计算机组成原理

第十九讲

刘松波

哈工大计算学部

模式识别与智能系统研究中心

第 6 章 计算机的运算方法

6.1 无符号数和有符号数

6.2 数的定点表示和浮点表示

6.3 定点运算

6.4 浮点四则运算

6.5 算术逻辑单元

上节课内容回顾

- **6.3 定点运算**
  - 一、移位运算
    - 算术移位与逻辑移位
  - 二、加减法运算
    - 补码加减运算公式、溢出判断、补码加减法的硬件配置、控制流程
  - 三、乘法运算
    - 笔算乘法、笔算乘法的改进
    - 原码一位乘
    - 补码乘法
  - 四、除法运算
    - 恢复余数法、加减交替法

6.4 浮点四则运算

一、浮点加减运算

$$x = S_x \cdot 2^{j_x} \qquad y = S_y \cdot 2^{j_y}$$

1. 对阶

(1) 求阶差

$$\Delta j = j_x - j_y = \begin{cases} = 0 & j_x = j_y & \text{已对齐} \\ > 0 & j_x > j_y & \begin{cases} x \text{ 向 } y \text{ 看齐} & S_x \leftarrow 1,\ j_x - 1 \\ y \text{ 向 } x \text{ 看齐} \ \checkmark & S_y \rightarrow 1,\ j_y + 1 \end{cases} \\ < 0 & j_x < j_y & \begin{cases} x \text{ 向 } y \text{ 看齐} \ \checkmark & S_x \rightarrow 1,\ j_x + 1 \\ y \text{ 向 } x \text{ 看齐} & S_y \leftarrow 1,\ j_y - 1 \end{cases} \end{cases}$$

(2) 对阶原则

小阶向大阶看齐

例如 $x = 0.1101 \times 2^{01}$ $y = (-0.1010) \times 2^{11}$ **6.4**

求 $x+y$

解： $[x]_{补} = 00, 01; 00.1101$ $[y]_{补} = 00, 11; 11.0110$

1. 对阶

① 求阶差 $[\Delta j]_{补} = [j_x]_{补} - [j_y]_{补}$

$$\begin{array}{rr} & = 00, 01 \\ + & 11, 01 \\ \hline & 11, 10 \end{array}$$

阶差为负（ -2 ） $\therefore S_x \longrightarrow 2$ $j_x + 2$

② 对阶 $[x]_{补'} = 00, 11; 00.0011$

2. 尾数求和

$$\begin{array}{rll} & [S_x]_{补'} & = 00.0011 \\ + & [S_y]_{补} & = 11.0110 \\ \hline & & 11.1001 \end{array}$$

对阶后的$[S_x]_{补'}$

$\therefore [x+y]_{补} = 00, 11; 11.1001$

3. 规格化

(1) 规格化数的定义

$$r = 2 \qquad \frac{1}{2} \le |S| < 1$$

(2) 规格化数的判断

$S>0$	规格化形式	$S<0$	规格化形式
真值	$0.1\times\times\cdots\times$	真值	$-0.1\times\times\cdots\times$
原码	$0.\boxed{1}\times\times\cdots\times$	原码	$1.\boxed{1}\times\times\cdots\times$
补码	$\boxed{0.1}\times\times\cdots\times$	补码	$\boxed{1.0}\times\times\cdots\times$
反码	$0.1\times\times\cdots\times$	反码	$1.0\times\times\cdots\times$

原码　不论正数、负数，第一数位为1

补码　符号位和第 一数位不同

特例

$$S = -\frac{1}{2} = -0.100\cdots0$$

$$[S]_{原} = 1.100\cdots0$$

$$[S]_{补} = \boxed{1.1}00\cdots0$$

$\therefore$ $[-\frac{1}{2}]_{补}$ 不是规格化的数

$$S = -1$$

$$[S]_{补} = \boxed{1.0}00\cdots0$$

$\therefore$ $[-1]_{补}$ 是规格化的数

(3) 左规

尾数左移一位，阶码减 1，直到数符和第一数位不同为止

上例 $[x+y]_{补} = 00, 11; 11.1001$

左规后 $[x+y]_{补} = 00, 10; 11.0010$

$$\therefore x + y = (-0.1110)\times 2^{10}$$

(4) 右规

当 尾数溢出（ >1）时，需 右规

即尾数出现 01. ×× …×或 10. ×× …×时

尾数右移一位，阶码加 1

例6.27 $x = 0.1101 \times 2^{10}$ $y = 0.1011 \times 2^{01}$

求 $x+y$（除阶符、数符外，阶码取 3 位，尾数取 6 位）

解： $[x]_{补} = 00, 010; 00.110100$

$[y]_{补} = 00, 001; 00.101100$

① 对阶

$$[\Delta j]_{补} = [j_x]_{补} - [j_y]_{补} \quad \begin{array}{r} = \ 00,010 \\ + \ 11,111 \\ \hline \boxed{1}00,001 \end{array}$$

阶差为 +1 $\therefore S_y \longrightarrow 1,\ j_y+1$

$\therefore [y]_{补'} = 00, 010; 00.010110$

② 尾数求和

$$\begin{array}{rl} [S_x]_{补} = & 00.110100 \\ + \ [S_y]_{补'} = & 00.010110 \\ \hline & 01.001010 \end{array}$$

对阶后的$[S_y]_{补'}$

尾数溢出需右规

③ 右规

6.4

$[x+y]_{补} = 00, 010; 01.001010$

右规后

$[x+y]_{补} = 00, 011; 00.100101$

$\therefore x+y = 0.100101 \times 2^{11}$

4. 舍入

在 对阶 和 右规 过程中，可能出现 尾数末位丢失

引起误差，需考虑舍入

(1) 0 舍 1 入法

(2) 恒置 “1” 法

例 6.28 $x = (-\frac{5}{8}) \times 2^{-5}$ $y = (\frac{7}{8}) \times 2^{-4}$

求 $x-y$（除阶符、数符外，阶码取 3 位，尾数取 6 位）

解： $x = (-0.101000) \times 2^{-101}$ $y = (0.111000) \times 2^{-100}$

$[x]_补 = 11, 011; 11.011000$ $[y]_补 = 11, 100; 00.111000$

① 对阶

$$
\begin{array}{rr}
[\Delta j]_补 = [j_x]_补 - [j_y]_补 = & 11, 011 \\
+ & 00, 100 \\
\hline
 & 11, 111
\end{array}
$$

阶差为 -1 $\therefore S_x \longrightarrow 1,\ j_x + 1$

$\therefore [x]_{补'} = 11, 100; 11.101100$

② 尾数求和

$$
\begin{array}{rr}
[S_x]_{补'} = & 11.\ 101100 \\
+\ \ [-S_y]_{补} = & 11.\ 001000 \\
\hline
& \boxed{1}10.\ 110100
\end{array}
$$

③ 右规

$$[x-y]_{补} = 11,\ 100;\ 10.\ 110100$$

右规后

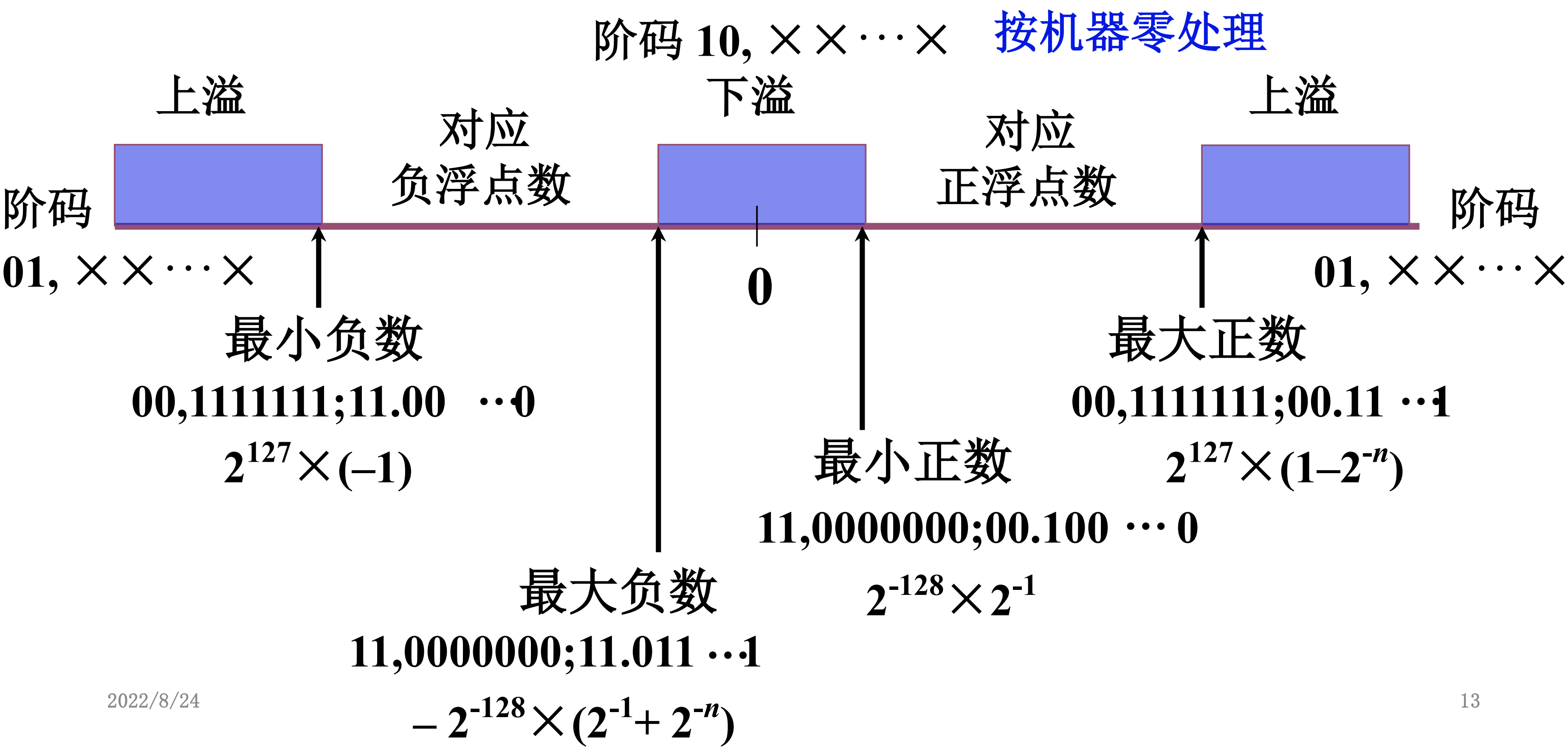
$$[x-y]_{补} = 11,\ 101;\ 11.\ 011010$$

$$\therefore\ x-y = (-0.100110)\times 2^{-11}$$

$$= (-\frac{19}{32})\times 2^{-3}$$

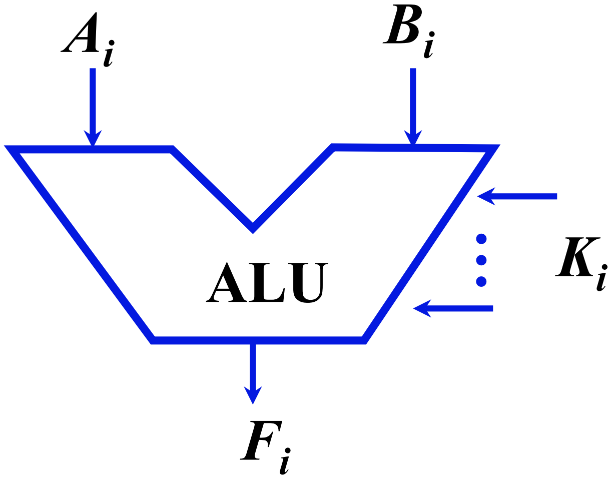
5. 溢出判断

设机器数为补码，尾数为 规格化形式，并假设阶符取 2 位，阶码的数值部分取 7 位，数符取 2 位，尾数取 n 位，则该 补码 在数轴上的表示为



6.5 算术逻辑单元

一、ALU 电路



组合逻辑电路

K_i 不同取值

F_i 不同

四位 ALU 74181

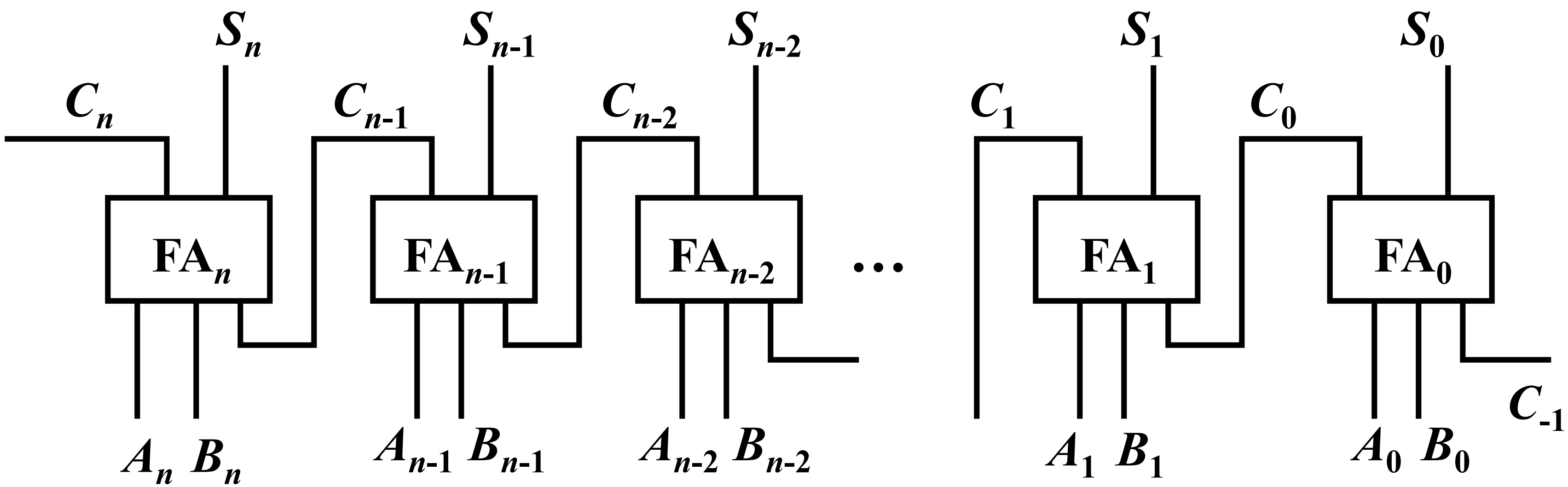
$M = 0$ 算术运算

$M = 1$ 逻辑运算

$S_3 \sim S_0$ 不同取值，可做不同运算

二、快速进位链

1. 并行加法器



$$S_i = \overline{A}_i\,\overline{B}_i\,C_{i-1} + \overline{A}_i\,B_i\,\overline{C}_{i-1} + A_i\,\overline{B}_i\,\overline{C}_{i-1} + A_i\,B_i\,C_{i-1}$$

$$C_i = \overline{A}_i\,B_i\,C_{i-1} + A_i\,\overline{B}_i\,C_{i-1} + A_i\,B_i\,\overline{C}_{i-1} + A_i\,B_i\,C_{i-1}$$

$$= A_i\,B_i + (A_i + B_i)C_{i-1}$$

$d_i = A_i\,B_i$　本地进位　　　$t_i = A_i + B_i$　传送条件

则 $C_i = d_i + t_i C_{i-1}$

2. 串行进位链

进位链　　传送进位的电路

串行进位链　　进位串行传送

以 4 位全加器为例，每一位的进位表达式为

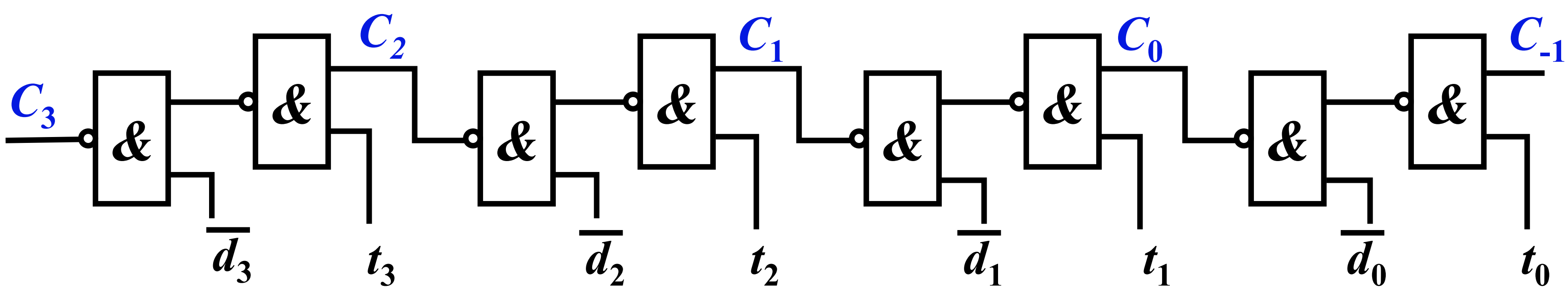
$$C_0 = d_0 + t_0 C_{-1} = \overline{\overline{d_0} \cdot \overline{t_0 C_{-1}}}$$

$$C_1 = d_1 + t_1 C_0$$

$$C_2 = d_2 + t_2 C_1$$

$$C_3 = d_3 + t_3 C_2$$

设与非门的级延迟时间为 t_y



4 位 全加器产生进位的全部时间为 $8t_y$

n 位全加器产生进位的全部时间为 $2nt_y$

3. 并行进位链（先行进位，跳跃进位）

n 位加法器的进位同时产生　　以 4 位加法器为例

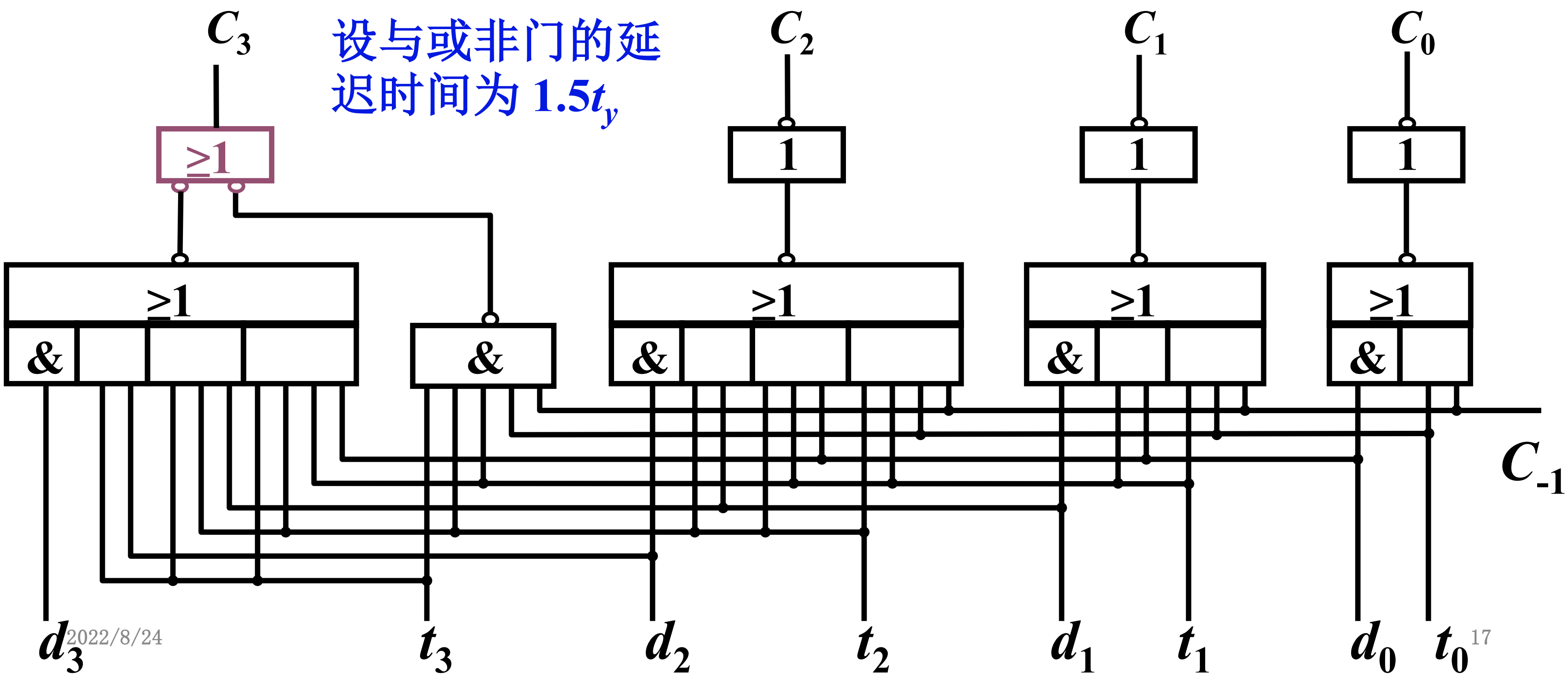
$$C_0 = d_0 + t_0 C_{-1}$$

$$C_1 = d_1 + t_1 C_0 = d_1 + t_1 d_0 + t_1 t_0 C_{-1}$$

$$C_2 = d_2 + t_2 C_1 = d_2 + t_2 d_1 + t_2 t_1 d_0 + t_2 t_1 t_0 C_{-1}$$

$$C_3 = d_3 + t_3 C_2 = d_3 + t_3 d_2 + t_3 t_2 d_1 + t_3 t_2 t_1 d_0 + t_3 t_2 t_1 t_0 C_{-1}$$

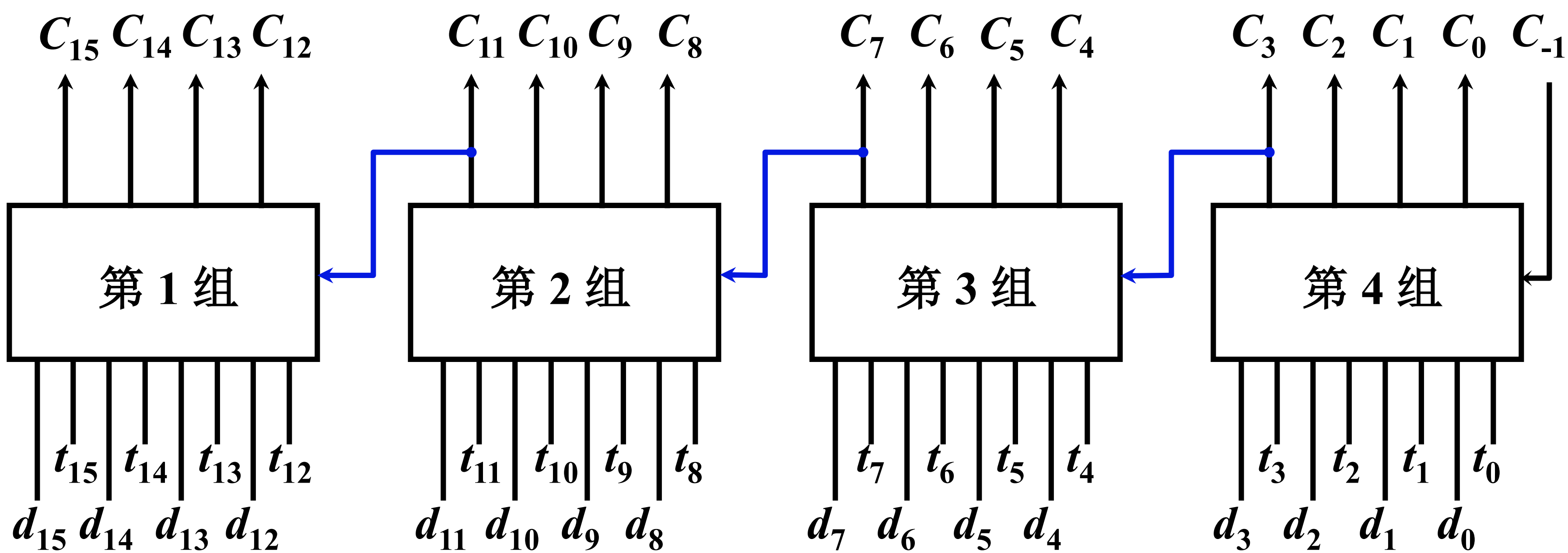
当 $d_i t_i$ 形成后，只需 $2.5t_y$ 产生全部进位



设与或非门的延迟时间为 $1.5t_y$

(1) 单重分组跳跃进位链

n 位全加器分若干小组，小组中的进位同时产生，小组与小组之间采用串行进位　　以 $n = 16$ 为例



当 d_i、t_i 形成后　经 $2.5\ t_y$　产生 $C_3 \sim C_0$

$5\ t_y$　产生 $C_7 \sim C_4$

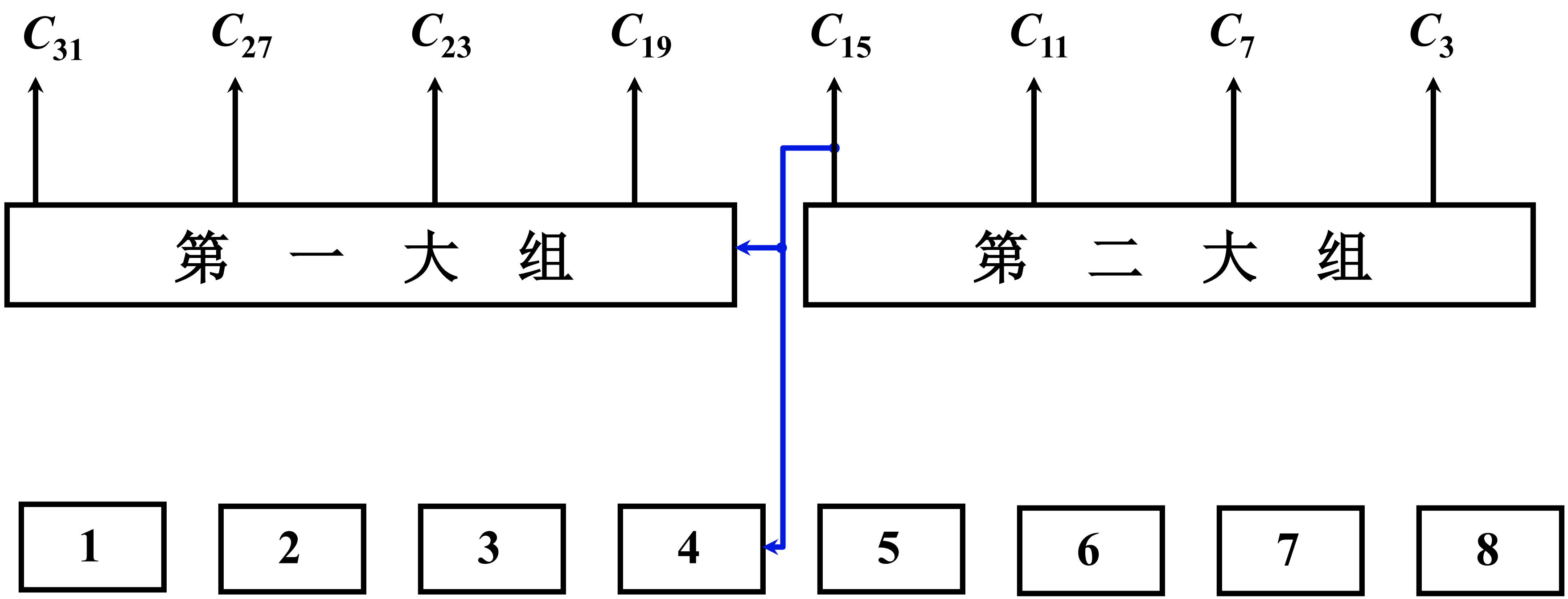
$7.5\ t_y$　产生 $C_{11} \sim C_8$

$10\ t_y$　产生 $C_{15} \sim C_{12}$

(2) 双重分组跳跃进位链

n 位全加器分若干大组，大组中又包含若干小组。每个大组中小组的最高位进位同时产生。大组与大组之间采用串行进位。

以 $n = 32$ 为例



(3) 双重分组跳跃进位链 大组进位分析

以第 8 小组为例

$$C_3 = d_3 + t_3C_2 = \underbrace{d_3 + t_3d_2 + t_3t_2d_1 + t_3t_2t_1d_0}_{D_8} + \underbrace{t_3t_2t_1t_0}_{T_8}C_{-1}$$

$$= D_8 + T_8C_{-1}$$

D_8 小组的本地进位　与外来进位无关

T_8 小组的传送条件　与外来进位无关　传递外来进位

同理　第 7 小组　$C_7 = D_7 + T_7C_3$

第 6 小组　$C_{11} = D_6 + T_6C_7$

第 5 小组　$C_{15} = D_5 + T_5C_{11}$

进一步展开得

$$C_3 = D_8 + T_8C_{-1}$$

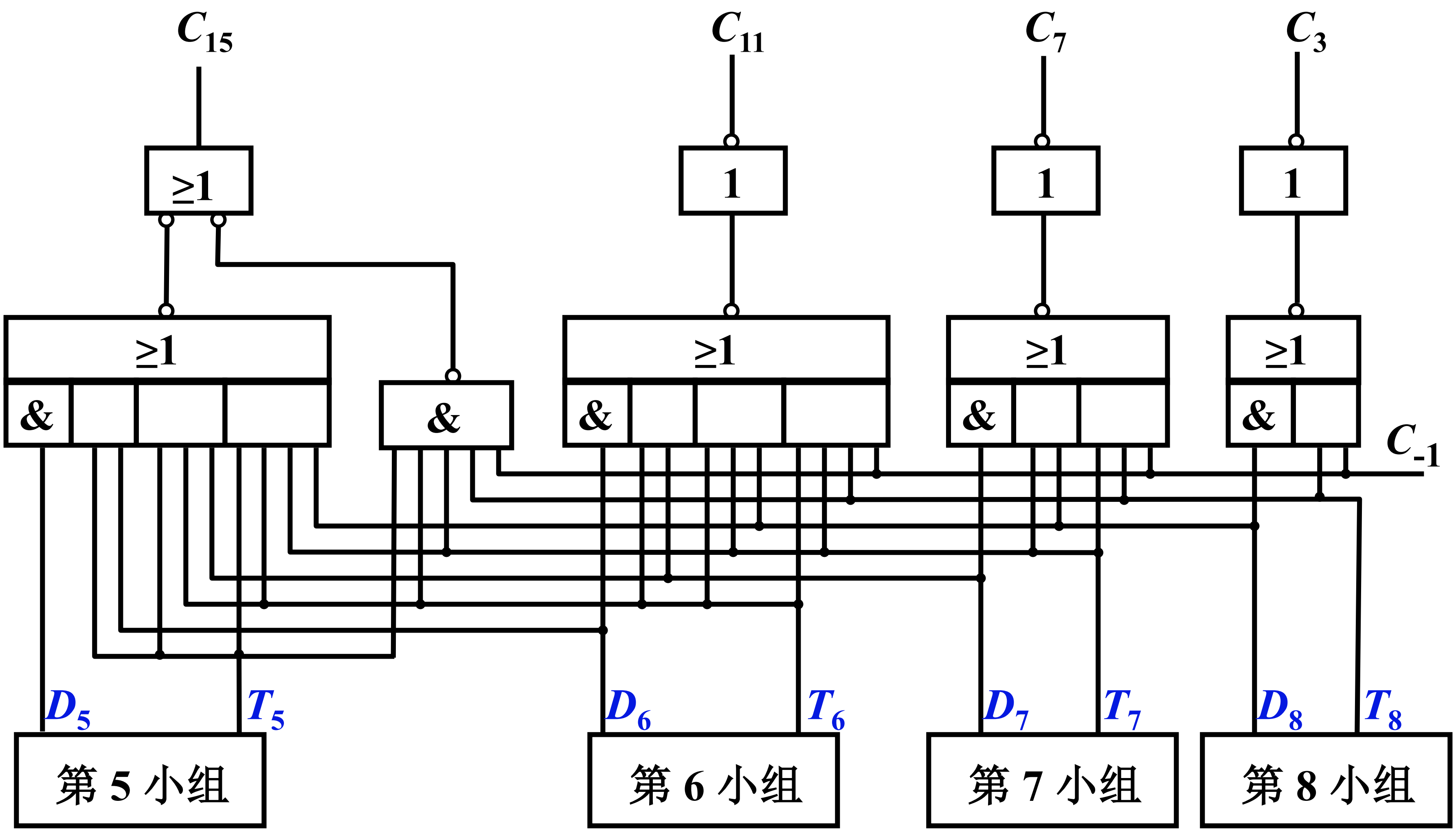
$$C_7 = D_7 + T_7C_3 = D_7 + T_7D_8 + T_7T_8C_{-1}$$

$$C_{11} = D_6 + T_6C_7 = D_6 + T_6D_7 + T_6T_7D_8 + T_6T_7T_8C_{-1}$$

$$C_{15} = D_5 + T_5C_{11} = D_5 + T_5D_6 + T_5T_6D_7 + T_5T_6T_7D_8 + T_5T_6T_7T_8C_{-1}$$

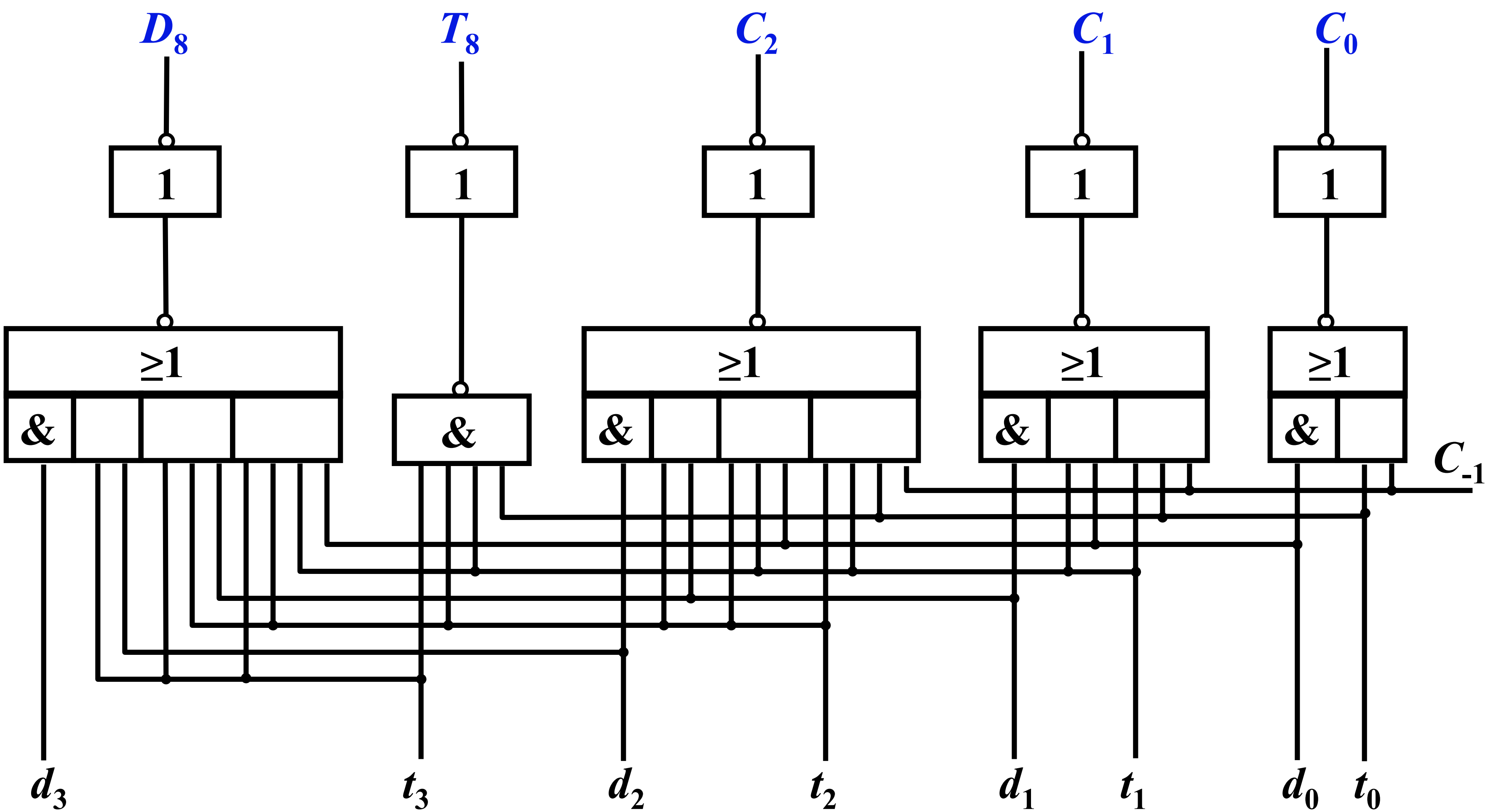
(4) 双重分组跳跃进位链的 大组 进位线路 6.5

以第 2 大组为例

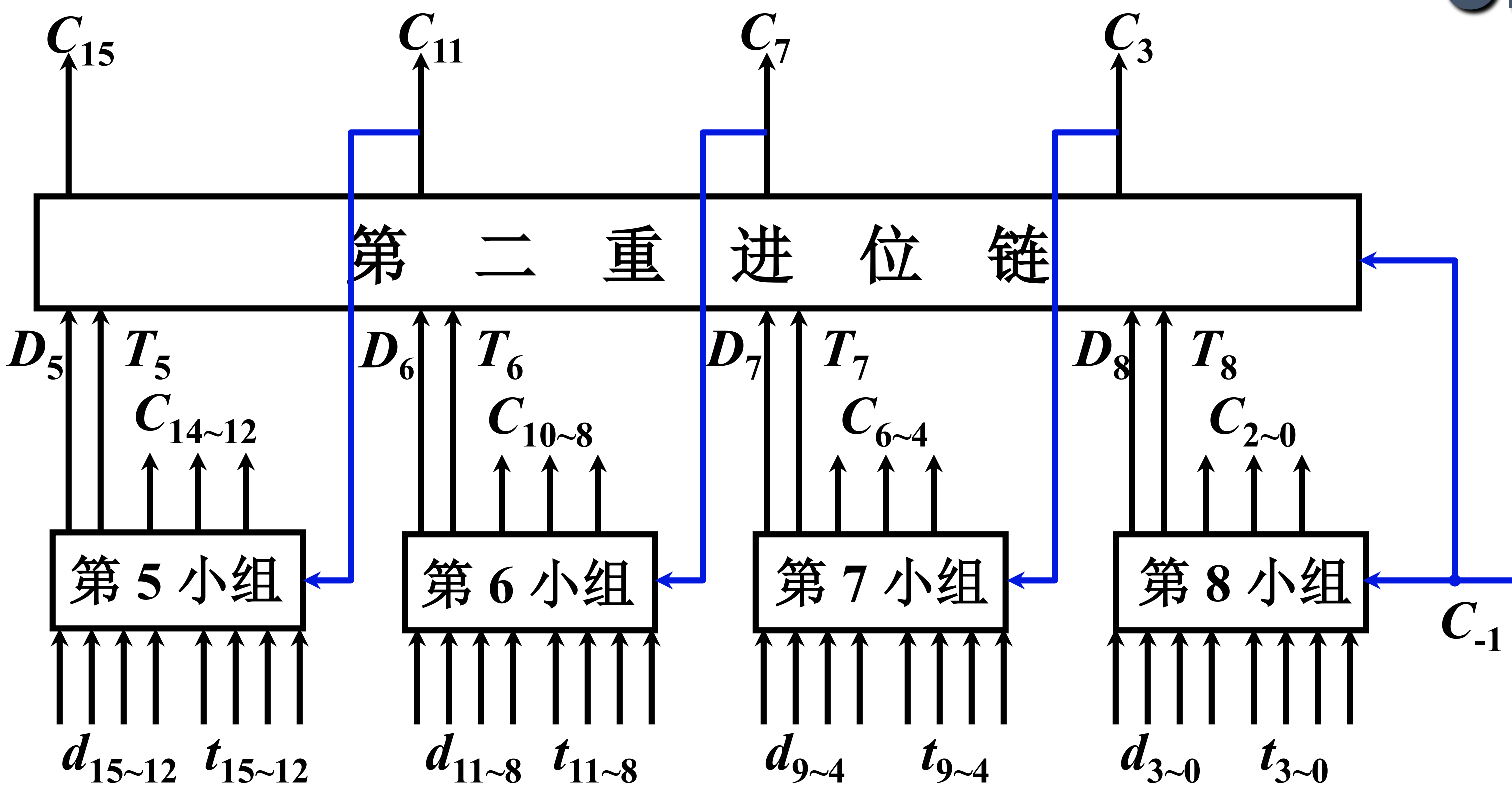


(5) 双重分组跳跃进位链的 小组 进位线路 6.5

以第 8 小组为例　　只产生 低 3 位 的进位和 本小组的 D_8 T_8



(6) n =16 双重分组跳跃进位链



当 d_i、t_i 和 C_{-1} 形成后　经 2.5 t_y　产生 C_2、C_1、C_0、$D_5 \sim D_8$、$T_5 \sim T_8$

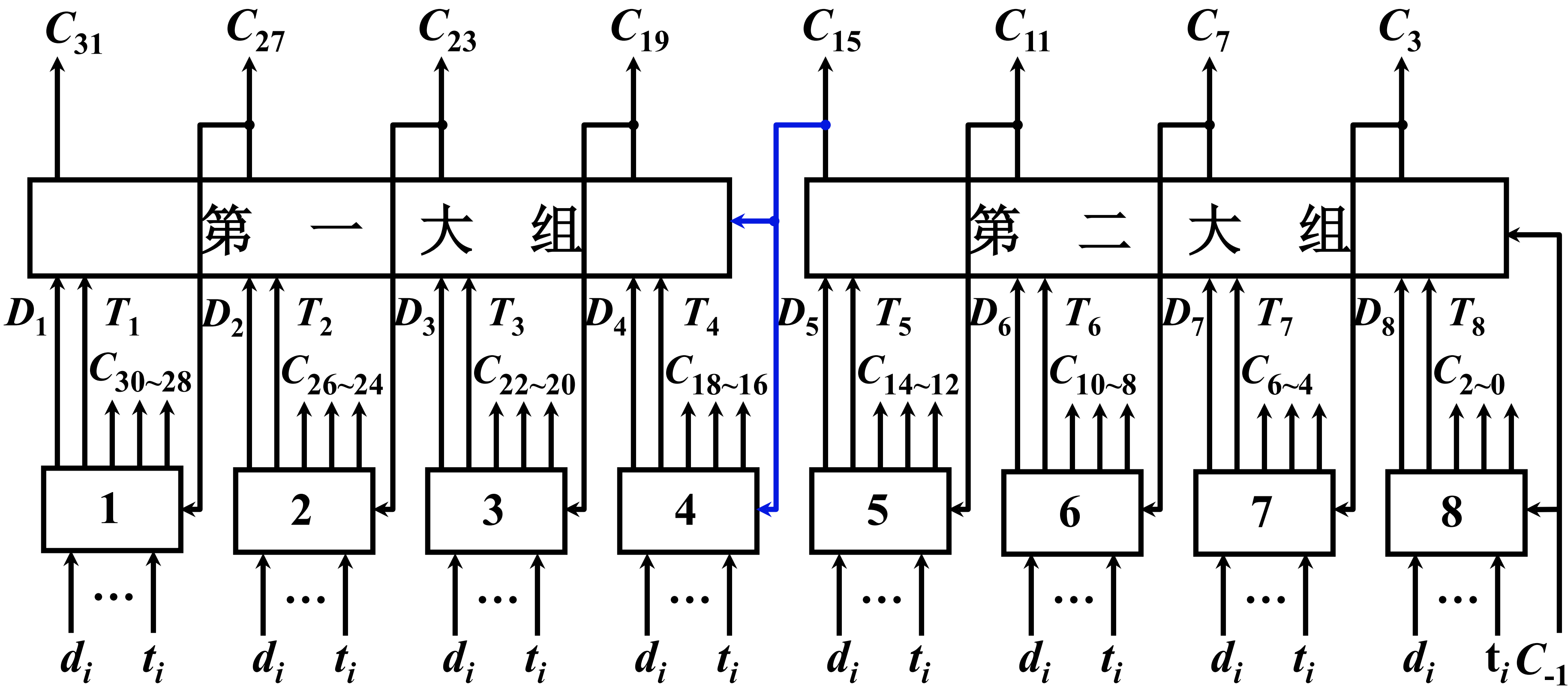
经 5 t_y　产生 C_{15}、C_{11}、C_7、C_3

经 7.5 t_y　产生 C_{14}~C_{12}、C_{10}~C_8、C_6~C_4

串行进位链　经 3 2 t_y　产生 全部进位

单重分组跳跃进位链　经 1 0 t_y　产生 全部进位

(7) $n=32$ 双重分组跳跃进位链



当 d_i、t_i形成后 经 $2.5\ t_y$ 产生 C_2、C_1、C_0、$D_1 \sim D_8$、$T_1 \sim T_8$

$5\ t_y$ 产生 C_{15}、C_{11}、C_7、C_3

$7.5\ t_y$ 产生 $C_{18}\sim C_{16}$、$C_{14}\sim C_{12}$、$C_{10}\sim C_8$、$C_6\sim C_4$

C_{31}、C_{27}、C_{23}、C_{19}

$10\ t_y$ 产生 $C_{30}\sim C_{28}$、$C_{26}\sim C_{24}$、$C_{22}\sim C_{20}$