{\alpha}_3\ \vec{\alpha}_2\ \vec{\alpha}_1\ \vec{\beta}_2|$

$=-|\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2\ \vec{\alpha}_3\ \vec{\beta}_1|-|\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2\ \vec{\alpha}_3\ \vec{\beta}_2|$

$=-|\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2\ \vec{\alpha}_3\ \vec{\beta}_1|+|\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2\ \vec{\beta}_2\ \vec{\alpha}_3|=-m+n$ 选[D]

29. 1°若$|A|=0$ $R(A^*)=\begin{cases}1 & R(A)=n-1\\0 & R(A)<n-1\end{cases}$ 当$R(A)=n-1$时 $R(A^*)=1<n-1\Rightarrow R(A^*)^*=0$

当$R(A)<n-1$时 $A^*=0\Rightarrow(A^*)^*=0$. 2°若$|A|\neq0$. $A$可逆,

$(A^*)^*A^*=|A^*|E$ $(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}\frac{A}{|A|}=|A|^{n-2}A$ 选[C]

30. $\vec{s}_1=(a_1-a_2,\ b_1-b_2,\ c_1-c_2)$ $M_1(a_3,\ b_3\ \ c_3)$

$\vec{s}_2=(a_2-a_3,\ b_2-b_3,\ c_2-c_3)$ $M_2(a_1,\ b_1,\ c_1)$

混合积 $[\vec{s}_1\ \vec{s}_2\ \overrightarrow{M_1M_2}]=\begin{vmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_1-a_3 & b_1-b_3 & c_1-c_3 \end{vmatrix} \overset{r_3-r_1}{=\!=} \begin{vmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \end{vmatrix} =0$

$L_1$与$L_2$共面 由 $R\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}=3$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{bmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-r_3} \begin{bmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad 秩=3$$

行向量线性无关 $\vec{s}_1 \not\parallel \vec{s}_2$ $L_1$与$L_2$共面且不平行$\Rightarrow L_1$与$L_2$交于一点，

选[A].