

第一章

1.1 应力—应变关系

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\tau = G\gamma$$

第二章

2.1 受扭转圆轴的传动功率P、转速n和力偶矩M的关系

$$M = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\pi n}$$

2.2 梁所受的剪力、弯矩与载荷集度的微分关系

$$\frac{dF_Q}{dx} = q(x), \quad \frac{dM}{dx} = F_Q, \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = q(x)$$

第三章

3.1 轴力和正应力的关系

$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

其中 F_N 为横截面上的轴力， A 为横截面的面积。

3.2 弹性范围内杆件承受轴向载荷时力与变形的胡克定律

$$\Delta l = \pm \frac{F_N l}{E A}$$

其中 F_N 为横截面上的轴力， A 为横截面的面积， l 为杆件长度， E 为弹性模量。

推广：

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{F_{N_i} l_i}{E_i A_i}$$

3.3 正应变

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\frac{F_N l}{E A}}{l} = \frac{F_N}{E A} = \frac{\sigma_x}{E}$$

3.4 泊松比

$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x$$

3.5 温度应力

$$F = E A \alpha_l \Delta T$$

其中 α_l 为线膨胀系数， ΔT 为温差。

3.6 斜截面上正应力和剪应力公式

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \sigma_x \cos^2 \theta \\ \tau_\theta = \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\theta \end{cases}$$

其中 σ_x 为轴向正应力， θ 为斜截面与竖直平面的夹角。

第四章

4.1 静矩

$$\begin{cases} S_y = \int_A z dA \\ S_z = \int_A y dA \end{cases}$$

4.2 形心

$$\begin{cases} y_C = \frac{S_z}{A} = \frac{\int_A y dA}{A} \\ z_C = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A z dA}{A} \end{cases}$$

推广：

$$S_z = \sum_{i=1}^n A_i y_{Ci}, \quad S_y = \sum_{i=1}^n A_i z_{Ci}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_C = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{Ci}}{\sum_{i=1}^n A_i} \\ z_C = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i z_{Ci}}{\sum_{i=1}^n A_i} \end{array} \right.$$

4.3 惯性矩

$$I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_z = \int_A y^2 dA$$

4.4 极惯性矩

$$I_P = \int_A r^2 dA = I_y + I_z$$

4.5 惯性积

$$I_{yz} = \int_A zy dA$$

4.6 惯性半径

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

4.7 实心圆截面的惯性矩与极惯性矩

$$I_y = I_z = \frac{1}{64} \pi D^4$$

$$I_P = \frac{1}{32} \pi D^4$$

其中 D 为圆截面直径。

4.8 空心圆截面的惯性矩与极惯性矩

$$I_y = I_z = \frac{1}{64} \pi D^4 (1 - \alpha^4)$$

$$I_P = \frac{1}{32} \pi D^4 (1 - \alpha^4)$$

$$\alpha = \frac{d}{D}$$

其中 D 为外圆直径， d 为内圆直径， α 为比例系数。

4.9 y 轴长为 h , z 轴宽为 b 的矩形的惯性矩与极惯性矩

$$I_y = \frac{1}{12} hb^3, \quad I_z = \frac{1}{12} bh^3, \quad I_P = I_y + I_z = \frac{1}{12} (b^2 + h^2) bh$$

4.10 平行轴移轴定理

假设坐标变化 $z_1 = z + b$, $y_1 = y + a$, 则有

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= \int_A z_1^2 dA = \int_A (z + b)^2 dA, \quad I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA \\ I_{z_1 y_1} &= \int_A z_1 y_1 dA = \int_A (z + b)(y + a) dA \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= I_z + 2aS_z + a^2 A, \quad I_{y_1} = I_y + 2aS_y + a^2 A \\ I_{z_1 y_1} &= I_{zy} + aS_y + bS_z + ab A \end{aligned}$$

当 y , z 轴为通过形心的轴时有

$$I_{z_1} = I_z + a^2 A, \quad I_{y_1} = I_y + a^2 A, \quad I_{z_1 y_1} = I_{zy} + ab A$$

4.11 转轴定理

假设坐标变化 $z_1 = z \cos \theta + y \sin \theta$, $y_1 = y \cos \theta - z \sin \theta$, 则有

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= \int_A z_1^2 dA = \int_A (z \cos \theta + y \sin \theta)^2 dA \\ I_{z_1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cos \theta - z \sin \theta)^2 dA \\ I_{z_1 y_1} &= \int_A z_1 y_1 dA = \int_A (z \cos \theta + y \sin \theta)(y \cos \theta - z \sin \theta) dA \end{aligned}$$

即

$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\theta + I_{zy} \sin 2\theta, \quad I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\theta - I_{zy} \sin 2\theta$$

$$I_{z_1 y_1} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{zy} \cos 2\theta$$

不难得到

$$I_{z_1} + I_{y_1} = I_z + I_y = I_P$$

图形对两根垂直轴的惯性矩之和与转轴时的角度无关，其和保持不变。

4.12 主惯性矩

对于主轴的惯性矩是这些惯性矩的极大值和极小值，即

$$\tan 2\theta_P = - \frac{2I_{zy}}{I_z - I_y}$$

$$I_{\max}, I_{\min} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{zy}^2}$$

第五章

5.1 平面弯曲中性层的曲率

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

其中 θ 为平面相对弯曲的角度， ρ 为曲率半径

5.2 应力和内力分量之间的对应关系

$$\int_A \sigma dA = F_N, \quad \int_A (\sigma dA) z = M_y, \quad \int_A (\sigma dA) y = -M_z$$

$$\int_A \tau_{xy} dA = F_{Qy}, \quad \int_A \tau_{xz} dA = F_{Qz}, \quad - \int_A (\tau_{xy} dA) z + \int_A (\tau_{xz} dA) y = M_x$$

5.3 横截面上任意点(y, z)正应力通用公式

$$\sigma_x = \frac{F_N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

其中各项的符号判断，拉应力用+，压应力用-

$$\frac{1}{\rho_y} = \frac{M_y}{EI_y}, \quad \frac{1}{\rho_z} = \frac{M_z}{EI_z}$$

上式为中性层曲率半径表达式。

5.4 平面弯曲时横截面的最大、最小正应力

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M_z}{I_z} y_{\max} = \pm \frac{M_z}{W_z}, \quad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$$

$$\sigma_{\min} = \pm \frac{M_y}{I_y} z_{\max} = \pm \frac{M_y}{W_y}, \quad W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}$$

5.5 弯曲截面模量

y 轴长为 h , z 轴宽为 b 的矩形的弯曲模量

$$W_y = W_z = \frac{1}{6} h b^2, \quad W_z = \frac{1}{6} b h^2$$

直径为 D 的圆截面

$$W_y = W_z = W = \frac{1}{32} \pi D^3$$

外直径为 D , 内直径为 d 的空心圆截面

$$W_y = W_z = W = \frac{1}{32} \pi D^3 (1 - \alpha^4), \quad \alpha = \frac{d}{D}$$

5.6 斜弯曲时圆截面的最大、最小正应力

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{M}{W} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W}, \quad \sigma_{\min}^- = \frac{M}{W} = -\frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W}$$

第六章

6.1 单弯矩作用下弯曲强度设计准则

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]$$

第七章

7.1 剪应力互等定理

在两个互相垂直的平面上，剪应力必然成对存在，且数值相等，共同指向或者背离角线，即

$$\tau = \tau'$$

7.2 切变模量

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

三个弹性常数中(E, ν, G)，只有两个的独立的。

7.3 弯曲剪应力一般表达式

$$\tau = \frac{F_Q S_z^*}{\delta I_z}$$

其中 F_Q 为所求剪应力横截面上的剪力； I_z 为整个横截面对于中性轴的惯性矩； δ 为通过所求剪应力点处薄壁截面的厚度； S_z^* 为微端局部的横截面面积 A^* 对横截面中性轴的静矩。

7.4 平面弯曲时截面上剪应力公式

y 轴长为 h ， z 轴宽为 b 的矩形的剪应力

$$\tau(y) = \frac{3}{2} \frac{F_Q}{bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) \leq \tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{F_Q}{bh}$$

直径为 D 的圆截面

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{F_Q}{A}, \quad A = \frac{\pi D^2}{4}$$

外直径为 D ，内直径为 d 的空心圆截面

$$\tau_{\max} = 2 \frac{F_Q}{A}, \quad A = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$$

工字形截面

$$\tau_{\max} = \frac{F_Q}{\delta \frac{I_z}{S_{z \max}^*}}$$

其中 $\frac{I_z}{S_{z \max}^*}$ 通过查表可得。

第八章

8.1 圆轴扭转的变形协调关系

$$\gamma(\rho) = \rho \frac{d\varphi}{dx}$$

其中 ρ 为到轴线的距离, $\gamma(\rho)$ 为 ρ 处的剪应变, $\frac{d\varphi}{dx}$ 为单位长度相对扭转角,

对于两个相邻截面, $\frac{d\varphi}{dx}$ 为常量。

8.2 圆轴扭转时截面上剪应力公式

有以下关系

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GI_P}$$

其中 GI_P 为扭转刚度, 则有

$$\tau = \frac{M_x \rho}{I_P}$$

对于直径为 D 的圆截面

$$I_P = \frac{1}{32} \pi D^4$$

对于外直径为 D , 内直径为 d 的圆截面

$$I_P = \frac{1}{32} \pi D^3 (1 - \alpha^4), \quad \alpha = \frac{d}{D}$$

8.3 圆轴扭转时截面上最大剪应力

$$\tau_{\max} = \frac{M_x \rho_{\max}}{I_P} = \frac{M_x}{W_P}$$

其中 W_P 为扭转截面模量。

对于直径为 D 的圆截面

$$W_P = \frac{1}{16} \pi D^4$$

对于外直径为 D , 内直径为 d 的圆截面

$$W_P = \frac{1}{16} \pi D^3 (1 - \alpha^4), \quad \alpha = \frac{d}{D}$$

8.4 圆轴扭转时相对扭转角

对于两端仅受扭转力偶的圆轴，两端截面的相对扭转角

$$\varphi_{AB} = \frac{M_x l}{GI_P}$$

推广：

$$\varphi_{AB} = \sum_{i=1}^n \frac{M_{xi} l_i}{G_i I_{Pi}}$$

8.5 圆轴扭转刚度设计准则

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GI_P} \leq [\theta]$$

8.6 闭口薄壁杆件的自由扭转

$$\tau = \frac{M_x}{2\delta A_\Omega}$$

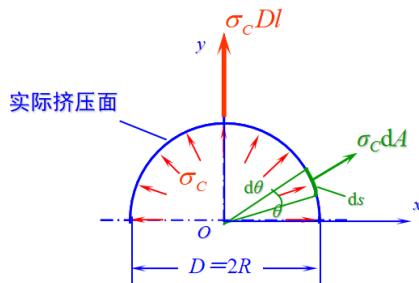
其中 A_Ω 为横截面壁厚中线所围成的面积。

8.7 狹长矩形截面杆扭转时的剪应力

$$\tau = \frac{3M_x}{hb^2}$$

第九章

9.1 圆弧面挤压合力



$$F_{Cr} = \sigma_c D \delta$$

其中 F_{Cr} 为竖直方向上的合力， δ 为薄壁厚度。

第十章

10.1 任意方向上平面应力状态中正应力和剪应力

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_{\theta+90^\circ} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_\theta &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta\end{aligned}$$

其中 θ 为逆时针转角。

10.2 主平面($\tau_\theta = 0$)方向角

$$\tan 2\theta_P = - \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

10.3 平面应力状态的三个主应力

$$\begin{aligned}\sigma' &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ \sigma'' &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ \sigma''' &= 0\end{aligned}$$

将 3 个主应力排序可得 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。

10.4 面内最大、最小剪应力

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad \tau_{\min} = - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

10.5 过一点最大剪应力

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

10.6 莫尔圆

应力圆方程如下

$$\left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_\theta^2 = \left(\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \right)^2$$

10.7 内压薄壁容器的应力分析

$$\sigma_t = \frac{pD}{2\delta}, \quad \sigma_m = \frac{pD}{4\delta}$$

其中 σ_t 为环向应力， σ_m 为纵向应力。

10.8 复杂应力下的应力—应变关系

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

10.9 体积应变与体积模量

体积应变

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

体积模量

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

10.10 三向应力状态下应变能密度

总应变能密度

$$\nu_e = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

体积改变能密度

$$\nu_V = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

微元畸变能密度

$$\nu_d = \frac{1-2\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

第十一章

11.1 最大拉应力准则(脆性材料)

$$\sigma_1 \leq [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b}$$

其中 σ_b 为材料的强度极限， n_b 为对应的安全因数。

11.2 最大拉应变准则(脆性材料)

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b}$$

11.3 最大剪应力准则(韧性材料)

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] = \frac{\sigma_s}{n_s}$$

其中 σ_s 为材料的屈服应力， n_s 为对应的安全因数。

11.4 畸变能密度准则(韧性材料)

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_s}{n_s}$$

11.5 轴的静载强度设计

第三强度准则

$$\frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W} \leq [\sigma]$$

第四强度准则

$$\frac{\sqrt{0.75M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W} \leq [\sigma]$$

11.6 圆柱形薄壁容器壁厚设计

$$\delta \geq \frac{pD}{2[\sigma]} + C$$

其中 C 为附加壁厚。

第十二章

12.1 挠度方程

$$\frac{dw}{dx} = \theta$$

12.2 小挠度曲线微分方程

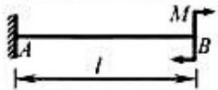
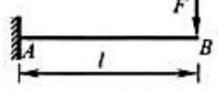
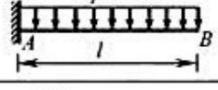
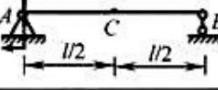
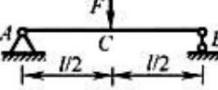
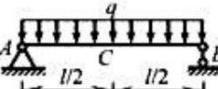
$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \pm \frac{M}{EI}$$

其积分方程为

$$w = \int_l \left(\pm \int_l \frac{M(x)}{EI} dx \right) dx + Cx + D$$

其中C,D 为积分常数。

12.3 水平直梁在简单载荷作用下特殊截面的位移表

梁的简图	转角	挠度
	$\theta_B = \frac{Ml}{EI}$ (↻)	$w_B = \frac{Ml^2}{2EI}$ (↓)
	$\theta_B = \frac{Fl^2}{2EI}$ (↻)	$w_B = \frac{Fl^3}{3EI}$ (↓)
	$\theta_B = \frac{ql^3}{6EI}$ (↻)	$w_B = \frac{ql^4}{8EI}$ (↓)
	$\theta_A = \frac{Ml}{3EI}$ (↻) $\theta_B = \frac{Ml}{6EI}$ (↺)	$w_C = \frac{Ml^2}{16EI}$ (↓)
	$\theta_A = \frac{Fl^2}{16EI}$ (↻) $\theta_B = \frac{Fl^2}{16EI}$ (↺)	$w_C = \frac{Fl^3}{48EI}$ (↓)
	$\theta_A = \frac{ql^3}{24EI}$ (↻) $\theta_B = \frac{ql^3}{24EI}$ (↺)	$w_C = \frac{5ql^4}{384EI}$ (↓)

第十三章

13.1 压根临界载荷公式—欧拉公式

$$F_{Pcr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

其中I 为压杆横截面的形心主惯性矩。

13.2 屈曲模态

$$w(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l}$$

其中A 为屈曲模态常数， n 为屈曲模态的正弦半波数目。

13.3 不同刚性支承的长度因素 μ (左下右上)

通用公式

$$F_{Pcr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

固定端+自由端

$$\mu = 2$$

铰支端+铰支端

$$\mu = 1$$

固定端+铰支端

$$\mu = 0.7$$

固定端+固定端

$$\mu = 0.5$$

约束越多， μ 越小。

13.4 临界应力

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{Pcr}}{A} \leq \sigma_P$$

13.5 长细比

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}$$

其中*i*为压杆横截面的惯性半径。

13.6 细长杆临界应力公式

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

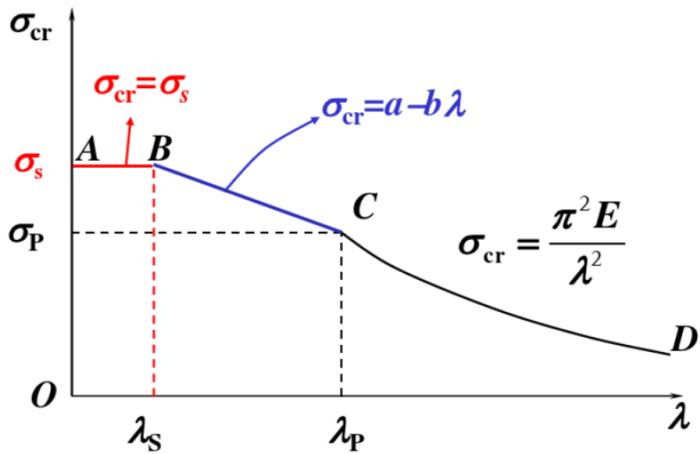
13.7 中长杆临界应力公式

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda$$

13.8 粗短杆临界应力公式

$$\sigma_{cr} = \sigma_s$$

13.9 临界应力总图



13.10 比例极限

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}, \quad \lambda_s = \frac{a - \sigma_s}{b}$$

13.11 稳定性安全准则

$$n_w = \frac{F_{Pcr}}{F} = \frac{\sigma_{cr} A}{F} \geq [n]_{st}$$

其中 $[n]_{st}$ 为规定的稳定性安全系数。

第十四章

14.1 应变能密度与余应变能密度

$$v_e = \int_{\varepsilon} \sigma d\varepsilon, \quad v_c = \int_{\sigma} \varepsilon d\sigma$$

14.2 正应力形式、剪应力形式的应变能密度

$$v_e = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E}, \quad v_c = \frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{\tau^2}{2G}$$

14.3 线性问题中的应变能与余应变能

$$V_e = V_c$$

对于拉伸和压缩杆

$$V_e = V_c = \int_l \frac{F_N^2}{2EA} dx$$

对于平面弯曲梁

$$V_e = V_C = \int_l \frac{M(x)^2}{2EI} dx$$

对于扭转圆轴

$$V_e = V_C = \int_l \frac{M_x^2}{2GI_P} dx$$

对于组合受力和变形杆件

$$V_e = V_C = \int_l \frac{F_N(x)^2}{2EA} dx + \int_l \frac{M(x)^2}{2EI} dx + \int_l \frac{M_x(x)^2}{2GI_P} dx$$

14.4 卡氏第一定理

$$F_{Pi} = \frac{\partial V_e}{\partial \Delta_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

14.5 势能驻值定理用于弹性细长压杆—铁摩辛柯方法

$$F_{cr} = \frac{\int_l EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx}$$

14.6 功的互等定理

功的互等定理：一个力系在另一个力系引起的相应的位移上所作的功等于令一个力系在这一个力系引起的相应的位移上所作的功，即

$$\sum F_{Pi} \Delta_{SPi} = \sum F_{Sj} \Delta_{PSj}$$

14.7 位移的互等定理

当力系 F_{Pi} 和 F_{Sj} 只有各自只有一个力 F_i 和 F_j 时，即有

$$F_i \Delta_{ij} = F_j \Delta_{ji}$$

若 $F_i = F_j$ ，则有

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$$

注： Δ_{ij} 和 Δ_{ji} 中第 1 个下标表示产生位移的点，第 2 个下表表示产生位移的力的作用点。

第十五章

15.1 恩格赛第一定理

$$\Delta_i = \frac{\partial V_e}{\partial F_{Pi}}, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

15.2 卡氏第二定理

对于拉伸和压缩杆

$$\Delta_i = \frac{\partial V_e}{\partial F_{Pi}} = \int_l \frac{F_N(x)}{2EA} \frac{\partial F_N(x)}{F_{Pi}} dx, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

对于平面弯曲梁

$$\Delta_i = \frac{\partial V_e}{\partial F_{Pi}} = \int_l \frac{M(x)}{2EI} \frac{\partial M(x)}{F_{Pi}} dx, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

对于扭转圆轴

$$\Delta_i = \frac{\partial V_e}{\partial F_{Pi}} = \int_l \frac{M_x(x)}{2GI_P} \frac{\partial M_x(x)}{F_{Pi}} dx, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

对于组合受力和变形杆件

$$\frac{\partial V_e}{\partial F_{Pi}} = \int_l \frac{F_N(x)}{2EA} \frac{\partial F_N(x)}{F_{Pi}} dx + \int_l \frac{M(x)}{2EI} \frac{\partial M(x)}{F_{Pi}} dx + \int_l \frac{M_x(x)}{2GI_P} \frac{\partial M_x(x)}{F_{Pi}} dx$$

15.3 单位虚力法(莫尔法)

$$\Delta = \int_l \frac{\overline{F}_N \overline{F}_N}{EA} dx + \int_l \frac{\overline{M} \overline{M}}{2EI} dx + \int_l \frac{\overline{M}_x \overline{M}_x}{2GI_P} dx$$

其中 F_N, M, M_x 分别为结构在实际载荷作用下的轴力、弯曲和扭矩；

$\overline{F}_N, \overline{M}, \overline{M}_x$ 分别为单位虚力 $\delta F=1$ 作用在同一结构引起的轴力、弯曲和扭矩。

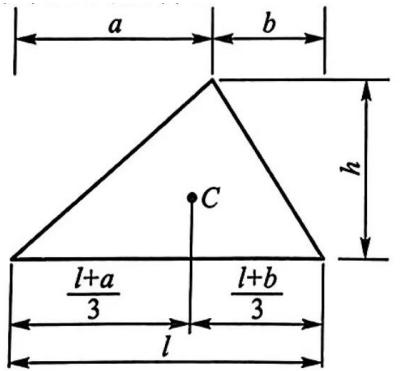
15.4 计算直杆莫尔积分的图乘法

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{A_{\Omega_i} \overline{M}_{C_i}}{EI}$$

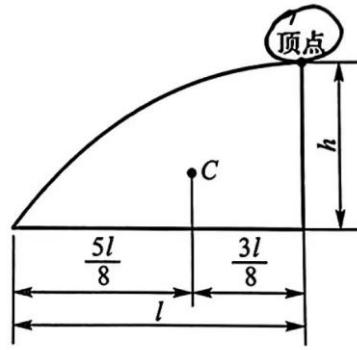
其中

$$\overline{M}_{C_i} = a + x_C \tan \alpha$$

15.5 部分图形形心位置与面积



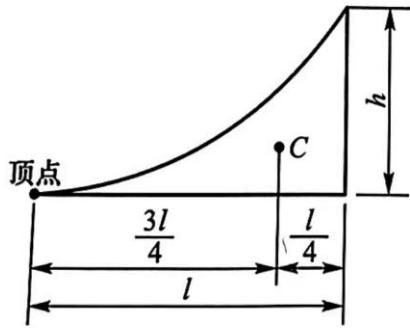
(a) 三角形



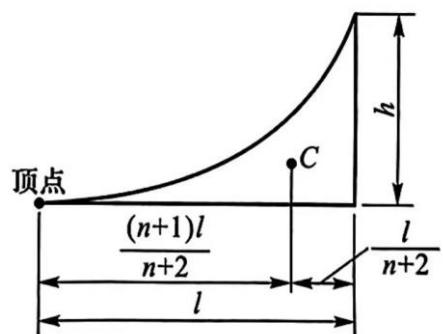
(b) 二次抛物线

$$C = \left(\frac{l+a}{3}, y_C \right), \quad S = \frac{1}{2} hl, \quad (a)$$

$$C = \left(\frac{5}{8} l, y_C \right), \quad S = \frac{2}{3} hl, \quad (b)$$



(c) 二次抛物线



(d) n 次抛物线

$$C = \left(\frac{3}{4} l, y_C \right), \quad S = \frac{1}{3} hl, \quad (c)$$

$$C = \left(\frac{n+1}{n+2} l, y_C \right), \quad S = \frac{1}{n+1} hl, \quad (d)$$

第十六章

16.1 静不定次数

一般原则

静不定次数 = 固定约束个数 - 平衡对象个数 × 3

静不定次数 = 约束力个数 - 独立平衡方程个数

无固定约束框架静不定次数

静不定次数 = 内约束力个数 + 3 - 独立平衡方程个数

16.2 力法中的正则方程

$$\left. \begin{array}{l} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \cdots + X_n\delta_{1n} + \Delta_{1P} = 0 \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \cdots + X_n\delta_{2n} + \Delta_{2P} = 0 \\ \cdots \cdots \\ X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + \cdots + X_n\delta_{nn} + \Delta_{nP} = 0 \end{array} \right\}$$

其中单位位移项 δ_{11}, δ_{12} 分别为多余约束力 $X_1=1, X_2=1$ 在 X_1 方向引起的单位位移，位移项 Δ_{1P} 则为载荷 F_P 在 X_1 方向引起的位移；单位位移项 δ_{21}, δ_{22} 分别为多余约束力 $X_1=1, X_2=1$ 在 X_2 方向引起的单位位移，位移项 Δ_{2P} 则为载荷 F_P 在 X_2 方向引起的位移，以此类推。

根据位移互等定理有

$$\delta_{ij} = \delta_{ii}$$

16.3 力偶对称性的判断方法

1. 力偶矩矢量反对称，力偶对称；2. 力偶矩矢量对称，力偶反对称

第十七章

17.1 等加速直线运动时动载因数

$$K_I = 1 + \frac{a}{g}$$

17.2 冲击时的动荷因数

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_s}}$$

若加上弹簧减震，则动荷因数也为上式，只是对应的 Δ_s 发生了改变。

17.3 运动物体突然制动的动荷因数

$$K_d = 1 + v \sqrt{\frac{1}{\Delta_s g}}$$

第十八章

18.1 应力比

$$r = \frac{S_{\min}}{S_{\max}}$$

对称循环时(正负号发生变化) $r = -1$; 脉冲循环时(只有数值发生变化) $r = 0$;
交变应力中的静应力时 $r = 1$ 。

18.2 迈因纳准则

$$\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} = 1$$

18.3 疲劳寿命估计

$$N = \frac{1}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{N_i} \cdot \frac{n_i}{N}}$$

其中

$$\frac{n_i}{N} = \frac{n_i^T}{N_T}$$

其中 n_i^T 为一个周期内在水平应力 S_i 下的循环数; N_T 为一个周期内在所有应力水平下的循环总数。