선형대수학 과제 3장

학번: 202355517
학과: 컴퓨터공학과
이름: 권민규

1. 다음 벡터들이 P_3 공간에서 선형 독립인지 판별하라.

(a) x^2, 1, x^2-1

$-\left(x^2\right)+\left(1\right)+\left(x^2-1\right)=0$

$\therefore$ 선형 종속이다.

(b) 3, x, x^2, $x-2$

계수 행렬 $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$에서 $\left(2, -3, 0, 3\right)$의 해가 존재하므로 선형 종속이다.

(c) $x+1$, x^2, $x-1$

1, 3번째 벡터에서 선형 독립임을 알 수 있다.

(d) x^2+2x, $x+1$

일차항을 소거하려 할 때 나머지 항이 남아있으므로 선형 독립임을 알 수 있다.

2. ${\mathbf{v}_1,,\mathbf{v}_2,,\cdots,,\mathbf{v}_n}$이 벡터공간 V의 생성 집합이고, $\mathbf{v}$가 V의 임의의 다른 벡터라고 하면, $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$이 선형 종속임을 보여라.

$\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$에서 $\mathbf{v}+d_1\mathbf{v}_1+d_2\mathbf{v}_2+\cdots+d_n\mathbf{v}_n$일 때 $c_k=d_k$의 해를 가지므로 선형 종속이다.

3. 다음과 같이 주어진 벡터 $\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}2\1\3\end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}3\-1\4\end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}2\6\4\end{bmatrix}$에 대해

(a) $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$이 선형 종속임을 보여라.

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \ 1 & -1 & 6 \ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}=0$에서 선형 종속임을 알 수 있다.

(b) $\mathbf{x}_1$와 $\mathbf{x}_2$가 선형 독립임을 보여라.

각 행을 동시에 소거시킬 수 없다.

(c) $\text{Span}\left(\mathbf{x}_1,,\mathbf{x}_2,,\mathbf{x}_3\right)$의 차원을 구하라.

x_1, x_2로 기저를 이룰 수 있으므로 2차원이다.

(d) $\text{Span}\left(\mathbf{x}_1,,\mathbf{x}_2,,\mathbf{x}_3\right)$을 기하학적으로 설명하라.

원점을 통과하는 3차원상 평면이다.

4. 다음 벡터들은 $\mathbb{R}^3$을 생성한다. 집합 ${\mathbf{v}_1,,\mathbf{v}_2,,\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5}$가 $\mathbb{R}^3$의 기저가 되도록 감축하라.

$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\0\3\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}2\2\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\2\-2\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_4=\begin{bmatrix}2\0\6\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_5=\begin{bmatrix}0\4\5\end{bmatrix}$

각 벡터들이 서로 선형독립일 때까지 벡터를 제거한다.

$\mathbf{v}_4$를 제거하면 $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_5$가 기저가 된다.

5. 다음의 각각에 대하여 기저를 ${\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2}$에서 ${\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}$로 변환하기 위한 천이 행렬을 구하라.

(a) $\mathbf{u}_1=\left(1,,-1\right)^T$, $\mathbf{u}_2=\left(1,,2\right)^T$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{u}_1=\left(2,,3\right)^T$, $\mathbf{u}_2=\left(4,,7\right)^T$

$\begin{bmatrix} 2 & 4 \ 3 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{u}_1=\left(1,,0\right)^T$, $\mathbf{u}_2=\left(0,,1\right)^T$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{u}_1=\left(1,,1,,1\right)^T$, $\mathbf{u}_2=\left(1,,2,,2\right)^T$, $\mathbf{u}_3=\left(2,,3,,4\right)^T$라고 하자.

(a) ${\mathbf{e},,\mathbf{e}_2,,\mathbf{e}_3}$로부터 ${\mathbf{u}_1,,\mathbf{u}_2,,\mathbf{u}_3}$로의 기저 변환에 해당하는 천이 행렬을 구하라.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \ 1 & 2 & 3 \ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1}= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \ -1 & 2 & -1 \ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) 기저 ${\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3}$에 대한 다음 벡터들의 좌표를 구하라.

(i) $\left(3,,2,,5\right)^T$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \ -1 & 2 & -1 \ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \ 2 \ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \ -4 \ 3 \end{bmatrix}$

(ii) $\left(1,,1,,2\right)^T$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \ -1 & 2 & -1 \ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \ 1 \ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \ -1 \ 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\left(2,,3,,2\right)^T$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \ -1 & 2 & -1 \ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \ 3 \ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \ 2 \ -1 \end{bmatrix}$

7. 다음과 같이 주어진 벡터들에 대해 S가 ${\mathbf{w}_1,,\mathbf{w}_2}로부터 {\mathbf{v}_1,,\mathbf{v}_2}$로의 천이 행렬이기 위한 벡터 $\mathbf{w}_1$과 $\mathbf{w}_2$를 구하라.

$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}3\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}4\2\end{bmatrix}$, $S=\begin{bmatrix}2 & -5 \ -1 & 3\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}3 & 4 \ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -5 \ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3 \ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\therefore \mathbf{w}_1=\begin{bmatrix}2\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{w}_2=\begin{bmatrix}-3\1\end{bmatrix}$

8. $\left[x,,1\right]$과 $\left[2x-1,,2x+1\right]$이 P_2의 순서 기저들이라고 하자.

(a) $\left[2x-1,,2x+1\right]$로부터 $\left[x,,1\right]$로의 좌표 변환을 나타내는 천이 행렬을 구하라.

$\begin{bmatrix} 2 & 2 \ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\left[x,,1\right]$로부터 $\left[2x-1,,2x+1\right]$로의 좌표 변환을 나타내는 천이 행렬을 구하라.

$\begin{bmatrix} 2 & 2 \ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\dfrac14\begin{bmatrix} 1 & -2 \ 1 & 2 \end{bmatrix}$

9. 다음 각 행렬들에 대하여 행 공간의 기저, 열 공간의 기저 및 영공간의 기저를 구하라.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \ 2 & 1 & 4 \ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

감소된 행 사다리꼴로 변환하여 구할 수 있다.

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \ 0 & -15 & 0 \ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$에서

행 공간의 기저는 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix},,\begin{bmatrix} 0 & -15 & 0 \end{bmatrix},,\begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$이고
열 공간의 기저는 $\begin{bmatrix} 1 \ 2 \ 4 \end{bmatrix},,\begin{bmatrix} 3 \ 1 \ 7

\end{bmatrix},,\begin{bmatrix} 2 \ 4 \ 8 \end{bmatrix}$이다. 영공간의 기저는 $\begin{bmatrix} 0 \ 0 \ 0 \end{bmatrix}$이다.

(b) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 & 4 \ 1 & 2 & -1 & -2 \ -3 & 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

감소된 행 사다리꼴로 변환하여 구할 수 있다.

$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 & 4 \ 0 & \dfrac{5}{3} & 2 & 2 \ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$에서

10. A는 다음과 같은 감소된 사다리꼴을 갖는 4×4 행렬이라고 하자.

$$U=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \ 0 & 1 & 3 & 2 \ 0 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

만약 $\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix} 3 \ 2 \ -1 \ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix} 1 \ 1 \ -2 \ 3 \end{bmatrix}$이라면 $\mathbf{a}_3$와 $\mathbf{a}_4$를 구하라.