第一章 变分学

1. 泛函极值的条件

泛函 V 取得极值的必要条件为一阶变分为零，即 $\delta V=0$；

泛函 V 取得极值的充分条件为

$$\begin{cases}\delta^2 V<0, & V=V_{\text{maximum}}\\ \delta^2 V>0, & V=V_{\text{minimum}}\\ \delta^2 V=0, & \text{Noon}\end{cases}$$

2. 欧拉方程

(1)最简单的欧拉方程

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

(2)含有自变函数高阶导数的泛函欧拉方程

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)-\cdots+(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)=0$$

(3)含有多个自变函数的泛函欧拉方程

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right)=0,\ i=1,2,...,n$$

(4)多元函数的泛函欧拉方程

$$\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z_y}\right)=0,\ \frac{\partial F}{\partial z_x}\cdot l+\frac{\partial F}{\partial z_y}\cdot m=0$$

(5)可动边界的泛函欧拉方程

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0,\ \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=a}=0$$

(6)含边界条件的泛函

$$V=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x+\lambda_1[y(a)-\alpha]+\lambda_2[y(b)-\beta]$$

(7)变分约束条件的泛函

$$V=\int_a^b[F(x,y,z,y',z')+\lambda(x)\varphi(x,y,z)]\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{2}\lambda_k[y(x_k)-y_k]+\sum_{k=1}^{2}\mu_k[z(x_k)-z_k]$$

3. 弹性力学基本知识

梁的弹性势能

$$U=\frac{1}{2}\int_l EI\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\mathrm{d}x$$

梁的动能(ρ 为梁单位长度质量)

$$T=\frac{1}{2}\int_{l}\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^{2}\mathrm{d}x$$

分布力做的功

$$W=\int_{l}q(x)w(x)\mathrm{d}x$$

梁弯曲微分方程

$$\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}=\pm\frac{M(x)}{EI},\quad \frac{\partial^{3}w}{\partial x^{3}}=\pm\frac{F_{Q}(x)}{EI},\quad \frac{\partial^{4}w}{\partial x^{4}}=\pm\frac{q(x)}{EI}$$

梁的边界条件：

(1)两端固支时，则有边界条件

$$w(0)=0,\quad w'(0)=0,\quad w(l)=0,\quad w'(l)=0$$

(2)两端铰支时，则有边界条件

$$w(0)=0,\quad w''(0)=0,\quad w(l)=0,\quad w''(l)=0$$

(3)一端固支，一端自由时，则有边界条件

$$w(0)=0,\quad w'(0)=0,\quad w''(l)=0,\quad w'''(l)=0$$

第二章 弹性理论的变分原理

1. 张量

矢量

$$\boldsymbol{V}=V_1\boldsymbol{i}+V_2\boldsymbol{j}+V_3\boldsymbol{k}=V_1'\boldsymbol{i}'+V_2'\boldsymbol{j}'+V_3'\boldsymbol{k}'$$

其中

$$\boldsymbol{V}_i'=\begin{bmatrix}V_1'\\V_2'\\V_3'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_{11}&\lambda_{12}&\lambda_{13}\\\lambda_{21}&\lambda_{22}&\lambda_{23}\\\lambda_{31}&\lambda_{32}&\lambda_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\V_2\\V_3\end{bmatrix}=\lambda_{ij}\boldsymbol{V}_j$$

如果满足

$$\boldsymbol{V}'_{i_1i_2\cdots i_n}=\lambda_{i_1j_1}\lambda_{i_2j_2}\cdots\lambda_{i_nj_n}\boldsymbol{V}_{j_1j_2\cdots j_n}$$

则称 $\boldsymbol{V}$ 为 n 阶张量，一个 r 维 n 阶张量的分量数为 r^n. 应力、应变是 2 阶张量；应力梯度是 3 阶张量；弹性模量是 4 阶张量.

2. 弹性力学基本方程

平衡方程

$$\sigma_{ij,j}+f_i=0$$

几何方程

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$$

物理方程

$$\sigma_{ij}=E_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

其中 E_{ijkl} 为弹性模量.

位移边界条件

$$u_i=\bar{u}_i$$

应力边界条件

$$\sigma_{ij}n_j=\bar{p}_i$$

3. 应变能与余应变能

变形能：外力对弹性体所做的功以变形能的形式贮存再弹性体内，这种变形能称之为应变能.

应变能

$$U=\int_V A(\varepsilon)\mathrm{d}V,\ A(\varepsilon)=\int_0^{\varepsilon}\sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}=\int_0^{\varepsilon}E_{ijkl}\varepsilon_{kl}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$$

其中$A(\varepsilon)$为应变能密度.

余应变能

$$U^*=\int_V B(\sigma)\mathrm{d}V,\ B(\sigma)=\int_0^\sigma \varepsilon_{ij}\mathrm{d}\sigma_{ij}=\int_0^\sigma D_{ijkl}\sigma_{kl}\mathrm{d}\sigma_{ij}$$

其中$B(\sigma)$为余应变能密度，$D_{ijkl}=(E_{ijkl})^{-1}$为柔度系数.

4. 最小势能原理

最小势能原理：弹性体在给定的外力作用下，在满足**几何方程**和**位移边界条件**的所有可能**位移**中，真实位移(即满足**平衡微分方程**和**应力边界条件**的位移)必使弹性体的总势能取最小值；反之也成立.

弹性体的总势能

$$\Pi=\iiint_V A(\varepsilon)\mathrm{d}V-\iiint_V f_i u_i\mathrm{d}V-\iint_S \bar{p}_i u_i\mathrm{d}S$$

证明：对总势能取一阶变分可得

$$\delta\Pi=\iiint_V \frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V-\iiint_V f_i\delta u_i\mathrm{d}V-\iint_S \bar{p}_i\delta u_i\mathrm{d}S$$

因为有

$$\begin{aligned}\frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}&=\frac{1}{2}\sigma_{ij}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\delta u_{i,j}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}\delta u_{j,i}\\&=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\delta u_{i,j}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}\delta u_{i,j}=\sigma_{ij}\delta u_{i,j}=\frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta u_{i,j}\end{aligned}$$

所以利用分部积分可得

$$\begin{aligned}\iiint_V \frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V&=\iiint_V \frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta u_{i,j}\mathrm{d}V=\iiint_V\left[\left(\frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta u_i\right)_{,j}-\left(\frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}\delta u_i\right]\mathrm{d}V\\&=\iint_S \frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta u_i\cdot n_j\mathrm{d}S-\iiint_V\left(\frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}\delta u_i\mathrm{d}V\end{aligned}$$

带入总势能的一阶变分可得

$$\begin{aligned}\delta\Pi&=\iint_S \frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta u_i\cdot n_j\mathrm{d}S-\iiint_V\left(\frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}\delta u_i\mathrm{d}V-\iiint_V f_i\delta u_i\mathrm{d}V-\iint_S \bar{p}_i\delta u_i\mathrm{d}S\\&=\iint_S \sigma_{ij}n_j\cdot\delta u_i\mathrm{d}S-\iiint_V \sigma_{ij,j}\delta u_i\mathrm{d}V-\iiint_V f_i\delta u_i\mathrm{d}V-\iint_S \bar{p}_i\delta u_i\mathrm{d}S\\&=-\iiint_V(\sigma_{ij,j}+f_i)\delta u_i\mathrm{d}V+\iint_S(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)\cdot\delta u_i\mathrm{d}S\end{aligned}$$

即满足平衡微分方程和应力边界条件的真实位移使得$\delta\Pi=0$. 又因为总势能的二阶变分为

$$\delta^2\Pi=\frac{1}{2}\iiint_V\frac{\partial^2 A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\iiint_V\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\iiint_V E_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}\mathrm{d}V$$
$$=\frac{1}{2}\iiint_V\{\delta\varepsilon_{ij}\}^{\mathrm{T}}[E]\{\delta\varepsilon_{ij}\}\mathrm{d}V>0$$

因此弹性体的总势能一定取极小值.

最小势能原理与弹性体域内的**平衡微分方程**和边界上的**应力边界条件**等价.

5. 最小余能原理

最小余能原理：在弹性体内满足**平衡微分方程**，在边界上满足**应力边界条件**的所有可能的**应力**状态中，真实的应力(即满足**几何方程**和**位移边界条件**)必使总余能取极小值；反之也成立.

弹性体的总余能

$$\Pi_c=\iiint_V B(\sigma)\mathrm{d}V-\iint_S\bar{u}_i\sigma_{ij}\cdot n_j\mathrm{d}S$$

证明：对总余能取一阶变分可得

$$\delta\Pi_c=\iiint_V\frac{\partial B(\sigma)}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V-\iint_S\bar{u}_i\delta\sigma_{ij}\cdot n_j\mathrm{d}S$$

因为有

$$\iiint_V u_i\delta\sigma_{ij,j}\mathrm{d}V=\iiint_V[(u_i\delta\sigma_{ij})_{,j}-(u_i)_{,j}\delta\sigma_{ij}]\mathrm{d}V=\iint_S u_i\delta\sigma_{ij}\cdot n_j\mathrm{d}S-\iiint_V u_{i,j}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V$$
$$=\iint_S u_i\delta\sigma_{ij}\cdot n_j\mathrm{d}S-\frac{1}{2}\iiint_V(u_{i,j}+u_{j,i})\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V=0$$

这是由σ_{ij}在弹性体域内满足平衡微分方程和在边界上满足应力边界条件得到的：

$$\delta\sigma_{ij,j}=0\text{，在 }V\text{ 内；}\delta(\sigma_{ij}n_j)=0\text{，在 }S\text{ 内}$$

所以可得

$$\delta\Pi_c=\iiint_V\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V-\iint_S\bar{u}_i\delta\sigma_{ij}\cdot n_j\mathrm{d}S+\iint_S u_i\delta\sigma_{ij}\cdot n_j\mathrm{d}S-\frac{1}{2}\iiint_V(u_{i,j}+u_{j,i})\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V$$
$$=\iiint_V\left[\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V+\iint_S(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}\cdot n_j\mathrm{d}S$$

即满足几何方程和位移边界条件的真实位移使得$\delta\Pi_c=0$. 又因为总余能的二阶变分为

$$\delta^2\Pi_c=\frac{1}{2}\iiint_V\frac{\partial^2 B(\sigma)}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{kl}\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\iiint_V\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\sigma_{kl}}\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{kl}\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\iiint_V D_{ijkl}\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{kl}\mathrm{d}V$$
$$=\frac{1}{2}\iiint_V\{\delta\sigma_{ij}\}^{\mathrm{T}}[D]\{\delta\sigma_{ij}\}\mathrm{d}V>0$$

因此弹性体的总余能一定取极小值.

最小余能原理与弹性体域内的**几何方程**和边界上的**位移边界条件**等价.

6. 哈密尔顿原理

哈密尔顿原理：弹性体从t_0时刻所在的位置运动到t_1时刻所在的位置时，在每一瞬间都能满足几何方程、位移边界条件和起止条件的可能运动路径中，真实的运动路径(即在每一瞬间满足运动微分方程和应力边界条件)一定使拉格朗日函数在这段时间内对时间的积分泛函取极值；反之也成立.

哈密尔顿原理的泛函

$$H=\int_{t_0}^{t_1} L\,\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}(T-U-V)\,\mathrm{d}t$$

其中

$$T=\frac{1}{2}\iiint_V \rho\dot{u}^2\mathrm{d}V,\ U=\iiint_V A(\varepsilon)\mathrm{d}V,\ V=-\iiint_V f_i u_i\mathrm{d}V-\iint_S \bar{p}_i u_i\mathrm{d}S$$

7. 其他变分原理

赫林格-赖斯纳广义变分原理(H-R 广义变分原理): 以位移和应力作为独立变量的两变量变分原理.

胡-鹫广义变分原理(H-W 广义变分原理)：以位移、应力和应变作为独立变量的三变量变分原理.

第三章 变分问题的直接解法

1. 基于最小势能原理的直接解法

里兹法：

1. 选取满足边界条件的合适精度的试验函数$w(x)$；

2. 写出总势能Π；

3. 对总势能求变分得到$\delta\Pi=\dfrac{\partial\Pi}{\partial A_k}\delta A_k=0$并求解$A_k$；

4. 回代得到挠度$w(x)$.

2. 基于最小余能原理的直接解法

1. 选取合适精度的应力函数$\varphi=\varphi_0+\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\varphi_k$；

2. 写出总余能$\Pi_c=\dfrac{1}{2E}\iint_S\left[\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$；

3. 对总余能求变分得到$\delta\Pi_c=\dfrac{\partial\Pi_c}{\partial A_k}\delta A_k=0$并求解$A_k$；

4. 回代得到应力函数φ和应力.

第四章 有限单元法概述

1. 有限单元法

有限单元法步骤：

(1)对结构进行离散化；

(2)选择合适的位移插值函数；

(3)单元分析并建立单元刚度矩阵；

(4)结构整体分析并建立结构总刚度矩阵；

(5)进行约束处理；

(6)求解节点位移和单元应力.

2. 基本方程

平衡方程

$$\sigma_{ij,j}+f_i=0$$

几何方程

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$$

物理方程

$$\sigma_{ij}=E_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

位移边界条件

$$u_i=\bar{u}_i$$

应力边界条件

$$\sigma_{ij}n_j=\bar{p}_i$$

位移连续条件(m 和m'是相邻的单元)

$$u_i^{(m)}=u_i^{(m')}$$

应力矢量连续条件

$$\sigma_{ij}^{(m)}n_j^{(m)}+\sigma_{ij}^{(m')}n_j^{(m')}=0$$

3. 单元分析

总势能

$$\Pi_p=\frac{1}{2}\int_0^l[A]\{d\}^{\mathrm{T}}[B]^{\mathrm{T}}[D][B]\{d\}\mathrm{d}x-\{d\}^{\mathrm{T}}\{f\}$$

其中$[A]$为横截面，$[D]$为弹性模量，$[B]$为几何矩阵，$\{d\}$为节点位移，$\{f\}$为节点力.

$$\{\psi\}=[M^*]\{a\},\ \{d\}=[X]\{a\}$$

因此

$$\{\psi\}=[M^*]\{a\}=[M^*][X]^{-1}\{d\}=[N]\{d\}$$

其中$[N]$为插值函数矩阵.

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}=[L]\{\psi\}=[L][M^*]\{a\}=[M']\{a\}$$

$$=[M'][X]^{-1}\{d\}=[B]\{d\}$$

其中$[L]$为微分算子矩阵.

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}=[D][B]\{d\}$$

因此

$$[k]=\iiint_V [B]^{\mathrm{T}}[D][B]\mathrm{d}V$$

4. 有限元解的收敛性

1. **完备性要求**：单元位移插值函数至少是 m 次的完全多项式，即位移插值函数中必须包括含有 m 阶及以下各项；

2. **协调性要求**：单元位移试验函数在单元内和单元交界面上必须具有$m-1$阶连续性，即位移函数应有$m-1$阶的连续导数.

完备性和协调性准则共同构成有限元解的**收敛准则**;既满足完备性和协调性准则的有限元称为**协调元**.

物理意义：

1. 单元位移函数中必须包含有**刚体位移**和**常应变**；

2. 单元位移函数**在单元内**和**在相邻单元的交界面**上要满足**连续性**和**协调性**.

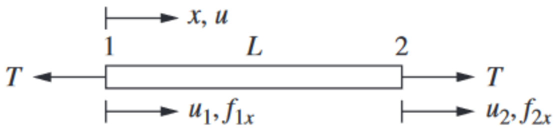
非协调单元：只保证相邻单元交界面切向的挠度连续性条件，而法向不连续.

非协调单元需要通过艾恩斯提出的**小片检验**才能保证其收敛性.

第五章 杆系结构有限元

1. 杆单元

杆单元：



选取

$$u = a_1 + a_2 x$$

因为有$u(0) = u_1$，$u(L) = u_2$，解得

$$\{\psi\} = u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{L} x = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [N]\{d\}$$

而

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{d\} = [B]\{d\}, \quad [L] = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \end{bmatrix}$$

所以

$$[B] = [L][N] = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

因此

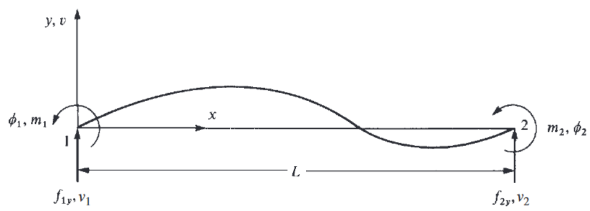
$$[k] = \iiint_V [B]^{\mathrm{T}} [D][B] \mathrm{d}V = EA \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \mathrm{d}x = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

在全局坐标系下有

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ & S^2 & -CS & -S^2 \\ & & C^2 & CS \\ \text{Sym} & & & S^2 \end{bmatrix}$$

2. 梁单元

***xOy* 平面梁单元：**



选取

$$v=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3$$

因为有$v(0)=v_1$，$v(L)=v_2$，$\dfrac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}x}=\phi_1$，$\dfrac{\mathrm{d}v(L)}{\mathrm{d}x}=\phi_2$，解得

$$\{\psi\}=v=[N]\{d\}$$

$$=\left[\frac{2x^3-3x^2L+L^3}{L^3}\quad\frac{x^3L-2x^2L^2+xL^3}{L^3}\quad\frac{-2x^3+3x^2L}{L^3}\quad\frac{x^3L-x^2L^2}{L^3}\right]\begin{Bmatrix}v_1\\ \phi_1\\ v_2\\ \phi_2\end{Bmatrix}$$

而

$$\{\varepsilon\}=-y[L][\psi]=-y[L][N]\{d\}=-y[B]\{d\}，[L]=\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right]$$

所以

$$[B]=[L][N]$$

$$=\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right]\left[\frac{2x^3-3x^2L+L^3}{L^3}\quad\frac{x^3L-2x^2L^2+xL^3}{L^3}\quad\frac{-2x^3+3x^2L}{L^3}\quad\frac{x^3L-x^2L^2}{L^3}\right]$$

$$=\left[\frac{12x-6L}{L^3}\quad\frac{6xL-4L^2}{L^3}\quad\frac{-12x+6L}{L^3}\quad\frac{6xL-2L^2}{L^3}\right]$$

因此

$$[k]=\iiint_V[B]^{\mathrm{T}}[D][B]\mathrm{d}V=\frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix}12&6L&-12&6L\\ &4L^2&-6L&2L^2\\ &&12&-6L\\ \mathrm{Sym}&&&4L^2\end{bmatrix}$$

xOz 平面梁单元：

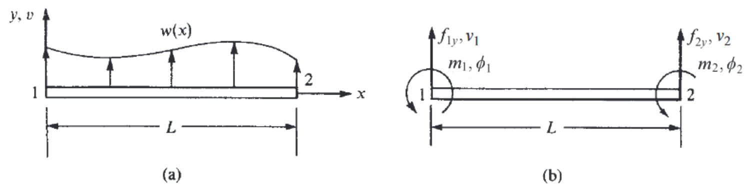
$$[k]=\iiint_V[B]^{\mathrm{T}}[D][B]\mathrm{d}V=\frac{EI_y}{L^3}\begin{bmatrix}12&-6L&-12&-6L\\ &4L^2&6L&2L^2\\ &&12&6L\\ \mathrm{Sym}&&&4L^2\end{bmatrix}$$

3. 轴单元

轴单元：

$$[k]=\iiint_V[B]^{\mathrm{T}}[D][B]\mathrm{d}V=\frac{GI_x}{L}\begin{bmatrix}1&-1\\ -1&1\end{bmatrix}$$

4. 等效节点载荷



利用

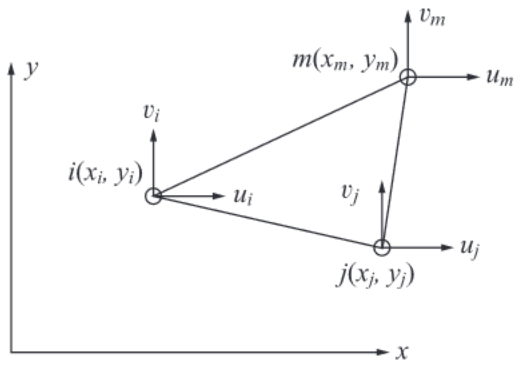
$$\int_0^L q(x)v(x)\mathrm{d}x = m_1\phi_1 + m_2\phi_2 + f_{1y}v_1 + f_{2y}v_2$$

并依次令$\phi_1 = 1$，$\phi_2 = v_1 = v_2 = 0$可得等效节点m_1，m_2，f_{1y}，f_{2y}，于是即可得到等效节点矩阵

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix}$$

第六章 弹性力学平面问题有限元

1. 常应变三角形单元



选取

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y\text{，}\ v = a_4 + a_5 x + a_6 y$$

于是可得

$$\{\psi\} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \{d\} = [N]\{d\}$$

其中

$$\begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_m \end{bmatrix} = \frac{1}{2A}[1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix}, \ 2A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2A}[1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} x_j y_m - y_j x_m & x_m y_i - y_m x_i & x_i y_j - y_i x_j \\ y_j - y_m & y_m - y_i & y_i - y_j \\ x_m - x_j & x_i - x_m & x_j - x_i \end{bmatrix}$$

由此可得几何矩阵为

$$[B] = [L][N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix}$$

2. 等效单元节点面力

$$\{f_S\} = \iint_S [N_S]^{\mathrm{T}} \{F_S\} \mathrm{d}S$$

若面力 F_S 作用在 jm 边上，且为常数，则有

$$\iint_S N_i \mathrm{d}S = t \int_{L_{jm}} N_i \mathrm{d}s = 0\text{，}\ \iint_S N_j \mathrm{d}S = \iint_S N_m \mathrm{d}S = t \int_{L_{jm}} N_j \mathrm{d}s = t \int_{L_{jm}} N_m \mathrm{d}s = \frac{1}{2} t L_{jm}$$

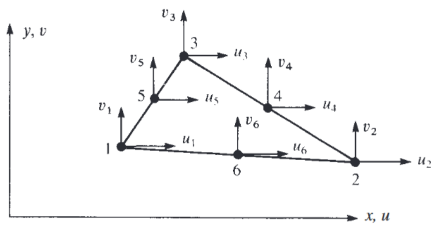
3. 等效单元节点体力

$$\{f_V\}=\iiint_V [N_V]^{\mathrm{T}}\{S_V\}\mathrm{d}V=t\iint_S [N_V]^{\mathrm{T}}\{S_V\}\mathrm{d}S$$

若体力S_V为常数，则有

$$\iint_S N_i \mathrm{d}S=\iint_S N_j \mathrm{d}S=\iint_S N_m \mathrm{d}S=\frac{A}{3}$$

4. 六节点三角形单元



选取

$$u(x,y)=a_1+a_2x+a_3y+a_4x^2+a_5xy+a_6y^2$$
$$v(x,y)=a_7+a_8x+a_9y+a_{10}x^2+a_{11}xy+a_{12}y^2$$

于是可得

$$\{\psi\}=[M^*]\{a\}=[M^*][X]^{-1}\{d\}=[N]\{d\}$$

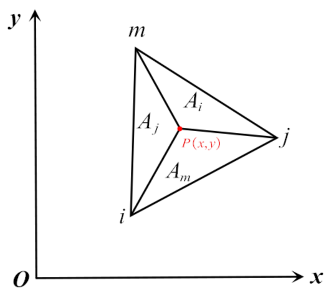
其中

$$[N]=\begin{bmatrix}1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2\\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2\\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2\\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2\\ 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2\\ 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6y_6 & y_6^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6y_6 & y_6^2\end{bmatrix}^{-1}$$

由此可得几何矩阵为

$$[B]=[L][N]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}\beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0 & \beta_4 & 0 & \beta_5 & 0 & \beta_6 & 0\\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3 & 0 & \gamma_4 & 0 & \gamma_5 & 0 & \gamma_6\\ \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_2 & \beta_2 & \gamma_3 & \beta_3 & \gamma_4 & \beta_4 & \gamma_5 & \beta_5 & \gamma_6 & \beta_6\end{bmatrix}$$

5. 三角形单元的面积坐标



选取

$$L_i=\frac{A_i}{A},\ L_j=\frac{A_j}{A},\ L_m=\frac{A_m}{A},\ A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_m & y_m\end{vmatrix}$$

为面积坐标(三角形坐标)，其中

$$A_i=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_m & y_m\end{vmatrix},\ A_j=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x & y\\ 1 & x_m & y_m\end{vmatrix},\ A_m=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x & y\end{vmatrix}$$

于是有

$$\begin{bmatrix}L_i\\ L_j\\ L_m\end{bmatrix}=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}\alpha_i & \beta_i & \gamma_i\\ \alpha_j & \beta_j & \gamma_j\\ \alpha_m & \beta_m & \gamma_m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ x\\ y\end{Bmatrix}$$

由此可得

$$\begin{Bmatrix}1\\ x\\ y\end{Bmatrix}=\left(\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}\alpha_i & \beta_i & \gamma_i\\ \alpha_j & \beta_j & \gamma_j\\ \alpha_m & \beta_m & \gamma_m\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}L_i\\ L_j\\ L_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ x_i & x_j & x_m\\ y_i & y_j & y_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_i\\ L_j\\ L_m\end{bmatrix}$$

因此可得

$$\sum_{k=i,j,m}L_k=1,\ \sum_{k=i,j,m}x_kL_k=x,\ \sum_{k=i,j,m}y_kL_k=y$$

常应变三角形单元的型函数就是面积坐标. 三角形内任一点坐标(x,y)可以用三角形顶点的坐标进行插值，其插值函数就说三角形的面积坐标. 这也是一种**等参单元**.

6. 三角形单元的面积坐标的微积分

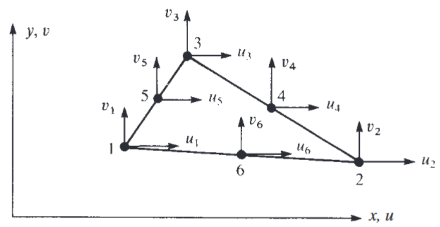
微分

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}=\displaystyle\sum_{k=i,j,m}\frac{\partial}{\partial L_k}\frac{\partial L_k}{\partial x}=\frac{1}{2A}\sum_{k=i,j,m}\beta_k\frac{\partial}{\partial L_k}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}=\displaystyle\sum_{k=i,j,m}\frac{\partial}{\partial L_k}\frac{\partial L_k}{\partial y}=\frac{1}{2A}\sum_{k=i,j,m}\gamma_k\frac{\partial}{\partial L_k}\end{cases}$$

积分

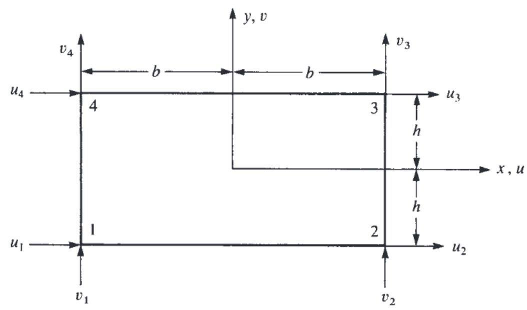
$$\iint_S L_i^aL_j^bL_m^c\mathrm{d}S=2A\cdot\frac{a!\,b!\,c!}{(a+b+c+2)!},\ \int_{L_{ij}}L_i^aL_j^b\mathrm{d}s=L_{ij}\cdot\frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}$$

7. 用面积坐标表示的六节点三角形单元的型函数



$$N_i = L_i(2L_i - 1),\ i = 1,2,3;\ N_m = 4L_iL_j,\ i,j = 1,2,3;\ m = 4,5,6$$

8. 四节点矩形单元



选取

$$u(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy$$
$$v(x,y) = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy$$

于是可得

$$\{\psi\} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_4 \end{bmatrix} = [N]\{d\}$$

其中

$$N_1 = \frac{(b-x)(h-y)}{4bh},\ N_2 = \frac{(b+x)(h-y)}{4bh},\ N_3 = \frac{(b+x)(h+y)}{4bh},\ N_4 = \frac{(b-x)(h+y)}{4bh}$$

9. 等参单元

坐标变换式

$$\begin{aligned} x &= N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4 \\ &= \frac{1}{4}[(1-\xi)(1-\eta)x_1 + (1+\xi)(1-\eta)x_2 + (1+\xi)(1+\eta)x_3 + (1-\xi)(1+\eta)x_4] \\ y &= N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 \\ &= \frac{1}{4}[(1-\xi)(1-\eta)y_1 + (1+\xi)(1-\eta)y_2 + (1+\xi)(1+\eta)y_3 + (1-\xi)(1+\eta)y_4] \end{aligned}$$

偏导数

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \xi} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \eta} + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases}$$

由 Cramer 法则解得

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}} = \frac{1}{|[J]|}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right],\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \eta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}} = \frac{1}{|[J]|}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right]$$

10. 高斯积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{b-a}{2}\widetilde{A_k}\right) f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_k\right)$$

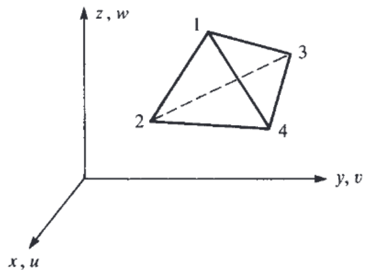
特别的有

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ 3\text{ 次代数精度}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{5}{9} f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right),\ 5\text{ 次代数精度}$$

第七章 弹性力学空间问题有限元

1. 四节点四面体单元



选取

$$u(x,y,z)=a_1+a_2x+a_3y+a_4z$$
$$v(x,y,z)=a_5+a_6x+a_7y+a_8z$$
$$w(x,y,z)=a_9+a_{10}x+a_{11}y+a_{12}z$$

于是可得

$$\{\psi\}=\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N_1&0&0&N_2&0&0&N_3&0&0&N_4&0&0\\0&N_1&0&0&N_2&0&0&N_3&0&0&N_4&0\\0&0&N_1&0&0&N_2&0&0&N_3&0&0&N_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\v_1\\\vdots\\w_4\end{bmatrix}=[N]\{d\}$$

其中

$$N_1=\frac{\alpha_1+\beta_1x+\gamma_1y+\delta_1z}{6V},\ N_2=\frac{\alpha_2+\beta_2x+\gamma_2y+\delta_2z}{6V}$$
$$N_3=\frac{\alpha_3+\beta_3x+\gamma_3y+\delta_3z}{6V},\ N_4=\frac{\alpha_4+\beta_4x+\gamma_4y+\delta_4z}{6V}$$

第八章 板壳问题有限元

1. 基本理论

薄板：板厚与板平面最小尺寸之比大于$\frac{1}{80}$，小于$\frac{1}{5}-\frac{1}{8}$的平板.

基本假设：

(1)板内任何点的剪应变$\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$；

(2)无 x 和 y 方向的位移，即$u|_{z=0}=0$，$v|_{z=0}=0$；

(3)正应变分量$\varepsilon_z=0$，即挠度 w 只是 x 和 y 的函数.

2. 基本方程

$$D\nabla^4 w=q\text{，}D=\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$$

其中δ为板厚，μ为泊松比.

3. 挠度函数

自由度：12 个.

单元挠度函数

$$w(x,y)=a_1+a_2x+a_3y+a_4x^2+a_5xy+a_6y^2+a_7x^3+a_8x^2y+a_9xy^2+a_{10}y^3+a_{11}x^3y+a_{12}xy^3$$

其中红色表示单元的刚体位移，蓝色表示薄板弯曲的常应变.

满足完备性，不满足相邻单元公共边界上**法向转角**的连续性.

第九章 结构动力学问题有限元

1. 基本步骤

(1)对结构进行离散化;

(2)选择合适的位移插值函数;

(3)单元分析并建立单元刚度矩阵;

(4)结构整体分析并建立结构总刚度矩阵;

(5)进行约束处理;

(6)求解节点位移和单元应力.

二阶常微分方程常用**直接积分法**和**振动叠加法**求解.

2. 质量矩阵

集中质量矩阵:将单元的分布质量用静力等效原则团聚到单元节点上,得到的质量矩阵是**对角矩阵,不一定是正定的**,称为集中质量矩阵.

一致质量矩阵:由$[m^e]=\iiint_V \rho[N]^T[N]\mathrm{d}V$得到的表示单元质量矩阵称为一致质量矩阵,是**对称**、**正定**、**稀疏**和**非奇异**的,与**约束处理后的结构总刚度矩阵**一致. 这是因为建立**质量矩阵**和**刚度矩阵**采用的**位移插值函数是一致**的.

2020 年计算力学真题

1. 判断题.

(1)在将结构离散成有限元模型时，单元与单元仅仅在节点处连接，单元之间的公共边界是不连接在一起的. (√)

(2)等参单元选择的坐标变换式中的插值函数与位移函数中的形函数可以不相同. (×)

(3)单元的刚度矩阵是对称、非奇异的，而组集而成的结构总刚度矩阵是对称、奇异的. (×)

(4)有限元法中，单元在组集过程中，需要满足平衡条件和变形协调条件. (√)

(5)平面问题中，任意四边形单元与矩形单元一样，具有四个节点八个自由度，可以直接使用矩形单元的位移函数. (×)

2. 简述有限元法的基本思想及有限元法进行结构分析的主要步骤.

基本思想：(1)将连续体离散城有限个互不重叠仅通过节点相互连接的子域，连续体的边界条件也转化为节点的边界条件；(2)在单元内选择合适的近似函数来分片逼近未知的求解函数.

主要步骤：(1)对结构进行离散化；(2)选择合适的位移插值函数；(3)单元分析并建立单元刚度矩阵；(4)结构整体分析并建立结构总刚度矩阵；(5)进行约束处理；(6)求解节点位移和单元应力.

3. 简述为什么需要对结构刚度方程进行约束处理？请写出主元素置 1 法的具体实施步骤？

原因：结构总刚度矩阵是针对解除了外界约束的自由结构建立的，因而总刚度矩阵是奇异的、不能求逆. 为了排除结构的刚体位移，使结构刚度矩阵非奇异，从而求解出结构的节点位移，需要引入位移边界约束条件.

主要步骤：若给定位移为 u_i^*，将原刚度矩阵中第 i 行的主要元素 k_{ii} 以数“1”代替，该行其余元素以数“0”代替，这样就满足位移边界条件和对称性.

4. 写出用能量法导出单元刚度矩阵一般表达式 $[k^e]=\iiint_V [B]^{\mathrm{T}}[D][B]\mathrm{d}V$ 的有限元列式过程，并阐明所涉及的各矩阵的意义.

总势能

$$\Pi_p=\frac{1}{2}\{d\}^{\mathrm{T}}\cdot\iiint_V [B]^{\mathrm{T}}[D][B]\mathrm{d}V\cdot\{d\}-\{d\}^{\mathrm{T}}\{f\}$$

于是对节点位移求偏导可得

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \{d\}^{\mathrm{T}}} = \iiint_V [B]^{\mathrm{T}}[D][B]\mathrm{d}V \cdot \{d\} - \{f\} = 0$$

由此可得

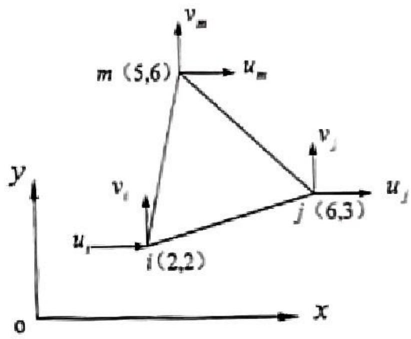
$$\{f\} = \iiint_V [B]^{\mathrm{T}}[D][B]\mathrm{d}V \cdot \{d\} = [k^{\mathrm{e}}]\{d\}$$

其中

$$[k^{\mathrm{e}}] = \iiint_V [B]^{\mathrm{T}}[D][B]\mathrm{d}V$$

这里 $[B]$ 为几何矩阵，$[D]$ 为弹性模量矩阵，$\{d\}$ 为节点位移列阵，$\{f\}$ 为节点力列阵.

5. 如图所示常应变三角形单元，节点的坐标都在图上标注，经有限元建模求解后，三个节点的位移分别为$\begin{cases} u_i = 0.1 \\ v_i = 0.2 \end{cases}$，$\begin{cases} u_j = 0.15 \\ v_j = 0.1 \end{cases}$，$\begin{cases} u_m = 0.2 \\ v_m = -0.15 \end{cases}$，请计算单元内部一点 $P(4,4)$ 处的位移.型函数 $N_i = \frac{1}{2\triangle}(a_i + b_i x + c_i y)$，其中 $2\triangle = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$，$a_i = x_j y_m - x_m y_j$，$b_i = y_j - y_m$，$c_i = x_m - x_j$.



计算型函数

$$\begin{bmatrix} a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_j y_m - y_j x_m & x_m y_i - y_m x_i & x_i y_j - y_i x_j \\ y_j - y_m & y_m - y_i & y_i - y_j \\ x_m - x_j & x_i - x_m & x_j - x_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6\cdot 6 - 3\cdot 5 & 5\cdot 2 - 6\cdot 2 & 2\cdot 3 - 2\cdot 6 \\ 3-6 & 6-2 & 2-3 \\ 5-6 & 2-5 & 6-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -2 & -6 \\ -3 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2\triangle = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = (x_j y_m - y_j x_m) - x_i(y_m - y_j) + y_i(x_m - x_j)$$

$$= (6\cdot 6 - 3\cdot 5) - 2\cdot(6-3) + 2\cdot(5-6) = 13$$

所以可得

$$\begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_m \end{bmatrix} = \frac{1}{2\triangle} \begin{bmatrix} a_i + b_i x + c_i y \\ a_j + b_j x + c_j y \\ a_m + b_m x + c_m y \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 21 - 3x - y \\ -2 + 4x - 3y \\ -6 - x + 4y \end{bmatrix}$$

所以可以得到$P(4,4)$的位移为

$$\begin{aligned} u(4,4) &= N_i(4,4)u_i + N_j(4,4)u_j + N_m(4,4)u_m \\ &= \frac{1}{13}[(21-3\cdot4-4)\cdot0.1 + (-2+4\cdot4-3\cdot4)\cdot0.15 + (-6-4+4\cdot4)\cdot0.2] \\ &= 0.153846 \\ v(4,4) &= N_i(4,4)v_i + N_j(4,4)v_j + N_m(4,4)v_m \\ &= \frac{1}{13}[(21-3\cdot4-4)\cdot0.2 + (-2+4\cdot4-3\cdot4)\cdot0.1 - (-6-4+4\cdot4)\cdot0.15] \\ &= 0.0230769 \end{aligned}$$

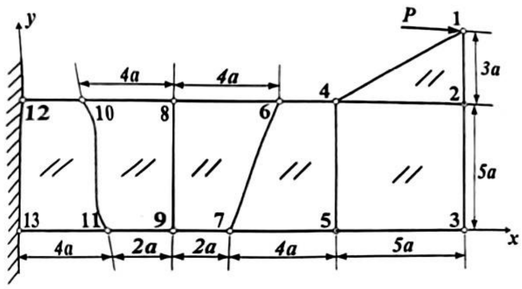
6. 如图所示平面薄壁结构中，杆件的截面积为 A，弹性模量为 E. 试求：

(1)杆 6-7 在局部坐标系下的单元刚度矩阵$\left[\bar{k}^{6-7}\right]$；

(2)坐标变换矩阵$[\lambda^{6-7}]$；

(3)在总体坐标系下的单元刚度矩阵$[k^{6-7}]$；

(4)指出杆 6-7 单元刚度矩阵在向结构总刚度矩阵组集中，所应存放的位置(注明单元刚度矩阵每一项在结构总刚度矩阵中所对应的行和列).



(1)杆 6-7 的长度为

$$L_{6-7} = \sqrt{(5a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{29}\,a$$

于是在局部坐标系下的单元刚度矩阵$\left[\bar{k}^{6-7}\right]$为

$$\left[\bar{k}^{6-7}\right] = \frac{EA}{\sqrt{29}\,a}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)杆 6-7 的与 x 轴之间的夹角为

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{29}},\ \sin\theta = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

所以坐标变换矩阵$[\lambda^{6-7}]$为

$$[\lambda^{6-7}]=\begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{5}{\sqrt{29}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{5}{\sqrt{29}} \end{bmatrix}$$

(3)在总体坐标系下的单元刚度矩阵$[k^{6-7}]$为

$$[k^{6-7}]=[\lambda^{6-7}]^{\mathrm{T}}\left[\bar{k}^{6-7}\right][\lambda^{6-7}]=\frac{EA}{L_{6-7}}\begin{bmatrix} C & 0 \\ S & 0 \\ 0 & C \\ 0 & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix}$$

$$=\frac{EA}{L_{6-7}}\begin{bmatrix} C & 0 \\ S & 0 \\ 0 & C \\ 0 & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & S & -C & -S \\ -C & -S & C & S \end{bmatrix}=\frac{EA}{L_{6-7}}\begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ & S^2 & -CS & -S^2 \\ & & C^2 & CS \\ \mathrm{Sym} & & & S^2 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{EA}{\sqrt{29}\,a}\begin{bmatrix} \frac{4}{29} & \frac{10}{29} & -\frac{4}{29} & -\frac{10}{29} \\ & \frac{25}{29} & -\frac{10}{29} & -\frac{25}{29} \\ & & \frac{4}{29} & \frac{10}{29} \\ \mathrm{Sym} & & & \frac{25}{29} \end{bmatrix}=\frac{EA}{29\sqrt{29}\,a}\begin{bmatrix} 4 & 10 & -4 & -10 \\ & 25 & -10 & -25 \\ & & 4 & 10 \\ \mathrm{Sym} & & & 25 \end{bmatrix}$$

(4)重写总体坐标系下的单元刚度矩阵$[k^{6-7}]$为

$$[k^{6-7}]=\frac{EA}{29\sqrt{29}\,a}\begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} u_7 & v_7 & u_6 & v_6 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 4 & 10 & -4 & -10 \\ & 25 & -10 & -25 \\ & & 4 & 10 \\ \mathrm{Sym} & & & 25 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} u_7 \\ v_7 \\ u_6 \\ v_6 \end{array} \end{array}$$

所以$[k^{6-7}]$的第 1 行第 1 列元素在构总刚度矩阵中位于第 13 行第 13 列，其他的元素类似，即.

$$
[k^{6-7}] = \frac{EA}{29\sqrt{29}\,a}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} u_1 & v_1 & \cdots & u_6 & v_6 & u_7 & v_7 & \cdots & u_{13} & v_{13} \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & 4 & 10 & -4 & -10 & & & \\
 & & & 10 & 25 & -10 & -25 & & & \\
 & & & -4 & -10 & 4 & 10 & & & \\
 & & & -10 & -25 & 10 & 25 & & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & &
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_6 \\ v_6 \\ u_7 \\ v_7 \\ \vdots \\ u_{13} \\ v_{13} \end{array}
$$

2021 年计算力学真题

1. 判断题.

(1)泛函是函数的函数，其定义域是函数，值域也是函数. (×)

(2)胡-鹫广义变分原理是双变量变分原理，其反映了弹性力学的全部基本方程和边界条件. (×)

(3)里兹法和伽辽金法都是变分问题的直接解法，它们要求试验函数满足变分约束条件和自然边界条件. (×)

(4)有限元法建立的结构总刚度矩阵是对称、正定、稀疏和奇异的. (×)

(5)对结构总刚度矩阵进行约束处理时，“主元素置大数法”是一种近似考虑边界条件的方法. (√)

(6)一维单元中，梁单元属于拉格朗日单元，因为其不光要求位移函数在节点处连续，还要求位移函数的导数在节点处连续. (√)

(7)如果单元位移在单元内部和单元边界上都是连续协调的，那么这样构造的单元是收敛的. (×)

(8)四节点任意四边形平面单元可以采用四节点矩形平面单元的位移模式，因为它们的节点数和自由度数都相同. (×)

(9)基于经典板理论的矩形板弯单元是不完全协调的，因为在单元公共边界上，挠度和法向转角是连续的，但切向转角是不连续的. (×)

(10)结构动力学有限元法中，单元集中质量矩阵与单元刚度矩阵的元素分布情况相同. (×)

2. 分别以最小余能原理和赫林格-斯那广义变分原理为例，说明其基本变量，以及弹性力学基本方程和边界条件分别是这两个变分原理的变分约束条件、非变分约束条件还是变分导出条件？

最小余能原理：

基本变量：应力

变分约束条件：平衡方程和应力边界条件

非变分约束条件：物理方程

变分导出条件：几何方程和位移边界条件

赫林格-斯那广义变分原理：

基本变量：位移和应力

变分约束条件：无

非变分约束条件：物理方程

变分导出条件：应力边界条件、位移边界条件、几何方程和平衡方程

3. 写出弹性体最小势能原理的泛函形式并证明最小势能原理等价于平衡方程和力边界条件.

$$\Pi=\iiint_V A(\varepsilon)\mathrm{d}V-\iiint_V f_i u_i\mathrm{d}V-\iint_S \bar{p}_i u_i\mathrm{d}S$$

证明：对总势能取一阶变分可得

$$\delta\Pi=\iiint_V \frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V-\iiint_V f_i\delta u_i\mathrm{d}V-\iint_S \bar{p}_i\delta u_i\mathrm{d}S$$

因为有

$$\begin{aligned}\frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}&=\frac{1}{2}\sigma_{ij}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\delta u_{i,j}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}\delta u_{j,i}\\&=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\delta u_{i,j}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}\delta u_{i,j}=\sigma_{ij}\delta u_{i,j}=\frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta u_{i,j}\end{aligned}$$

所以利用分部积分可得

$$\begin{aligned}\iiint_V\frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V&=\iiint_V\frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta u_{i,j}\mathrm{d}V=\iiint_V\left[\left(\frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta u_i\right)_{,j}-\left(\frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}\delta u_i\right]\mathrm{d}V\\&=\iint_S\frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta u_i\cdot n_j\mathrm{d}S-\iiint_V\left(\frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}\delta u_i\mathrm{d}V\end{aligned}$$

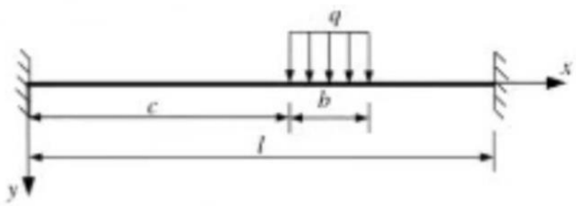
带入总势能的一阶变分可得

$$\begin{aligned}\delta\Pi&=\iint_S\frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta u_i\cdot n_j\mathrm{d}S-\iiint_V\left(\frac{\partial A(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}\delta u_i\mathrm{d}V-\iiint_V f_i\delta u_i\mathrm{d}V-\iint_S\bar{p}_i\delta u_i\mathrm{d}S\\&=\iint_S\sigma_{ij}n_j\cdot\delta u_i\mathrm{d}S-\iiint_V\sigma_{ij,j}\delta u_i\mathrm{d}V-\iiint_V f_i\delta u_i\mathrm{d}V-\iint_S\bar{p}_i\delta u_i\mathrm{d}S\\&=-\iiint_V(\sigma_{ij,j}+f_i)\delta u_i\mathrm{d}V+\iint_S(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)\cdot\delta u_i\mathrm{d}S\end{aligned}$$

最小势能原理与弹性体域内的**平衡微分方程**和边界上的**应力边界条件**等价.

4. 采用里兹法基于最小势能原理求如图所示部分承受均布载荷 q 的两端固支梁的挠曲线.

梁的抗弯刚度为 EI，挠度试函数的形式为 $y=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)$，$n$ 取 1.



选取 $y(x)=A\left(1-\cos\frac{2\pi x}{l}\right)$，带入梁的总势能表达式为

$$
\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x - \int_c^{c+b} qy(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{4A\pi^2}{l^2}\cos\frac{2\pi x}{l}\right)^2 \mathrm{d}x - \int_c^{c+b} qA\left(1-\cos\frac{2\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{8EIA^2\pi^4}{l^4}\int_0^l \cos^2\frac{2\pi x}{l}\mathrm{d}x + qA\int_c^{c+b}\cos\frac{2\pi x}{l}\mathrm{d}x - qbA \\
&= \frac{8EIA^2\pi^4}{l^4}\cdot\frac{l}{2} + qA\cdot\frac{l}{2\pi}\cdot\left[\sin\frac{2\pi(c+b)}{l} - \sin\frac{2\pi c}{l}\right] - qbA \\
&= \frac{4EIA^2\pi^4}{l^3} + \frac{qAl}{\pi}\cos\frac{\pi(2c+b)}{l}\sin\frac{\pi b}{l} - qbA
\end{aligned}
$$

由 $\delta\Pi=\frac{\partial\Pi}{\partial A}\delta A=0$ 可得

$$
\frac{4EIA\pi^4}{l^3} + q\left[\frac{l}{\pi}\cos\frac{\pi(2c+b)}{l}\sin\frac{\pi b}{l} - b\right]=0
$$

由此可得

$$
A=\frac{ql^3}{4EI\pi^4}\left[b-\frac{l}{\pi}\cos\frac{\pi(2c+b)}{l}\sin\frac{\pi b}{l}\right]
$$

因此可得

$$
y(x)=\frac{ql^3}{4EI\pi^4}\left[b-\frac{l}{\pi}\cos\frac{\pi(2c+b)}{l}\sin\frac{\pi b}{l}\right]\left(1-\cos\frac{2\pi x}{l}\right)
$$

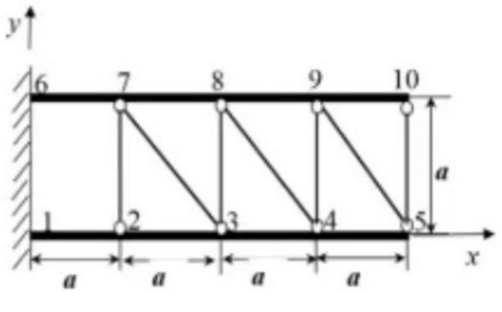
5. 如图所示混合杆系结构中，粗线表示梁结构，细线表示结构杆弹性模量为 E，截面积为 A，几何参数如图所示，试求：

(1)杆 9-5 在局部坐标系下的单元刚度矩阵 $\left[\bar{k}^{9-5}\right]$；

(2)杆 9-5 的坐标变换矩阵 $[\lambda^{9-5}]$；

(3)杆 9-5 在总体坐标系下的单元刚度矩阵 $[k^{9-5}]$；

(4)指出杆 9-5 单元刚度矩阵在结构总刚度矩阵组集中，所应存放的位置(注明单元刚度矩阵每一项在结构总刚度矩阵中所对应的行和列).



(1)杆 9-5 的长度为

$$L_{9-5}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}\,a$$

于是在局部坐标系下的单元刚度矩阵$\left[\bar{k}^{9-5}\right]$为

$$\left[\bar{k}^{9-5}\right]=\frac{EA}{\sqrt{2}\,a}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

(2)杆 9-5 的与 x 轴之间的夹角为

$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以坐标变换矩阵$[\lambda^{9-5}]$为

$$[\lambda^{9-5}]=\begin{bmatrix}C & S & 0 & 0\\ 0 & 0 & C & S\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

(3)在总体坐标系下的单元刚度矩阵$[k^{9-5}]$为

$$[k^{9-5}]=[\lambda^{9-5}]^{\mathrm{T}}\left[\bar{k}^{9-5}\right][\lambda^{9-5}]=\frac{EA}{L_{9-5}}\begin{bmatrix}C & 0\\ S & 0\\ 0 & C\\ 0 & S\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C & S & 0 & 0\\ 0 & 0 & C & S\end{bmatrix}$$

$$=\frac{EA}{L_{9-5}}\begin{bmatrix}C & 0\\ S & 0\\ 0 & C\\ 0 & S\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C & S & -C & -S\\ -C & -S & C & S\end{bmatrix}=\frac{EA}{L_{9-5}}\begin{bmatrix}C^2 & CS & -C^2 & -CS\\ & S^2 & -CS & -S^2\\ & & C^2 & CS\\ \text{Sym} & & & S^2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{EA}{\sqrt{2}\,a}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \text{Sym} & & & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{EA}{2\sqrt{2}\,a}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ & 1 & 1 & -1\\ & & 1 & -1\\ \text{Sym} & & & 1\end{bmatrix}$$

(4)重写总体坐标系下的单元刚度矩阵$[k^{9-5}]$为

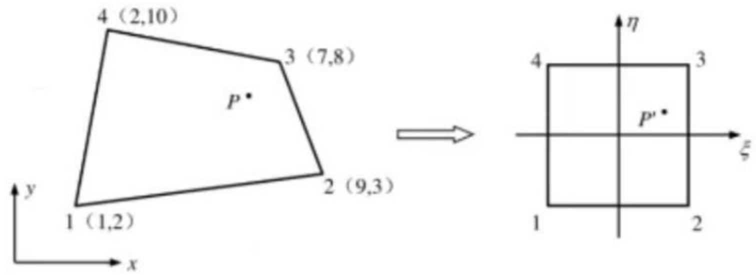
$$[k^{9-5}]=\frac{EA}{2\sqrt{2}\,a}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}u_5 & v_5 & u_9 & v_9\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ & 1 & 1 & -1\\ & & 1 & -1\\ \text{Sym} & & & 1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}u_5\\ v_5\\ u_9\\ v_9\end{array}$$

所以$[k^{9-5}]$的第 1 行第 1 列元素在构总刚度矩阵中位于第 9 行第 9 列，其他的元素类似，

即.

$$
[k^{9-5}]=\frac{EA}{2\sqrt{2}\,a}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} u_1 & v_1 & \cdots & u_5 & v_5 & \cdots & u_9 & v_9 & u_{10} & v_{10} \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & -1 & \cdots & -1 & 1 & & \\
 & & & -1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & & \\
 & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \\
 & & & -1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & & \\
 & & & 1 & -1 & \cdots & -1 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & &
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_5 \\ v_5 \\ \vdots \\ u_9 \\ v_9 \\ u_{10} \\ v_{10} \end{array}
$$

6. 如图所示的任意四边形单元，(1)如采用矩形单元的位移模式，是否能够满足完备性和协调性条件？请具体说明. (2)经过等参变换，其映射为边长为 2 的正方形基本单元，P 点映射为平面的P' 点，已知P' 点在$\xi\eta$ 平面的坐标为$\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$，单元各节点坐标如图所示，有限元计算得到的各节点位移为：$\begin{cases}u_1=0.2\\v_1=0.3\end{cases}$，$\begin{cases}u_2=0.15\\v_2=0.12\end{cases}$，$\begin{cases}u_3=0.14\\v_3=-0.13\end{cases}$，$\begin{cases}u_4=0.12\\v_4=-0.13\end{cases}$. 请写出型函数并计算等参单元中 P 点的位移.



(1)矩形单元的位移模式为

$$u(x,y)=a_1+a_2x+a_3y+a_4xy$$
$$v(x,y)=a_5+a_6x+a_7y+a_8xy$$

在不平行与 x 轴的任一边上直线方程为$y=A_1x+A_2$，$A_1\neq 0$，带入可得

$$u(x,y)=B_1+B_2x+B_3x^2$$
$$v(x,y)=B_4+B_5x+B_6x^2$$

这说明 u，v 不再呈线性变化，所以相邻单元的公共边界处将不能保证位移是协调的，因此不满足协调性条件，完备性条件满足.

(2)坐标变换公式为

$N_1=\frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}$，$N_2=\frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}$，$N_3=\frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}$，$N_4=\frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$ 因为

P' 点在$\xi\eta$平面的坐标为$\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{2}{5}\right)$，所以型函数为

$$N_1=\frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}=\frac{\left(1-\frac{3}{5}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)}{4}=0.06$$

$$N_2=\frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}=\frac{\left(1+\frac{3}{5}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)}{4}=0.24$$

$$N_3=\frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}=\frac{\left(1+\frac{3}{5}\right)\left(1+\frac{2}{5}\right)}{4}=0.56$$

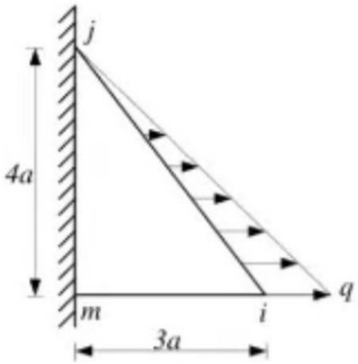
$$N_4=\frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}=\frac{\left(1-\frac{3}{5}\right)\left(1+\frac{2}{5}\right)}{4}=0.14$$

所以可以得到P点的位移为

$$\begin{aligned}u&=N_1u_1+N_2u_2+N_3u_3+N_4u_4\\&=0.06\cdot 0.2+0.24\cdot 0.15+0.56\cdot 0.14+0.14\cdot 0.12=0.1432\\v&=N_1v_1+N_2v_2+N_3v_3+N_4v_4\\&=0.06\cdot 0.3+0.24\cdot 0.12-0.56\cdot 0.13-0.14\cdot 0.13=-0.0442\end{aligned}$$

7. 如图所示一平面应力问题，厚度为 t，采用一个三角形单元对其进行求解，请推导和计算其形函数矩阵、几何矩阵以及等效节点载荷列阵. 选取的位移模式为

$$\begin{cases}u=\dfrac{1}{2A}\left[(a_i+b_ix+c_iy)u_i+(a_j+b_jx+c_jy)u_j+(a_m+b_mx+c_my)u_m\right]\\v=\dfrac{1}{2A}\left[(a_i+b_ix+c_iy)v_i+(a_j+b_jx+c_jy)v_j+(a_m+b_mx+c_my)v_m\right]\end{cases},\quad\begin{cases}a_i=x_jy_m-x_my_j\\b_i=y_j-y_m\\c_i=x_m-x_j\end{cases}.$$



计算型函数

$$\begin{bmatrix}a_i&a_j&a_m\\b_i&b_j&b_m\\c_i&c_j&c_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_jy_m-y_jx_m&x_my_i-y_mx_i&x_iy_j-y_ix_j\\y_j-y_m&y_m-y_i&y_i-y_j\\x_m-x_j&x_i-x_m&x_j-x_i\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0\cdot 0-4a\cdot 0&0\cdot 0-0\cdot 3a&3a\cdot 4a-0\cdot 0\\4a-0&0-0&0-4a\\0-0&3a-0&0-3a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&12a^2\\4a&0&-4a\\0&3a&-3a\end{bmatrix}$$

$$2A=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3a\cdot 4a=12a^2$$

所以可得

$$\begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_m \end{bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} a_i + b_i x + c_i y \\ a_j + b_j x + c_j y \\ a_m + b_m x + c_m y \end{bmatrix} = \frac{1}{12a}\begin{bmatrix} 4x \\ 3y \\ 12a - 4x - 3y \end{bmatrix}$$

于是可得型函数矩阵为

$$\begin{aligned}[N] &= \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{12a}\begin{bmatrix} 4x & 0 & 3y & 0 & 12a - 4x - 3y & 0 \\ 0 & 4x & 0 & 3y & 0 & 12a - 4x - 3y \end{bmatrix}\end{aligned}$$

由此可得几何矩阵为

$$[B] = [L]\,[N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{12a}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

等效单元节点列阵为

$$\{f_S\} = \iint_S [N_S]^{\mathrm{T}}\{F_S\}\mathrm{d}S = \int_{L_{ij}} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \\ N_j & 0 \\ 0 & N_j \\ N_m & 0 \\ 0 & N_m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \left(1 - \frac{s}{L_{ij}}\right)q \\ 0 \end{Bmatrix} t\,\mathrm{d}s = \int_{L_{ij}} \begin{Bmatrix} N_i\left(1 - \frac{s}{L_{ij}}\right)q \\ 0 \\ N_j\left(1 - \frac{s}{L_{ij}}\right)q \\ 0 \\ N_m\left(1 - \frac{s}{L_{ij}}\right)q \\ 0 \end{Bmatrix} t\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_{L_{ij}} \begin{Bmatrix} \left(1 - \frac{s}{L_{ij}}\right)\left(1 - \frac{s}{L_{ij}}\right)q \\ 0 \\ \frac{s}{L_{ij}}\left(1 - \frac{s}{L_{ij}}\right)q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} t\,\mathrm{d}s = \int_0^{L_{ij}} \begin{Bmatrix} \left(1 - \frac{s}{L_{ij}}\right)^2 q \\ 0 \\ \frac{s}{L_{ij}}\left(1 - \frac{s}{L_{ij}}\right)q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} t\,\mathrm{d}s = \begin{Bmatrix} \frac{1}{3}L_{ij}qt \\ 0 \\ \frac{1}{6}L_{ij}qt \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{5}{3}qat \\ 0 \\ \frac{5}{6}qat \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$