R E P O R T

수강 과목	:	공학선형대수학
학　　과	:	컴퓨터공학과
이　　름	:	권민규
학　　번	:	202355517
제출 일자	:	2024.04.24

선형대수학 과제 3장

학번: 202355517
학과: 컴퓨터공학과
이름: 권민규

1. 다음 벡터들이 P_3 공간에서 선형 독립인지 판별하라.

(a) x^2, 1, $x^2 - 1$

$-\left(x^2\right) + (1) + \left(x^2 - 1\right) = 0$

$\therefore$ 선형 종속이다.

(b) 3, x, x^2, $x - 2$

계수 행렬 $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$에서
$(2, -3, 0, 3)$의 해가 존재하므로 선형 종속이다.

(c) $x + 1$, x^2, $x - 1$

1, 3번째 벡터에서 선형 독립임을 알 수 있다.

(d) $x^2 + 2x$, $x + 1$

일차항을 소거하려 할 때 나머지 항이 남아있으므로 선형 독립임을 알 수 있다.

2. $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \cdots,\ \mathbf{v}_n\}$이 벡터공간 V의 생성 집합이고, $\mathbf{v}$가 V의 임의의 다른 벡터라고 하면, $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$이 선형 종속임을 보여라.

$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$에서 $\mathbf{v} + d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n$일 때 $c_k = d_k$의 해를 가지므로 선형 종속이다.

3. 다음과 같이 주어진 벡터 $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$에 대해

(a) $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$이 선형 종속임을 보여라.

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$에서 선형 종속임을 알 수 있다.

(b) $\mathbf{x}_1$와 $\mathbf{x}_2$가 선형 독립임을 보여라.

각 행을 동시에 소거시킬 수 없다.

(c) $\mathrm{Span}\,(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_3)$의 차원을 구하라.

x_1, x_2로 기저를 이룰 수 있으므로 2차원이다.

(d) $\operatorname{Span}(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_3)$**을 기하학적으로 설명하라.**

원점을 통과하는 3차원상 평면이다.

4. 다음 벡터들은 $\mathbb{R}^3$을 생성한다. 집합 $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$가 $\mathbb{R}^3$의 기저가 되도록 감축하라.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix}2\\0\\6\end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix}0\\4\\5\end{bmatrix}$$

각 벡터들이 서로 선형독립일 때까지 벡터를 제거한다.

$\mathbf{v}_4$를 제거하면 $\underline{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3,\ \mathbf{v}_5}$가 기저가 된다.

5. 다음의 각각에 대하여 기저를 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$에서 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$로 변환하기 위한 천이 행렬을 구하라.

(a) $\mathbf{u}_1 = (1,\ -1)^T, \mathbf{u}_2 = (1,\ 2)^T$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

(b) $\mathbf{u}_1 = (2,\ 3)^T, \mathbf{u}_2 = (4,\ 7)^T$

$$\begin{bmatrix}2 & 4\\3 & 7\end{bmatrix}$$

(c) $\mathbf{u}_1 = (1,\ 0)^T, \mathbf{u}_2 = (0,\ 1)^T$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

6. $\mathbf{u}_1 = (1,\ 1,\ 1)^T, \mathbf{u}_2 = (1,\ 2,\ 2)^T, \mathbf{u}_3 = (2,\ 3,\ 4)^T$라고 하자.

(a) $\{\mathbf{e},\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$**로부터** $\{\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3\}$**로의 기저 변환에 해당하는 천이 행렬을 구하라.**

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\\1 & 2 & 4\end{bmatrix}^{-1} = \underline{\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\-1 & 2 & -1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}}$$

(b) 기저 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$**에 대한 다음 벡터들의 좌표를 구하라.**

(i) $(3,\ 2,\ 5)^T$

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\-1 & 2 & -1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\5\end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix}1\\-4\\3\end{bmatrix}}$$

(ii) $(1,\ 1,\ 2)^T$

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\-1 & 2 & -1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}}$$

(iii) $(2,\ 3,\ 2)^T$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

7. 다음과 같이 주어진 벡터들에 대해 S가 $\{\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2\}$로부터$\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2\}$로의 천이 행렬이기 위한 벡터 $\mathbf{w}_1$과 $\mathbf{w}_2$를 구하라.

$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \underline{\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}}$

8. $[x,\ 1]$과 $[2x-1,\ 2x+1]$이 P_2의 순서 기저들이라고 하자.

(a) $[2x-1,\ 2x+1]$로부터 $[x,\ 1]$로의 좌표 변환을 나타내는 천이 행렬을 구하라.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $[x,\ 1]$로부터 $[2x-1,\ 2x+1]$로의 좌표 변환을 나타내는 천이 행렬을 구하라.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \underline{\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

9. 다음 각 행렬들에 대하여 행 공간의 기저, 열 공간의 기저 및 영공간의 기저를 구하라.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

감소된 행 사다리꼴 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$에서

행 공간의 기저는 $\underline{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$이고

열 공간의 기저는 $\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}}$이며

영공간의 기저는 $N(A) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\alpha$에서 $\underline{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$이다.

(b) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -3 & 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

감소된 행 사다리꼴 $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$에서

행 공간의 기저는 $\underline{\begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$이고

열 공간의 기저는 $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ 이며

영공간의 기저는 $N(A) = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \alpha$에서 $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ 이다.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

감소된 행 사다리꼴 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ 에서

행 공간의 기저는 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -5 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$이고

열 공간의 기저는 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ 이며

영공간의 기저는 $N(A) = \begin{bmatrix} 13 \\ -21 \\ -15 \\ 20 \end{bmatrix} \alpha$에서 $\begin{bmatrix} 13 \\ -21 \\ -15 \\ 20 \end{bmatrix}$ 이다.

10. A는 다음과 같은 감소된 사다리꼴을 갖는 4×4 행렬이라고 하자.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

만약 $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 이라면 $\mathbf{a}_3$와 $\mathbf{a}_4$를 구하라.

선행 1과 그에 대응되는 수를 이용해서 각 행을 계산할 수 있다.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -5 & -5 \\ 2 & 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$