공학선형대수학 Homework 5

1

Problem

직선 $y = 2x + 1$ 위에서 점 $\left(5, 2\right)$와 가장 가까운 점을 구하라.

Solution

$y = 2x$ 위의 벡터 $\bold{v} = \left(1, 2\right)^T$와 $\bold{w} = \left(5, 1\right)^T$에 대하여

$Q = \dfrac{\bold{w^T} \bold{v}}{\bold{v^T} \bold{v}}\bold{v} = \dfrac{7}{5}\left(1, 2\right) = \left(\dfrac{7}{5}, \dfrac{14}{5}\right)^T$

따라서 $\left(\dfrac{7}{5}, \dfrac{14}{5}+1\right) = \underline{\left(1.4, 3.8\right)}$이다.

2

Problem

점 $\left(1, 1, 1\right)$과 평면 $2x + 2y + z = 0$ 사이의 거리를 구하라.

Solution

$\dfrac{\left|2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1\right|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \underline{\dfrac{5}{3}}$이다.

3

Problem

점 $\left(2, -3, 4\right)$와 다음 평면과의 거리를 구하라.

$$ 8\left(x-2\right) + 6\left(y+2\right) - \left(z-4\right) = 0 $$

Solution

$\dfrac{\left|8\left(2-2\right) + 6\left(-3+2\right) - \left(4-4\right)\right|}{\sqrt{8^2 + 6^2 + 1^2}} = \underline{\dfrac{6}{\sqrt{101}}}$이다.

4

Problem

다음 각각의 행렬에 대하여 부분공간 $R\left(A^T\right), N\left(A\right), R\left(A\right), N\left(A^T\right)$의 기저를 구하라.

(1)

$$ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \ -4 & -8 \end{bmatrix} $$

Solution

$R\left(A^T\right)$의 기저는 $\underline{\left(1, -2\right)^T}$이다.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \ -4 & -8 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \ -2 & -4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \ 0 & 0 \end{bmatrix}$에서 $N\left(A\right)$의 기저는 $\underline{\left(2, -1\right)^T}$이다.

$R\left(A\right)$의 기저는 $\underline{\left(1, 2\right)^T}$이다.

$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 \ 4 & -8 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \ 2 & -4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \ 0 & 0 \end{bmatrix}$에서 $N\left(A^T\right)$의 기저는 $\underline{\left(2, 1\right)^T}$이다.

(2)

$$ A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} $$

Solution

$R\left(A^T\right)$의 기저는 $\underline{\left(1, 3\right)^T, \left(4, 1\right)^T}$이다.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \ 0 & -11 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$에서 $N\left(A\right)$의 기저는 $\underline{\left(-2, 0, 1\right)^T, \left(0, 1, 0\right)^T}$이다.

$R\left(A\right)$의 기저는 $\underline{\left(1, 4, 2\right)^T, \left(3, 1, 6\right)^T}$이다.

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \ 4 & 1 \ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \ 0 & -11 \ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix}$에서 $N\left(A^T\right)$의 기저는 $\underline{\left(1, 1\right)^T, \left(0, 1\right)^T}$이다.

(3)

$$ A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \ -2 & 3 \ 1 & 4 \ 5 & 1 \end{bmatrix} $$

Solution

$R\left(A^T\right)$의 기저는 $\underline{\left(4, -2, 1, 5\right)^T, \left(2, 3, 4, 1\right)^T}$이다.

$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \ -2 & 3 \ 1 & 4 \ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & 1 \ 0 & 0 \ 0 & 0 \end{bmatrix}$에서 $N\left(A\right)$의 기저는 $\underline{\left(1, 0\right)^T, \left(0, 1\right)^T}$이다.

$R\left(A\right)$의 기저는 $\underline{\left(4, 2\right)^T, \left(-2, 3\right)^T, \left(1, 4\right)^T, \left(5, 1\right)^T}$이다.

$A^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 5 \ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 13 & 17 \ 0 & 8 & 7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{13}{16} & \dfrac{17}{16} \ 0 & 1 & \dfrac{7}{8} & -\dfrac{3}{8} \end{bmatrix}$에서 $N\left(A^T\right)$의 기저는 $\underline{\left(-\dfrac{13}{16}, -\dfrac{7}{8}, 1, 0\right)^T, \left(-\dfrac{17}{16}, \dfrac{3}{8}, 0, 1\right)^T}$이다.

(4)

$$ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \ 0 & 0 & 4 & 4 \ 2 & 2 & 0 & 1 \ 2 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} $$

Solution

$R\left(A^T\right)$의 기저는 $\underline{\left(1, 0, 2, 2\right)^T, \left(0, 0, 2, 1\right)^T, \left(1, 4, 0, 1\right)^T}$이다.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \ 0 & 0 & 4 & 4 \ 2 & 2 & 0 & 1 \ 2 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \ 0 & 0 & 4 & 4 \ 0 & 2 & -2 & 1 \ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \ 0 & 1 & -1 & 1 \ 0 & 0 & 2 & 2 \ 0 & 0 & 3 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 1 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 1 & 1 \ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$에서 $N\left(A\right)$의 기저는 $\underline{\left(1, 0, 0, 0\right)^T, \left(0, 1, 0, 0\right)^T, \left(0, 0, 1, 1\right)^T}$이다.

$R\left(A\right)$의 기저는 $\underline{\left(1, 0, 1, 0\right)^T, \left(0, 0, 1, 1\right)^T, \left(2, 2, 0, 1\right)^T}$이다.

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \ 0 & 0 & 2 & 1 \ 1 & 4 & 0 & 1 \ 0 & 4 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \ 0 & 0 & 2 & 1 \ 0 & 4 & -2 & -1 \ 0 & 4 & -1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \ 0 & 1 & 0 & -1 \ 0 & 0 & 1 & 1 \ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$에서 $N\left(A^T\right)$의 기저는 $\underline{\left(-1, 1, -1, 1\right)^T}$이다.

5

Problem

다음의 연립방정식 $Ax = b$에 대해서 모든 최소제곱 해를 구하라.

(1)

$$ A = \begin{bmatrix}3 & -6 \ 2 & -4 \ -3 & 6 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \ 1 \ 0 \end{bmatrix} $$

Solution

$A^TA = \begin{bmatrix} 22 & -44 \ -44 & 88 \end{bmatrix}$, $A^Tb = \begin{bmatrix} -6 \ 12 \end{bmatrix}$이므로

$A^TAx = A^Tb$를 풀면 $x = \underline{\begin{bmatrix} 0 \ \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}}$이다.

(2)

$$ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \ 2 & 1 & 1 \ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \ 0 \ 0 \end{bmatrix} $$

Solution

$A^TA = \begin{bmatrix} 9 & 21 & -9 \ 21 & 46 & -18 \ -9 & -18 & 6 \end{bmatrix}$, $A^Tb = \begin{bmatrix} 0 \ 0 \ 0 \end{bmatrix}$이므로

$A^TAx = A^Tb$를 풀면 $x = \underline{\begin{bmatrix} 0 \ 0 \ 0 \end{bmatrix}}$이다.

6

Problem

(1)

다음과 같은 데이터에 대하여 직선으로 만든 최적의 최소제곱 추정을 구하라.

x	-1	0	1	2
y	4	2	1	0

Solution

$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \ 0 & 1 \ 1 & 1 \ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 4 \ 2 \ 1 \ 0 \end{bmatrix}$이므로

$A^TA = \begin{bmatrix} 6 & 2 \ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $A^Tb = \begin{bmatrix} -3 \ 7 \end{bmatrix}$이다.

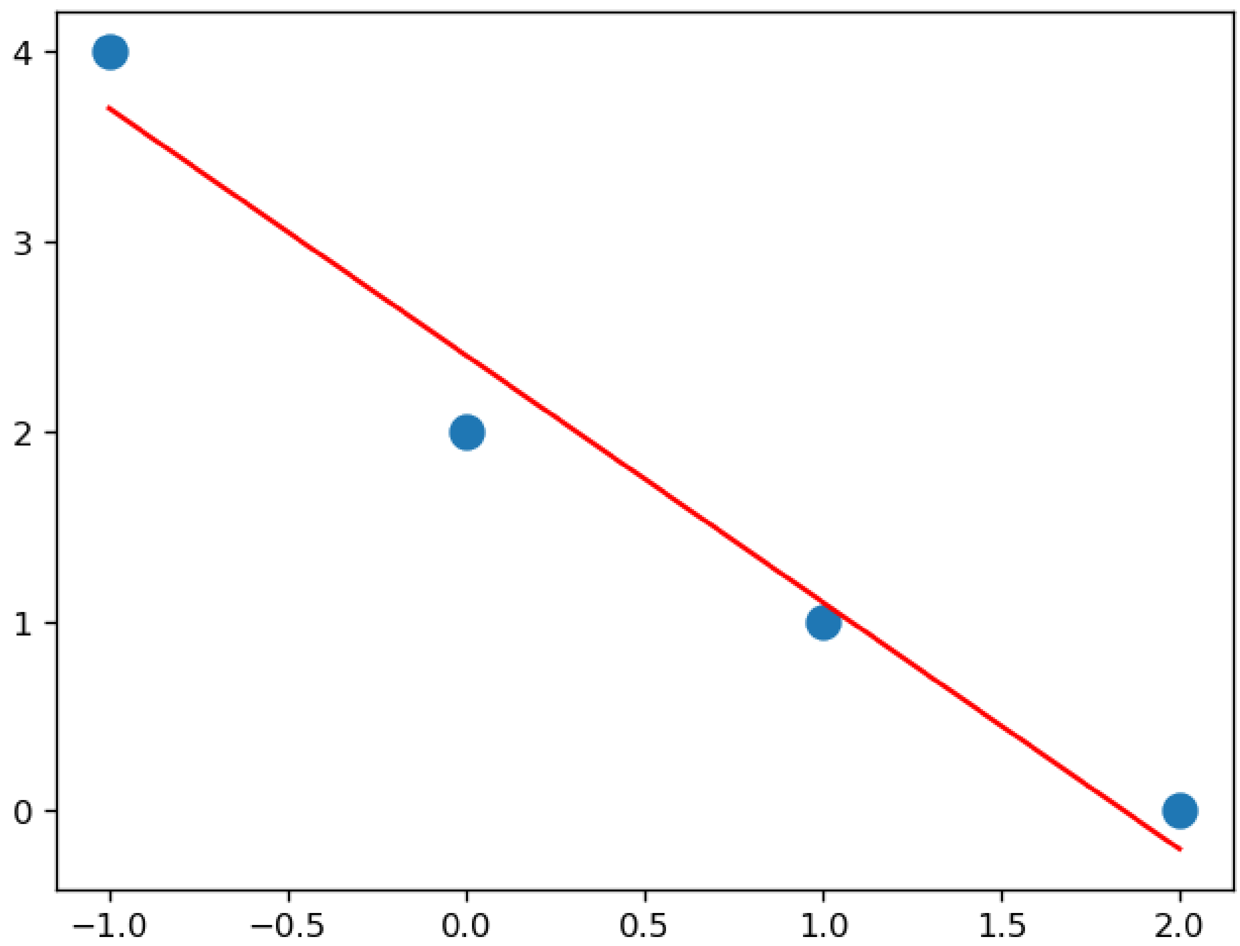
$A^TAx = A^Tb$를 풀면 $x = \begin{bmatrix} -1.3 \ 2.4 \end{bmatrix}$이다.

따라서 $\underline{y = -1.3x + 2.4}$이다.

(2)

좌표 평면 위에 위의 데이터 점을 표시하고 (1)에서 구한 직선을 그려라.

Solution



7

Problem

$\bold{x} = \left(-1, -1, 1, 1\right)^T$이고 $\bold{y} = \left(1, 1, 5, -3\right)^T$이다. $\bold{x} \perp \bold{y}$임을 증명하라. $||\bold{x}||_2$, $||\bold{y}||_2$, $||\bold{x} + \bold{y}||_2$를 계산하고, 피타고라스 법칙이 성립하는지 확인하라.

Solution

$\bold{x} \perp \bold{y}$임을 증명하려면 $\bold{x}^T\bold{y} = 0$임을 보이면 된다.

$\bold{x}^T\bold{y} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \ 1 \ 5 \ -3 \end{bmatrix} = -1 - 1 + 5 - 3 = 0$이므로 $\bold{x} \perp \bold{y}$이다.

$||\bold{x}||_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 1^2} = 2$, $||\bold{y}||_2 = \sqrt{1^2 + 1^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{36} = 6$, $||\bold{x} + \bold{y}||_2 = \sqrt{0^2 + 0^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$이다.

따라서 $||\bold{x}||_2^2 + ||\bold{y}||_2^2 = ||\bold{x} + \bold{y}||_2^2$이 성립한다.

8

Problem

$\bold{x} = \left(2, 3, 1\right)^T$이고 $\bold{y} = \left(5, 6, 2\right)^T$이다. $||\bold{x} - \bold{y}||_1$, $||\bold{x} - \bold{y}||_2$, $||\bold{x} - \bold{y}||_\infty$를 구하라. $\bold{x}$와 $\bold{y}$의 거리가 가장 가깝다는 결과를 주는 노움은 무엇인가? 가장 멀다는 결과를 주는 노움은 무엇인가?

Solution

$||\bold{x} - \bold{y}||_1 = |2-5| + |3-6| + |1-2| = 3 + 3 + 1 = \underline{7}$
$||\bold{x} - \bold{y}||_2 = \sqrt{(2-5)^2 + (3-6)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9 + 9 + 1} = \underline{\sqrt{19}}$
$||\bold{x} - \bold{y}||_\infty = \max{|2-5|, |3-6|, |1-2|} = \underline{3}$이다.

따라서 가장 가깝다는 결과를 주는 노움은 $\underline{||\bold{x} - \bold{y}||_\infty}$이고, 가장 멀다는 결과를 주는 노움은 $\underline{||\bold{x} - \bold{y}||_2}$이다.

9

Problem

집합 ${\bold{u}_1, \bold{u}_2, \bold{u}_3}$를 내적공간 V의 정규직교 기저라 하고 다음을 생각하자.

$$ \bold{u} = \bold{u}_1 + 2\bold{u}_2 + 2\bold{u}_3 \quad \bold{v} = \bold{u}_1 + 7\bold{u}_3 $$

다음 각각의 값을 구하라.

(1)

$$ \left<\bold{u}, \bold{v}\right> $$

Solution

$\left<\bold{u}, \bold{v}\right> = \bold{u}\bold{v}\cos\theta = \underline{15}$

(2)

$$ ||\bold{u}||, ||\bold{v}|| $$

Solution

$||\bold{u}|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \underline{3}$
$||\bold{v}|| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \underline{5\sqrt{2}}$

(3)

$$ \theta $$

Solution

$\cos\theta = \dfrac{\left<\bold{u}, \bold{v}\right>}{||\bold{u}|| \cdot ||\bold{v}||} = \dfrac{15}{3 \cdot 5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$이므로 $\theta = \underline{\dfrac{\pi}{4}}$이다.

10

Problem

$\mathbb{R}^3$의 기저 $\left(1, 2, -2\right)^T, \left(4, 3, 2\right)^T, \left(1, 2, 1\right)^T$가 주어졌다. 그람-슈미트 과정을 적용하여 정규직교 기저를 구하라.

Solution

$\bold{u}_1 = \left(1, 2, -2\right)^T$로 두고, $\bold{u}_2 = \left(4, 3, 2\right)^T$, $\bold{u}_3 = \left(1, 2, 1\right)^T$에 대하여

$\bold{v}_2 = \bold{u}_2 - \dfrac{\left<\bold{u}_2, \bold{v}_1\right>}{\left<\bold{v}_1, \bold{v}_1\right>}\bold{v}_1 = \left(4, 3, 2\right)^T - \dfrac{11}{9}\left(1, 2, -2\right)^T = \left(\dfrac{5}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{25}{3}\right)^T$

$\bold{v}_3 = \bold{u}_3 - \dfrac{\left<\bold{u}_3, \bold{v}_1\right>}{\left<\bold{v}_1, \bold{v}_1\right>}\bold{v}_1 - \dfrac{\left<\bold{u}_3, \bold{v}_2\right>}{\left<\bold{v}_2, \bold{v}_2\right>}\bold{v}_2 = \left(1, 2, 1\right)^T - \dfrac{11}{9}\left(1, 2, -2\right)^T - \dfrac{11}{9}\left(\dfrac{5}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{25}{3}\right)^T = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)^T$

따라서 정규직교 기저는 $\underline{\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)^T, \left(\dfrac{5}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{3}\right)^T, \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)^T}$이다.