R E P O R T

수강 과목	:	공학선형대수학
학　　과	:	정보컴퓨터공학부 컴퓨터공학전공
이　　름	:	권민규
학　　번	:	202355517
제출 일자	:	2024. 05. 17

Homework Chapter 4.1 ~ 4.3

1. 선형 연산자 $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$를 생각하자. 만일 다음이 성립한다면, $L\left((8,7)^T\right)$의 값을 구하라.

$$L\left((2,3)^T\right) = (3,-2)^T \text{ and } L\left((-1,1)^T\right) = (1,4)^T$$

풀이

$L\left((8,7)^T\right) = L\left(3\,(2,3)^T - 2\,(-1,1)^T\right) = 3L\left((2,3)^T\right) - 2L\left((-1,1)^T\right) =$
$3\,(3,-2)^T - 2\,(1,4)^T = (9,-6)^T - (2,8)^T = \underline{(7,-14)^T}$

2. $\mathbb{R}^3$에서 $\mathbb{R}^2$로 가는 다음 각각의 선형 변환 L에 대하여 $\mathbb{R}^3$의 모든 $\mathbf{x}$에 대해 $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$를 만족하는 행렬 A를 구하라.

(a) $L\left((x_1, x_2, x_3)^T\right) = (x_2, x_3)^T$

풀이

$L(\mathbf{e}_1) = (0,0)^T$, $L(\mathbf{e}_2) = (1,0)^T$, $L(\mathbf{e}_3) = (0,1)^T$

$\therefore A = \underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$

(b) $L\left((x_1, x_2, x_3)^T\right) = (x_1 + x_2 + x_3, 0)^T$

풀이

$L(\mathbf{e}_1) = (1,0)^T$, $L(\mathbf{e}_2) = (1,0)^T$, $L(\mathbf{e}_3) = (1,0)^T$

$\therefore A = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$

(c) $L\left((x_1, x_2, x_3)^T\right) = (3x_1, -2x_2)^T$

풀이

$L(\mathbf{e}_1) = (3,0)^T$, $L(\mathbf{e}_2) = (0,-2)^T$, $L(\mathbf{e}_3) = (0,0)^T$

$\therefore A = \underline{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}}$

3. $\mathbb{R}^3$ 위에서 정의된 선형 연산자 L이 다음과 같이 정의되었다. L에 대한 표준 행렬 표현 A를 구하고, 이를 이용하여 다음 각각의 벡터 $\mathbf{x}$에 대해 $L\left(\mathbf{x}\right)$를 구하라.

$$L\left(x\right)=\begin{bmatrix} x_1+2x_2-3x_3 \\ x_2+2x_1-x_3 \\ x_3+x_2-2x_1 \end{bmatrix}$$

풀이

$$L\left(\mathbf{e}_1\right)=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, L\left(\mathbf{e}_2\right)=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, L\left(\mathbf{e}_3\right)=\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A=\underline{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

아래 세 구분 문제는 문제의 의도대로 풀이하려면 A와 곱하면 되지만, 같은 결과이므로 서술상의 편의를 고려해 대입하여 풀이했다.

(a) $\mathbf{x}=\left(1,1,1\right)^T$

풀이

$$L\left(\mathbf{x}\right)=\begin{bmatrix} 1+2+(-3) \\ 1+2-1 \\ 1+1-2 \end{bmatrix}=\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

(b) $\mathbf{x}=\left(3,-2,1\right)^T$

풀이

$$L\left(\mathbf{x}\right)=\begin{bmatrix} 3-4-3 \\ -2+6-1 \\ 1-2-6 \end{bmatrix}=\underline{\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}}$$

(c) $\mathbf{x}=\left(4,5,1\right)^T$

풀이

$$L\left(\mathbf{x}\right)=\begin{bmatrix} 4+10-3 \\ 5+8-1 \\ 1+5-8 \end{bmatrix}=\underline{\begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

4. 다음 각각의 선형 연산자에 대하여 표준 행렬 표현을 구하라.

(a) L은 $\mathbb{R}^3$ 위의 벡터 $\mathbf{x}$를 시계 방향으로 45° 회전시킨다.

풀이

$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$에서 $\theta = 45^\circ$이므로 $A = \underline{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}}$

(b) L은 $\mathbb{R}^3$ 위의 벡터 $\mathbf{x}$를 x_1축을 기준으로 반사시키고 반시계 방향으로 90° 회전시킨다.

풀이

$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$에서 $\theta = 90^\circ$이므로 $A = \underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$

(c) L은 벡터 $\mathbf{x}$의 길이를 두 배로 증가시키고 반시계 방향으로 30° 회전시킨다.

풀이

$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$에서 $\theta = 30^\circ$이므로 $A = \underline{\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}}$

(d) L은 벡터 $\mathbf{x}$를 직선 $x_1 = x_2$에 대해 반사시키고 x_1축에 투영시킨다.

풀이

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$에서 $A = \underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$

5. L은 $\mathbb{R}^3$ 위에서 다음과 같이 정의된 선형 변환이라 하자. A는 L에 대한 표준 행렬 표현이다(4.2절의 연습문제 4 참조). 만일 $\mathbf{u}_1 = (1,1,0)^T$, $\mathbf{u}_2 = (1,0,1)^T$, $\mathbf{u}_3 = (0,1,1)^T$이면 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$는 $\mathbb{R}^3$의 순서 기저이고 행렬 $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$는 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$에서 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$로 가는 기저 변환을 나타내는 천이 행렬이 된다. $U - 1AU$를 계산하여 기저 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$에 관해서 L을 표현하는 행렬 B를 구하라.

$$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ 2x_2 - x_1 - x_3 \\ 2x_3 - x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

풀이

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}, U=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}, U^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

$$U^{-1}AU=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}=A=B$$

---

6. $n\times n$ 행렬 A의 대각합(trace)은 $\operatorname{tr}(A)$라고 표기하며 모든 대각 원소들의 합이다. 다음을 증명하라.

(a) $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$

풀이

$$\operatorname{tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}a_{ji}=\operatorname{tr}(BA)$$

(b) 만일 A와 B가 서로 닮음이면 $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)$이다.

풀이

$$\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}\left(P^{-1}BP\right)=\operatorname{tr}\left(BPP^{-1}\right)=\operatorname{tr}(B)$$