AI 中的数学

第一讲

方聪，概率统计部分参考章复熹和张原老师课件

2025 年秋季

概率第一章内容

- 随机事件、样本空间、样本点概念（掌握）
- 事件与概率的运算（掌握）
- 概率公理定义（了解）
- 古典概型（掌握）
- 条件概率、独立性（掌握）
- 贝叶斯公式与全概率公式（掌握）

随机事件与概率

- 北京的冬季（条件 S）至少降雪 2 次（事件 A）

- 投掷硬币，出现国徽朝上（事件 A）
- 可能朝上，可能朝下

- 结果具有不确定性

概率有什么用

- 客观事件存在随机性
- 基于对问题的（主观）认识，描述不确定性：

概率有什么用

- 客观事件存在随机性
- 基于对问题的（主观）认识，描述不确定性：
  量化对事物的理解!

样本空间

随机实验 E 中所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 Ω。样本空间中的元素称为样本点，记为 ω

- E_1：抛掷硬币，观察正面 H，反面 T 出现的情况。

$$\Omega_1 = \{H, T\}.$$

- E_2：抛掷一枚硬币 3 次，观察正面 H，反面 T 出现的情况。

$$\Omega_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH\ HTT, THT, TTH, TTT\}.$$

- E_3：抛掷一枚硬币 3 次，观察正面出现的次数。

$$\Omega_3 = \{0, 1, 2, 3\}.$$

随机事件

随机现象的某些样本点组成的集合称为随机事件，简称为事件，常用 $A, B, C, \cdots$ 表示

- E：抛掷一枚骰子，事件 $A =$ “出现奇数点”，即 $A = \{1, 3, 5\}$，是样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的一个子集

随机事件与概率

- 事件的频率：投 n 次，出现 μ 次正面，则 $\frac{\mu}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} p$
- 主观概率 p ：事件的置信度
- 概率是可能性大小的度量
- 大概率事情易发生，小概率事情不易发生

事件运算：事件的包含与相等

定义 2.1 设有事件 A 和事件 B，如果 A 发生，则 B 必发生，那么称事件 B 包含事件 A（或称事件 A 在 B 中），并记为

$$A \subset B \ (\text{或 } B \supset A)$$

定义 2.2 如果事件 A 包含事件 B，同时事件 B 包含事件 A，则事件 A 和事件 B 相等，并记为

$$A = B$$

事件运算：事件的并与交

- 定义 2.3 设 A 和 B 都是事件，则“A 或 B”表示这样的事件 C：C 发生当且仅当 A 或 B 中至少有一个发生，该事件 C 叫做 A 与 B 的并，记为 $A \cup B$
- 例 2.1 在桌面上，投掷两枚匀称的硬币，A 表示“恰好一枚国旗朝上”，B 表示“两枚国旗朝上”，C 表示“至少一枚国旗朝上”，则
$$C = A \cup B.$$
- 对于并运算，有以下性质，我们恒记必然事件为 U，不可能事件为 V：
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cup U = U, \quad A \cup V = A$$

事件运算：事件的并与交

- 定义 2.4 设 A 和 B 都是事件，则 “A 且 B” 表示这样的事件 C：C 发生当且仅当 A 和 B 都发生，该事件 C 叫做 A 与 B 的交，记为 $A \cap B$，也简记为 AB
- 在例 2.1 中，$A \cap C = A$，$B \cap C = C$，$A \cap B = V$
- 对于交运算，有以下性质：

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cap U = A, \quad A \cap V = V$$

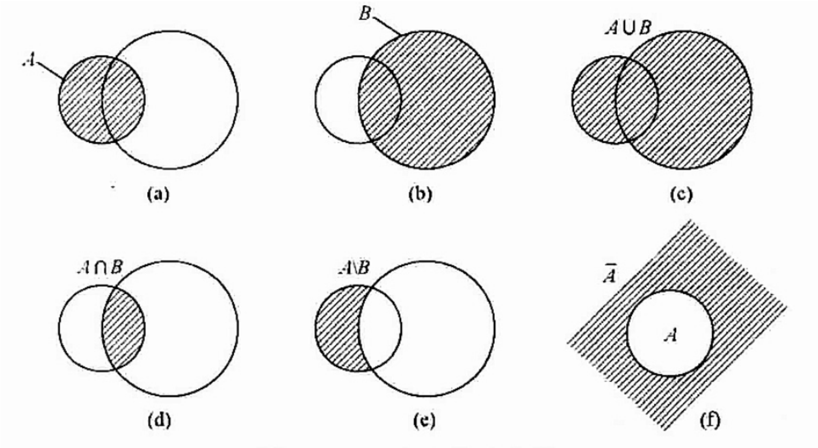

图 1: 事件运算示意图

事件运算：事件的余与差

- 定义 2.5 设 A 是事件，称“非 A”是 A 的对立事件（或称余是事件），其含义为，“非 A”发生当且仅当 A 不发生，常常用 $\overline{A}$ 表示“非 A”，也用 A^c 表示“非 A”
- 由定义知 $\overline{(\overline{A})} = A$，$\overline{U} = V$，$\overline{V} = U$
- 定义 2.6 设 A 和 B 都是事件，则两个事件的差“A 减去 B”表示这样的事件 C：C 发生当且仅当 A 发生而 B 不发生，该事件 C 记为 $A - B$（或 $A \backslash B$）
- 由定义知，$A - B = A \cap \bar{B}$

事件的运算规律

事件的基本运算还有以下性质：

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ “并”的结合律
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ “交”的结合律
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 分配律
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 分配律
- $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 对偶律
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ 对偶律

多个事件的并与交

- 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件，则 "$A_1, A_2, \cdots, A_n$" 的并是指这样的事件：它发生当且仅当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少一个发生，常常用 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并
- 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件，则 "$A_1, A_2, \cdots, A_n$" 的交是指这样的事件：它发生当且仅当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 这 n 个事件都发生，常常用 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交，也用 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 表示这个 "交"

多个事件的并与交

实际应用中，还需定义无穷多事件的并与交

- 设 $A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots$ 是一列事件，则 B 是指这样的事件：B 发生当且仅当这些 $A_i (i = 1, 2, \cdots)$ 中至少一个发生，这个 B 叫做诸 A_i 的并，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，有时也写为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$
- 设 $A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots$ 是一列事件，则 C 是指这样的事件：C 发生当且仅当这些 $A_i (i = 1, 2, \cdots)$ 都发生，这个 C 叫做诸 A_i 的交，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，有时也写为 $A_1 A_2 \cdots$

多个事件的并与交

- 并的更一般定义是，设 $\{A_a, a\in\Gamma\}$ 是一族事件（其中 Γ 是任何非空集，每个 $a\in\Gamma$ 对应一个事件 A_a)，这些事件 A_a 的“并”是指这样的事件 B：B 发生当且仅当至少一个 A_a 发生，这个 B 常常记为 $\bigcup\limits_{a\in\Gamma} A_a$，类似可以定义一族事件的交 $\bigcap\limits_{a\in\Gamma} A_a$
- 取 $X\in\mathbb{R}$, 事件 A_i 为 $X\in[\frac{1}{i+1},\frac{1}{i}]$, 事件 B_i 为 $X\in[0,\frac{1}{i}]$. 则事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 发生等价于 $X\in[\frac{1}{n+1},1]$, 事件 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i$ 发生等价于 $X\in[0,\frac{1}{n}]$. 进而当 $n\to\infty$ 时事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 发生等价于 $X\in(0,1]$, 事件 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ 发生等价于 $X=0$.

多个事件的运算规律

不难验证，对可列个事件的并和交有以下规律：

- $A \cup (\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \cup B_i)$ 分配律
- $A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap B_i)$ 分配律
- $\overline{(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$ 对偶律
- $\overline{(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$ 对偶律

互不相容的事件

- 如果事件 A 和事件 B 不能都发生，即 $A \cap B = V$，则称 A 和 B 是互不相容的事件（也称互斥的事件）
- 称事件 $A_1, \cdots A_n$ 互不相容，若对任何 $i \neq j(i, j = 1, \cdots n)$，$A_i$ 与 A_j 互不相容
- 例如，抛掷两枚硬币，事件“恰好一枚国徽朝上”和事件“两枚都是国徽朝上”是互不相容的。不难看出，对任何事件 A，A 和 $\overline{A}$ 是互不相容的

概率的加法

- 互不相容
- 加法公式：$A_1, A_2, \ldots$ 互不相容，则：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

概率空间

设 Ω 为一个抽象的集合，$\mathscr{F}$ 为 Ω 的一些子集构成的集类 定义若

$\mathscr{F}$ 满足以下三个条件：（1）$\Omega \in \mathscr{F}$，（2）$A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}$，（3）$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subsetneq \mathscr{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$，则称 $\mathscr{F}$ 为 $\sigma-$ 代数

概率空间

例：

- $\mathscr{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ 平凡 $\sigma-$ 代数
- $\mathscr{F} = \{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\}$ 包含 A 的最小 $\sigma-$ 代数
- $\mathscr{F} = \{A | A \subset \Omega\}$ Ω 上的最大 $\sigma-$ 代数
- $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$，则 Ω 所有子集构成的 $\sigma-$ 代数共有 2^n 个元素

概率

$P = P(\cdot)$ 是 $\mathscr{F}$ 上面定义的实值函数，满足：

- 非负性：$P(A) \geq 0$ 对于一切 $A \in \mathscr{F}$
- 规范性：$P(\Omega) = 1$
- 可列可加性：若 $A_n \in \mathscr{F}(n = 1, 2, \cdots)$ 两两不相交，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间

古典概型

- 随机试验中，总共 n 种不同结果，出现机会均等
- A_i：第 i 中结果：$P(A_i) = \frac{1}{n}$
- $\{A_i\}_{i=1}^{n}$：完全，不相容，等可能
- A 由 m 个组成，则：$P(A) = \frac{m}{n}$
- 工具：排列组合 $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

古典概型

同时投掷两颗骰子，得到和为 7 （例题 3.1）

- 总可能性：$6 \times 6 = 36$
- 和为 7:
$$(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$$
- 概率为 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

古典概型

5 把钥匙，逐步开门，第二次打开的概率（例题 3.2）:

- 总数： $5!$
- 第二次打开： $4!$
- 概率为 $\frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$
- 抽签与顺序无关

古典概型

100 个产品，5 个不合格，任取 50 件，事件 A 没取到不合格的概率：（例题 3.4）

- 总数：C_{100}^{50}
- A：C_{95}^{50}
- 概率为 $\frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}$

古典概型

甲口袋有 5 个白球，3 个黑球，乙口袋中有 4 个白球，6 个黑球，从两个口袋中各任取一球，求取到的两个球颜色相同的概率。

古典概型

甲口袋有 5 个白球，3 个黑球，乙口袋中有 4 个白球，6 个黑球，从两个口袋中各任取一球，求取到的两个球颜色相同的概率。

解：从两个口袋中各取一球，共有 $C_8^1 C_{10}^1$ 种等可能取法。两球颜色相同可能情况为：从甲乙口袋均取出白球，从甲乙口袋均取出黑球，共有 $C_5^1 C_4^1 + C_3^1 C_6^1$ 种取法:

$$P(\text{取到的两个球颜色相同}) = \frac{C_5^1 C_4^1 + C_3^1 C_6^1}{C_8^1 C_{10}^1} = \frac{19}{40}$$

古典概型

（巴拿赫问题）某数学家有两盒火柴，每盒有 n 根，每次使用时，他任取一盒并从中抽出一根，问他发现一盒空而同时另一盒还有 $r(0 \leqslant r \leqslant n)$ 的概率为多少 (发现为空表示最后一次抽到空盒)？

古典概型

（巴拿赫问题）某数学家有两盒火柴，每盒有 n 根，每次使用时，他任取一盒并从中抽出一根，问他发现一盒空而同时另一盒还有 $r(0 \leqslant r \leqslant n)$ 的概率为多少 (发现为空表示最后一次抽到空盒)？

解：设两盒火柴分别为 A，B，由对称性，所求概率为事件 $E =$ "发现 A 盒空而 B 盒还有 r 根" 的概率的 2 倍。
先计算样本空间中的样本点个数，由于共取了 $2n-r+1$ 次，故有 2^{2n-r+1} 个样本点。
考察事件 E，等效为前 $2n-r$ 次 A 盒恰好取 n 次，次序不论，最后一次必定取到 A 盒，此种样本点共有 C_{2n-r}^{n} 个，因此

$$P(E) = \frac{C_{2n-r}^{n}}{2^{2n-r+1}}.$$

所求概率为 $\frac{C_{2n-r}^{n}}{2^{2n-r}}$.