wulin0919@nuaa.edu.cn

第一章

1.1 约束

1.1.1 约束方程

约束通常用约束方程以位置矢径或速度来表示，如下式

$$f_j(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t) = 0\text{，}(i = 1, 2, \ldots, n\text{；} j = 1, 2, \ldots, s)$$

1.1.2 约束的分类

按照约束条件可以分为：几何约束(位置约束)与运动约束(速度约束、微分约束)。

几何约束和可积分约束属于完整约束，不满足可积分条件的约束属于非完整约束，因此完整约束和非完整约束是以是否满足可积分条件为区分条件的，典型例子为冰刀的运动，其运动约束如下

$$\frac{\dot{y}_C}{\dot{x}_C} = \tan\varphi$$

约束方程中不显含时间 t 称为定常(稳定)约束。反之，约束方程中显含时间 t 称为非定常(非稳定)约束，因此定常约束和非定常约束是以是否显含时间 t 为区分条件的。

只限制质点系在某一侧的运动，而不限制另一侧的运动的约束称为单侧(可解)约束，一般可以用约束不等式表示，如下式

$$f_j(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t) \leqslant 0\text{，}(i = 1, 2, \ldots, n\text{；} j = 1, 2, \ldots, s)$$

同时限制质点系某一侧及相反方向的运动的约束称为双侧(不可解)约束。

单侧约束是有可能解除的，需要通过约束力来判断解除条件。

1.1.3 一阶线性约束

1.1.3.1 完整约束系统(r)

约束方程的有限形式如下

$$f_j(\boldsymbol{r}_i, t) = 0\text{，}(i = 1, 2, \ldots, n\text{；} j = 1, 2, \ldots, r)$$

对时间求一阶全导数可得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0\text{，}(j = 1, 2, \ldots, r)$$

经过变形可以得到完整约束的微分形式

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_{ij} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + \mathrm{A}_{j0} \mathrm{d}t = 0\text{，}(j = 1, 2, \ldots, r)$$

上式为全微分形式，其解析表达式为

$$\sum_{i=1}^{3n} \mathrm{A}_{ij}\mathrm{d}x_i + \mathrm{A}_{j0}\mathrm{d}t = 0\text{，}(j = 1, 2, ..., r)$$

其中有

$$\boldsymbol{\Psi}_{ij} = \frac{\partial f_j}{\partial \boldsymbol{r}_i}\text{，}\mathrm{A}_{ij} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\text{，}\mathrm{A}_{j0} = \frac{\partial f_j}{\partial t}$$

1.1.3.2 非完整约束系统(s)

表达方程与完整约束系统一致，如下

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_{ij}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + \mathrm{A}_{j0}\mathrm{d}t = 0\text{，}(j = 1, 2, ..., s)$$

其中$\boldsymbol{\Psi}_{ij}$，A_{j0}也是关于时间t的函数，其解析表达式为

$$\sum_{i=1}^{3n} \mathrm{A}_{ij}\mathrm{d}x_i + \mathrm{A}_{j0}\mathrm{d}t = 0\text{，}(j = 1, 2, ..., s)$$

1.2 可能位移、实位移与虚位移

1.2.1 实位移

真实运动产生的位移称为质点系的实位移，用$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$表示，其满足下列方程

$$\begin{cases} f_j(\boldsymbol{r}_i, t) = 0 \\ f_j(\boldsymbol{r}_i + \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i, t + \mathrm{d}t) = 0 \end{cases}\text{，}(j = 1, 2, ..., r + s)$$

联立解得

$$\mathrm{d}f_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t}\mathrm{d}t = 0\text{，}(j = 1, 2, ..., r + s)$$

对于定常约束可得

$$\mathrm{d}f_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = 0\text{，}(j = 1, 2, ..., r)$$

真实位移是在某时间间隔中真实发生的位移。

1.2.2 可能位移

在给定的瞬时和位形上，以及给定的时间间隔内，质点系在可能运动中发生的位移称为可能位移，用$\triangle\boldsymbol{r}$表示，其满足下列方程

$$\begin{cases} f_j(\boldsymbol{r}_i, t) = 0 \\ f_j(\boldsymbol{r}_i + \triangle\boldsymbol{r}_i, t + \mathrm{d}t) = 0 \end{cases}\text{，}(j = 1, 2, ..., r + s)$$

联立解得

$$\mathrm{d}f_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \triangle\boldsymbol{r}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t}\mathrm{d}t = 0\text{，}(j = 1, 2, ..., r + s)$$

对于定常约束可得

$$\mathrm{d}f_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \triangle\boldsymbol{r}_i = 0\text{，}(j = 1, 2, ..., r)$$

实位移是可能位移中的一个。

1.2.3 虚位移

在某固定瞬时和一定位形上，质点系在约束所允许的条件下，假想的任何无限小位移称为虚位移，用δr表示，其满足下列方程

$$\begin{cases} f_j(\boldsymbol{r}_i,t)=0 \\ f_j(\boldsymbol{r}_i+\delta\boldsymbol{r}_i,t)=0 \end{cases},\quad (j=1,2,...,r+s)$$

联立解得

$$\delta f_j=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial \boldsymbol{r}_i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0,\ (j=1,2,...,r+s)$$

其解析形式为

$$\delta f_j=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\cdot\delta x_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\cdot\delta y_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\cdot\delta z_i\right)=0,\ (j=1,2,...,r+s)$$

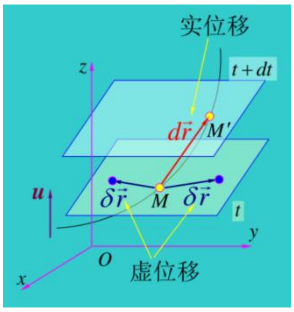
即

$$\nabla f_j\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0,\ (j=1,2,...,r+s)$$

虚位移总是位于约束曲面的切平面内。

虚位移和可能位移可能不止一个，但实位移只能有一个，虚位移可以视为两个可能位移之差。在定常约束下，实位移是无数虚位移之中的一个，在非定常约束下不一定成立。

如下图所示



将位矢进行等时变分即为虚位移，将几何约束方程进行等时变分即为虚位移之间的关系。

1.3 自由度和广义坐标

1.3.1 自由度

对于任意系统，自由度统一定义为质点系系统独立坐标变分的数目，用n表示，对任意系统，自由度可以用下式来计算

$$n=3N-r-s$$

1.3.2 广义坐标

确定质点系位形的独立参数称为广义坐标，用$q_k\,(k=1,2,...,l)$表示，广义坐标数目可以用下式来计算

$$l = 3N - r$$

即笛卡尔坐标x_i和位置矢径$\boldsymbol{r}_i$可以由广义坐标单值确定

$$x_i = x_i(q_1, q_2, ..., q_l, t),\ i = 1, 2, ..., 3n$$
$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, ..., q_l, t),\ i = 1, 2, ..., n$$

1.3.3 广义速度

广义坐标对时间的导数$\dot{q}_k$称为广义速度，系统中点的速度$\dot{\boldsymbol{r}}_i$可以用下式表示

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t},\ (i = 1, 2, ..., n)$$

其解析形式如下

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t},\ (i = 1, 2, ..., 3n)$$

总之，无论是完整还是非完整系统，独立的坐标变分数、独立的虚位移数和系统的自由度数是一致的。对于，非完整系统，广义坐标的数目总是大于系统的自由度数目。

第二章

2.1 虚位移原理

虚位移原理可以表述为：具有完整、定常、理想约束的质点系，其平衡条件的充要条件是，在给定的位形上，作用于质点系的所有主动力在任何虚位移上所做的元功之和等于零，可以用下式表示

$$\sum \delta W = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

其解析形式如下

$$\sum \delta W = \sum_{i=1}^{n} (F_x \cdot \delta x_i + F_y \cdot \delta y_i + F_z \cdot \delta z_i) = 0$$

虚位移原理只能求解有运动自由度的系统(如机构)主动力的平衡条件，对结构应首先解除某个(或某几个)约束，代之以相应的约束力，赋予系统自由度，解除约束后的系统与原系统等效。这种方法称为解除约束原理。

2.2 广义力表示下完整系统的平衡条件

虚位移原理的广义坐标形式如下

$$\sum \delta W = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^{l} Q_k \delta q_k = 0$$

其中

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}, \quad (k = 1, 2, ..., l)$$

由广义虚位移的独立性可得

$$Q_k = 0, \quad (k = 1, 2, ..., l)$$

2.3 广义力的计算

2.3.1 解析法

直接按照广义力的定义计算

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{n} \left(F_x \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_y \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_z \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right)$$

2.3.2 独立虚功法

可令 δq_k 不为零，其他广义虚位移均为零，计算广义虚位移 δq_k 中所做的元功之和 $\sum \delta W_k$，则有

$$Q_k = \frac{\sum \delta W_k}{\delta q_k}$$

2.3.3 势能偏导法

对于保守系统，势能函数 V 可以表示为广义坐标 q_k 的单值函数 $V = V(q_1, q_2, ..., q_l)$，进一步推导可得

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}, \quad (k = 1, 2, ..., l)$$

2.4 势力场中平衡条件及稳定性

2.4.1 平衡条件

在势力场中，具有完整、定常、理想约束的质点系，其平衡充要条件是：该质点系势能的一阶等时变分等于零，如下式

$$\sum \delta W = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \delta z_i \right) = -\delta V = 0$$

即

$$\delta V = 0$$

在势力场中，具有完整、定常、理想约束的质点系，其平衡充要条件是：该质点系势能对每一个广义坐标的一阶偏导数都等于零，如下式

$$\frac{\partial V}{\partial q_k}=0,\ (k=1,2,...,l)$$

表明有势力作用下的质点系在平衡位置处势能取极值，即最小值。

2.4.2 稳定性判断方法

2.4.2.1 单自由度系统

如系统在$q=q_0$位置是平衡的，那么势能函数在此处取极值，即

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}\right|_{q=q_0}=0$$

若

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}\right|_{q=q_0}>0$$

则系统在此位置处的平衡是稳定的。

若

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}\right|_{q=q_0}<0$$

则系统在此位置处的平衡是不稳定的

若

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}\right|_{q=q_0}=0$$

则系统在此位置处的平衡是不确定的

2.4.2.2 两自由度系统

如系统在$q_1=q_{10},q_2=q_{20}$位置是平衡的，那么势能函数在此处取极值，即

$$\left.\frac{\partial V}{\partial q_1}\right|_{(q_{10},q_{20})}=\left.\frac{\partial V}{\partial q_2}\right|_{(q_{10},q_{20})}=0$$

令

$$\triangle=\left.\left[\left(\frac{\partial^2V}{\partial q_1\partial q_2}\right)^2-\frac{\partial^2V}{\partial q_1{}^2}\frac{\partial^2V}{\partial q_2{}^2}\right]\right|_{(q_{10},q_{20})}$$

只有当$\triangle<0$时才有极值，$\triangle=0$时问题不确定

若

$$\left.\frac{\partial^2V}{\partial q_1{}^2}\right|_{(q_{10},q_{20})}>0,\ \left.\frac{\partial^2V}{\partial q_2{}^2}\right|_{(q_{10},q_{20})}>0$$

则系统在此位置处的平衡是稳定的

若

$$\left.\frac{\partial^2V}{\partial q_1{}^2}\right|_{(q_{10},q_{20})}<0,\ \left.\frac{\partial^2V}{\partial q_2{}^2}\right|_{(q_{10},q_{20})}<0$$

则系统在此位置处的平衡是不稳定的

第三章

3.1 动力学普遍方程的三种形式

3.1.1 虚功形式的动力学普遍方程

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0$$

其解析形式如下

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(F_{xi} - m_i\ddot{x}_i)\cdot\delta x_i + (F_{yi} - m_i\ddot{y}_i)\cdot\delta y_i + (F_{zi} - m_i\ddot{z}_i)\cdot\delta z_i\right] = 0$$

只适用于理想约束，除此之外其他均适用。

3.1.2 虚功率形式的动力学普遍方程

$$\sum\triangle P = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\triangle\dot{\boldsymbol{r}}_i = 0$$

其解析形式如下

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(F_{xi} - m_i\ddot{x}_i)\cdot\triangle\dot{x}_i + (F_{yi} - m_i\ddot{y}_i)\cdot\triangle\dot{y}_i + (F_{zi} - m_i\ddot{z}_i)\cdot\triangle\dot{z}_i\right] = 0$$

适用于理想双面约束。

3.1.3 高斯形式的动力学普遍方程

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\triangle\ddot{\boldsymbol{r}}_i = 0$$

3.1.4 若丹原理

$\triangle\dot{\boldsymbol{r}}_i$与理想约束力$\boldsymbol{F}_{Ni}$之间满足下列正交条件

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{Ni}\cdot\triangle\dot{\boldsymbol{r}}_i = 0$$

3.1.5 高斯原理

$\triangle\ddot{\boldsymbol{r}}_i$与理想约束力$\boldsymbol{F}_{Ni}$之间满足下列正交条件

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{Ni}\cdot\triangle\ddot{\boldsymbol{r}}_i = 0$$

第四章

4.1 第二类拉格朗日方程

4.1.1 “消点”恒等式

$$\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_k} = \frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_k},\quad (i=1,2,...,n;k=1,2,...,l)$$

4.1.2 全导数对易关系

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_k}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right),\ (i=1,2,...,n;k=1,2,...,l)$$

以上两个经典关系也适用于非完整系统。

4.1.3 广义坐标形式的拉格朗日原理

$$\sum_{i=1}^{l}\left[Q_k-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)+\frac{\partial T}{\partial q_k}\right]\delta q_k=0$$

具有完整、理想约束的质点系，其广义主动力和广义惯性力相平衡，即

$$Q_k+Q_k^*=0,\ (k=1,2,...,l)$$

4.1.4 第二类拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k,\ (k=1,2,...,l)$$

第二类拉格朗日方程只适用于完整系统，不适用于非完整系统。引入拉格朗日算子

$$\Lambda_k=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial}{\partial q_k}$$

于是，完整系统的拉格朗日方程为

$$\Lambda_k(T)=Q_k,\ (k=1,2,...,l)$$

4.1.4.1 势力场中的拉格朗日方程

因为在势力场中有以下关系式

$$Q_k=-\frac{\partial V}{\partial q_k},\ (k=1,2,...,l)$$

通过变形我们可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0,\ (k=1,2,...,l)$$

其中$L=T-V=L(q,\dot{q},t)$称为拉格朗日函数或动势。

4.1.4.2 一般形式的拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=Q_k',\ (k=1,2,...,l)$$

其中$Q_k=-\dfrac{\partial V}{\partial q_k}+Q_k'$，$(k=1,2,...,l)$称为非有势力的广义力。

4.2 动能结构及拉格朗日方程的显式

4.2.1 动能的广义速度齐次结构

系统的动能可以表示为

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}a_{kj}\dot{q}_k\dot{q}_j+\sum_{k=1}^{l}a_k\dot{q}_k+\frac{1}{2}a_0=T_2+T_1+T_0$$

其中

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}a_{kj}\dot{q}_k\dot{q}_j\,,\quad T_1=\sum_{k=1}^{l}a_k\dot{q}_k\,,\quad T_0=\frac{1}{2}a_0$$

且

$$a_{kj}=a_{jk}=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\,,\quad a_k=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\,,\quad a_0=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

其中T_1和T_0是与系统的非定常性有关的动能的一部分，在定常约束下，$\boldsymbol{r}_i$不显含时间t，因此有

$$a_k=0\,,\quad T_2=T_1=0\,,\quad T=T_2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}a_{kj}\dot{q}_k\dot{q}_j$$

即系统的动能是广义速度的二次齐次函数。

4.2.2 拉格朗日方程的显式

引入欧拉算子，可以把拉格朗日方程表示为

$$\Lambda_k(T_2)+\Lambda_k(T_1)+\Lambda_k(T_0)=Q_k\,,\quad (k=1,2,...,l)$$

计算可得

$$\Lambda_k(T_2)=\sum_{j=1}^{l}a_{kj}\ddot{q}_j+\sum_{j=1}^{l}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_m}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial a_{mj}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_m+\sum_{j=1}^{l}\frac{\partial a_{kj}}{\partial t}\dot{q}_j\,,\quad (k=1,2,...,l)$$

$$\Lambda_k(T_1)=\frac{\partial a_k}{\partial t}-\sum_{j=1}^{l}\left(\frac{\partial a_j}{\partial q_k}-\frac{\partial a_k}{\partial q_j}\right)\dot{q}_j\,,\quad (k=1,2,...,l)$$

$$\Lambda_k(T_0)=-\frac{\partial T_0}{\partial q_k}=-\frac{1}{2}\frac{\partial a_0}{\partial q_k}\,,\quad (k=1,2,...,l)$$

则拉格朗日方程的显式为

$$\sum_{j=1}^{l}a_{kj}\ddot{q}_j+\sum_{j=1}^{l}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_m}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial a_{mj}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_m+\sum_{j=1}^{l}g_{kj}\dot{q}_j+\sum_{j=1}^{l}\frac{\partial a_{kj}}{\partial t}\dot{q}_j+\frac{\partial a_k}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_0}{\partial q_k}=Q_k$$

特别地，如果$\boldsymbol{r}_i$不显含时间t，因此有

$$\sum_{j=1}^{l}a_{kj}\ddot{q}_j+\sum_{j=1}^{l}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_m}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial a_{mj}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_m=Q_k\,,\quad (k=1,2,...,l)$$

其中

$$g_{kj}=-g_{jk}=\frac{\partial a_k}{\partial q_j}-\frac{\partial a_j}{\partial q_k}$$

称为陀螺系数，而

$$\Gamma_k=\sum_{j=1}^{l}g_{kj}\dot{q}_j\,,\quad (k=1,2,...,l)$$

称为广义陀螺力，通常由旋转运动产生的科氏惯性力所引起。陀螺力的特殊性在于它在系统的任何真实位移中的总功率为零。即陀螺力可以改变每个质点的运动状态，但不改变系

统的总能量。在求解广义陀螺力时需要观察T_1项的系数a_k。

单自由度系统的陀螺力一定是零。

特殊符号：克里斯托费尔(Christoffel)第一类记号定义如下

$$[j,m;k]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_m}+\frac{\partial a_{km}}{\partial q_j}-\frac{\partial a_{mj}}{\partial q_k}\right)$$

且有

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{m=1}^{l}\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_m}=\sum_{j=1}^{l}\sum_{m=1}^{l}\frac{\partial a_{km}}{\partial q_j}$$

因此可得

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{m=1}^{l}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_m}+\frac{\partial a_{km}}{\partial q_j}-\frac{\partial a_{mj}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_m=\sum_{j=1}^{l}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_m}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial a_{mj}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_m$$

4.3 拉格朗日方程的初积分

4.3.1 广义能量积分

若系统中，主动力皆有势，且拉格朗日函数L中不显含时间t，即

$$\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k-L=E$$

其中E为积分常数。上式称为广义能量积分、广义能量守恒或雅可比积分，左端项称为广义能量。

令

$$L_2=T_2\text{，}\ L_1=T_1\text{，}\ L_0=T_0-V$$

则广义能量可以写成

$$L_2-L_0=E\text{，}\ T_2+(V-T_0)=E$$

拉格朗日函数L中不显含时间t并不要求约束一定是定常的。非定常系统往往本质是非保守系统，系统的机械能往往不守恒，即与外界有能量交换。

4.3.2 循环积分

若系统中，主动力皆有势，且拉格朗日函数L中不显含某些广义坐标$q_k\,(k=1,2,\dots,m)$，则将这m个不包含在拉格朗日函数L中的广义坐标称为系统的循环坐标。显然，拉格朗日函数L对循环坐标的偏导数都应等于零。

由此得出

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\mathrm{C}_k$$

其中C_k为积分常数，上式是拉格朗日方程的又一初积分。显然，系统有几个循环坐标

就存在几个相应的循环积分。

由于 $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}=0$，因此定义

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k},\ (k=1,2,...,m)$$

为广义动量，故循环积分又称为广义动量积分或广义动量守恒。循环积分的物理含义：受有势力作用的完整系统，当存在循环坐标 q_k 时，对于的广义动量 p_k 保持不变，或称广义动量守恒。

4.4 劳斯方程和劳斯能量积分

4.4.1 劳斯方程

以 C_k 为新变量替换 $\dot{q}_k$，构造 L 的勒让德变换

$$R=L-\sum_{k=1}^{m}\dot{q}_k\mathrm{C}_k$$

其中，R 称为劳斯函数，它与拉格朗日函数 L 有以下关系

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}=\frac{\partial R}{\partial q_k},\ \frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial R}{\partial t},\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k},\ (k=m+1,...,l)$$

代入对应非循环坐标的拉格朗日方程，可以得到 $l-m$ 个独立的方程组

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial R}{\partial q_k}=0,\ (k=m+1,...,l)$$

至于循环坐标，可以通过下式求得

$$q_k=\int\frac{\partial R}{\partial \mathrm{C}_k}\mathrm{d}t,\ (k=1,2,...,m)$$

4.4.2 劳斯能量积分

当拉格朗日函数 L 中不显含时间 t 时，劳斯函数 R 中也不显含时间 t，于是主动力有势，即 $Q_k=0$ 时，可以导出初积分形式，即

$$\sum_{k=m+1}^{l}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k-R=h$$

其中 h 为积分常数。上式称为劳斯广义能量积分。

令

$$R=R_2+R_1+R_0-V$$

则能量积分又可以表示为

$$R_2+(V-R_0)=h$$

第五章

5.1 哈密顿函数与正则方程

5.1.1 哈密顿函数

引入广义动量 p_k，其与系统的拉格朗日函数 L 或动能函数 T 的关系为

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k},\ (k = 1, 2, ..., l)$$

定义

$$H(q,p,t) = \sum_{k=1}^{l} \dot{q}_k p_k - L$$

称函数 $H = H(q,p,t)$ 为哈密顿函数，q 、p 为哈密顿变量或正则变量。

5.1.2 哈密顿正则方程

经过变形，有以下关系

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k},\ \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t},\ (k = m+1, ..., l)$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k},\ (k = 1, 2, ..., l)$$

则可以导出哈密顿正则方程

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases},\ (k = 1, 2, ..., l)$$

若系统所受主动力除有势力外还有非有势力，则有

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} + Q'_k \end{cases},\ (k = 1, 2, ..., l)$$

其中 Q'_k 为非有势力对应的广义力。

5.2 哈密顿函数的物理意义

利用欧拉齐次定理，有

$$H = T_2 + (V - T_0)$$

哈密顿函数的物理意义就是系统的广义能量。H 是否显含时间完全视 L 是否显含时间而定。

5.3 哈密顿函数的初积分

5.3.1 广义能量积分

若系统中，主动力皆有势，且哈密顿函数H 中不显含时间 t，即

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial t}=0$$

则有

$$H=T_2+(V-T_0)=h$$

在这种情况下，正则方程有广义能量积分，或者说有广义能量守恒。

5.3.2 循环积分

若系统中，主动力皆有势，且哈密顿函数H 中不显含某些广义坐标$q_k\,(k=1,2,...,m)$，则将这m个不包含在哈密顿函数H 中的广义坐标称为系统的循环坐标。显然，哈密顿函数H 对循环坐标的偏导数都应等于零。

由此得出

$$\dot{p}_k=-\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_k}=0\,,\ \ (k=1,2,...,m)$$

于是可以得到m个正则方程的循环积分或广义能量积分

$$p_k=\mathrm{C}_k\,,\ \ (k=1,2,...,m)$$

5.4 泊松括号

5.4.1 泊松括号定义与性质

泊松括号定义为

$$[\varphi,\psi]=\sum_{k=1}^{l}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\frac{\partial\psi}{\partial p_k}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\frac{\partial\psi}{\partial q_k}\right)$$

有以下性质

(1) $[\mathrm{C},\varphi]=-[\varphi,\mathrm{C}]=0$，C为常数

(2) $[\varphi,\varphi]=[\psi,\psi]=0$

(3) $[\varphi,\psi]=-[\psi,\varphi]$

(4) $[\varphi,-\psi]=-[\varphi,\psi]$；$[-\varphi,\psi]=-[\varphi,\psi]$

(5) $[q_i,p_j]=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$，$\delta_{ij}$为克罗内克(kronecker)记号

(6) $[\varphi,\psi_1+\psi_2]=[\varphi,\psi_1]+[\varphi,\psi_2]$

(7) $[\varphi,\psi_1\psi_2]=[\varphi,\psi_1]\psi_2+[\varphi,\psi_2]\psi_1$

(8) $\frac{\partial}{\partial t}[\varphi,\psi]=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t},\psi\right]+\left[\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]$

5.4.2 用泊松括号表示正则方程

$$\begin{cases}\dot{q}_k=[q_k,H]\\ \dot{p}_k=[p_k,H]\end{cases},\ (k=1,2,...,l)$$

第七章

7.1 高斯最小拘束原理

高斯将以下质点系加速度的函数

$$Z=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2m_i}(\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\ddot{\boldsymbol{r}}_i-\frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i}\right)^2$$

定义为系统的拘束，于是

$$\delta Z=0$$

即在任一时刻，系统的真实运动与位形和速度相同，但加速度不同的可能运动相比较，其真实运动使拘束取驻值，且取最小值。

引入加速度能G

$$G=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_i$$

可得高斯拘束为

$$Z=G-\sum_{i=1}^{n}\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\boldsymbol{F}_i+(\cdots)$$

高斯原理适用于完整系统和非完整系统。在主动力F_i和约束力F_{Ni}共同作用下，质点的加速度为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\frac{1}{m_i}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{Ni})$$

可以得到质点的拘束函数为

$$Z=\frac{\boldsymbol{F}_{Ni}{}^2}{2m_i}$$

7.2 平面运动刚体的加速度能

7.2.1 平面运动刚体的加速度能的计算

$$G=\frac{1}{2}ma_C^2+\frac{1}{2}J_C\alpha^2+\cdots$$

作平面运动刚体的加速度等于质心运动与绕质心转动的加速度能之和

7.2.2 平面运动刚体的拘束函数

平面运动刚体的拘束计算公式

$$Z=\frac{1}{2}ma_{\mathrm{C}}^{2}+\frac{1}{2}J_{\mathrm{C}}\alpha^{2}-\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}\cdot\boldsymbol{F}-\alpha M_{\mathrm{C}}+\cdots$$

第八章

8.1 第一类拉格朗日方程

$$\sum_{i=1}^{3n}\left(F_i-m_i\ddot{x}_i+\sum_{j=1}^{r+2}\lambda_j\mathrm{A}_{ij}\right)\delta x_i=0$$

其中λ_j称为拉格朗日乘子。于是可以得到

$$F_i-m_i\ddot{x}_i+\sum_{j=1}^{r+2}\lambda_j\mathrm{A}_{ij}=0$$

上式称为第一类拉格朗日方程。

8.2 第一类拉格朗日方程的物理意义

假设质点系仅受一个非定常完整约束，约束方程为

$$f\left(x_1,x_2,...,x_{3n},t\right)=0$$

则有

$$\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)=F_{Ni}\text{，}\left(i=1,2,...,3n\right)$$

8.3 非完整系统的劳斯方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k+\sum_{j=1}^{r+2}\lambda_j\mathrm{A}_{ij}\text{，}\left(k=1,2,...,m>l\right)$$