LaTeX レポート課題 第2回

横井　暉 *

(61920820)

2020 年 12 月 18 日

概 要

この演習では, 複雑な数式の書き方と図・表の書き方を学ぶ.

1　数式の書き方（続き）

1. 二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ の解は,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

である.

2. **(Taylor の定理)** $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ で n 回微分可能であるとき,

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \end{aligned}$$

を満たす点 c が a と b の間に存在する.

3. **(ガウス積分)** ガウス関数 $y = e^{-x^2}$ のグラフを書くと図 1 のようになる. また, ガウス関数について,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

が成り立つ.

* `pandorabox0720@keio.jp`

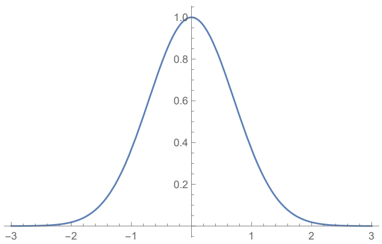

図 1: ガウス関数

2　フィボナッチ数列

フィボナッチ数列 $\{f_k\}$ は以下の 3 項間漸化式で定義される．

$$
\begin{aligned}
&f_0 = f_1 = 1, \\
&f_i = f_{i-1} + f_{i-2} \ (i \geq 2 \text{ のとき}).
\end{aligned}
$$

小さな k でのフィボナッチ数を計算してみよう．$f_0, f_1, \ldots, f_9$ を（手や電卓で）計算すると，表 1 が得られる．

表 1: フィボナッチ数の例

k	0	1	2	3	4
f_k	1	1	2	3	5
k	5	6	7	8	9
f_k	8	13	21	34	55

次に f_k の一般項を計算してみよう．$k \geq 1$ に対して，f_{k+1}, f_k を並べて書くと

$$
\begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k-1} \end{pmatrix} \tag{1}
$$

という関係がある．行列 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ を A とおき，(1) を繰り返し適用すると，

$$
\begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k-1} \end{pmatrix} = \cdots = A^k \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}
$$

が成り立つ．したがって f_k は $A^k \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ の第 2 成分と等しい．

行列 A のべき乗の計算には以下の定理 2.1 を利用する ([1] 参照)．

定理 2.1. n 次正方行列 M の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ が全て異なると仮定する．λ_i に関する固有ベクトルを $\boldsymbol{x_i}$ とおき，$\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$ を並べた行列を U とする．つまり，

$$
U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \cdots & \boldsymbol{x_n} \end{bmatrix}
$$

である．このとき, U は正則であり,

$$M = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} U^{-1}$$

が成り立つ．

まず行列 A の固有値を計算しよう．固有多項式は,

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

となる．したがって, 固有値 λ_1,λ_2 $(\lambda_1 \geq \lambda_2)$ は,

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ \ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

であり, 対応する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix}, \ \ \boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix}$$

となる．ここで,

$$U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda_2 & -\lambda_1 \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$U^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ -\lambda_2 & -1 \end{pmatrix}$$

であり, 定理 2.1 より,

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U^{-1}$$

と書ける．$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{aligned} A^k &= (U\Lambda U^{-1})(U\Lambda U^{-1}) \cdots (U\Lambda U^{-1}) \\ &= U\Lambda^k U^{-1} \end{aligned}$$

が成り立つ. (3) を (2) に代入して,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix} &= U \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} U^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda_2 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ -\lambda_2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \lambda_2^k \\ -\lambda_2\lambda_1^k & -\lambda_1\lambda_2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 + 1 \\ -\lambda_2 - 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^k(\lambda_1 + 1) + \lambda_2^k(-\lambda_2 - 1) \\ -\lambda_2\lambda_1^k(\lambda_1 + 1) - \lambda_1\lambda_2^k(-\lambda_2 - 1) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^k(\lambda_1 + 1) - \lambda_2^k(\lambda_2 + 1) \\ -\lambda_2\lambda_1^k(\lambda_1 + 1) + \lambda_1\lambda_2^k(\lambda_2 + 1) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と計算できる. λ_1 と λ_2 が満たす関係

$$
\lambda_i^2 = \lambda_i + 1 \ \ (i = 1, 2), \ \ \lambda_1\lambda_2 = -1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \ \ \lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5}
$$

などを用いて整理すると, 最終的に

$$
f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1})
$$

を得る.

参考文献

[1] 慶應義塾大学理工学部数理科学科編, 数学 2・4, 2017.