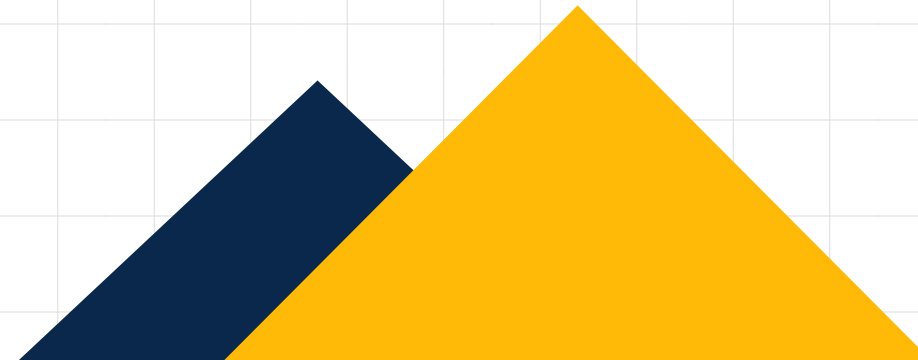
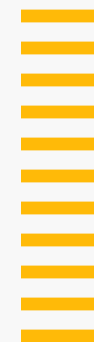


SECCON Beginners CTF 2021

Crypto 問題の解説

濱田幸希 (HK_ilohas)

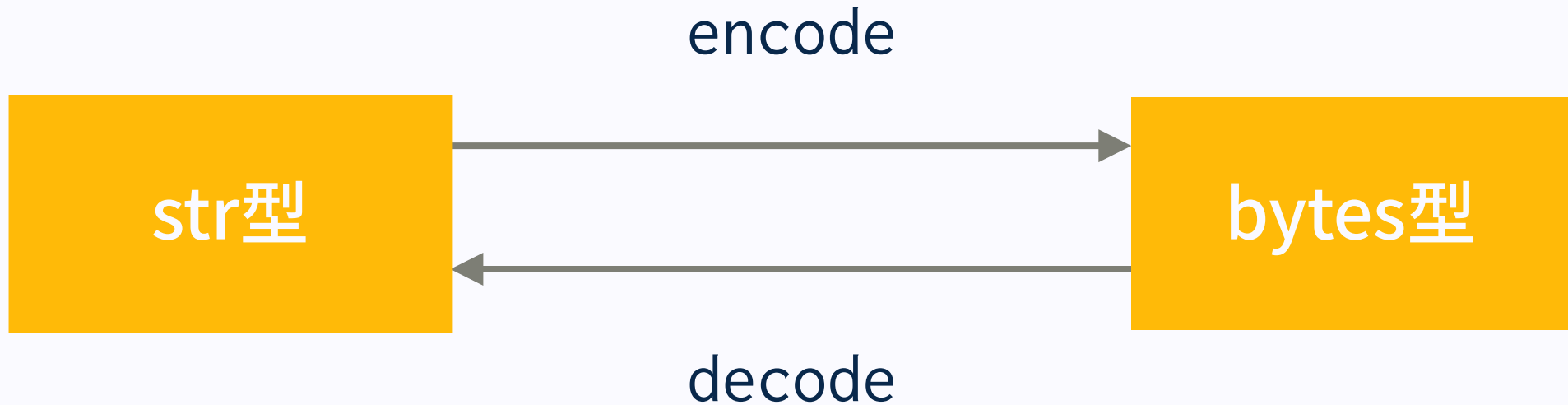




文字列と数値の相互変換

str型とbytes型の変換

文字列（str型）を数値（int型）にする前に，str型をbytes型に変換する必要がある．



str型とbytes型の変換

```
>>> flag = "Hello, World!"  
>>> flag.encode()  
b'Hello, World!'
```

str型

bytes型

```
>>> flag = b"Hello, World!"  
>>> flag.decode()  
'Hello, World!'
```

bytes型

str型

bytes型とint型の変換

bytes型のままだと計算ができないのでint型に変換したい。

そこで，pycryptodomeという暗号系のライブラリを使用する。

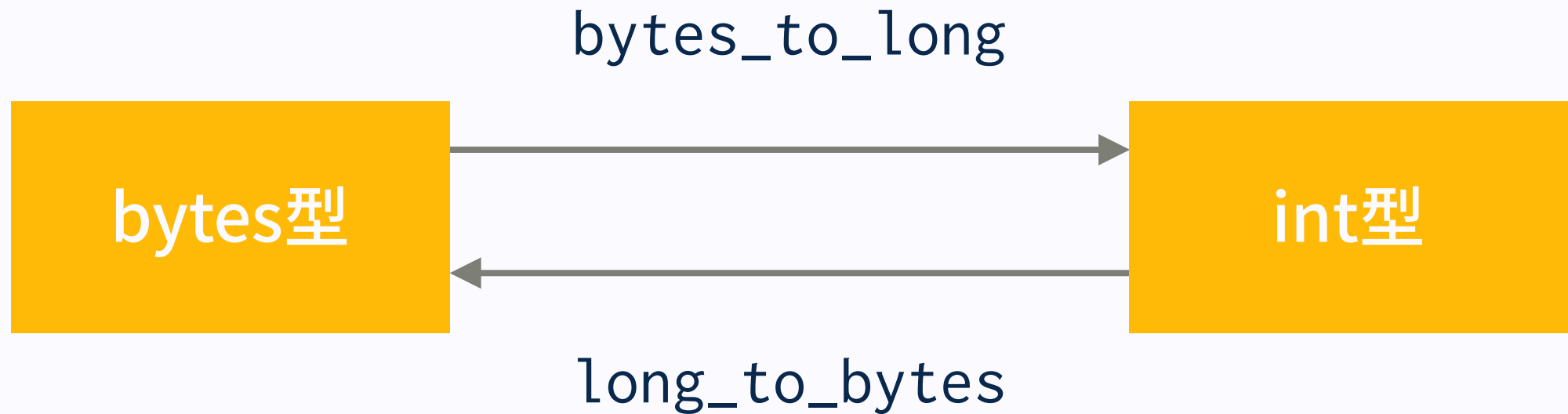
<https://pypi.org/project/pycryptodome/>

```
$ pip3 install pycryptodome
```

bytes型とint型の変換

`bytes_to_long()`: bytes型をint型に変換する関数

`long_to_bytes()`: int型をbytes型に変換する関数



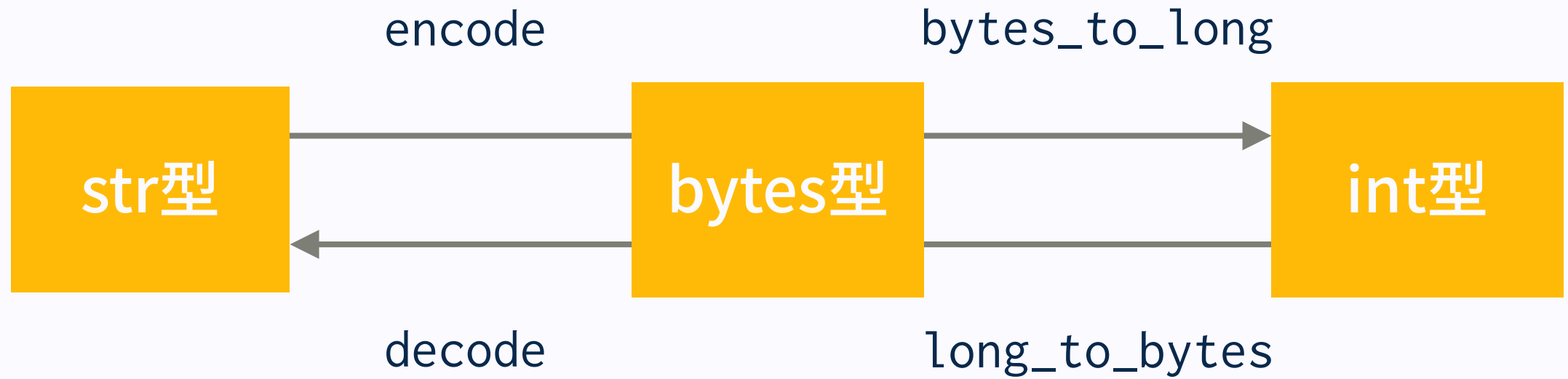
bytes型とint型の変換

```
>>> from Crypto.Util.number import *  
>>> flag = "Hello, World!"
```

```
>>> bytes_to_long(flag.encode())  
5735816763073854918203775149089
```

```
>>> long_to_bytes(5735816763073854918203775149089)  
b'Hello, World!'
```

変換のまとめ

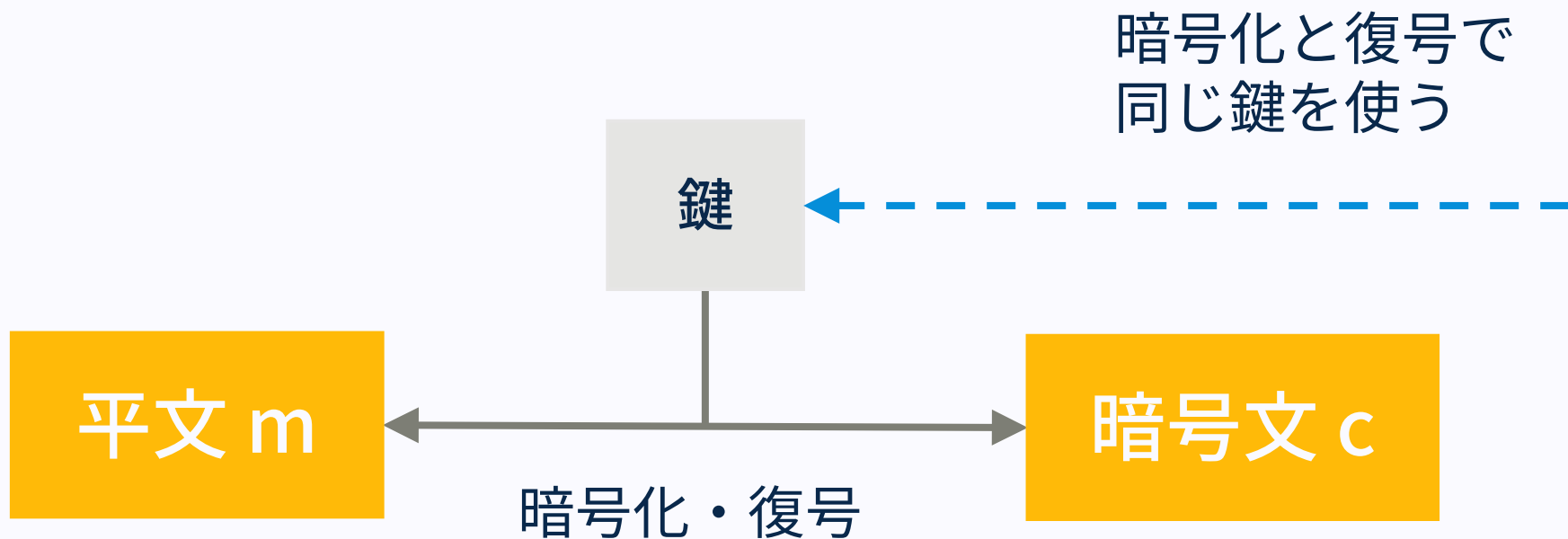




RSA暗号の仕組み

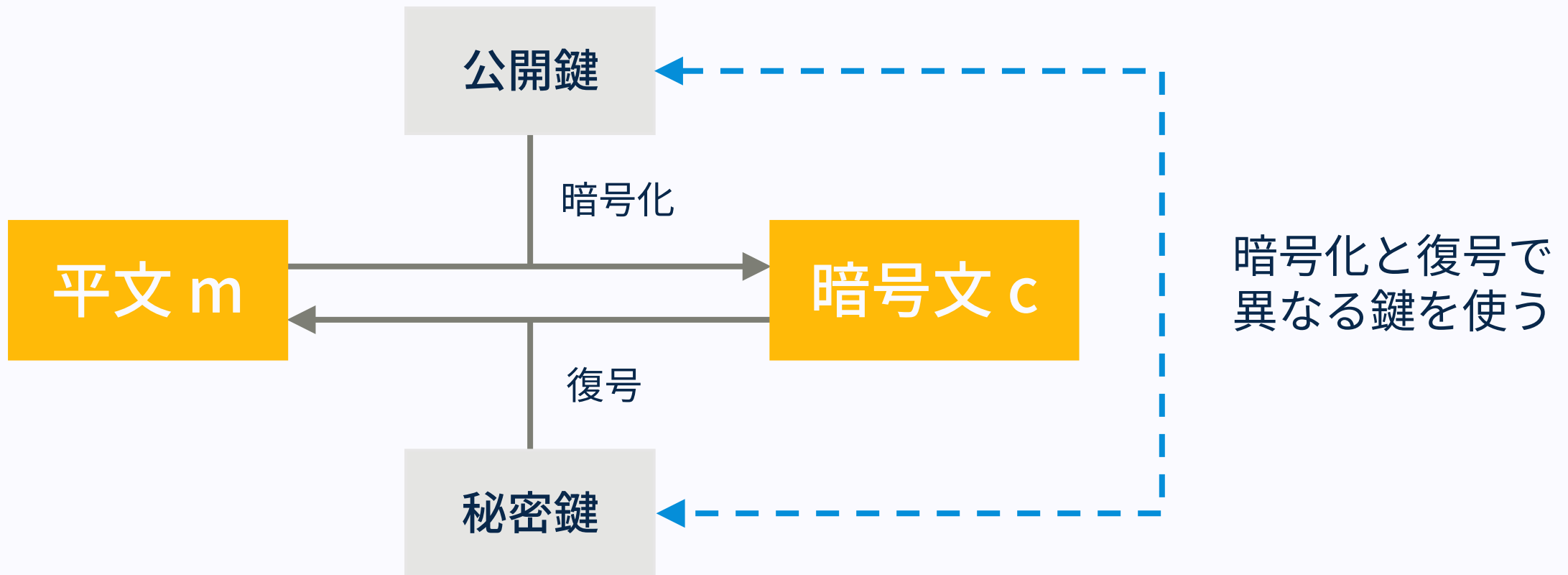
共通鍵暗号

ブロック暗号 (AES, DES) やストリーム暗号 (RC4) など



公開鍵暗号

RSA, ElGamal, 楕円ElGamalなど



RSA暗号

平文 m ，暗号文 c ，公開鍵 (e, n) ，秘密鍵 (d, n)

◆ 暗号化

$$c = m^e \bmod n$$

◆ 復号

$$m = c^d \bmod n$$

鍵の作り方

- ① 大きな2つの素数 p, q を生成する

乱数生成 + 素数判定（ミラーラビンテスト）を繰り返す。
具体的には 1024 ~ 2048 bit 程度.

- ② $n = pq$ を計算する

- ③ l を計算する

a と b の最大公約数 (Greatest Common Divisor),
最小公倍数 (Least Common Multiple) を $\gcd(a, b), \text{lcm}(a, b)$ とする.

$$l = \text{lcm}(p - 1, q - 1) = \frac{(p - 1)(q - 1)}{\gcd(p - 1, q - 1)}$$

鍵の作り方

- ③の補足

資料によっては、 $\text{lcm}(p-1, q-1)$ を

$$\phi(n) = (p-1)(q-1)$$

としている場合がある．しかし、**どちらを採用しても** RSA暗号は成立する．
一般には $\text{lcm}(p-1, q-1)$ のほうが $(p-1)(q-1)$ よりも小さくなるので、 $\text{lcm}(p-1, q-1)$ が使われている．

詳しく知りたい人は「オイラーのトーシェント関数」で検索．

鍵の作り方

④ e を計算する

$1 < e < l$ かつ $\gcd(e, l) = 1$ を満たす e を求める.

大きすぎても小さすぎてもダメ.

$e = 2^{16} + 1 = 65537$ が推奨されている.

⑤ d を計算する

$1 < d < l$ かつ $ed \equiv 1 \pmod{l}$ を満たす d を求める.

これは拡張ユークリッドの互除法で見つけられる.

RSA暗号の関連資料

- 結城浩, 『暗号技術入門 第3版 秘密の国のアリス』
- IPUSIRON, 『暗号技術のすべて』
- 光成滋生, 『クラウドを支えるこれからの暗号技術』
<https://herumi.github.io/ango/>
- kurenaif, 【CTF入門】 RSA暗号を実装/解読する 1 【Crypto】 (訂正はコメント参照！)
<https://www.youtube.com/watch?v=HKDyUELFdXs>
- sonickun, RSA暗号運用でやってはいけない n のこと #ssmjp
<https://www.slideshare.net/sonickun/rsa-n-ssmjp>
- ふるつき, CTF crypto 逆引き
<https://furutsuki.hatenablog.com/entry/2021/03/16/095021>

RSA暗号の関連資料

- ももいろテクノロジー, plain RSAに対する攻撃手法を実装してみる
<http://inaz2.hatenablog.com/entry/2016/01/15/011138>
- ももいろテクノロジー, SageMathを使ってCoppersmith's Attackをやってみる
<http://inaz2.hatenablog.com/entry/2016/01/20/022936>
- A painter and a black cat, CTF Crypto
https://raintrees.net/projects/a-painter-and-a-black-cat/wiki/CTF_Crypto
- 0xDktb, Summary of Crypto in CTF(RSA)
<https://0xdktb.top/2020/02/28/Summary-of-Crypto-in-CTF-RSA/>
- RsaCtfTool
<https://github.com/Ganapati/RsaCtfTool>



[Beginner] simple_RSA



ファイル構成

- `problem.py`

Pythonのプログラム

- `output.txt`

`problem.py`の実行結果

output.txt

公開鍵と暗号文が書かれている。

```
n = 1768667184240039357473051203420012852133691956973597279167660...
```

```
e = 3
```

```
c = 2137917515300171115086910841683630246868780573379713198802569...
```

problem.py

```
from Crypto.Util.number import *
from flag import flag

flag = bytes_to_long(flag.encode("utf-8"))

p = getPrime(1024)
q = getPrime(1024)
n = p * q
e = 3

assert 2046 < n.bit_length()
assert 375 == flag.bit_length()

print("n =", n)
print("e =", e)
print("c =", pow(flag, e, n))
```

実際には存在しない
ダミーのライブラリ

e が小さすぎる

n は 2046 bit より大きい

flag は 375 bit

Low Public-Exponent Attack

$m^e < n$ のとき, c の e 乗根を取ることで m が求まる.

◆ 理由

$m^e < n$ のとき, m^e は $\text{mod } n$ の影響を受けず,

$$c = m^e \bmod n = m^e$$

となるから.

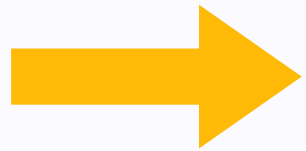
【例】 $7 \bmod 19 = 7$

Low Public-Exponent Attack

この問題では $e = 3$, n は 2047 bit 以上, flag は 375 bit なので,

$$\text{flag}^e < n$$

だと予想できる.



Low Public-Exponent Attackでflagが出る！

方針

- ① `output.txt`から e, n, c の値を取ってくる
- ② c の e 乗根を計算する
- ③ 出てきた数値を文字列に変換する

Pythonでe乗根を計算する方法

gmpy2というライブラリを使用する。

インストールするためにはGMPの開発環境が必要。
Ubuntuだとaptを使うと上手くやってくれる。

```
$ sudo apt update  
$ sudo apt install python3-gmpy2
```

Windows

- ① pipが対応しているwhlのバージョンを確認する

```
>>> from pip._internal.utils.compatibility_tags import get_supported  
>>> print(get_supported())
```

- ② gmpy2のwhlファイルをダウンロードする

<https://www.lfd.uci.edu/~gohlke/pythonlibs/#gmpy>

```
$ pip install ./gmpy2-2.0.8-cp38-cp38-win_amd64.whl
```

iroot

```
>>> import gmpy2
>>> gmpy2.iroot(1024, 2)
(mpz(32), True)
>>> gmpy2.iroot(1024, 2)[0]
mpz(32)
```

返り値はタプルなので
[0]を付けて取り出す。

```
>>> gmpy2.root(1024, 2)
mpfr('32.0')
```

irootとrootは別物。
rootは実数なので
精度が落ちる。



[Beginner] Logical_SEESAW



ファイル構成

- `problem.py`

Pythonのプログラム

- `output.txt`

`problem.py`の実行結果

output.txt

暗号文が16個書かれている。

```
cipher = ['11000010111...', '11000110110...', '11000010110...',  
          ...  
          '11000110110...', '11000010101...', '11000110101...']
```

problem.py

```
from Crypto.Util.number import *  
from random import random, getrandbits  
from flag import flag
```

```
flag = bytes_to_long(flag.encode("utf-8"))
```

```
length = flag.bit_length()
```

```
key = getrandbits(length)
```

```
while not length == key.bit_length():
```

```
    key = getrandbits(length)
```

```
flag = list(bin(flag)[2:])
```

```
key = list(bin(key)[2:])
```

flagのビット長

flagと同じビット長のkeyを生成

flagとkeyを2進数の
リストに変換する

problem.py

```
cipher_L = []

for _ in range(16):
    cipher = flag[:]
    m = 0.5

    for i in range(length):
        n = random()
        if n > m:
            cipher[i] = str(eval(cipher[i] + "&" + key[i]))

    cipher_L.append("".join(cipher))

print("cipher =", cipher_L)
```

16個の暗号文を生成

50%の確率で
flag[i] & key[i]

暗号文のパターン

```
cipher[k][i] = flag[i]  
                または flag[i] & key[i]
```

$$\left(\begin{array}{l} 0 \leq k \leq 15 \\ 0 \leq i < \text{length} \end{array} \right)$$

flag[i]	key[i]	flag[i] & key[i]
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



cipher[k][i]が"1"なら、
flag[i]は"1"

暗号文のパターン

```
cipher[k][i] = flag[i]  
                または flag[i] & key[i]
```

$$\left(\begin{array}{l} 0 \leq k \leq 15 \\ 0 \leq i < \text{length} \end{array} \right)$$

flag[i]	key[i]	flag[i] & key[i]
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



すべてのkについて,
cipher[k][i]が"0"なら,
flag[i]は"0"

暗号文のパターン

`cipher[k][i] = flag[i]`
または `flag[i] & key[i]`

$$\left(\begin{array}{l} 0 \leq k \leq 15 \\ 0 \leq i < \text{length} \end{array} \right)$$

flag[i]	key[i]	flag[i] & key[i]
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

この場合も`cipher[k][i]`は“0”になるが，このパターンが16回連続で発生する確率はほぼゼロ

16回すべてAND演算がされる確率

- 1回だけ判定してAND演算がされる確率

$$\frac{1}{2}$$

- 16回すべてAND演算がされる確率

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{16} = \frac{1}{65536} \cong 0.0015 \%$$



滅多に起こらないから、
この場合は考えなくてもいい

方針

- ① output.txtからcipherを取ってくる
- ② 16個の暗号文の各ビットについて
一つでも"1"があれば，flagの対応するビットを"1"
すべて"0"なら，flagの対応するビットを"0"
- ③ flagを10進数に変換する
- ④ flagを文字列に変換する



[Easy] GFM



ファイル構成

- `problem.sage`

SageMathのプログラム

- `output.txt`

`problem.sage`の実行結果

SageMathとは

「Sageは，代数学，幾何学，数論，暗号理論，数値解析，および関連諸分野の研究と教育を支援する，フリーなオープンソース数学ソフトウェアである．」（公式ページより）

Pythonをベースに開発されているので，文法はPythonと大体同じ．

- オンラインの実行環境

<https://sagecell.sagemath.org/>

- 公式ページ

<https://www.sagemath.org/>

- 公式チュートリアル

<https://doc.sagemath.org/html/ja/tutorial/index.html>

problem.sage

```
FLAG = b'<censored>'
```

```
SIZE = 8
```

```
p = random_prime(2 ^ 128)
```

```
MS = MatrixSpace(GF(p), SIZE)
```

```
key = MS.random_element()
```

```
while key.rank() != SIZE:
```

```
    key = MS.random_element()
```

位数 p の有限体上の数を
要素に持つ 8×8 の行列空間 MS

$\text{rank}(\text{key}) = 8$
→ key は正則行列（逆行列を持つ）

有限体

加算・減算・乗算・除算の四則演算が定義され、
閉じている有限集合を有限体といい、 $GF(p)$ と表す。
発見者のガロアにちなんで、ガロア体 (Galois Field) とも呼ぶ。

※ 「閉じている」… すべての演算結果が集合内に存在すること。

p は有限体に含まれる要素の数であり、位数と呼ばれる。

$$\underbrace{\{0, 1, 2, \dots, p-2, p-1\}}_{p \text{ 個}}$$

problem.sage

```
M = copy(MS.zero())
for i in range(SIZE):
    for j in range(SIZE):
        n = i * SIZE + j
        if n < len(FLAG):
            M[i, j] = FLAG[n]
        else:
            M[i, j] = GF(p).random_element()

enc = key * M * key

print('p:', p)
print('key:', key)
print('enc:', enc)
```

行列 M にFLAGを1文字ずつ格納する

行列 M の空部分には乱数を格納する

output.txtに出力されている値

Mを取り出す

FLAGは M に格納されているので, enc から M を取り出したい.
 key は逆行列 key^{-1} を持つので,

$$enc = key \times M \times key$$

$$M = key^{-1} \times enc \times key^{-1}$$

SageMathで逆行列を求めるためには, `inverse()`を使えばいい.

```
key_inv = key.inverse()
```

方針

- ① `output.txt`から p , key , enc の値を取ってくる
- ② key の逆行列 key^{-1} を計算する
- ③ enc の左右に key^{-1} をかけて M を取り出す
- ④ M からFLAGを取り出す



[Medium] Imaginary



ファイル構成

- `app.py`

サーバ側のプログラム

- `test.py`

配布された`app.py`をローカル環境で動かせるように勝手に改造したプログラム

※ フラグを書いているので、中身は見ない方がいいかも

ローカル環境でサーバを動かす方法

test.pyを実行するだけ.

止めるときは"ctrl+c"を押す.

```
$ python3 test.py  
Start server at localhost:1337
```


アプリの動作

ncで接続すると，コマンド一覧が表示される．

```
$ nc localhost 1337
Welcome to Secret IMAGINARY NUMBER Store!
1. Save a number
2. Show numbers
3. Import numbers
4. Export numbers
0. Exit
>
```

アプリの動作

1. 複素数を保存する

```
> 1  
Real part> 1  
Imaginary part> 3
```

2. 保存した複素数を表示する

```
> 2  
-----  
1 + 3i: (1, 3)  
-----
```

アプリの動作

4. 保存した複素数のデータをjsonに変換し、それをAESのECBモードで暗号化する

```
> 4  
{ "1 + 3i": [1, 3] }  
Exported:  
0b63e3e740430cb46bf2a51f4cb29edf273788035f227f77074feb3fc52d6717
```

アプリの動作

3. AESのECBモードで暗号化されたjsonを受け取り,
それを復号して変数に代入する

```
> 3
Exported String>
0b63e3e740430cb46bf2a51f4cb29edf273788035f227f77074feb3fc52d6717
Imported.

-----

1 + 3i: (1, 3)

-----
```

app.py

```
while True:
    num = self._menu()
    if num == 1:
        self._save()
    elif num == 2:
        self._show()
    elif num == 3:
        self._import()
    elif num == 4:
        self._export()
    elif num == 5:
        self._secret()
    else:
        break
```

表示されていないコマンド5

FLAGの出力条件

self.numbersに'1337i'が含まれていたらFLAGを出力する.

```
def _secret(self):  
    if '1337i' in self.numbers:  
        self.request.sendall(b'Congratulations!¥n')  
        self.request.sendall(f'The flag is {flag}¥n'.encode())
```

self.numbers

keyに複素数，valueに実部・虚部のリストを持つ辞書．

```
self.numbers = {}
```

```
name = f'{re} + {im}i'  
self.numbers[name] = [re, im]
```

```
>>> numbers = {}  
>>> re = 1  
>>> im = 2  
>>> name = f'{re} + {im}i'  
>>> numbers[name] = [re, im]  
>>> numbers  
{ '1 + 2i': [1, 2] }
```

self.numbers

実部に0を入れても， $0 + 1337i$ と保存されてしまう．

```
> 1
Real part> 0
Imaginary part> 1337
1. Save a number
2. Show numbers
3. Import numbers
4. Export numbers
0. Exit
> 2

-----
0 + 1337i: (0, 1337)
-----
```


データの改ざん

そこで，Import / Export の機能に注目する．

- ① Exportでデータを出力する．
このデータはAESのECBモードで暗号化されている．
- ② データを改ざんして，keyを'1337i'にする．
- ③ Importで改ざんしたデータを入力する．

AES

ブロック暗号（共通鍵暗号）の一種．

平文を1ブロック128ビットで分割し，それを暗号化する．
平文を128ビットで割り切れない場合は，乱数を追加して
対応する (**Padding**)．



ECBモード

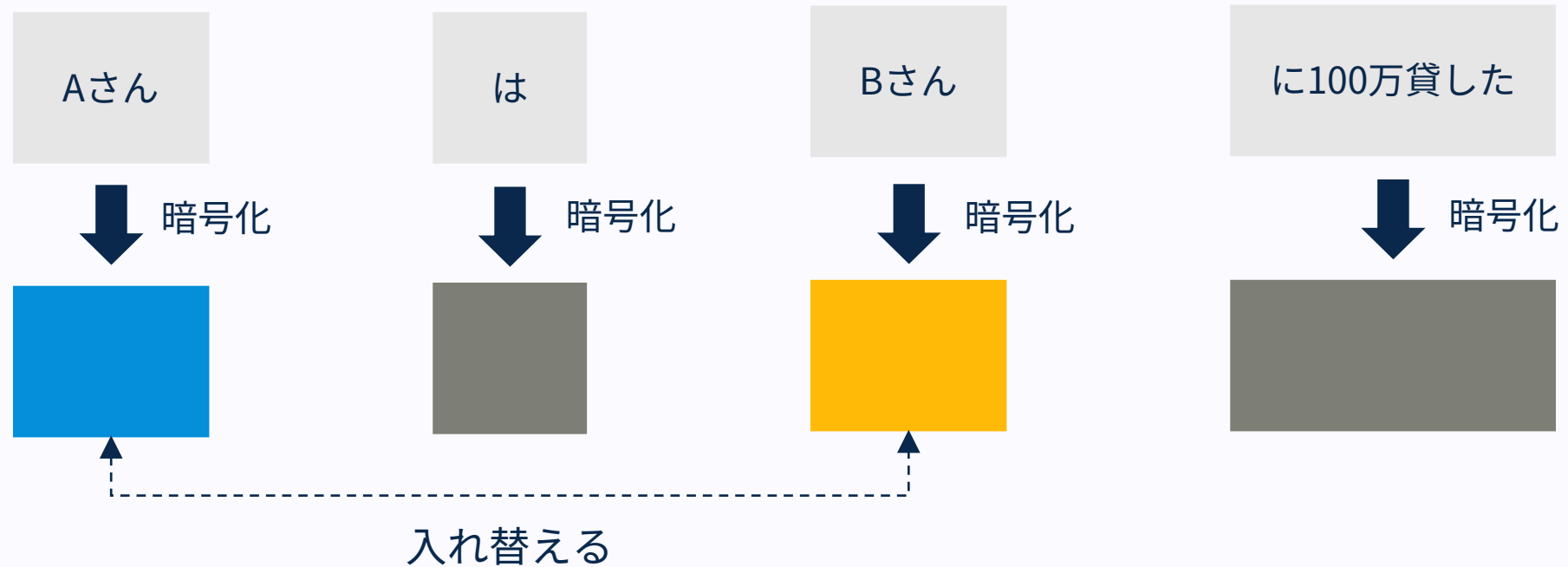
複数のブロックがある場合は暗号化を繰り返して行うことになる。
このときの繰り返し方を**モード**という。

最も単純な方法は、平文のブロックをそのまま暗号化することである。
これを**ECBモード**という。



ECBモードの問題点

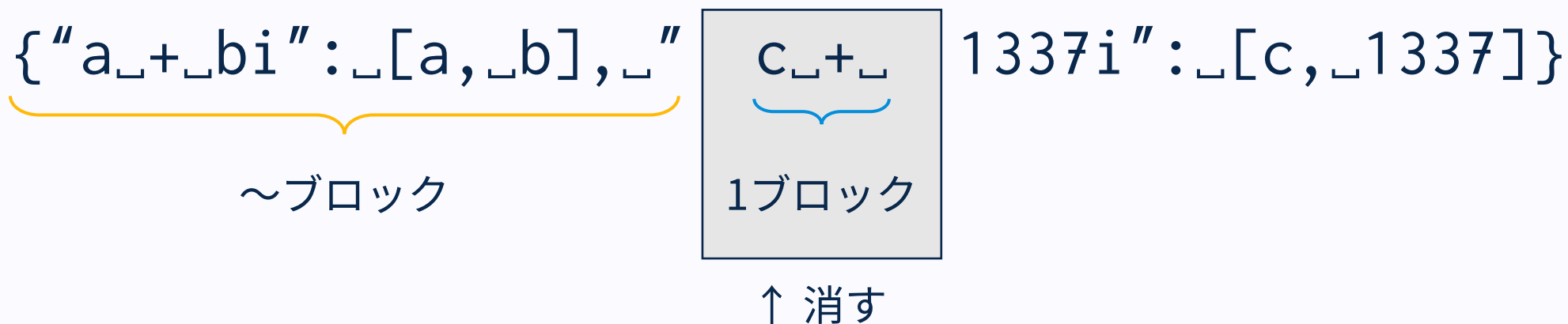
ECBモードでは、暗号文のブロックを入れ替えたり，削除したりしても復号ができてしまう．



➡ 「BさんはAさんに100万貸した」に改ざんできる

改ざんの方針

半角文字は8ビットなので、1ブロックは $128 \div 8$ で16文字となる。
データのkeyに'1337i'が出てくるように上手く調整する。



➡ $\{ "a_+_bi" : _ [a, _ b], _ "1337i" : _ [c, _ 1337] \}$

改ざん用データの作成

{“a_+_bi”:_[a, _b], _”とc_+_を作る.

```
$ python3 data_1.py  
{'1000 + 1000i': [1000, 1000], '  
x: 1000  
bytes: 32
```

```
$ python3 data_2.py  
1000000000000000 +  
y: 1000000000000000  
bytes: 16
```

暗号文の入手

Exportを使って，暗号文を入手する．

```
> 4
{"1000 + 1000i": [1000, 1000], "1000000000000000 + 1337i":
[1000000000000000, 1337]}
Exported:
71295e3edd417b3a18be48eb67b129508c7a47ce644b2402003bdd4e8c50510167d8
c505c310236544b96267806d5fed097af578edba148ead016696be713cff95c68a47
aabef5095c32c686008db357
```

不要なブロックの削除

10000000000000000_+_のブロックを削除し、
必要なブロックだけを取り出す。

```
$ python3 clip.py  
71295e3edd417b3a18be48eb67b129508c7a47ce644b2402003bdd4e8c505101097a  
f578edba148ead016696be713cff95c68a47aabef5095c32c686008db357
```


FLAG

改ざんしたデータをImportし，5でFLAGを表示する．

```
> 5  
Congratulations!  
The flag is  
ctf4b{yeah_you_are_a_member_of_imaginary_number_club}
```

Cryptoの作問者Writeup

- @ushigai_sub, SECCON Beginners CTF2021 作問者Writeup
https://qiita.com/ushigai_sub/items/8c63fb566f19ac097bc5
- rex.gs, SECCON Beginners CTF 2021 Crypto 解説
<https://rex.gs/2021/05/seccon-beginners-ctf-2021-crypto-%E8%A7%A3%E8%AA%AC/>

LLLの関連資料

- 自作のノート
https://github.com/HK-ilohas/hk-documents/blob/main/Knapsack_CLOS/Knapsack_CLOS.pdf
- 國廣 昇，格子理論を用いた暗号解読の最近の研究動向
https://www.jstage.jst.go.jp/article/essfr/5/1/5_1_42/_pdf
- うさぎ小屋，PlaidCTF CTF 2015: Lazy
<https://kimiya.net/writeups/ctf-2015-plaidctf-2015-lazy/>
- katagaitai workshop #7 crypto ナップサック暗号と低密度攻撃
<https://www.slideshare.net/trmr105/katagaitai-workshop-7-crypto>
- Xor-net, LLLでCrypto問題を解く
<https://project-euphoria.dev/blog/10-lll-for-crypto/>

p-8RSAの関連資料

- y011d4.log, $p - 1 \equiv 0 \pmod{e}$ のときの RSA 復号方法
<https://y011d4.netlify.app/20201026-not-coprime-e-phi/>
- How to compute m value from RSA if $\phi(n)$ is not relative prime with the e?
<https://crypto.stackexchange.com/questions/81949/how-to-compute-m-value-from-rsa-if-phin-is-not-relative-prime-with-the-e>
- 0xDktb, Summary of Crypto in CTF(RSA)
<https://0xdktb.top/2020/02/28/Summary-of-Crypto-in-CTF-RSA/>
- RSA Risk: When e and PHI share the same factor (and are not co-prime)
https://asecuritysite.com/encryption/rsa_prob