计算机组成原理

第十八讲

刘松波

哈工大计算学部

模式识别与智能系统研究中心

第 6 章　计算机的运算方法

6.1　无符号数和有符号数

6.2　数的定点表示和浮点表示

6.3　定点运算

6.4　浮点四则运算

6.5　算术逻辑单元

上节课内容回顾

- 6.3 定点运算
  - 一、移位运算
    - 算术移位的硬件实现、算术移位与逻辑移位的区别
  - 二、加减法运算
    - 补码加减运算公式、溢出判断、补码加减法的硬件配置、控制流程
  - 三、乘法运算
    - 笔算乘法、笔算乘法的改进
    - 原码一位乘
    - 补码乘法
      - 补码一位乘、Booth算法

5. 补码乘法

6.3

(1) 补码一位乘运算规则

以小数为例　设 被乘数　$[x]_{补} = x_0.x_1x_2 \cdots x_n$

乘数　$[y]_{补} = y_0.y_1y_2 \cdots y_n$

① 被乘数任意，乘数为正

同原码乘　但 加 和 移位 按 补码规则 运算

乘积的符号自然形成

② 被乘数任意，乘数为负

乘数$[y]_{补}$，去掉符号位，操作同 ①

最后 加$[-x]_{补}$，校正

③ Booth 算法（被乘数、乘数符号任意） 6.3

设 $[x]_{补} = x_0.x_1x_2 \cdots x_n$　　$[y]_{补} = y_0.y_1y_2 \cdots y_n$

$[x \cdot y]_{补}$

$-[x]_{补} = +[-x]_{补}$

$= [x]_{补}(0.y_1 \cdots y_n) - [x]_{补} \cdot y_0$

$= [x]_{补}(y_1 2^{-1} + y_2 2^{-2} + \cdots + y_n 2^{-n}) - [x]_{补} \cdot y_0$

$2^{-1} = 2^0 - 2^{-1}$

$= [x]_{补}(-y_0 + y_1 2^{-1} + y_2 2^{-2} + \cdots + y_n 2^{-n})$

$2^{-2} = 2^{-1} - 2^{-2}$

$= [x]_{补}[-y_0 + (y_1 - y_1 2^{-1}) + (y_2 2^{-1} - y_2 2^{-2}) + \cdots + (y_n 2^{-(n-1)} - y_n 2^{-n})]$

$= [x]_{补}[(y_1 - y_0) + (y_2 - y_1)2^{-1} + \cdots + (y_n - y_{n-1})2^{-(n-1)} + (0 - y_n)2^{-n})]$

$= [x]_{补}[(y_1 - y_0) + (y_2 - y_1)2^{-1} + \cdots + (y_{n+1} - y_n)2^{-n}]$

附加位 y_{n+1}

$y'_1 2^{-1} + \cdots + y'_n 2^{-n}$

④ Booth 算法递推公式

$$[z_0]_{补} = 0$$

$$[z_1]_{补} = 2^{-1}\{(y_{n+1}-y_n)[x]_{补}+[z_0]_{补}\} \qquad y_{n+1} = 0$$

$$\vdots$$

$$[z_n]_{补} = 2^{-1}\{(y_2-y_1)[x]_{补}+[z_{n-1}]_{补}\}$$

$$[x \cdot y]_{补} = [z_n]_{补}+(y_1-y_0)[x]_{补}$$

最后一步不移位

如何实现 $y_{i+1}-y_i$?

y_i y_{i+1}	$y_{i+1}-y_i$	操作
0 0	0	→1
0 1	1	$+[x]_{补}$ →1
1 0	-1	$+[-x]_{补}$ →1
1 1	0	→1

例6.23 已知 $x = +0.0011$ $y = -0.1011$ 求$[x \cdot y]_{补}$

解：

00.0000	1.0101	0
+ 11.1101		$+[-x]_{补}$
11.1101		
11.1110	1 1010	1 $\rightarrow 1$
+ 00.0011		$+[x]_{补}$
00.0001	1	
00.0000	11 101	0 $\rightarrow 1$
+ 11.1101		$+[-x]_{补}$
11.1101	11	
11.1110	111 10	1 $\rightarrow 1$
+ 00.0011		$+[x]_{补}$
00.0001	111	
00.0000	1111 1	0 $\rightarrow 1$
+ 11.1101		$+[-x]_{补}$
11.1101	1111	最后一步不移位

补码右移

补码右移

补码右移

补码右移

$[x]_{补} = 0.0011$

$[y]_{补} = 1.0101$

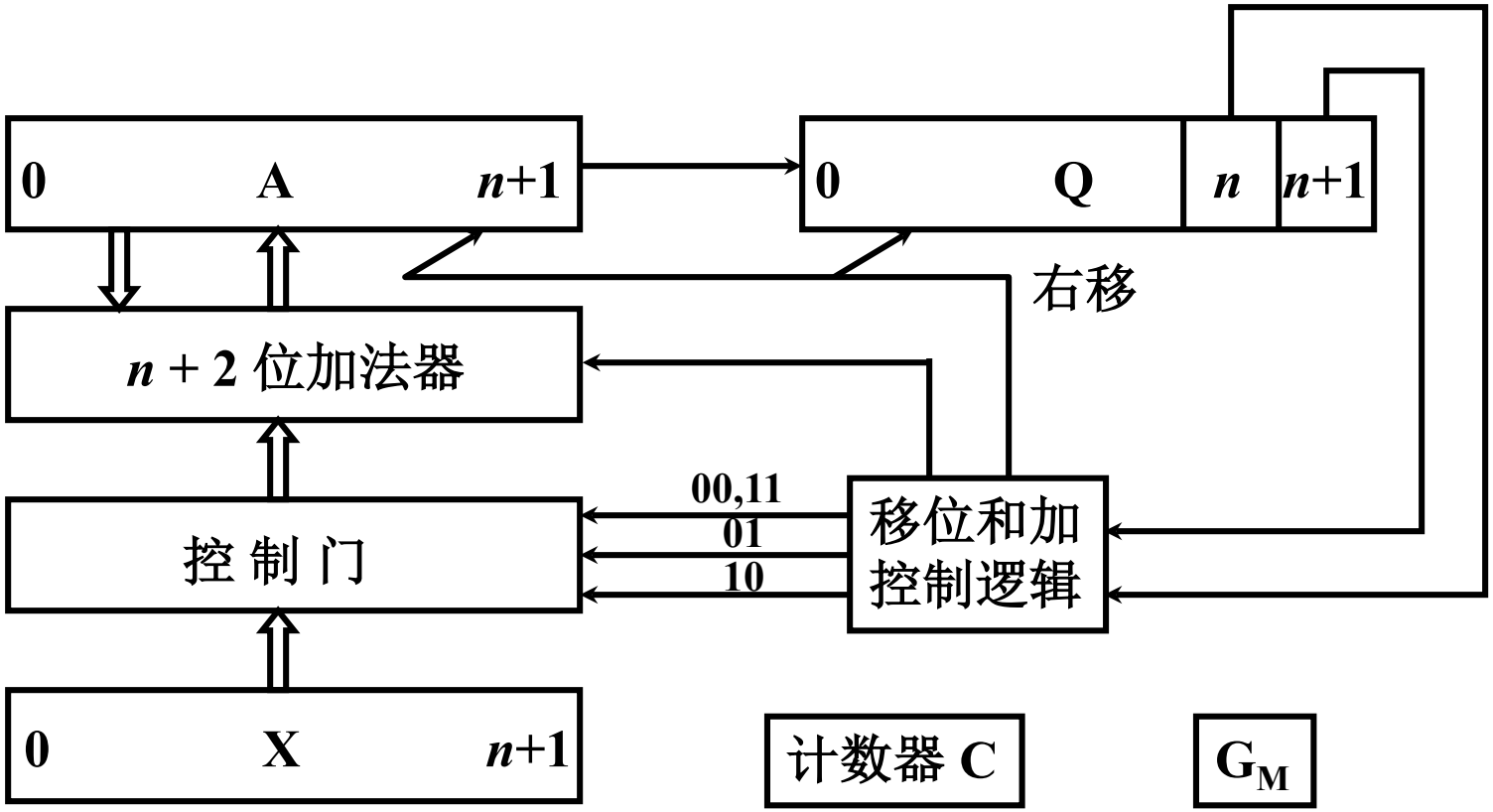
$[-x]_{补} = 1.1101$

$\therefore [x \cdot y]_{补}$

$= 1.11011111$

(2) Booth 算法的硬件配置

6.3



A、X、Q　均 $n+2$ 位

移位和加法操作受乘数末两位控制

乘法小结

- 整数乘法与小数乘法完全相同
  可用 逗号 代替小数点

- 原码乘　符号位 单独处理
  补码乘　符号位 自然形成

- 原码乘去掉符号位运算　即为无符号数乘法

- 不同的乘法运算需有不同的硬件支持

四、除法运算

6.3

1. 分析笔算除法

$x = -0.1011$　$y = 0.1101$　求 $x \div y$

```
                  0.1101
            ------------
0.1101 ) 0.10110
         0.01101
         -------
         0.010010
         0.001101
         --------
         0.0001010 0
         0.0001101
         ---------
         0.0000011 1
```

✓商符单独处理

？心算上商

？余数不动低位补“0”
减右移一位的除数

？上商位置不固定

$x \div y = -0.1101$　商符心算求得

余数 0.0000111

2. 笔算除法和机器除法的比较

笔算除法	机器除法
商符单独处理	符号位异或形成
心算上商	$\|x\|-\|y\|>0$ 上商 1 $\|x\|-\|y\|<0$ 上商 0
余数 不动 低位补“0” 减右移一位 的除数	余数 左移一位 低位补“0” 减 除数
2 倍字长加法器	1 倍字长加法器
上商位置 不固定	在寄存器 最末位上商

3. 原码除法

以小数为例

$$[x]_{原} = x_0.x_1x_2 \cdots x_n$$

$$[y]_{原} = y_0.y_1y_2 \cdots y_n$$

$$\left[\frac{x}{y}\right]_{原} = (x_0 \oplus y_0).\ \frac{x^*}{y^*}$$

式中 $x^* = 0.x_1x_2 \cdots x_n$ 为 x 的绝对值

$y^* = 0.y_1y_2 \cdots y_n$ 为 y 的绝对值

商的符号位单独处理 $x_0 \oplus y_0$

数值部分为绝对值相除 $\frac{x^*}{y^*}$

约定

小数定点除法 $x^* < y^*$　　整数定点除法 $x^* > y^*$

被除数不等于 0

除数不能为 0

(1) 恢复余数法

6.3

例6.24 $x = -0.1011$ $y = -0.1101$ 求 $[\frac{x}{y}]_{原}$

解：$[x]_{原} = 1.1011$ $[y]_{原} = 1.1101$ $[y^*]_{补} = 0.1101$ $[-y^*]_{补} = 1.0011$

① $x_0 \oplus y_0 = 1 \oplus 1 = 0$

②

被除数（余数）	商	说　明
0.1011	0.0000	
+ 1.0011		$+[-y^*]_{补}$
1.1110	0	余数为负，上商 0
+ 0.1101		恢复余数　$+[y^*]_{补}$
0.1011	0	恢复后的余数
1.0110	0	← 1
+ 1.0011		$+[-y^*]_{补}$
0.1001	01	余数为正，上商 1
1.0010	01	← 1
+ 1.0011		$+[-y^*]_{补}$

逻辑左移

逻辑左移

6.3

被除数（余数）	商	说　明
0.0101	011	余数为正，上商 1
逻辑左移 0.1010	011	← 1
+ 1.0011		$+[-y^*]_{补}$
1.1101	0110	余数为负，上商 0
+ 0.1101		恢复余数 $+[y^*]_{补}$
0.1010	0110	恢复后的余数
逻辑左移 1.0100	0110	← 1
+ 1.0011		$+[-y^*]_{补}$
0.0111	01101	余数为正，上商 1

$$\frac{x^*}{y^*} = 0.1101$$

$$\therefore \left[\frac{x}{y}\right]_{原} = 0.1101$$

上商 5 次

第一次上商判溢出

移 4 次

余数为正　上商 1

余数为负　上商 0，恢复余数

(2) 不恢复余数法（加减交替法）

- 恢复余数法运算规则

余数 $R_i>0$ 上商 “1”， $2R_i-y^*$

余数 $R_i<0$ 上商 “0”， R_i+y^* 恢复余数

$$2(R_i+y^*)-y^*=2R_i+y^*$$

- 不恢复余数法运算规则

上商 “1” $2R_i-y^*$

上商 “0” $2R_i+y^*$

加减交替

例6.25 $x=-0.1011$ $y=-0.1101$ 求 $[\frac{x}{y}]_{原}$ 6.3

解：

0.1011	0.0000	
+1.0011		$+[-y^*]_{补}$
1.1110	0	余数为负，上商 0
1.1100	0	← 1
+0.1101		$+[y^*]_{补}$
0.1001	01	余数为正，上商 1
1.0010	01	← 1
+1.0011		$+[-y^*]_{补}$
0.0101	011	余数为正，上商 1
0.1010	011	← 1
+1.0011		$+[-y^*]_{补}$
1.1101	0110	余数为负，上商 0
1.1010	0110	← 1
+0.1101		$+[y^*]_{补}$
0.0111	01101	余数为正，上商 1

逻辑左移

逻辑左移

逻辑左移

逻辑左移

$[x]_{原}=1.1011$

$[y]_{原}=1.1101$

$[x^*]_{补}=0.1011$

$[y^*]_{补}=0.1101$

$[-y^*]_{补}=1.0011$

例6.25 结果

① $x_0 \oplus y_0 = 1 \oplus 1 = 0$

② $\frac{x^*}{y^*} = 0.1101$

$\therefore \ [\frac{x}{y}]_{原} = 0.1101$

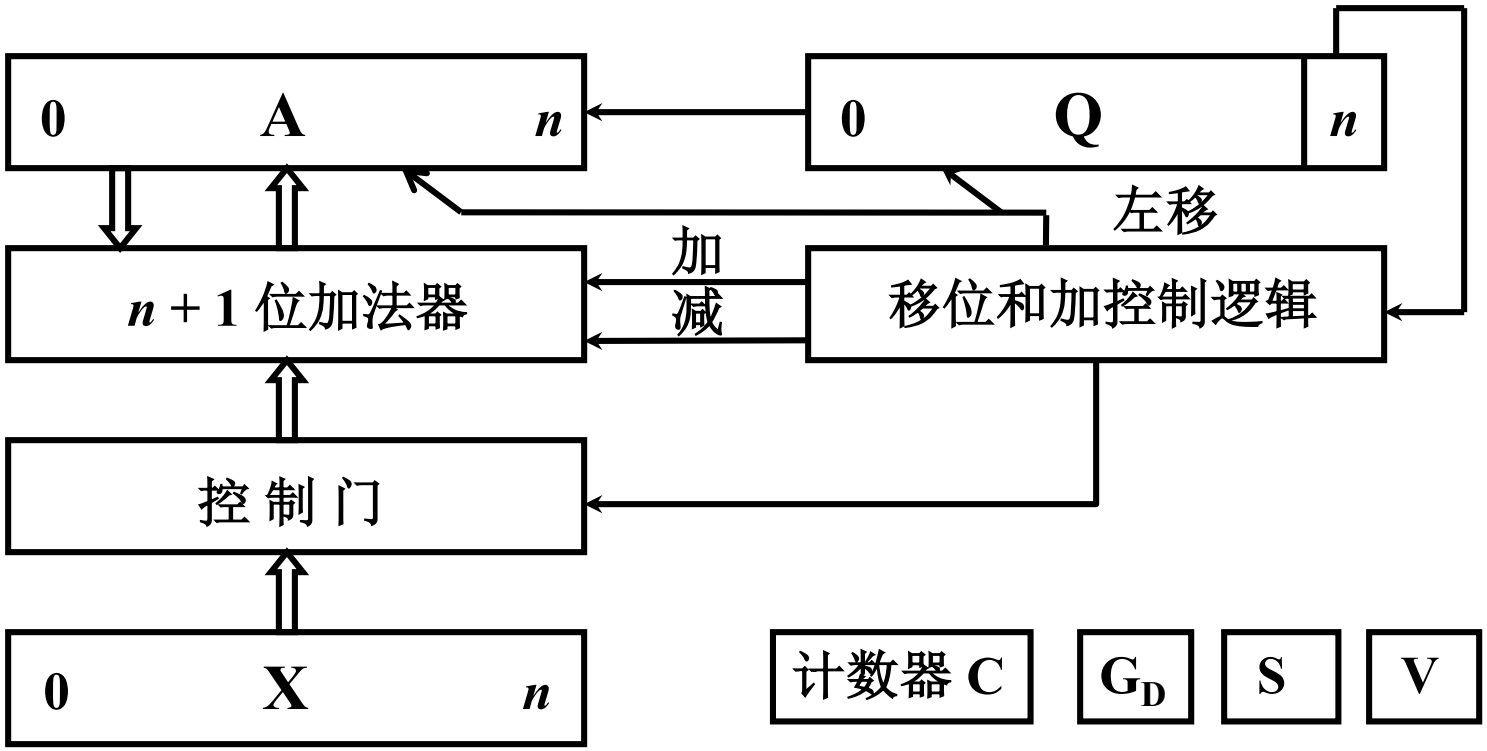
特点 上商 $n+1$ 次

第一次上商判溢出

移 n 次，加 $n+1$ 次

用移位的次数判断除法是否结束

(3) 原码加减交替除法硬件配置



A、X、Q 均 $n+1$ 位

用 Q_n 控制加减交替