

Generation of Correlated Synthetic Data

Actes des Journées de Rochebrune 2016

JUSTE RAIMBAULT^{1,2}

¹ UMR CNRS 8504 Géographie-cités

² UMR-T IFSTTAR 9403 LVMT

Abstract

Generation of hybrid synthetic data resembling real data to some criteria is an important methodological and thematic issue in most disciplines which study complex systems. Interdependencies between constituting elements, materialized within respective relations, lead to the emergence of macroscopic patterns. Being able to control the dependance structure and level within a synthetic dataset is thus a source of knowledge on system mechanisms. We propose a methodology consisting in the generation of synthetic datasets on which correlation structure is controlled. The method is applied in a first example on financial time-series and allows to understand the role of interferences between components at different scales on performances of a predictive model. A second application on a geographical system is then proposed, in which the weak coupling between a population density model and a network morphogenesis model allows to simulate territorial configurations. The calibration on morphological objective on european data and intensive model exploration unveils a large spectrum of feasible correlations between morphological and network measures. We demonstrate therein the flexibility of our method and the variety of possible applications.

Mots-clés : *Synthetic Data ; Statistical Control ; Correlations ; Financial Time-series ; Land-use Transportation Interactions*

1 Introduction

The use of synthetic data, in the sense of statistical populations generated randomly under constraints of patterns proximity to the studied system, is a widely used methodology.

et particulièrement pour des problématiques liées aux systèmes complexes, telles que par exemple l'évaluation thérapeutique [Abadie et al., 2010], l'étude des systèmes territoriaux [Moeckel et al., 2003, Pritchard and Miller, 2009], l'apprentissage statistique [Bolón-Canedo et al., 2013] ou la bio-informatique [Van den Bulcke et al., 2006]. Il peut s'agir d'une désagrégation par création d'une population au niveau microscopique présentant des caractéristiques macroscopiques données, ou bien de la création de nouvelles populations au même niveau d'agrégation qu'un échantillon donné avec un critère de ressemblance aux données réelles. Le niveau de ce critère peut dépendra des applications attendues et peut par exemple aller de la fidélité des distributions statistiques pour un certain nombre d'indicateurs à des contraintes plus faibles de valeurs pour des indicateurs agrégés, c'est à dire l'existence de motifs macroscopiques similaires. Dans le cas de systèmes chaotiques ou présentant de fortes caractéristiques d'émergence, une contrainte microscopique n'implique pas nécessairement le respect des motifs macroscopiques, et arriver à les reproduire est justement un des enjeux des pratiques de modélisation et simulation en sciences de la complexité. La donnée, qu'elle soit simulée, mesurée ou hybride est au coeur de l'étude des systèmes complexes de par la maturation de nouvelles approches computationnelles [Arthur, 2015], il est donc essentiel d'étudier des procédures d'extraction d'information des données (fouille de données) et de simulation d'une information similaire (génération de données synthétiques).

Si le premier ordre est de manière générale bien maîtrisé, il n'est pas systématique ni aisé de contrôler le second ordre, c'est à dire les structures de covariance entre les variables générées, même si des exemples spécifiques existent, comme dans [Ye, 2011] où la sensibilité des sorties de modèles de choix discrets à la forme des distributions des variables aléatoires ainsi qu'à leur structures de dépendance. Il est également possible d'interpréter les modèles de génération de réseaux complexes [Newman, 2003] comme la création d'une structure d'interdépendance au sein d'un système, représentée par la topologie des liens. Nous proposons ici une méthode générique prenant en compte l'interdépendance lors de la génération de données synthétiques, sous la forme de corrélations.

La suite de l'article est organisée de la façon suivante. La méthode générique est décrite formellement, pour être appliquée sur deux exemples très différents mais rentrant dans ce même cadre. Chaque exemple peut être lu de manière indépendante et illustre les possibilités offertes par la méthode ainsi que des possibles obstacles à sa mise en oeuvre. Les implications et applications possibles sont ensuite discutées, notamment dans le cas de l'exemple d'un système géographique.

2 Formalisation de la méthode

L'ensemble des méthodologies mentionnées en introduction sont trop variées pour être résumées par un même formalisme. Nous proposons ici une formulation générique ne dépendant pas du domaine d'application, ciblée sur le contrôle de la structure de corrélation des données synthétiques.

Soit un processus stochastique multidimensionnel \tilde{X}_I (l'ensemble d'indexation pouvant être par exemple le temps dans le cas de séries temporelles, l'espace, ou une indexation quelconque). On se propose, à partir d'un jeu de réalisations $\mathbf{X} = (X_{i,j})$, de générer une population statistique $\tilde{\mathbf{X}} = \tilde{X}_{i,j}$ telle que

1. d'une part un certain critère de proximité aux données est vérifié, i.e. étant donné une précision ε et un indicateur f , $\|f(\mathbf{X}) - f(\tilde{\mathbf{X}})\| < \varepsilon$
2. d'autre part le niveau de corrélation est contrôlé, i.e. étant donné une matrice fixant une structure de covariance R , $\text{Var}[(\tilde{X}_i)] = R$, où la matrice de variance/covariance est estimée sur la population synthétique.

La satisfaction du deuxième point sera généralement conditionnée par la valeur de paramètres, dont dépendra la procédure de génération, qu'il s'agisse de modèles simples ou complexes. Formellement, les processus synthétiques sont des familles paramétriques $\tilde{X}_i[\vec{\alpha}]$. Nous proposons de décliner cette méthode sur deux exemples très différents mais tous deux typiques des systèmes complexes : des séries temporelles financières à haute fréquence, et les systèmes territoriaux. On illustre ainsi la flexibilité de la logique, ouvrant des portes interdisciplinaires par l'exportation de méthodes ou raisonnements par exemple. Dans le premier cas, la proximité aux données est l'égalité des signaux à une fréquence fondamentale, auxquels on superpose des composantes synthétiques dont il est facile de contrôler le niveau de corrélation. On se place dans une logique de données hybrides, pour tester des hypothèses ou modèles dans un contexte plus proche de la réalité que sur des données purement synthétiques. Dans le deuxième cas, la calibration morphologique d'un modèle de distribution de densité de peuplement permet de respecter le critère de proximité aux données. Les corrélations de la forme urbaine avec celle d'un réseau de transport sont ensuite obtenues empiriquement par exploration du couplage avec un modèle de génération de réseau. Leur contrôle est dans ce cas indirect puisque constaté empiriquement.

3 Applications

3.1 Application : séries temporelles financières

3.1.1 Contexte

Un premier domaine d'application proposé pour notre méthode est celui des séries temporelles financières, signaux typiques de systèmes complexes hétérogènes et multiscalaires [Mantegna et al., 2000] et pour lesquels les corrélations ont fait l'objet d'abondants travaux. Ainsi, l'application de la théorie des matrices aléatoires peut permettre de débruiter, ou du moins d'estimer la part de signal noyée dans le bruit, une matrice de corrélations pour un grand nombre d'actifs échantillonnés à faible fréquence (retours journaliers par exemple) [Bouchaud and Potters, 2009]. De même, l'analyse de réseaux complexes construits à partir des corrélations, selon des méthodes type arbre couvrant minimal [Bonanno et al., 2001] ou des extensions raffinées pour cette application précise [Tumminello et al., 2005], ont permis d'obtenir des résultats prometteurs, tels la reconstruction de la structure économique des secteurs d'activités. A haute fréquence, l'estimation précise de paramètres d'interdépendance dans le cadre d'hypothèses fixées sur la dynamique, fait l'objet d'importants travaux théoriques dans un but de raffinement des modèles et des estimateurs [Barndorff-Nielsen et al., 2011]. Les résultats théoriques doivent alors être testés sur des jeux de données synthétiques, qui permettent de contrôler un certain nombre de paramètres et de s'assurer qu'un effet prédit par la théorie est bien observable *toutes choses égales par ailleurs*. Par exemple, [Potiron and Mykland, 2015] dérive une correction du biais de l'estimateur de *Hayashi-Yoshida* qui est un estimateur de la covariance de deux browniens corrélés à haute fréquence dans le cas de temps d'observation asynchrones, par démonstration d'un théorème de la limite centrale pour un modèle généralisé endogénéisant les temps d'observations. La confirmation empirique de l'amélioration de l'estimateur est alors obtenue sur un jeu de données synthétiques à un niveau de corrélation fixé.

3.1.2 Formalisation

Cadre Considérons un réseau d'actifs $(X_i(t))_{1 \leq i \leq N}$ échantillonnés à haute fréquence (typiquement 1s). On se place dans un cadre multi-scalaire (utilisé par exemple dans les approches par ondelettes [Ramsey, 2002] ou analyses multifractales du signal [Bouchaud et al., 2000]) pour interpréter les signaux observés comme la superposition de

composantes à des multiples échelles temporelles : $X_i = \sum_{\omega} X_i^{\omega}$. On notera $T_i^{\omega} = \sum_{\omega' \leq \omega} X_i^{\omega'}$ le signal filtré à une fréquence ω donnée. Prédire l'évolution d'une composante à une échelle donnée est alors un problème caractéristique de l'étude des systèmes complexes, pour lequel l'enjeu est l'identification de régularités et leur distinction des composantes considérées comme stochastiques en comparaison¹. Dans un souci de simplicité, on représente un tel processus par un modèle de prédiction de tendance à une échelle temporelle ω_1 donnée, formellement un estimateur $M_{\omega_1} : (T_i^{\omega_1}(t'))_{t' < t} \mapsto \hat{T}_i^{\omega_1}(t)$ dont l'objectif est la minimisation de l'erreur sur la tendance réelle $\|T_i^{\omega_1} - \hat{T}_i^{\omega_1}\|$. Dans le cas d'estimateurs auto-regressifs multivariés, la performance dépendra entre autre des corrélations respectives entre actifs et il est alors intéressant d'utiliser la méthode pour évaluer celle-ci en fonction de niveaux de corrélation à plusieurs échelles. On assume une dynamique de Black-Scholes [Jarrow, 1999] pour les actifs, i.e. $dX = \sigma \cdot dW$ avec W processus de Wiener, ce qui permettra d'obtenir facilement des niveaux de corrélation voulus.

Génération des données Il est alors aisé de générer \tilde{X}_i tel que $\text{Var}[\tilde{X}_i^{\omega_1}] = \Sigma R$ (Σ variance estimée et R matrice de corrélation fixée), par la simulation de processus de Wiener au niveau de corrélation fixé et tel que $X_i^{\omega \leq \omega_0} = \tilde{X}_i^{\omega \leq \omega_0}$ (critère de proximité au données : les composantes à plus basse fréquence qu'une fréquence fondamentale $\omega_0 < \omega_1$ sont identiques). En effet, si $dW_1 \perp dW_1^{\perp}$ (et $\sigma_1 < \sigma_2$ pour fixer les idées, quitte à échanger les actifs), alors $W_2 = \rho_{12}W_1 + \sqrt{1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} \cdot \rho_{12}^{\perp} W_1^{\perp}$ est tel que $\rho(dW_1, dW_2) = \rho_{12}$. Les signaux suivants sont construits de la même manière par orthonormalisation de Gram. On isole alors la composante à la fréquence ω_1 voulue par filtrage, c'est à dire $\tilde{X}_i^{\omega_1} = W_i - \mathcal{F}_{\omega_0}[W_i]$ (avec \mathcal{F}_{ω_0} filtre passe-bas à fréquence de coupure ω_0), puis on reconstruit les signaux synthétiques par $\tilde{X}_i = T_i^{\omega_0} + \tilde{X}_i^{\omega_1}$.

3.1.3 Implémentation et Résultats

Méthodologie La méthode est testée sur un exemple de deux actifs du marché des devises (EUR/USD et EUR/GBP), sur une période de 6 mois de juin 2015 à novembre 2015. Le nettoyage des données², originellement échantillonnées à l'ordre de la seconde, consiste dans un premier temps à la détermination du support temporel commun maximal (les séquences manquantes étant alors ignorées, par translation verticale des séries, i.e. $S(t) := S(t) \cdot \frac{S(t_n)}{S(t_{n-1})}$ lorsque t_{n-1}, t_n sont les extrémités du "trou" et $S(t)$ la valeur de l'actif, ce qui revient à garder la contrainte d'avoir des retours à pas de temps similaires entre actifs). On étudie alors les *log-prix* et *log-retours*, définis par $X(t) := \log \frac{S(t)}{S_0}$ et $\Delta X(t) = X(t) - X(t-1)$. Les données brutes sont filtrées à une fréquence $\omega_m = 10\text{min}$ (qui sera la fréquence maximale d'étude) pour un souci de performance computationnelle. On utilise un filtre gaussien non causal de largeur totale ω . On fixe $\omega_0 = 24\text{h}$ et on se propose de construire des données synthétiques aux fréquences $\omega_1 = 30\text{min}, 1\text{h}, 2\text{h}$. Voir la figure 1 pour un exemple de la structure du signal à ce différentes échelles.

Il est crucial de noter l'interférence entre les fréquences ω_0 et ω_1 dans le signal construit : la corrélation effectivement estimée est

$$\rho_e = \rho[\Delta \tilde{X}_1, \Delta \tilde{X}_2] = \rho[\Delta T_1^{\omega_0} + \Delta \tilde{X}_1^{\omega}, \Delta T_2^{\omega_0} + \Delta \tilde{X}_2^{\omega}]$$

ce qui conduit à dériver dans la limite raisonnable $\sigma_1 \gg \sigma_0$ (fréquence fondamentale suffisamment basse), lorsque $\text{Cov}[\Delta \tilde{X}_i^{\omega_1}, \Delta X_j^{\omega}] = 0$ pour tous $i, j, \omega_1 > \omega$, et les retours d'espérance nulle à toutes échelles, en notant $\rho_0 = \rho[\Delta T_1^{\omega_0}, \Delta T_2^{\omega_0}]$, $\rho = \rho[\tilde{X}_1^{\omega_1}, \tilde{X}_2^{\omega_1}]$, et $\varepsilon_i = \frac{\sigma(\Delta T_i^{\omega_0})}{\sigma(\Delta \tilde{X}_i^{\omega_1})}$, la correction sur la corrélation effective due aux interférences : la corrélation effective est alors au premier ordre

$$\rho_e = [\varepsilon_1 \varepsilon_2 \rho_0 + \rho] \cdot \left[1 - \frac{1}{2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \right] \quad (1)$$

ce qui donne l'expression de la corrélation que l'on pourra effectivement simuler dans les données synthétiques.

La corrélation est estimée par méthode de Pearson, avec l'estimateur de la covariance au biais corrigé, c'est à dire $\hat{\rho}[X1, X2] = \frac{\hat{C}[X1, X2]}{\sqrt{\hat{\text{Var}}[X1]\hat{\text{Var}}[X2]}}$, où $\hat{C}[X1, X2] = \frac{1}{(T-1)} \sum_t X1(t)X2(t) - \frac{1}{T \cdot (T-1)} \sum_t X1(t) \sum_t X2(t)$ et $\hat{\text{Var}}[X] = \frac{1}{T} \sum_t X^2(t) - (\frac{1}{T} \sum_t X(t))^2$.

¹voir [Gell-Mann, 1995] pour une discussion étendue sur la construction de *schema* pour l'étude de systèmes complexes adaptatifs (par des systèmes complexes adaptatifs).

²obtenues depuis <http://www.histdata.com/>, sans licence spécifiée, les données nettoyées et filtrées à ω_m uniquement sont mises en accessibilité pour respect du copyright.

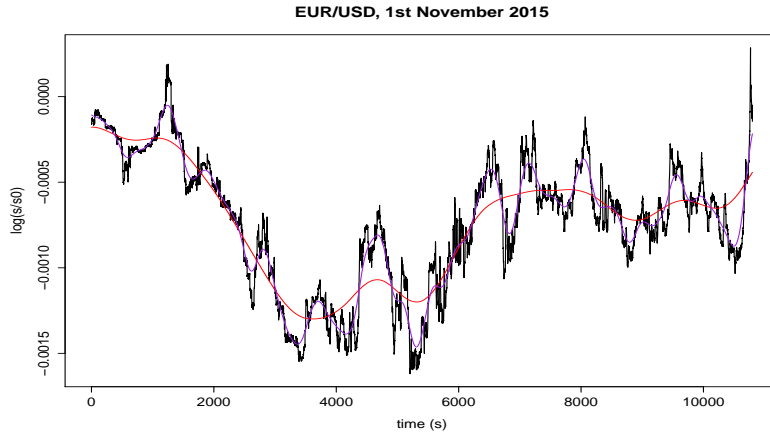


Figure 1: **Exemple de la structure multi-scalaire du signal qui sert de base à la construction des signaux synthétiques** | Les *log-prix* sont représentés sur environ 3h pour la journée du 1er novembre 2015 pour l'actif EUR/USD, ainsi que les tendances à 10min (violet) et à 30min.

Le modèle de prédiction M_{ω_1} testé est simplement un modèle *ARMA* pour lequel on fixe les paramètres $p = 2, q = 0$ (on ne crée pas de corrélation retardée, on ne s'attend donc pas à de grand ordre d'auto-regression, les signaux originaux étant à mémoire relativement courte ; de plus le lissage n'est pas nécessaire puisqu'on travaille sur des données filtrées), appliqué de manière adaptative³. Plus précisément, étant donné une fenêtre temporelle T_W , on estime pour tout t le modèle sur $[t - T_W + 1, t]$ afin de prédire les signaux à $t + 1$.

Implémentation L'implémentation est faite en langage R, utilisant en particulier la bibliothèque *MTS* [Tsay, 2015] pour les modèles de séries temporelles. Les données nettoyées et le code source sont disponibles de manière ouverte sur le dépôt *git* du projet⁴.

Résultats La figure 2 donne les corrélations effectives calculées sur les données synthétiques. Pour des valeurs standard des paramètres (par exemple pour $\omega_0 = 24h$, $\omega_1 = 2h$ et $\rho = -0.5$), on a $\rho_0 \simeq 0.71$ et $\varepsilon_i \simeq 0.3$ et ainsi $|\rho_e - \rho| \simeq 0.05$. On constate dans l'intervalle $\rho \in [-0.5, 0.5]$ un bon accord entre la valeur ρ_e prédite par 1 et les valeurs observées, et une déviation pour de plus grandes valeurs absolues, d'autant plus grande que ω_1 est petit : cela confirme l'intuition que lorsque la fréquence descend et se rapproche de ω_0 , les interférences entre les deux composantes vont devenir non négligeables et invalider les hypothèses d'indépendance par exemple.

On applique ensuite le modèle prédictif décrit ci-dessus aux données synthétiques, afin d'étudier sa performance moyenne en fonction du niveau de corrélation des données. Les résultats pour $\omega_1 = 1h, 1h30, 2h$ sont présentés en figure 3. Le résultat a priori contre-intuitif d'une performance maximale à corrélation nulle pour l'un des actifs confirme l'intérêt d'une génération de données hybrides : l'étude des corrélations décalées (*lagged correlations*) montre une dissymétrie présente dans les données réelles, interprété à l'échelle journalière comme une influence augmentée de EURGBP sur EURUSD à 2h de décalage environ. L'existence de ce *lag* permet une "bonne" prédiction de EURUSD due à la fréquence fondamentale, perturbée par le bruit ajouté, de façon proportionnelle à sa corrélation : plus les bruits sont corrélés, plus le modèle les prendra en compte et se trompera plus à cause du caractère markovien des browniens simulés⁵.

L'exemple présenté ici est un *modèle jouet* et n'a pas d'application pratique, mais démontre l'intérêt de l'utilisation des données synthétiques simulées. On peut imaginer simuler des données plus proches de la réalité (existence de motifs réalistes de *lagged correlation* par exemple, modèles plus réalistes que le Black-Scholes) et appliquer la méthode sur des modèles plus opérationnels.

³il s'agit d'un niveau d'adaptation relativement faible, les paramètres T_W, p, q et même le type de modèle restant fixés. On se place ainsi dans le cadre de [Potiron, 2016] qui suppose une dynamique localement paramétrique, mais pour lequel on fixe les méta-paramètres de la dynamique. On pourrait imaginer estimer un T_W variable qui s'adapterait pour une meilleure estimation locale, à l'image de l'estimation de paramètres en traitement du signal bayésien effectuée via augmentation de l'état par les paramètres.

⁴at <https://github.com/JusteRaimbault/SynthAsset>

⁵en théorie le modèle utilisé n'a aucun pouvoir prédictif sur des browniens purs

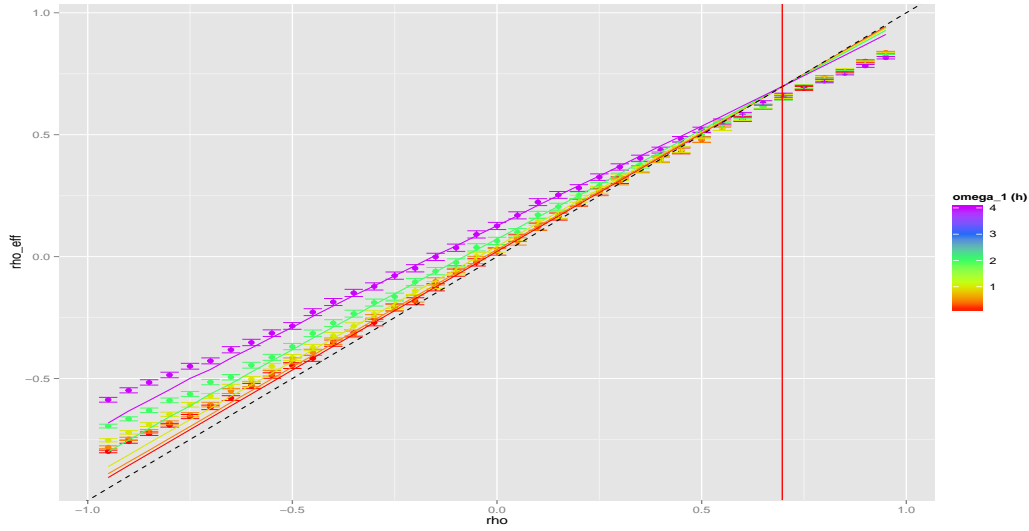


Figure 2: **Correlations effectives obtenues sur les données synthétiques** | Les points représentent les corrélations estimées sur une génération d'un jeu de données synthétiques correspondant aux 6 mois de juin à novembre 2015 (barres d'erreurs obtenue par méthode de Fisher standard) ; l'échelle de couleur donne la fréquence de filtrage $\omega_1 = 10\text{min}, 30\text{min}, 1\text{h}, 2\text{h}, 4\text{h}$; les courbes sont les valeurs théoriques de ρ_e obtenues par 1 avec les volatilités estimées (diagonale en pointillés pour référence) ; l'abscisse de la ligne rouge est la valeur théorique telle que $\rho = \rho_e$ avec les valeurs moyennes de ε_i sur l'ensemble des points. On observe dans les fortes corrélations une déviation des valeurs corrigées, qui peut être dû aux hypothèses d'indépendance ou d'espérance nulle non vérifiées. La dissymétrie de la courbe est causée par la forte valeur positive de $\rho_0 \simeq 0.71$.

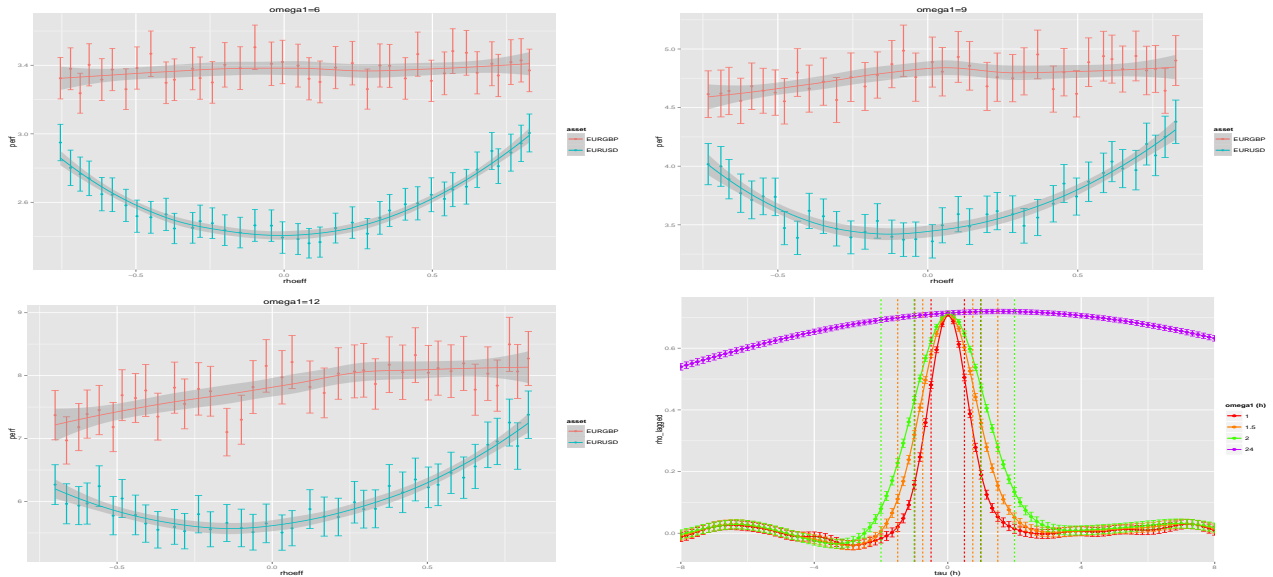


Figure 3: **Performance d'un modèle prédictif en fonction des corrélations simulées.** De gauche à droite et de haut en bas, les trois premiers graphes montrent pour chaque actif la performance normalisée d'un modèle ARMA ($p = 2, q = 0$), définie par $\pi = \left(\frac{1}{T} \sum_t (\tilde{X}_i(t) - M_{\omega_1}[\tilde{X}_i](t))^2 \right) / \sigma[\tilde{X}_i]^2$ (IC à 95% calculés par $\pi = \bar{\pi} \pm (1.96 \cdot \sigma[\pi]) / \sqrt{T}$, lissage polynomial local pour aider à la lecture). Il est intéressant de note la courbe en U, pour EURUSD, due à l'interférence entre les composantes par laquelle la corrélation des bruits simulés détériore le pouvoir prédictif : l'étude des *lagged correlations* (ici $\rho[\Delta X_{\text{EURUSD}}(t), \Delta X_{\text{EURGBP}}(t - \tau)]$) sur les données réelles dans le quatrième graphique montre une dissymétrie dans les courbes par rapport au décalage nul ($\tau = 0$) ce qui devrait permettre à la composante fondamentale d'améliorer le pouvoir de prédiction alors perturbé par les corrélations entre les composantes simulées. Les lignes pointillées montrent les pas de temps (en équivalent décalage temporel) utilisés par l'ARMA aux différentes échelles, ce qui permet de lire la corrélation correspondante sur la composante fondamentale.

3.2 Application : données géographiques de densité et de réseaux

3.2.1 Contexte

En géographie, l'utilisation de données synthétiques est plus généralement axée vers l'utilisation de population synthétiques au sein de modèles basés agents (mobilité, modèles *LUTI*) [Pritchard and Miller, 2009]. On peut également citer des méthodes d'analyse spatiales qui s'en rapprochent : par exemple, l'extrapolation d'un champ spatial continu à partir d'un échantillon discret, par une estimation par noyaux par exemple, peut être compris comme la génération d'un jeu de données synthétiques (même si ce n'est pas le point de vue initial, comme pour la Régression Géographique Pondérée [Brunsdon et al., 1998], dans laquelle les noyaux de taille variables n'interpolent pas des données au sens propre mais extrapolent des variables abstraites représentant l'interaction entre variables explicites). Dans le domaine de la modélisation en géographie quantitative, dans le cas de *modèles jouets* ou de modèles hybrides, une configuration initiale cohérente est souvent essentielle : un ensemble de configurations initiales possibles est alors un jeu de données synthétiques sur lesquelles le modèle est testé : le premier modèle Simpop [Sanders et al., 1997], pionnier d'une famille de modèles par la suite paramétrisés par des données réelles, pourrait rentrer dans ce cadre mais était lancé sur une spatialisation synthétique unique. De même, il a été souligné la difficulté de générer une configuration initiale pour une infrastructure de transport dans le cas du modèle SimpopNet [Schmitt, 2014], alors qu'il s'agit un point essentiel dans la connaissance du comportement du modèle. Il a récemment été proposé de contrôler systématiquement les effets de la configuration spatiale sur le comportement de modèles de simulation spatialisés [Cottineau et al., 2015b], méthodologie pouvant être interprétée comme un contrôle par données statistiques spatiales. L'enjeu est de pouvoir alors distinguer effets propres dus à la dynamique intrinsèque du modèle, d'effets particuliers dus à la structure géographique du cas d'application. Celui-ci est crucial pour la validation des conclusions issues des pratiques de modélisation et simulation en géographie quantitative.

3.2.2 Formalisation

Dans notre cas, nous proposons de générer des systèmes de villes représentés par une densité spatiale de population $d(\vec{x})$ et la donnée d'un réseau de transport $n(\vec{x})$, représenté de façon simplifiée, pour lesquels on serait capable de contrôler les corrélations entre mesures morphologiques de la densité urbaine et caractéristiques du réseau. La question de l'interaction entre territoire et réseaux de transport est un sujet d'étude classique [Offner and Pumain, 1996] mais extrêmement complexe et difficile à quantifier [Offner, 1993]. Une modélisation dynamique des processus impliqués devrait apporter des connaissances sur ces interactions ([Bretagnolle, 2009], p. 162-163). Dans ce cadre, nous développons un couplage *simple* (c'est à dire sans boucle de rétroaction) entre un modèle de morphogenèse urbaine et un modèle de génération de réseau.

Modèle de densité L'utilisation d'un modèle D type agrégation-diffusion [Batty, 2006] permet de générer une distribution discrete de densité. Dans [Raimbault, 2016], une généralisation de ce modèle est calibré pour des objectifs morphologiques (entropie, hiérarchie, auto-corrélation spatiale, distance moyenne) contre les valeurs réelles calculées sur l'ensemble des grilles de taille 50km extraites de la grille européenne de densité [EUROSTAT, 2014]. Plus précisément, le modèle fonctionne de manière itérative de la façon suivante. Une grille initialement vide de côté N , est représentée par la données des populations $(P_i(t))_{1 \leq i \leq N^2}$. A chaque pas de temps, jusqu'à ce que la population atteigne une valeur fixée P_m ,

- la population totale $P(t)$ est augmentée d'un nombre fixé N_G (taux de croissance), suivant un attachement préférentiel tel que $\mathbb{P}[P_i(t+1) = P_i(t) + 1 | P(t+1) = P(t) + 1] = \frac{(P_i(t)/P(t))^\alpha}{\sum (P_i(t)/P(t))^\alpha}$
- une diffusion d'une fraction β de la population aux 4 plus proches voisins est effectuée n_d fois

Les deux processus antagonistes de concentration et d'étalement urbain sont capturés par le modèle, ce qui permet de reproduire assez fidèlement un grand nombre de morphologies existantes.

Modèle de réseau D'autre part, on est capable de générer par un modèle N un réseau de transport planaire à une échelle équivalente, étant donné une distribution de densité. La génération du réseau étant conditionnée à la donnée de la densité, les estimateurs des indicateurs de réseau seront conditionnels d'une part, et d'autre part les formes urbaines et du réseau devraient nécessairement être corrélées, les processus n'étant pas indépendants. La nature et la modularité de ces corrélations selon la variation des paramètres des modèles restent à déterminer par l'exploration du modèle couplé.

La procédure de génération heuristique de réseau est la suivante :

1. Un nombre fixé N_c de centres qui seront les premiers noeuds du réseau est distribué selon la distribution de densité, suivant une loi similaire à celle d'agrégation, i.e. la probabilité d'être distribué sur une case est $\frac{(P_i/P)^\alpha}{\sum (P_i/P)^\alpha}$. La population est ensuite répartie selon les zones de Voronoï des centres, un centre cumulant la population des cases dans son emprise.
2. Les centres sont connectés de façon déterministe par percolation entre plus proches clusters : tant que le réseau n'est pas connexe, les deux composantes connexes les plus proches au sens de la distance minimale entre chacun de leurs sommets sont connectées par le lien réalisant cette distance. On obtient alors un réseau arborescent.
3. Le réseau est alors modulé par ruptures de potentiels afin de se rapprocher de formes réelles. Plus précisément, un potentiel d'interaction gravitaire généralisé entre deux centres i et j est défini par

$$V_{ij}(d) = \left[(1 - k_h) + k_h \cdot \left(\frac{P_i P_j}{P^2} \right)^\gamma \right] \cdot \exp \left(-\frac{d}{r_g(1 + d/d_0)} \right)$$

où d peut être la distance euclidienne $d_{ij} = d(i, j)$ ou la distance par le réseau $d_N(i, j)$, $k_h \in [0, 1]$ un poids permettant de changer le rôle des population dans le potentiel, γ régissant la forme de la hiérarchie selon les valeurs des populations, r_g distance caractéristique de décroissance et d_0 paramètre de forme.

4. Un nombre $K \cdot N_L$ de nouveaux liens potentiels est pris comme les couples ayant le plus grand potentiel pour la distance euclidienne ($K = 5$ est fixé).
5. Parmi les liens potentiels, N_L sont effectivement réalisés, qui sont ceux ayant le plus faible rapport $V_{ij}(d_N)/V_{ij}(d_{ij})$: à cette étape seul l'écart entre distance euclidienne et distance par le réseau compte, ce rapport ne dépendant plus des populations et étant croissant en d_N à d_{ij} fixé.
6. Le réseau est planarisé par création de noeuds aux intersections éventuelles créées par les nouveaux liens.

Notons que la construction du modèle de génération est heuristique, et que d'autres types de modèles comme un réseau biologique auto-généré [Tero et al., 2010], une génération par optimisation locale de contraintes géométriques [Barthélemy and Flammini, 2008] ou un modèle de percolation plus complexe que celui utilisé, peuvent le remplacer. Ainsi, dans le cadre d'une architecture modulaire où le choix entre différentes implémentations d'une brique fonctionnelle peut être vue comme méta-paramètre [Cottineau et al., 2015a], on pourrait choisir la fonction de génération adaptée à un besoin donné (par exemple proximité à des données réelles, contraintes sur les relations entre indicateurs de sortie, variété de formes générées, etc.).

Espace des paramètres L'espace des paramètres du modèle couplé⁶ est constitué des paramètres de génération de densité $\vec{\alpha}_D = (P_m/N_G, \alpha, \beta, n_d)$ (on s'intéresse pour simplifier au rapport entre population et taux de croissance, i.e. le nombre d'étapes nécessaires pour générer) et des paramètres de génération de réseau $\vec{\alpha}_N = (N_C, k_h, \gamma, r_g, d_0)$. On notera $\vec{\alpha} = (\vec{\alpha}_D, \vec{\alpha}_N)$.

Indicateurs On quantifie la forme urbaine et la forme du réseau, dans le but de moduler la corrélation entre ces indicateurs. La forme est définie par un vecteur $\vec{M} = (r, \bar{d}, \varepsilon, a)$ donnant auto-corrélation spatiale (indice de Moran), distance moyenne, entropie, hiérarchie (voir [Le Néchet, 2015] pour une définition précise de ces indicateurs). Les mesures de la forme du réseau $\vec{G} = (\bar{c}, \bar{l}, \bar{s}, \delta)$ sont, avec le réseau noté (V, E) ,

- Centralité moyenne \bar{c} , définie comme la moyenne de la *betweenness-centrality* (normalisée dans $[0, 1]$) sur l'ensemble des liens.
- Longueur moyenne des chemins \bar{l} définie par $\frac{1}{d_m} \frac{2}{|V| \cdot (|V|-1)} \sum_{i < j} d_N(i, j)$ avec d_m distance de normalisation prise ici comme la diagonale du monde $d_m = \sqrt{2N}$.
- Vitesse moyenne [Banos and Genre-Grandpierre, 2012], qui correspond à la performance du réseau par rapport au trajet à vol d'oiseau, définie par $\bar{s} = \frac{2}{|V| \cdot (|V|-1)} \sum_{i < j} \frac{d_{ij}}{d_N(i, j)}$.
- Diamètre du réseau $\delta = \max_{i,j} d_N(i, j)$

⁶Le couplage faible permet de limiter le nombre total de paramètres puisqu'un couplage fort incluant des boucles de retroaction comprendrait nécessairement des paramètres supplémentaires pour régler la forme et l'intensité de celles-ci. Pour espérer le diminuer, il faudrait concevoir un modèle intégré, ce qui est différent d'un couplage fort dans le sens où il n'est pas possible de figer l'un des sous-systèmes pour obtenir un modèle de l'autre correspondant au modèle non-couplé.

Covariance et correlation On s'intéressera à la matrice de covariance croisée $\text{Cov}[\vec{M}, \vec{G}]$ entre densité et réseau, estimée sur un jeu de n réalisations à paramètres fixés $(\vec{M}[D(\vec{\alpha})], \vec{G}[N(\vec{\alpha})])_{1 \leq i \leq n}$ par l'estimateur standard non-biaisé. On prend comme corrélation associée la corrélation de Pearson estimée de la même façon.

3.2.3 Implémentation

Le couplage des modèles génératifs est effectué à la fois au niveau formel et au niveau opérationnel, c'est à dire qu'on fait interagir des implémentations indépendantes. Pour cela, le logiciel OpenMole [Reuillon et al., 2013] utilisé pour l'exploration intensive, offre le cadre idéal de par son langage modulaire permettant de construire des *workflows* par composition de tâches à loisir et de les brancher sur divers plans d'expérience et sorties. Pour des raisons opérationnelles, le modèle de densité est implémenté en langage `scala` comme un `plugin` d'OpenMole, tandis que la génération de réseau est implémentée en langage basé-agent `NetLogo` [Wilensky, 1999], ce qui facilite l'exploration interactive et construction heuristique interactive. Le code source est disponible pour reproductibilité sur le dépôt du projet⁷.

3.2.4 Résultats

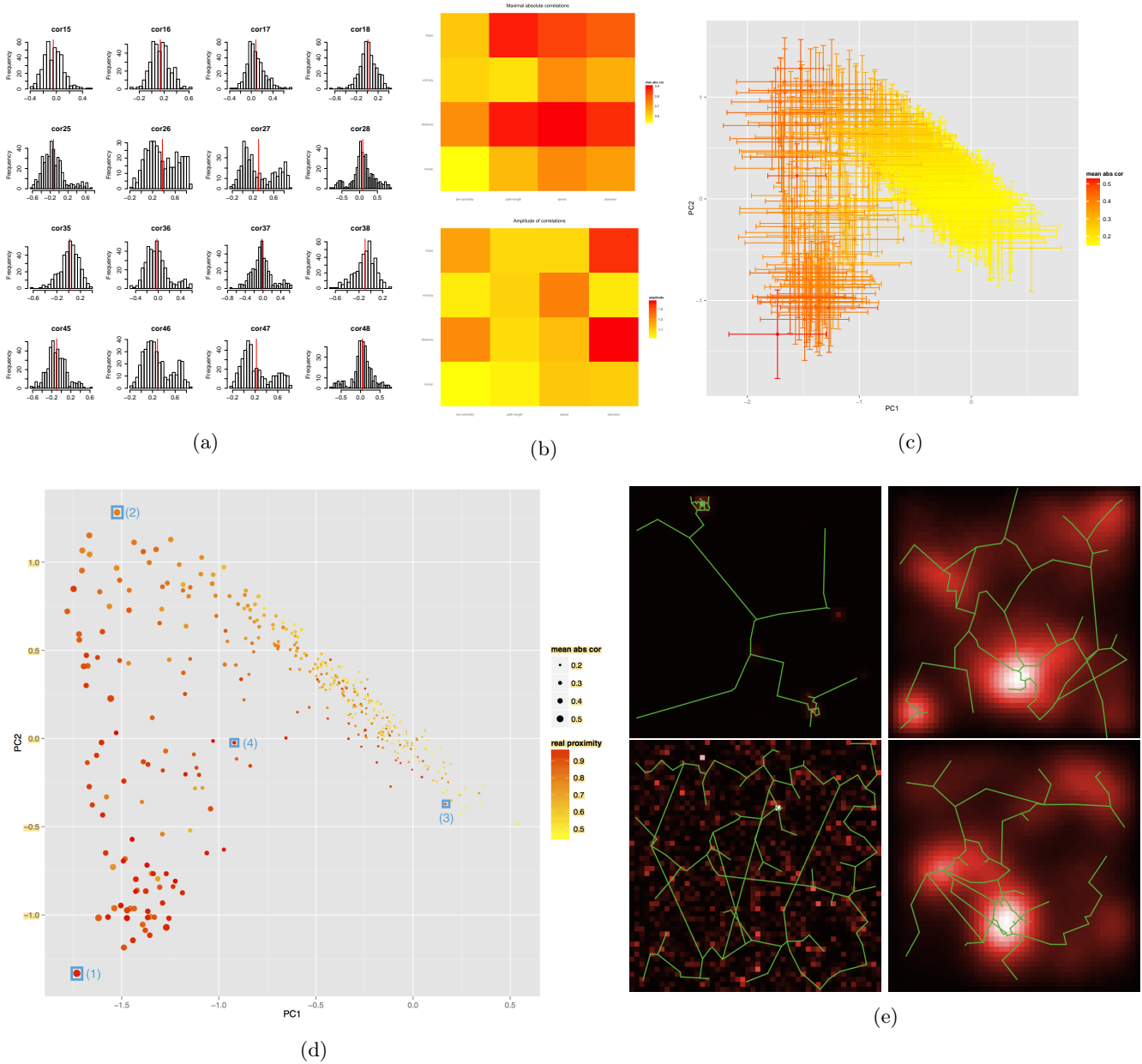
L'étude du modèle de densité seul est développée dans [Raimbault, 2016]. Il est notamment calibré sur les données de la grille européenne de densité, sur des zones de 50km de côté et de résolution 500m pour lesquelles les valeurs réelles des indicateurs ont été calculées pour l'ensemble de l'Europe. D'autre part, une exploration brutale du modèle permet d'estimer l'ensemble des sorties possibles dans des bornes raisonnables pour les paramètres (grossièrement $\alpha \in [0.5, 2]$, $N_G \in [500, 3000]$, $P_m \in [10^4, 10^5]$, $\beta \in [0, 0.2]$, $n_d \in \{1, \dots, 4\}$). La réduction à un plan de l'espace des objectif par une Analyse en Composantes Principales (variance expliquée à deux composantes $\simeq 80\%$) permet d'isoler un nuage de points de sorties recouvrant assez fidèlement le nuage des points réels, ce qui veut dire que le modèle est capable de reproduire morphologiquement l'ensemble des configurations existantes.

A densité donnée, l'exploration de l'espace des paramètres du modèle de réseau suggèrent une assez bonne flexibilité sur des indicateurs globaux \vec{G} , ainsi que de bonnes propriétés de convergence. Pour une étude du comportement précis, voir l'appendice donnant les regressions traduisant le comportement du modèle couplé. Dans le but d'illustrer la méthode de génération de données synthétiques, l'exploration a été orientée vers l'étude des corrélations.

Etant donné la grande dimension relative de l'espace des paramètres, une exploration par grille exhaustive est impossible. On utilise un plan d'expérience par criblage (hypercube latin), avec les bornes indiquées ci-dessus pour $\vec{\alpha}_D$ et pour $\vec{\alpha}_N$, on a $N_C \in [50, 120]$, $r_g \in [1, 100]$, $d_0 \in [0.1, 10]$, $k_h \in [0, 1]$, $\gamma \in [0.1, 4]$, $N_L \in [4, 20]$. Concernant le nombre de réplifications du modèle pour chaque valeur des paramètres, moins de 50 sont nécessaires pour obtenir sur les indicateurs des intervalles de confiance à 95% de taille inférieure aux déviations standard. Pour les corrélations, une centaine donne des IC (obtenus par méthode de Fisher) de taille moyenne 0.4, on fixe donc $n = 80$ pour l'expérience. La figure 4 donne le détail des résultats de l'exploration. On retiendra les résultats marquants suivants au regard de la génération de données synthétiques corrélées :

- les distributions empiriques des coefficients de corrélations entre indicateurs de forme et indicateurs de réseaux ne sont pas simples, pouvant être bimodales (par exemple $\rho_{46} = \rho[r, \bar{l}]$ entre l'index de Moran et le chemin moyen).
- On arrive à générer un assez haut niveau de corrélation pour l'ensemble des indicateurs, la corrélation absolue maximale variant entre 0.6 et 0.9 ; l'amplitude varie quant à elle entre 0.9 et 1.6, ce qui permet un large spectre de valeurs. L'espace couvert dans un plan principal a une étendue certaine mais n'est pas uniforme : on ne peut pas moduler à loisir n'importe quel coefficients, ceux-ci étant liés par les processus de génération sous-jacent. Une étude plus fine aux ordres suivants (corrélation des corrélations) serait nécessaire pour cerner exactement la latitude dans la génération.
- les points les plus corrélés en moyenne sont également ceux les plus proches des données réelles, ce qui confirme l'intuition d'une forte interdépendance en réalité.
- Des exemples concrets pris sur des points particuliers distants dans le plan principal montre que des configurations de densité proches peuvent présenter des profils de corrélations très différents.

⁷à l'adresse <https://github.com/JusteRaimbault/CityNetwork/tree/master/Models/Synthetic>



3.2.5 Extensions possibles

Il est possible de raffiner cette étude en étendant la méthode de contrôle des corrélations. La connaissance très fine du comportement de N (distribution statistiques sur une grille fine de l'espace des paramètres) conditionnée à D devrait permettre de déterminer exhaustivement $N^{<-1>|D}$ et avoir plus de latitude dans la génération des corrélations. On pourra également appliquer des algorithmes spécifiques d'exploration pour essayer atteindre des configurations exceptionnelles réalisant un niveau de corrélation voulu, ou au moins pour découvrir l'espace des corrélations atteignables par la méthode de génération [Chérel et al., 2015].

4 Discussion

Positionnement

Notre démarche s'inscrit dans un cadre épistémologique particulier. En effet, d'une part la volonté de multidisciplinarité et d'autre part l'importance de la composante empirique couplée aux méthodes d'exploration computationnelles, en font une approche typique des sciences de la complexité, comme le rappelle la structure de la feuille de route pour les systèmes complexes [Bourgine et al., 2009] qui croise des grandes questions transversales aux disciplines à une intégration verticale de celles-ci, qui implique la construction de modèles multi-échelles hétérogènes présentant souvent les aspects précédent. Le croisement de connaissances empiriques issues de la fouille de données avec celles issues de la simulation est souvent central dans leur conception ou leur exploration, et les résultats présentés ici en sont un exemple typique pour le cas de l'exploration.

Applications directes

En partant du deuxième exemple, qui s'est arrêté à la génération des données synthétiques, on peut proposer des pistes d'application directe qui donneront un aperçu de l'éventail des possibilités.

- La calibration de la composante de génération de réseau, à densité donnée, sur des données réelle de réseau de transport (typiquement routier vu les formes heuristiques obtenues, il devrait par exemple être aisé d'utiliser les données ouvertes d'OpenStreetMap⁸ qui sont de qualité raisonnable pour l'Europe, du moins pour la France [Girres and Touya, 2010], avec toutefois des ajustements à faire sur le modèle pour supprimer les effets de bord du à sa structure, par exemple en le faisant générer sur une surface étendue pour ne garder qu'une zone centrale sur laquelle la calibration aurait lieu) permettrait en théorie d'isoler un jeu de paramètres représentant fidèlement des situations existantes à la fois pour la forme urbaine et la forme du réseau. Il serait alors possible de dériver une "correlation théorique" pour celles-ci, étant donné qu'une corrélation empirique n'est en théorie pas calculable puisqu'une seule instance des processus stochastiques est observée. Vu la non-ergodicité des système urbains [Pumain, 2012], il y a de fortes chances pour que ces processus soient différents d'une zone géographique à l'autre (ou selon un autre point de vue qu'ils soient dans un autre état des meta-paramètres, dans un autre régime) et que leur interprétation en tant que réalisations d'un même processus stochastique n'ait aucun sens, entraînant l'impossibilité du calcul des covariations. En attribuant un jeu de données synthétiques similaire à une situation donnée, on serait capable de calculer une sorte de *correlation intrinsèque* propre à la situation, qui émerge en fait en réalité des interdépendances temporelles des composantes. Connaître celle-ci renseigne alors sur ces interdépendances, et donc sur les relations entre réseaux et territoires.
- Comme déjà évoqué, la plupart des modèles de simulation nécessitent un état initial, généré artificiellement à partir du moment où la paramétrisation n'est pas effectuée totalement à partir de données réelles. Une analyse de sensibilité avancée du modèle implique alors un contrôle sur les paramètres de génération du jeu de données synthétique, vu comme méta-paramètre du modèle [Cottineau et al., 2015b]. Dans le cas d'une analyse statistique des sorties du modèle, on est alors capable d'effectuer un contrôle statistique au second ordre.
- On a étudié des processus stochastiques dans le premier exemple, au sens de séries temporelles aléatoires, alors que le temps ne jouait pas de rôle dans le second. On peut suggérer un couplage fort entre les deux composantes du modèle (ou la construction d'un modèle intégré) et observer les indicateurs et corrélations à différents pas de temps de la génération. Dans le cas d'une dynamique, de par les rétroactions, on a nécessairement des

⁸<https://www.openstreetmap.org>

effets de propagation et donc l'existence d'interdépendances décalées dans l'espace et le temps [Pigozzi, 1980], étendant le domaine d'étude vers une meilleure compréhension des corrélations dynamiques.

Généralisation

On s'est limité au contrôle des premiers et second moments des données générées, mais il est possible d'imaginer une généralisation théorique permettant le contrôle des moments à un ordre arbitraire. Toutefois, la difficulté de génération dans un cas concret complexe, comme le montre l'exemple géographique, questionne la possibilité de contrôle aux ordres supérieurs tout en gardant un modèle à la structure cohérente au nombre de paramètres relativement faibles. Par contre, l'étude de structures de dépendances non-linéaires comme celles utilisées dans [Chicheportiche and Bouchaud, 2013] est une piste de développement intéressante.

5 Conclusion

On a ainsi proposé une méthode abstraite de génération de données synthétiques corrélées à un niveau contrôlé. Son implémentation partielle dans deux domaines très différents montre sa flexibilité et l'éventail des applications potentielles. De manière générale, il est essentiel de généraliser de telles pratiques de validation systématique de modèles par étude statistique, en particulier pour les modèles agents pour lesquels la question de la validation reste encore relativement ouverte.

References

- [Abadie et al., 2010] Abadie, A., Diamond, A., and Hainmueller, J. (2010). Synthetic control methods for comparative case studies: Estimating the effect of california's tobacco control program. *Journal of the American Statistical Association*, 105(490).
- [Arthur, 2015] Arthur, W. B. (2015). Complexity and the shift in modern science. Conference on Complex Systems, Tempe, Arizona.
- [Banos and Genre-Grandpierre, 2012] Banos, A. and Genre-Grandpierre, C. (2012). Towards new metrics for urban road networks: Some preliminary evidence from agent-based simulations. In *Agent-based models of geographical systems*, pages 627–641. Springer.
- [Barndorff-Nielsen et al., 2011] Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A., and Shephard, N. (2011). Multivariate realised kernels: consistent positive semi-definite estimators of the covariation of equity prices with noise and non-synchronous trading. *Journal of Econometrics*, 162:149–169.
- [Barthélemy and Flammini, 2008] Barthélemy, M. and Flammini, A. (2008). Modeling urban street patterns. *Physical review letters*, 100(13):138702.
- [Batty, 2006] Batty, M. (2006). Hierarchy in cities and city systems. In *Hierarchy in natural and social sciences*, pages 143–168. Springer.
- [Bolón-Canedo et al., 2013] Bolón-Canedo, V., Sánchez-Marño, N., and Alonso-Betanzos, A. (2013). A review of feature selection methods on synthetic data. *Knowledge and information systems*, 34(3):483–519.
- [Bonanno et al., 2001] Bonanno, G., Lillo, F., and Mantegna, R. N. (2001). Levels of complexity in financial markets. *Physica A Statistical Mechanics and its Applications*, 299:16–27.
- [Bouchaud and Potters, 2009] Bouchaud, J. P. and Potters, M. (2009). Financial Applications of Random Matrix Theory: a short review. *ArXiv e-prints*.
- [Bouchaud et al., 2000] Bouchaud, J.-P., Potters, M., and Meyer, M. (2000). Apparent multifractality in financial time series. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 13(3):595–599.
- [Bourgine et al., 2009] Bourguin, P., Chavalarias, D., and al. (2009). French Roadmap for complex Systems 2008-2009. *ArXiv e-prints*.
- [Bretagnolle, 2009] Bretagnolle, A. (2009). *Villes et réseaux de transport : des interactions dans la longue durée, France, Europe, États-Unis*. Hdr, Université Panthéon-Sorbonne - Paris I.
- [Brunsdon et al., 1998] Brunsdon, C., Fotheringham, S., and Charlton, M. (1998). Geographically weighted regression. *Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)*, 47(3):431–443.
- [Chérel et al., 2015] Chérel, G., Cottineau, C., and Reuillon, R. (2015). Beyond corroboration: Strengthening model validation by looking for unexpected patterns. *PLoS ONE*, 10(9):e0138212.
- [Chicheportiche and Bouchaud, 2013] Chicheportiche, R. and Bouchaud, J.-P. (2013). A nested factor model for non-linear dependences in stock returns. *arXiv preprint arXiv:1309.3102*.
- [Cottineau et al., 2015a] Cottineau, C., Chapron, P., and Reuillon, R. (2015a). An incremental method for building and evaluating agent-based models of systems of cities.
- [Cottineau et al., 2015b] Cottineau, C., Le Néchet, F., Le Texier, M., and Reuillon, R. (2015b). Revisiting some geography classics with spatial simulation. In *Plurimondi. An International Forum for Research and Debate on Human Settlements*, volume 7.
- [EUROSTAT, 2014] EUROSTAT (2014). Eurostat geographical data.
- [Gell-Mann, 1995] Gell-Mann, M. (1995). *The Quark and the Jaguar: Adventures in the Simple and the Complex*. Macmillan.

- [Girres and Touya, 2010] Girres, J.-F. and Touya, G. (2010). Quality assessment of the french openstreetmap dataset. *Transactions in GIS*, 14(4):435–459.
- [Jarrow, 1999] Jarrow, R. A. (1999). In honor of the nobel laureates robert c. merton and myron s. scholes: A partial differential equation that changed the world. *The Journal of Economic Perspectives*, pages 229–248.
- [Le Néchet, 2015] Le Néchet, F. (2015). De la forme urbaine à la structure métropolitaine: une typologie de la configuration interne des densités pour les principales métropoles européennes de l’audit urbain. *Cybergeo: European Journal of Geography*.
- [Mantegna et al., 2000] Mantegna, R. N., Stanley, H. E., et al. (2000). *An introduction to econophysics: correlations and complexity in finance*, volume 9. Cambridge university press Cambridge.
- [Moeckel et al., 2003] Moeckel, R., Spiekermann, K., and Wegener, M. (2003). Creating a synthetic population. In *Proceedings of the 8th International Conference on Computers in Urban Planning and Urban Management (CUPUM)*.
- [Newman, 2003] Newman, M. E. (2003). The structure and function of complex networks. *SIAM review*, 45(2):167–256.
- [Offner, 1993] Offner, J.-M. (1993). Les "effets structurants" du transport: mythe politique, mystification scientifique. *Espace géographique*, 22(3):233–242.
- [Offner and Pumain, 1996] Offner, J.-M. and Pumain, D. (1996). Réseaux et territoires-significations croisées.
- [Pigozzi, 1980] Pigozzi, B. W. (1980). Interurban linkages through polynomially constrained distributed lags. *Geographical Analysis*, 12(4):340–352.
- [Potiron, 2016] Potiron, Y. (2016). Estimating the integrated parameter of the locally parametric model in high-frequency data. *Working Paper*.
- [Potiron and Mykland, 2015] Potiron, Y. and Mykland, P. (2015). Estimation of integrated quadratic covariation between two assets with endogenous sampling times. *arXiv preprint arXiv:1507.01033*.
- [Pritchard and Miller, 2009] Pritchard, D. R. and Miller, E. J. (2009). Advances in agent population synthesis and application in an integrated land use and transportation model. In *Transportation Research Board 88th Annual Meeting*, number 09-1686.
- [Pumain, 2012] Pumain, D. (2012). Urban systems dynamics, urban growth and scaling laws: The question of ergodicity. In *Complexity Theories of Cities Have Come of Age*, pages 91–103. Springer.
- [Raimbault, 2016] Raimbault, J. (2016). Calibration of a spatialized urban growth model. *Working Paper, draft at <https://github.com/JusteRaimbault/CityNetwork/tree/master/Docs/Papers/Density>*.
- [Ramsey, 2002] Ramsey, J. B. (2002). Wavelets in economics and finance: Past and future. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, 6.
- [Reuillon et al., 2013] Reuillon, R., Leclaire, M., and Rey-Coyrehourcq, S. (2013). Openmole, a workflow engine specifically tailored for the distributed exploration of simulation models. *Future Generation Computer Systems*, 29(8):1981–1990.
- [Sanders et al., 1997] Sanders, L., Pumain, D., Mathian, H., Guérin-Pace, F., and Bura, S. (1997). Simpop: a multiagent system for the study of urbanism. *Environment and Planning B*, 24:287–306.
- [Schmitt, 2014] Schmitt, C. (2014). *Modélisation de la dynamique des systèmes de peuplement: de SimpopLocal à SimpopNet*. PhD thesis, Paris 1.
- [Tero et al., 2010] Tero, A., Takagi, S., Saigusa, T., Ito, K., Bebbler, D. P., Fricker, M. D., Yumiki, K., Kobayashi, R., and Nakagaki, T. (2010). Rules for biologically inspired adaptive network design. *Science*, 327(5964):439–442.
- [Tsay, 2015] Tsay, R. S. (2015). *MTS: All-Purpose Toolkit for Analyzing Multivariate Time Series (MTS) and Estimating Multivariate Volatility Models*. R package version 0.33.
- [Tumminello et al., 2005] Tumminello, M., Aste, T., Di Matteo, T., and Mantegna, R. N. (2005). A tool for filtering information in complex systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 102:10421–10426.
- [Van den Bulcke et al., 2006] Van den Bulcke, T., Van Leemput, K., Naudts, B., van Remortel, P., Ma, H., Verschoren, A., De Moor, B., and Marchal, K. (2006). Syntren: a generator of synthetic gene expression data for design and analysis of structure learning algorithms. *BMC bioinformatics*, 7(1):43.
- [Wilensky, 1999] Wilensky, U. (1999). Netlogo.
- [Ye, 2011] Ye, X. (2011). Investigation of underlying distributional assumption in nested logit model using copula-based simulation and numerical approximation. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, (2254):36–43.

Appendice : Comportement du modèle couplé, analyse statistique

Les tableaux suivants donnent les résultats quantitatifs de l'analyse du modèle territorial couplé. Il s'agit de régression linéaires simples pour les différents indicateurs ainsi que pour les corrélations. On donne à chaque fois les déviations standard ainsi que la significativité des coefficients, codée par la *p-valeur* : (***) $p \sim 0$, (**) $p < 0.001$, (*) $p < 0.01$, (.) $p < 0.05$.

Indicateurs

	BW	Pathlength	relspeed	diameter
R2	0.6098	0.638	0.7049	0.5855
(Intercept)	2.106e-01± 4.728e-03 (***)	1.0939160± 0.0514692 (***)	6.211e-01± 9.722e-03 (***)	2.4956084± 0.1172324 (***)
α	-1.127e-02± 2.012e-03 (***)	-0.530583± 0.021907 (***)	8.469e-02± 4.138e-03 (***)	-1.0366776± 0.04989 (***)
β	9.430e-03± 6.803e-03 (.)	0.1738349± 0.0740571 (*)	-6.516e-02± 1.399e-02 (***)	0.2937746± 0.1686813 (.)
n_d	6.786e-04± 6.534e-04 (.)	0.0048631± 0.0071129 (.)	-4.046e-03± 1.344e-03 (**)	0.0003039± 0.0162012 (.)
N_C	-3.005e-04± 2.887e-05 (***)	0.0012026± 0.0003143 (***)	-1.214e-03± 5.937e-05 (***)	0.0040004± 0.0007159 (***)
N_G	4.800e-02± 1.348e-02 (***)	1.4969583± 0.1467356 (***)	-1.400e-01± 2.772e-02 (***)	3.3021779± 0.3342227 (***)
γ	4.615e-03± 4.997e-04 (***)	0.0132129± 0.0054394 (*)	-7.990e-03± 1.027e-03 (***)	0.0389784± 0.0123895 (**)
d_0	2.743e-04± 1.971e-04 (.)	-0.0029289± 0.0021453 (.)	-5.688e-04± 4.052e-04 (.)	-0.0075661± 0.0048863 (.)
r_g	-2.726e-05± 2.038e-05 (.)	0.0001532± 0.0002219 (.)	5.329e-05± 4.191e-05 (.)	0.0002358± 0.0005054 (.)
k_h	-1.035e-02± 1.952e-03 (***)	-0.095491± 0.021250 (***)	1.992e-02± 4.014e-03 (***)	-0.227141± 0.048402 (***)
N_L	-2.390e-03± 1.243e-04 (***)	-0.0021779± 0.0013533 (.)	1.287e-03± 2.556e-04 (***)	-0.0044759± 0.0030824 (.)

	moran	distance	entropy	slope
R2	0.7762	0.4753	0.5516	0.6587
(Intercept)	1.106e-02± 1.348e-02 ()	1.158e+00± 3.862e-02 (***)	1.135e+00± 3.024e-02 (***)	0.0839654± 0.0706085 ()
α	-1.631e-02± 5.739e-03 (**)	-2.549e-01± 1.644e-02 (***)	-2.396e-01± 1.287e-02 (***)	-0.7543377± 0.0300528 (***)
β	5.009e-01± 1.940e-02 (***)	-2.497e-02± 5.557e-02 ()	4.580e-01± 4.351e-02 (***)	1.0974897± 0.1015959 (***)
n_d	2.850e-02± 1.863e-03 (***)	-1.069e-02± 5.337e-03 (*)	1.630e-02± 4.179e-03 (***)	0.0322148± 0.0097579 (**)
N_C	-8.494e-05± 8.234e-05 ()	-5.408e-05± 2.358e-04 ()	-5.802e-05± 1.847e-04 ()	0.0001797± 0.0004312 ()
N_G	-7.710e-01± 3.844e-02 (***)	1.222e+00± 1.101e-01 (***)	4.276e-01± 8.622e-02 (***)	1.0692012± 0.2013007 (***)
γ	6.214e-04± 1.425e-03 ()	2.219e-03± 4.081e-03 ()	2.026e-03± 3.196e-03 ()	-0.0015095± 0.0074621 ()
d_0	2.457e-04± 5.620e-04 ()	-3.896e-03± 1.610e-03 (*)	-2.459e-03± 1.261e-03 (.)	-0.0046572± 0.0029430 ()
r_g	4.413e-05± 5.813e-05 ()	1.048e-04± 1.665e-04 ()	1.069e-04± 1.304e-04 ()	0.0003902± 0.0003044 ()
k_h	6.379e-03± 5.567e-03 ()	-5.308e-02± 1.595e-02 (***)	-3.215e-02± 1.249e-02 (*)	-0.0407186± 0.0291524 ()
N_L	5.183e-04± 3.545e-04 ()	-4.340e-04± 1.015e-03 ()	8.870e-06± 7.952e-04 ()	0.0003567± 0.0018565 ()

Correlations

Auto-correlations

	$\rho[r, d]$	$\rho[r, e]$	$\rho[r, s]$
R2	0.5774	0.5093	0.5483
(Intercept)	1.226986±0.034715 (***)	-1.104021±0.039630 (***)	1.21541±0.04161 (***)
α	-0.497699±0.021858 (***)	0.472135±0.024953 (***)	-0.55056±0.02620 (***)
β	0.334188±0.073967 (***)	-0.606526±0.084439 (***)	0.46942±0.08866 (***)
n_d	0.008372±0.007066 ()	-0.023801±0.008066 (**)	0.01310±0.00847 ()
N_G	0.665346±0.146472 (***)	-0.483421±0.167209 (**)	0.99527±0.17557 (***)

	$\rho[d, e]$	$\rho[d, s]$	$\rho[e, s]$
R2	0.5141	0.5383	0.5449
(Intercept)	-1.67032±0.08598 (***)	1.043888±0.016697 (***)	-1.50417±0.07318 (***)
α	1.04667±0.05414 (***)	-0.218800±0.010513 (***)	0.95046±0.04608 (***)
β	-0.91864±0.18320 (***)	0.153942±0.035577 (***)	-0.80453±0.15592 (***)
n_d	-0.04144±0.01750 (*)	0.007833±0.003399 (*)	-0.03624±0.01489 (*)
N_G	-2.23787±0.36278 (***)	0.355478±0.070450 (***)	-2.00208±0.30875 (***)

	$\rho[\bar{c}, \bar{l}]$	$\rho[\bar{c}, \bar{s}]$	$\rho[\bar{c}, \bar{\delta}]$
R2	0.5892	0.5084	0.581
(Intercept)	1.1594972±0.0508300 (***)	-1.099e+00±5.891e-02 (***)	1.2163505±0.0595172 (***)
α	-0.4989055±0.0216346 (***)	4.722e-01±2.507e-02 (***)	-0.5547464±0.0253321 (***)
β	0.3285271±0.0731373 (***)	-6.064e-01±8.476e-02 (***)	0.4737039±0.0856371 (***)
n_d	0.0079990±0.0070246 ()	-2.399e-02±8.141e-03 (**)	0.0123499±0.0082251 ()
N_C	0.6966627±0.1449132 (***)	-4.869e-01±1.679e-01 (**)	1.0369074±0.1696801 (***)
N_G	0.0011097±0.0003104 (***)	-4.617e-04±3.597e-04 ()	0.0011038±0.0003634 (**)
γ	0.0026346±0.0053719 ()	3.586e-03±6.225e-03 ()	0.0074892±0.0062900 ()
d_0	-0.0009406±0.0021186 ()	9.630e-05±2.455e-03 ()	-0.0009453±0.0024807 ()
r_g	0.0001819±0.0002191 ()	9.951e-05±2.539e-04 ()	0.0002772±0.0002566 ()
k_h	-0.0298275±0.0209863 ()	4.081e-02±2.432e-02 (.)	-0.0833935±0.0245731 (***)
N_L	-0.0015975±0.0013365 ()	1.384e-04±1.549e-03 ()	-0.0060473±0.0015649 (***)

	$\rho[\bar{l}, \bar{s}]$	$\rho[\bar{l}, \bar{\delta}]$	$\rho[\bar{s}, \bar{\delta}]$
R2	0.522	0.5494	0.5546
(Intercept)	-1.768e+00±1.266e-01 (***)	1.073e+00±2.450e-02 (***)	-1.5699072±0.1075144 (***)
α	1.043e+00±5.390e-02 (***)	-2.210e-01±1.043e-02 (***)	0.9481902±0.0457610 (***)
β	-9.441e-01±1.822e-01 (***)	1.550e-01±3.525e-02 (***)	-0.8269920±0.1546984 (***)
n_d	-3.719e-02±1.750e-02 (*)	7.778e-03±3.385e-03 (*)	-0.0324681±0.0148582 (*)
N_C	-2.229e+00±3.610e-01 (***)	3.579e-01±6.984e-02 (***)	-2.0137775±0.3065172 (***)
N_G	8.575e-05±7.734e-04 ()	2.392e-05±1.496e-04 ()	-0.0002524±0.0006565 ()
γ	-4.901e-03±1.338e-02 ()	4.571e-03±2.589e-03 (.)	-0.0032340±0.0113624 ()
d_0	4.492e-03±5.279e-03 ()	-6.360e-04±1.021e-03 ()	0.0036384±0.0044813 ()
r_g	-3.880e-04±5.459e-04 ()	-3.725e-05±1.056e-04 ()	-0.0005394±0.0004635 ()
k_h	1.728e-01±5.229e-02 (**)	-1.419e-02±1.011e-02 ()	0.1492597±0.0443898 (***)
N_L	9.444e-04±3.330e-03 ()	-2.201e-03±6.441e-04 (***)	0.0022415±0.0028269 ()

Correlations croisées

	$\rho[r, \bar{c}]$	$\rho[r, \bar{l}]$	$\rho[r, \bar{s}]$	$\rho[r, \bar{\delta}]$
R2	0.08052	0.1734	0.174	0.1187
(Intercept)	-0.0262848±0.0582459 ()	-1.830e-01±5.801e-02 (**)	-2.800e-01±6.381e-02 (***)	-0.0396938±0.0609953 ()
α	0.0425576±0.0247910 (.)	2.239e-01±2.469e-02 (***)	2.369e-01±2.716e-02 (***)	-0.0546067±0.0259612 (*)
β	-0.3076801±0.0838078 (***)	2.970e-02±8.347e-02 ()	2.487e-02±9.182e-02 ()	0.4311665±0.0877639 (***)
n_d	-0.0225112±0.0080494 (**)	-2.231e-03±8.017e-03 ()	8.874e-03±8.819e-03 ()	0.0418159±0.0084294 (***)
N_C	0.0001178±0.0003557 ()	2.270e-04±3.542e-04 ()	3.001e-04±3.897e-04 ()	-0.0004806±0.0003725 ()
N_G	0.4455534±0.1660556 (**)	-5.238e-01±1.654e-01 (**)	-6.272e-01±1.819e-01 (***)	-0.2879462±0.1738941 (.)
γ	-0.0153085±0.0061556 (*)	4.880e-03±6.131e-03 ()	-3.259e-03±6.744e-03 ()	0.0076671±0.0064462 ()
d_0	0.0019859±0.0024277 ()	2.813e-03±2.418e-03 ()	-3.898e-05±2.660e-03 ()	0.0009132±0.0025423 ()
r_g	0.0001959±0.0002511 ()	5.983e-05±2.501e-04 ()	9.584e-05±2.751e-04 ()	-0.0001899±0.0002629 ()
k_h	0.0412129±0.0240482 (.)	2.120e-02±2.395e-02 ()	5.927e-02±2.635e-02 (*)	-0.0178174±0.0251834 ()
N_L	-0.0011826±0.0015315 ()	5.317e-05±1.525e-03 ()	7.111e-04±1.678e-03 ()	0.0006752±0.0016037 ()

	$\rho[d, \bar{c}]$	$\rho[d, \bar{l}]$	$\rho[d, \bar{s}]$	$\rho[d, \bar{\delta}]$
R2	0.09957	0.726	0.6635	0.2736
(Intercept)	-7.875e-03±1.000e-01 ()	-5.920e-01±5.909e-02 (***)	-0.8352368±0.0769938 (***)	-0.2136136±0.1134114 (.)
α	1.143e-02±4.257e-02 ()	7.915e-01±2.515e-02 (***)	0.8797555±0.0327706 (***)	-0.0164318±0.0482709 ()
β	-6.376e-01±1.439e-01 (***)	-9.049e-02±8.502e-02 ()	0.0652982±0.1107835 ()	1.6099651±0.1631834 (***)
n_d	-4.068e-02±1.382e-02 (**)	-2.081e-03±8.166e-03 ()	0.0208547±0.0106403 (.)	0.0904758±0.0156732 (***)
N_C	3.524e-04±6.108e-04 ()	5.379e-05±3.608e-04 ()	0.0001255±0.0004702 ()	-0.0006020±0.0006926 ()
N_G	1.228e+00±2.851e-01 (***)	-1.668e+00±1.685e-01 (***)	-1.9878616±0.2195048 (***)	-1.1801054±0.3233292 (***)
γ	6.252e-03±1.057e-02 ()	-3.111e-03±6.244e-03 ()	-0.0036648±0.0081369 ()	0.0051939±0.0119857 ()
d_0	8.292e-04±4.169e-03 ()	2.533e-03±2.463e-03 ()	0.0003107±0.0032092 ()	-0.0029674±0.0047271 ()
r_g	4.879e-05±4.311e-04 ()	8.729e-05±2.547e-04 ()	-0.0001203±0.0003319 ()	0.0002683±0.0004889 ()
k_h	3.077e-02±4.129e-02 ()	2.040e-02±2.440e-02 ()	0.0403760±0.0317887 ()	-0.0958810±0.0468245 (*)
N_L	-5.190e-03±2.630e-03 (*)	1.228e-03±1.554e-03 ()	0.0017721±0.0020244 ()	0.0011045±0.0029819 ()

	$\rho[e, \bar{c}]$	$\rho[e, \bar{l}]$	$\rho[e, \bar{s}]$	$\rho[e, \bar{\delta}]$
R2	0.08321	0.1137	0.04931	0.2212
(Intercept)	1.229e-01±6.394e-02 (.)	-0.2235482±0.0796783 (**)	-1.069e-01±9.653e-02 (.)	0.2851561±0.0647508 (***)
α	-1.406e-01±2.721e-02 (***)	0.2003760±0.0339132 (***)	1.098e-01±4.109e-02 (**)	-0.2898858±0.0275597 (***)
β	3.474e-01±9.200e-02 (***)	-0.3847257±0.1146461 (***)	-4.382e-01±1.389e-01 (**)	0.1606966±0.0931675 (.)
n_d	1.386e-02±8.836e-03 (.)	-0.0089831±0.0110113 (.)	-2.277e-02±1.334e-02 (.)	-0.0058289±0.0089484 (.)
N_C	-2.203e-04±3.904e-04 (.)	0.0004494±0.0004866 (.)	4.578e-04±5.895e-04 (.)	0.0001080±0.0003954 (.)
N_G	9.209e-02±1.823e-01 (.)	-0.5779639±0.2271581 (*)	-4.211e-01±2.752e-01 (.)	0.6379269±0.1846008 (***)
γ	6.198e-03±6.757e-03 (.)	0.0024670±0.0084206 (.)	3.531e-03±1.020e-02 (.)	-0.0024161±0.0068431 (.)
d_0	-1.465e-03±2.665e-03 (.)	-0.0024864±0.0033211 (.)	1.782e-03±4.023e-03 (.)	-0.0017413±0.0026989 (.)
r_g	-7.161e-05±2.756e-04 (.)	-0.0002354±0.0003435 (.)	-4.484e-04±4.161e-04 (.)	-0.0001984±0.0002791 (.)
k_h	-1.346e-02±2.640e-02 (.)	0.0841865±0.0328970 (*)	9.604e-02±3.985e-02 (*)	-0.0061427±0.0267339 (.)
N_L	9.124e-04±1.681e-03 (.)	-0.0011866±0.0020950 (.)	-8.891e-05±2.538e-03 (.)	-0.0024391±0.0017025 (.)

	$\rho[s, \bar{c}]$	$\rho[s, \bar{l}]$	$\rho[s, \bar{s}]$	$\rho[s, \bar{\delta}]$
R2	0.05977	0.6849	0.5995	0.2071
(Intercept)	6.096e-02±8.136e-02 (.)	-0.5291554±0.0585027 (***)	-6.684e-01±7.185e-02 (***)	-0.1327534±0.1006121 (.)
α	-7.487e-02±3.463e-02 (*)	0.7027361±0.0249003 (***)	7.155e-01±3.058e-02 (***)	-0.0529688±0.0428232 (.)
β	-2.238e-01±1.171e-01 (.)	-0.1743332±0.0841774 (*)	-1.466e-01±1.034e-01 (.)	1.1937758±0.1447669 (***)
n_d	-1.854e-02±1.124e-02 (.)	-0.0047797±0.0080849 (.)	1.271e-02±9.929e-03 (.)	0.0711684±0.0139043 (***)
N_C	2.594e-04±4.968e-04 (.)	-0.0004555±0.0003573 (.)	-5.483e-05±4.388e-04 (.)	-0.0004681±0.0006144 (.)
N_G	9.746e-01±2.319e-01 (***)	-1.5677015±0.1667878 (***)	-1.554e+00±2.048e-01 (***)	-0.7514017±0.2868391 (**)
γ	2.456e-03±8.598e-03 (.)	0.0023678±0.0061827 (.)	3.711e-03±7.593e-03 (.)	0.0089657±0.0106330 (.)
d_0	-1.572e-03±3.391e-03 (.)	0.0047638±0.0024384 (.)	1.066e-03±2.995e-03 (.)	-0.0017588±0.0041936 (.)
r_g	5.791e-05±3.507e-04 (.)	-0.0003370±0.0002522 (.)	-4.783e-04±3.097e-04 (.)	0.0000946±0.0004337 (.)
k_h	3.367e-02±3.359e-02 (.)	0.0492108±0.0241542 (*)	6.732e-02±2.966e-02 (*)	-0.0728540±0.0415401 (.)
N_L	-5.539e-03±2.139e-03 (**)	0.0017712±0.0015382 (.)	9.329e-04±1.889e-03 (.)	-0.0004517±0.0026454 (.)

	$\rho[e, \bar{c}]$	$\rho[e, \bar{l}]$	$\rho[e, \bar{s}]$	$\rho[e, \bar{\delta}]$
R2	0.08321	0.1137	0.04931	0.2212
(Intercept)	1.229e-01±6.394e-02 (.)	-0.2235482±0.0796783 (**)	-1.069e-01±9.653e-02 (.)	0.2851561±0.0647508 (***)
α	-1.406e-01±2.721e-02 (***)	0.2003760±0.0339132 (***)	1.098e-01±4.109e-02 (**)	-0.2898858±0.02756 (***)
β	3.474e-01±9.200e-02 (***)	-0.3847257±0.1146461 (***)	-4.382e-01±1.389e-01 (**)	0.1606966±0.0931675 (.)
n_d	1.386e-02±8.836e-03 (.)	-0.0089831±0.0110113 (.)	-2.277e-02±1.334e-02 (.)	-0.0058289±0.0089484 (.)
N_C	-2.203e-04±3.904e-04 (.)	0.0004494±0.0004866 (.)	4.578e-04±5.895e-04 (.)	0.0001080±0.0003954 (.)
N_G	9.209e-02±1.823e-01 (.)	-0.5779639±0.2271581 (*)	-4.211e-01±2.752e-01 (.)	0.6379269±0.1846008 (***)
γ	6.198e-03±6.757e-03 (.)	0.0024670±0.0084206 (.)	3.531e-03±1.020e-02 (.)	-0.0024161±0.0068431 (.)
d_0	-1.465e-03±2.665e-03 (.)	-0.0024864±0.0033211 (.)	1.782e-03±4.023e-03 (.)	-0.0017413±0.0026989 (.)
r_g	-7.161e-05±2.756e-04 (.)	-0.0002354±0.0003435 (.)	-4.484e-04±4.161e-04 (.)	-0.0001984±0.0002791 (.)
k_h	-1.346e-02±2.640e-02 (.)	0.0841865±0.0328970 (*)	9.604e-02±3.985e-02 (*)	-0.0061427±0.0267339 (.)
N_L	9.124e-04±1.681e-03 (.)	-0.0011866±0.0020950 (.)	-8.891e-05±2.538e-03 (.)	-0.0024391±0.0017025 (.)

Appendice : Configurations particulières

Les tableaux suivants résument les valeurs des paramètres, indicateurs et corrélations pour les 4 configurations présentées en figure 4. On donne les déviations standard pour les indicateurs et les intervalles de confiance à 95% pour les corrélations.

Configuration	(1)	(2)	(3)	(4)
α	1.516501e+00	1.555684e+00	1.174289e+00	1.323203e+00
β	4.522689e-02	2.369011e-01	2.878834e-02	2.457331e-02
n_d	1.523121e+00	2.447648e+00	1.005678e+00	1.682232e+00
N_C	9.841719e+01	7.605296e+01	1.176334e+02	9.128398e+01
N_G	2.712064e-02	2.388306e-02	5.093294e-02	1.854230e-02
γ	1.618555e+00	3.917224e+00	2.136885e+00	1.070508e+00
d_0	1.300443e+00	9.939404e+00	2.947665e+00	1.324972e+00
r_g	8.576246e+01	8.394425e+01	8.232540e+01	7.438451e+01
k_h	2.200645e-01	7.177931e-01	8.064035e-01	2.510558e-02
N_L	1.846435e+01	1.803941e+01	9.706505e+00	1.190123e+01
P_m	3.657749e+04	9.526370e+04	4.923410e+04	6.140057e+04
\bar{c}	1.433701e-01±1.410993e-02	0.1450925±0.01732669	0.15007478±0.016914043	0.15753385±0.016885300
\bar{l}	1.902390e-01±1.490413e-01	0.5264323±0.10235672	0.78084633±0.091161648	0.61213918±0.144466259
\bar{s}	6.567478e-01±6.161807e-02	0.6266877±0.03632790	0.55060490±0.030011454	0.63238422±0.049560104
δ	1.026908e+00±4.323170e-01	1.5387645±0.28635511	2.09662379±0.333273034	1.82876419±0.287441536
r	9.582111e-03±1.303745e-03	0.1870607±0.02129171	0.00658906±0.001676165	0.01108170±0.002666821
\bar{d}	7.225749e-01±1.475284e-01	0.7894275±0.03793392	0.91603864±0.008777011	0.89253127±0.044771296
e	6.529959e-01±7.448434e-02	0.9656237±0.01121815	0.94523444±0.001576657	0.85650444±0.033640178
s	-	-0.6915159±0.07571627	-	-
	1.009041e+00±5.755951e-02		0.86066650±0.011647444	1.04113626±0.022954670
	1.927581e-02	0.1949022	0.08736587	0.01814215

Configuration	(1)	(2)	(3)	(4)
$\rho[r, d]$	-0.4679513 [-6.235562e-01 , -0.2766820]	-0.6021740 [-0.7258547 , -4.407751e-01]	-1.836459e-01 [-0.3877183 , 3.758763e-02]	1.535686e-01 [-0.0684582 , 3.611013e-01]
$\rho[r, e]$	-0.4969249 [-6.460989e-01 , -0.3111840]	-0.1625078 [-0.3690476 , 5.932741e-02]	-1.848848e-01 [-0.3888074 , 3.630699e-02]	5.693427e-01 [0.3996153 , 7.013276e-01]
$\rho[r, s]$	0.3081761 [9.488394e-02 , 0.4944154]	-0.3421209 [-0.5225573 , -1.323529e-01]	-3.313264e-01 [-0.5136505 , -1.203723e-01]	-4.066184e-01 [-0.5749672 , -2.052376e-01]
$\rho[\bar{d}, e]$	0.8508536 [7.762552e-01 , 0.9019531]	0.5705894 [0.4011659 , 7.022647e-01]	-5.995528e-05 [-0.2197740 , 2.196598e-01]	4.344970e-01 [0.2374484 , 5.972012e-01]
$\rho[\bar{d}, s]$	-0.8023042 [-8.688589e-01 , -0.7072636]	0.6692694 [0.5270560 , 7.750198e-01]	6.791720e-02 [-0.1540993 , 2.834050e-01]	-9.559466e-02 [-0.3088251 , 1.267852e-01]
$\rho[e, s]$	-0.9009695 [-9.354970e-01 , -0.8493979]	0.8781442 [0.8158375 , 9.202963e-01]	8.468024e-01 [0.7704290 , 8.992143e-01]	-1.789705e-01 [-0.3836031 , 4.241422e-02]
$\rho[\bar{c}, l]$	0.4234633 [2.246481e-01 , 5.884313e-01]	0.7235166 [0.5990261 , 0.8138558]	0.8431956 [0.7652527 , 0.8967725]	0.4006936 [0.1984478 , 0.5702097]
$\rho[\bar{c}, \bar{s}]$	-0.1023031 [-3.149408e-01 , 1.201137e-01]	-0.7950977 [-0.8638952 , -0.6971747]	-0.7872919 [-0.8585037 , -0.6862905]	-0.4496771 [-0.6092037 , -0.2551716]
$\rho[\bar{c}, \delta]$	0.2568220 [3.932404e-02 , 4.510850e-01]	0.7049855 [0.5742125 , 0.8006794]	0.8299035 [0.7462630 , 0.8877455]	0.6332603 [0.4803829 , 0.7487918]
$\rho[\bar{l}, \bar{s}]$	0.4219260 [2.228701e-01 , 5.872064e-01]	-0.7921187 [-0.8618395 , -0.6930156]	-0.8942859 [-0.9310592 , -0.8395275]	-0.8546133 [-0.9044912 , -0.7816736]
$\rho[\bar{l}, \delta]$	0.6948818 [5.607839e-01 , 7.934560e-01]	0.8158636 [0.7263519 , 0.8781621]	0.8882018 [0.8305739 , 0.9270100]	0.6689605 [0.5266519 , 0.7747964]
$\rho[\bar{s}, \delta]$	0.3805439 [1.755009e-01 , 5.539444e-01]	-0.6657526 [-0.7724742 , -0.5224595]	-0.7760599 [-0.8507179 , -0.6707077]	-0.6680160 [-0.7741129 , -0.5254169]

Configuration	(1)	(2)	(3)	(4)
$\rho[r, \bar{c}]$	-0.0958671 [-0.3090738 , 0.12651465]	-0.2846750 [-0.47470041 , -0.06929222]	0.106860362 [- 0.11557001 , 0.3190854424]	0.166141774 [- 0.05560493 , 0.372269294]
$\rho[r, \bar{l}]$	0.3184592 [0.1061712 , 0.50298200]	0.3611645 [0.15363946 , 0.53817505]	0.120291668 [- 0.10212439 , 0.3312534969]	0.112524033 [- 0.10991022 , 0.324224975]
$\rho[r, \bar{s}]$	0.3510671 [0.1423288 , 0.52990926]	0.3864280 [0.18217892 , 0.55870790]	-0.207507373 [- 0.40859524 , 0.0127927828]	-0.006745464 [- 0.22612722 , 0.213287544]
$\rho[r, \bar{\delta}]$	-0.3419770 [-0.5224388 , -0.13219278]	0.4010223 [0.19882412 , 0.57047399]	-0.199327994 [- 0.40146255 , 0.0213227474]	-0.101075026 [- 0.31382258 , 0.121336498]
$\rho[\bar{d}, \bar{c}]$	-0.1833004 [-0.3874145 , 0.03794465]	-0.4143381 [-0.58114893 , -0.21411352]	0.006860986 [- 0.21317727 , 0.2262368358]	0.348614959 [0.13959020 , 0.527896760]
$\rho[\bar{d}, \bar{l}]$	0.8121174 [0.7210643 , 0.87559646]	0.7363382 [0.61633582 , 0.82291849]	0.191569016 [- 0.02938471 , 0.3946737203]	0.607176014 [0.44710613 , 0.729564080]
$\rho[\bar{d}, \bar{s}]$	0.8175828 [0.7287819 , 0.87933822]	0.7718832 [0.66493682 , 0.84781438]	-0.219254065 [- 0.41879596 , 0.0004862563]	0.731832543 [0.61023974 , 0.819738748]
$\rho[\bar{d}, \bar{\delta}]$	-0.8199313 [-0.8809437 , -0.73210512]	0.7272964 [0.60411696 , 0.81653203]	-0.205542803 [- 0.40688430 , 0.0148444885]	-0.146644197 [- 0.35492533 , 0.075505502]
$\rho[e, \bar{c}]$	-0.2355562 [-0.4328696 , -0.01670384]	0.1482222 [-0.07390147 , 0.35633436]	-0.028013851 [- 0.24621526 , 0.1928903073]	-0.213237762 [- 0.41357774 , 0.006797615]
$\rho[e, \bar{l}]$	0.4856866 [0.2977430 , 0.63738583]	-0.3440356 [-0.52413307 , -0.13448447]	0.005838058 [- 0.21415354 , 0.2252660012]	-0.259589628 [- 0.45344380 , - 0.042284479]
$\rho[e, \bar{s}]$	0.5700927 [0.4005481 , 0.70189139]	-0.5411854 [-0.68004036 , -0.36485222]	0.206851807 [- 0.01347763 , 0.4080244658]	-0.520820100 [- 0.66449667 , - 0.340011761]
$\rho[e, \bar{\delta}]$	-0.5105626 [-0.6566203 , -0.32759502]	-0.4972353 [-0.64633902 , -0.31155624]	0.180368653 [- 0.04097196 , 0.3848345410]	0.007300570 [- 0.21275760 , 0.226653900]
$\rho[s, \bar{c}]$	-0.5398119 [-0.6789960 , -0.36316900]	-0.3711488 [-0.54631495 , -0.16487721]	0.066233469 [- 0.15575000 , 0.2818487302]	0.191933347 [- 0.02900679 , 0.394992994]
$\rho[s, \bar{l}]$	0.8100685 [0.7181768 , 0.87419174]	0.5960875 [0.43309300 , 0.72133128]	0.103616019 [- 0.11880563 , 0.3161357092]	0.293165083 [0.07850495 , 0.481844758]
$\rho[s, \bar{s}]$	0.8166515 [0.7274653 , 0.87870120]	0.5501248 [0.37583582 , 0.68682409]	-0.214962957 [- 0.41507543 , 0.0049896034]	0.326893808 [0.11547047 , 0.509981729]
$\rho[s, \bar{\delta}]$	-0.7869970 [-0.8582997 , -0.68588011]	0.5902345 [0.42572786 , 0.71697130]	-0.234261611 [- 0.43175552 , - 0.0153339732]	-0.053173625 [- 0.26973912 , 0.168512022]